Esercizi4

domenica 24 marzo 2019 18:14

Esercizio 18: Sia $\sigma \in A_n \trianglelefteq S_n$. Mostrare che $|cl_{A_n}(\sigma)| = |cl_{S_n}(\sigma)|$ oppure $|cl_{A_n}(\sigma)| = |cl_{S_n}(\sigma)|/2$.

- Trovare condizioni necessarie e sufficienti su σ per poter decidere in quale caso ci troviamo.
- Calcolare $|cl_{A_5}(\sigma)|$ con $\sigma = (1,2,3,4,5) \in S_5$

Esercizio 19:

(1) Trovare il numero di $\sigma \in S_{11}$ t.c. $\sigma^5 = (1,2)$.
(2) Trovare tutte le permutazioni $\sigma \in S_6$ t.c. $\sigma^4 = (1,2,3)$.
(3) Trovare il numero di $\sigma \in S_{10}$ t.c. $\sigma^2 = (1,2)$.
(4) Trovare tutte le $\sigma \in S_6$ t.c. $\sigma^3 = (1,2)(3,4)(5,6)$

Esercizio 20: Sia $X = \{1,2,\_\_,n\}$ e sia $X^3 = X \times X \times X$. Definiamo l'azione:

$$S_n \times X^3 \longrightarrow X^3$$
$$(\sigma,(x,y,z)) \longmapsto (\sigma(x),\sigma(y),\sigma(z))$$

Mostrare che tale azione ha solamente 5 orbite e calcolarne la #

- **Livello Pro** Sia X come prima e sia $X^m = X \times \_\_ \times X$ m-volte con $m \le n$. Definiamo

$$S_n \times X^m \longrightarrow X^m$$
$$(\sigma,(x_1 \_\_ x_m)) \longmapsto (\sigma(x_1),\_\_,\sigma(x_m))$$

Contare quante sono le orbite di questa azione: 1, 2, 5, 15, 52, 203 ... (Non ancora risolto)

Esercizio 21:

(a) Calcolare # Centralizzatore di σ e # Normalizzatore di $\langle\sigma\rangle$ con $\sigma = (1,2\_,11) \in S_{11}$.
(b) Provare che A_{11} contiene sottogruppi d'ordine 55, ma non di ordine 110.
(c) Sia $\tau = (1,2,3)(4,5,6,7) \in S_7$. Calcolare # normalizzatore di $\langle\tau\rangle$.

Esercizio 22: Mostrare che il più piccolo S_n per cui Q_8 si immerge in S_n è S_8

Esercizio 23: Mostrare che:

(a) D_{12} si immerge in S_7
(b) D_6 si immerge in A_7
(c) D_{12} NON si immerge in A_7

Esercizio 24: Mostrare che S_n si immerge in A_{n+2}. Dedurne che ogni G finito di cardinalità n si immerge in A_{n+2}.
Livello Pro: S_n NON si immerge in A_{n+1}

Esercizio 25: Trovare il minimo n per cui:

- S_n contiene sottogruppo di ordine 36
- S_n contiene sottogruppo di ordine 72

- S_n contiene sottogruppo di ordine 36
- S_n contiene sottogruppo di ordine 72
- S_n contiene sottogruppo di ordine 144

Esercizio 26: INDICE n IN S_n. Seguire i seguenti punti per arrivare e dimostrare il seguente enunciato: Sia $H < S_n$ con $[S_n : H] = n \Rightarrow H \cong S_{n-1}$.

(1) Verificare che la tesi è vera $\forall n \leq 4$.

(2) Mostrare che per $n > 4$ gli unici sottogruppi normali di S_n sono $\{e\}$, A_n, S_n.

(3) Mostrare che l'azione

$$\begin{aligned} S_n \times {}^{S_n}/_H &\longrightarrow {}^{S_n}/_H \\ (\sigma, x_iH) &\longmapsto \sigma x_i H \end{aligned}$$

induce un isomorfismo

$$\begin{aligned} F: S_n &\longrightarrow S_{|S_n/H|} \simeq S_n \\ \sigma &\longmapsto F_\sigma : x_iH \mapsto \sigma x_i H. \end{aligned}$$

(4) Detto $\overline{H}$ il rappresentante "banale" di ${}^{S_n}/_H$ mostrare che l'azione

$$\begin{aligned} H \times {}^{S_n}/_H \setminus \{\overline{H}\} &\longrightarrow {}^{S_n}/_H \setminus \{\overline{H}\} \\ (h, x_iH) &\longmapsto h x_i H \end{aligned}$$

è ben definita e chiamiamo $\tilde{F}$ il morfismo indotto

$$\tilde{F}: H \longrightarrow S_{|S_n/H \setminus \{\overline{H}\}|} \cong S_{n-1}$$

(5) Mostrare che il seguente quadrato commuta:

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{F} & S_n \\ i \uparrow & & \uparrow j \\ H & \xrightarrow{\tilde{F}} & S_{n-1} \end{array}$$

Dove i è l'inclusione e j lo stesso (immaginiamo che $\overline{H}$ sia il I elemento di ${}^{S_n}/_H$).

(6) Dedurre l'iniettività di $\tilde{F}$ e la conseguente bigettività. Dunque vale che $H \cong S_{n-1}$.