CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

30 Giugno 2016

Esercizio 1 (8 pt) Si consideri il seguente sistema dinamico discreto lineare in $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare il punto fisso di tale sistema e discuterne la stabilità.

b) Trovare esplicitamente la soluzione $(x_k, y_k)^T$ con condizione iniziale

$$(x_0, y_0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T.$$

Quanto vale in particolare $(x_{100}, y_{100})^T$?

Esercizio 2 (12 pt) Sia dato il sistema dinamico gradiente

$$\begin{cases} \dot{x} = -\partial U/\partial x \\ \dot{y} = -\partial U/\partial y \end{cases}$$

definito dal potenziale

$$U(x, y) = xy^2 - x^3y + xy.$$

a) Trovare i punti di equilibrio e determinarne le proprietà di stabilità.

b) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y), evidenziando in particolare le separatrici dei punti di sella.

c) Per ogni equilibrio asintoticamente stabile descriverne il bacino di attrazione.

Esercizio 3 (10 pt) Sia dato un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi sulla curva di equazione

$$z = \cos(x) + 1$$

nel piano (x, z), ruotante attorno all'asse x con velocità angolare costante $\omega > 0$. Supponiamo che il corpo puntiforme sia collegato all'asse $z = 1$ tramite una molla vincolata a rimanere parallela a z durante il moto. La molla ha lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$.

a) Scrivere la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange utilizzando come parametro lagrangiano l'ascissa x del punto.

b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano in funzione dei parametri (reali positivi) m, k, ω.

c) Assumendo che $m\omega^2 < k$, discutere la stabilità dei punti di equilibrio trovati in funzione del parametro $J = \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2}$.

d) Tracciare il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, x) con $x \in [0, 2\pi]$.