CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

26 Giugno 2017

Esercizio 1: Sia data l'equazione alle differenze finite

$$4x_{k+3} + 4x_{k+2} - x_{k+1} - x_k - 6 = 0.$$

Dopo aver posto $X_k = (x_{k+2}, x_{k+1}, x_k)^T$ e aver scritto il sistema dinamico discreto corrispondente,

a) trovare i punti fissi e determinarne le proprietà di stabilità.

b) Determinare tutte le orbite periodiche e il relativo periodo.

c) Determinare X_{1492} posta come condizione iniziale $X_0 = (2, 0, 2)^T$.

Esercizio 2: Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} + 1 - \gamma\frac{dx}{dt}$$

considerato sul semipiano $x > 0$, si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè con $\gamma = 0$.

a) Trovare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità.

b) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano $(x, y = dx/dt)$.

Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo.

c) Determinare la stabilità dei punti di equilibrio.

d) Tracciare qualitativamente le separatrici dei punti di sella nonlineare e tratteggiare il bacino di attrazione del pozzo.

Esercizio 3: In un piano verticale Oxz (con asse Oz verticale ascendente) un'asta di lunghezza $\ell > 0$ e massa trascurabile è vincolata a ruotare attorno ad un asse passante per un estremo incernierato nell'origine. All'altro estremo è appeso un punto P di massa $m > 0$, il quale è collegato al punto $Q\,(\ell, 0)$ da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema inoltre agisce la forza di gravità, con accelerazione $g > 0$ diretta verso il basso. Sia $\theta \in [0, 2\,\pi)$ l'angolo che OP forma con la verticale discendente.

a) Si scrivano l'energia cinetica e quella potenziale in funzione di $(\theta, \dot{\theta})$, la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange.

b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, k, ℓ.

c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio di cui al punto b), sempre in funzione dei parametri.

L'intero sistema viene messo in rotazione attorno all'asse Oz con velocità angolare costante ω.

d) Sia $k/m = \ell/g = \omega = 1$. Provare che esiste un punto di equilibrio $(0, \theta_0)$ con $\theta_0 \in [0, \pi/2)$.