Algebra 1 - Prima esercitazione
04/06/2019

Esercizio 1: Sia S_n il gruppo simmetrico con n elementi;
(i) Mostrare che la mappa
$$\varphi : S_4 \longrightarrow S_3$$
tale che $\varphi_{|S_{\{1,2,3\}}} = id_{|S_{\{1,2,3\}}}$ e $\varphi(x) = e$ altrimenti NON è un morfismo di gruppi;
(ii) Contare e descrivere i 2-Sylow di S_4. Dedurre ed esplicitare un morfismo surgettivo da S_4 a S_3;
(iii) Trovare per quali $n > 1$ esiste un morfismo surgettivo da S_n a S_{n-1}. Descrivere tale morfismo per gli n per cui esiste.

Esercizio 2: Sia $N \geq 2$ un numero naturale. Un anello con unità A si dice N-nilpotente se possiede un elemento nilpotente diverso da 0 e ha la seguente proprietà: se $a \in A$ è nilpotente, allora $a^N = 0$.
(i) Mostrare che un anello finito che contiene un elemento nilpotente diverso da 0 è N-nilpotente per un certo N;
(ii) Dato $N \geq 2$ trovare un anello N-nilpotente finito. Trovare inoltre un anello che ha elementi nilpotenti diversi da 0, ma che non verifica la proprietà;
(iii) Sia $A = \mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$ siano $a, b \in A$. Supponiamo che esistano $k_1, ..., k_{N+1}$ elementi di $\mathbb{K}$ tali che $a + k_i b$ è nilpotente per ogni $i = 1, ..., N+1$. Mostrare che a e b sono nilpotenti.
(iv) Sia A anello N-nilpotente e siano $a, b \in A$. Supponiamo che esistano $k_1, ..., k_{N+1}$ elementi di A tali che $a + k_i b$ è nilpotente per ogni $i = 1, ..., N+1$. E' necessariamente vero che a e b sono nilpotenti?

Esercizio 3: (i) Siano α e β due elementi algebrici di grado 2 su $\mathbb{Q}$ tali che $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$ e $\beta^2 \in \mathbb{Q}$. Mostrare che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$ se e solo se $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$;
(ii) Siano $p_1, ..., p_n$ primi distinti in $\mathbb{Z}$. Calcolare grado e gruppo di Galois di $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n})$ su $\mathbb{Q}$;
(iii) Siano γ e δ due elementi algebrici di grado 3 su $\mathbb{Q}$ tali che $\gamma^3 \in \mathbb{Q}$ e $\delta^3 \in \mathbb{Q}$. Mostrare che $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\delta)$ se e solo se $\frac{\gamma}{\delta} \in \mathbb{Q}$ oppure $\frac{\gamma}{\delta^2} \in \mathbb{Q}$;
(iv)Siano $p_1, ..., p_n$ primi distinti in $\mathbb{Z}$. Calcolare grado e gruppo di Galois di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p_1}, ..., \sqrt[3]{p_n}, \zeta_3)$ su $\mathbb{Q}$;