Esercizi 11

giovedì 9 maggio 2019 18:32

Esercizio 64: Siano X un insieme infinito, $\mathbb{k}$ campo e A l'anello delle funzioni $f: X \longrightarrow \mathbb{k}$, con le operazioni
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$

Dimostrare che A possiede ideali NON principali

Esercizio 65: Sia $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ e sia $A = \mathbb{Z}[a+bi]$ il sottoanello di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $a+bi$. Consideriamo l'ideale di A

$$J = \{ z \in A \mid \mathbb{Z}[i] \cdot z \subseteq A \}$$

Determinare l'indice di J in A.

Esercizio 66: Si considerino gli ideali $I = (5+14i)$ e $J = (-4+7i)$ contenuti in $\mathbb{Z}[i]$
(i) Trovare un generatore per $I \cap J$ e per $I + J$.
(ii) Determinare gli ideali primi di $\mathbb{Z}[i] / I+J$

Esercizio 67: Sia A anello e $N = \sqrt{0}$ l'ideale degli elementi nilpotenti.
(a) Se N è fin. generato, $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $N^k = 0$.
(b) Un elemento $a \in A$ è invertibile in A se e solo se $a+N$ è invertibile in A/N.

Esercizio 68: Determinare gli elementi invertibili e gli ideali primi dell'anello

$$\left\{ \frac{\alpha}{\beta} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i] \quad (\beta, 3+i) = 1 \right\}$$

Esercizio 69: Siano $\mathbb{k}$ un campo e A un anello che contiene $\mathbb{k}$. Supponiamo inoltre che A, come sp. vettoriale su $\mathbb{k}$, sia di dimensione finita. Si dimostri che:
(i) Ogni elemento $a \in A$ è radice di un polinomio non nullo di $\mathbb{k}[x]$.
(ii) Ogni ideale primo di A è massimale.

Esercizio 70:
(a) Dimostrare che $\mathbb{Q}[x,y]$ possiede infiniti ideali primi non massimali
(b) Determinare l'insieme dei polinomi non costanti $f(x,y)$ per cui:

$$(f(x,y)) \neq (f(x,y), x) \neq \mathbb{Q}[x,y]$$

Esercizio 71: Sia $A = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{k})$. Dimostrare che se $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{k})$, $M \neq 0$, allora l'ideale generato da M è tutto A.