Esercizi 14

lunedì 20 maggio 2019 09:49

Esercizio 76: (Random Problem). Sia n un numero naturale e siano ω e η due distinte radici primitive n-esime in $\mathbb{C}$. Provare che $\omega - \eta$ non è un numero razionale

Esercizio 77: Siano $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{k}$ i rispettivi campi di spezzamento di (x^2-3), (x^3-2) e $(x^2-3)(x^3-2)$ su $\mathbb{Q}$
(i) Descrivere le sottoestensioni di $\mathbb{F}$ normali su $\mathbb{Q}$
(ii) Provare che $\mathbb{E} \cap \mathbb{F} = \mathbb{Q}$
(iii) Calcolare il grado di $\mathbb{k}$ su $\mathbb{Q}$

Esercizio 78: Indicato con $\mathbb{F}$ il campo $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5})$, determinare un'estensione $\mathbb{k}/\mathbb{F}$ di grado 4 con $\mathbb{k}$ normale su $\mathbb{Q}$. Dimostrare inoltre che $\mathbb{k}$ è unica e ha un'unica sottoestensione di grado 4 su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 79 Siano α e β algebrici su un campo $\mathbb{k}$ e siano $f(x)$ e $g(x)$ i rispettivi polinomi minimi sul campo $\mathbb{k}$. Provare che:
(a) $f(x)$ irriducibile su $\mathbb{k}(\beta) \Leftrightarrow g(x)$ irriducibile su $\mathbb{k}(\alpha)$.
(b) Se $(\deg(f(x)), \deg(g(x))) = 1$ allora $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{k}(\beta)$.

Esercizio 80: Indicati con $\mathbb{F}$ e $\mathbb{k}$ rispettivamente i campi di spezzamento su $\mathbb{Q}$ dei polinomi (x^4-2) e (x^6-2), determinare i rispettivi gruppi di Galois e il grado di $\mathbb{F} \cap \mathbb{k}$ su $\mathbb{Q}$

Esercizio 81: Sia ζ_3 una radice terza primitiva dell'unità in $\mathbb{C}$. Sia $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ e indichiamo con $\mathbb{F}$ il campo di spezzamento del polinomio $x^{11}-3$ su $\mathbb{k}$.
(i) Determinare $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{Q})$
(ii) Dimostrare che $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ $\mathbb{k}(\alpha^3) = \mathbb{k}(\alpha)$

Esercizio 82: Sia $\mathbb{E}/\mathbb{k}$ una estensione di campi. Calcolare quante sono le sottoestensioni di grado due su $\mathbb{k}$ nei seguenti casi:
① $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{k}) \simeq \mathbb{Z}/_{12}$
② $\mathrm{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{k}) \simeq D_{12}$
③ $\mathrm{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{k}) = \langle x_1, \_\_, x_s \mid r_1, \_\_, r_t \rangle$ con x_i generatori e r_j relazioni tra essi e tali che $2 \mid o(x_i)$ $\forall i = 1, \_\_, k$ e $2 \nmid o(x_i)$ $\forall i = k+1, \_\_, s$

Esercizio 83: Determinare il gruppo di Galois della più piccola estensione di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$ che è normale su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 84: Consideriamo l'estensione di campi $\mathbb{C}(t) \subseteq \mathbb{C}(x)$ con $t = x^3 + x^{-3}$;
(i) Determinare il grado dell'estensione
(ii) Mostrare che l'estensione è di Galois e determinarne il gruppo di Galois
(iii) Determinare le sottoestensioni proprie e per ciascuna calcolare un elemento primitivo.

Esercizio 85: Sia $\mathbb{E}$ il campo di spezzamento e G il gruppo di Galois del polinomio x^8-2 su $\mathbb{Q}$
(i) Descrivere un insieme di generatori di $\mathbb{E}$ su $\mathbb{Q}$ e calcolare il grado dell'estensione
(ii) Siano $\alpha = \sqrt[8]{2}$ e $\zeta = \sqrt{2}(1+i)/2$. Mostrare che G contiene un automorfismo

$\theta : E \longrightarrow E$ t.c. $\theta(\alpha) = \zeta\alpha$ $\theta(i) = i$

e un automorfismo

$\sigma : E \longrightarrow E$ t.c. $\sigma(\alpha) = \alpha$ $\sigma(i) = -i$

(iii) Mostrare che G NON è isomorfo a un gruppo diedrale.
(iv) Calcolare i sottocampi fissati dai sottogruppi ciclici $\langle\theta\rangle$, $\langle\theta^2\rangle$, $\langle\theta^4\rangle$, $\langle\sigma\rangle$ e del sottogruppo $\langle\theta^4, \sigma\rangle$.