CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani

16 Novembre 2016

Esercizio 1 (12 pt) Sia data la seguente matrice 3×3 a coefficienti reali

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1/2 & 9/2 & -2 \end{bmatrix}$$

Si consideri il seguente sistema dinamico continuo lineare:

$$\dot{X} = A\,X \qquad X, \dot{X} \in \mathbf{R}^3$$

a) Se ne calcolino gli esponenti di Lyapunov e si discuta la stabilità dell'origine.

b) Si trovi esplicitamente la soluzione del sistema con condizione iniziale

$$X_0 = (0, 0, 2)^T$$

Si consideri ora il sistema dinamico discreto lineare $X_{k+1} = AX_k$ in $\mathbb{R}^3$;

c) Si discuta la stabilità del punto fisso.

d) Calcolare l'iterazione 137 della mappa partendo dalle condizioni iniziali $X_0 = (-4, 0, -2)^T$.

Esercizio 2 (18 pt) Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(x-1)(1-x^2) - \gamma\frac{dx}{dt}.$$

Si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè $\gamma = 0$.

a) Trovare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità (motivando la risposta).

b) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y), con $y = dx/dt$.

Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo.

c) Determinare la stabilità dei punti di equilibrio (motivando la risposta).

d) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y), ponendo in risalto le separatrici dei punti di sella nonlineare e i bacini di attrazione dei pozzi non lineari (*al variare di γ ci sono due possibili disegni, si chiede di farne vedere almeno uno*).

Sia dato il sistema dinamico gradiente

$$\begin{cases} \dot{x} = -\partial U/\partial x \\ \dot{y} = -\partial U/\partial y \end{cases}$$

definito dal potenziale

$$U(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2.$$

e) Determinare la stabilità dei punti di equilibrio (motivando la risposta).

f) Trovare le rette invarianti.

g) Tracciare un disegno qualitativo delle principali curve di livello di U e delle soluzioni.