CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

11 Gennaio 2017

Esercizio 1 (8 pt) Sia data la matrice 3×3 a coefficienti reali

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si consideri il sistema dinamico discreto lineare

$$X_{k+1} = A\,X_k, \qquad X_k \in \mathbb{R}^3.$$

a) Si calcolino i moltiplicatori di Lyapunov e si discuta la stabilità dell'origine.

b) Si trovi esplicitamente la soluzione con condizione iniziale $X_0 = (3, 5, 3)^T$ utilizzando la forma canonica di Jordan della matrice A.

Esercizio 2 (12 pt) Sia dato il sistema dinamico nel piano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos x\,\cos y, \\ \dot{y} = -\sin x\,\sin y. \end{cases}$$

a) Si dimostri che è un sistema dinamico gradiente con potenziale $U(x, y)$.

b) Si trovino le curve di livello $U(x, y) = 0$.

c) Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

d) Si determinino le rette invarianti. (*Suggerimento:* si ricordi che due rette invarianti si possono intersecare solo in un punto di equilibrio.)

e) Si disegnino nella regione $(x, y) \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right] \times [-\pi, \pi]$ le selle, le separatrici, i pozzi, le sorgenti, e le soluzioni. Si descriva inoltre il bacino di attrazione del pozzo in $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

Esercizio 3 (12 pt) Nel piano verticale (x, y) siano dati due corpi puntiformi di massa m in P_1 e αm in P_2 ($\alpha > 0$), collegati tramite un'asta di lunghezza ℓ e di massa trascurabile. L'asta è incernierata nell'origine O degli assi ed è così libera di ruotare attorno ad un asse passante per O e perpendicolare al piano (x, y). Il punto O dista $\frac{\ell}{3}$ dalla massa m e $\frac{2\ell}{3}$ dalla massa αm. Sui corpi agisce un'accelerazione di gravità, parallela all'asse y e rivolta verso il basso, di intensità $g > 0$. Inoltre il sistema viene fatto ruotare con velocità angolare costante $\omega > 0$ attorno all'asse y.
Si consideri come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ misurato dal semiasse positivo delle x all'asta che collega i due corpi (come indicato in figura).

a) Si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la lagrangiana e l'equazione di Lagrange.

b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano in funzione dei parametri m, α, ℓ, g, ω.

c) Si ponga $\alpha = 2$. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione di $J = \frac{g}{\ell\omega^2}$ e si tracci il diagramma di biforcazione nel piano (J, θ).

d) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nel piano (θ, p) (dove p è il momento coniugato a θ) nel caso in cui $\alpha = \frac{1}{2}$.