Def: Il GRUPPO SIMMETRICO S_n è il gruppo delle funzioni bigettive da $X=\{1,\_\_n\}$ in sè

Notazione: Una $\sigma \in S_n$ si può indicare in più modi.

(1) tabella: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ (2) Cicli disgiunti $\sigma = (1,5,2,4,3)(6)$.

La scrittura in cicli disgiunti è unica.

Fatto Utile 1 Un insieme di generatori di S_n sono:

1) Trasposizioni $(1,2), (1,3) \_\_\_, (1,n)$
2) Trasposizioni successive $(1,2),(2,3), \_\_\_, (n-1,n)$

Osserviamo che ne bastano $\underline{n-1}$

Fatto Utile 2: Il coniugio in S_n è facile da calcolare. Sia σ una permutazione formata soltanto da un ciclo disgiunto $(a_1 \_\_ a_k)$. Allora:

$$\tau(a_1,\_\_,a_k)\tau^{-1} = (\tau(a_1), \_\_, \tau(a_k)).$$

Dim: Applichiamo il coniugato $\tau\sigma\tau^{-1}$ a $\tau(i)$ invece che direttamente a i

$$\tau(a_1 \_\_ a_k)\tau^{-1}(\tau(a_i)) = \tau(a_1 \_\_ a_k)\cdot(a_i) = \tau(a_{i+1}), \quad \forall i$$

che è proprio la tesi in quanto $\tau\sigma\tau^{-1}$ manda $\tau(a_i)$ in $\tau(a_{i+1})$ cioè

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1), \_\_, \tau(a_k))$$

Oss: Nel caso di più cicli disgiunti è sufficiente far comparire $\tau\tau^{-1}$ in mezzo

$$\tau\sigma_1\sigma_2\tau^{-1} = (\tau\sigma_1\tau^{-1})(\tau\sigma_2\tau^{-1})$$

Dunque se due permut. sono coniugate hanno la stessa struttura in cicli.

Oss. Importante: Le classi di coniugio di S_n sono i modi in cui si può spezzare una permutazione (cioè i modi di mettere parentesi). Questa cosa è vera perché se due permutazioni hanno la stessa struttura in cicli disgiunti allora sono coniugate (la dim. prima ci diceva solo il viceversa). Vediamo il trucco:

Consideriamo $\sigma = (1,2,3,4)(5,6)(7,8,9)(10,11)$ e $\rho = (2,1,5,7)(6,3)(4,10,11)(8,9)$

Voglio trovare τ che li coniuga. Li metto in questo modo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 3 & 4 & 10 & 11 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$ τ è la permut. associata alla tabella:

$\tau = (1,2)(3,5,6)(4,7)(8,10)(9,11)$

Infatti $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(2), \tau(3), \tau(4)) \dots = (2,1,5,7)(\dots) = \rho$.

Problema Classico: Sia $\sigma = (1,2,3,4,5,6,7) \in S_7$. Trovare la # del centralizzatore e, detto $H = \langle\sigma\rangle$, trovare la # di $N(H)$.

Sol.: Per quanto visto sappiamo che vale la seguente bigezione

$$G/_{Stab(x)} \longleftrightarrow orb(x)$$

Adesso $Stab(\sigma) = Z(\sigma)$ e $orb(\sigma) = cl(\sigma)$. Se dunque sappiamo contare quanto è grande la classe di coniugio abbiamo la tesi:

$$|cl(\sigma)| = \binom{7}{7} \cdot \frac{7!}{7} = 1 \cdot 7!/7 = 6!$$

e di conseguenza

$$|Z(\sigma)| = |S_7|/_{|cl(\sigma)|} = 7!/_{6!} = 7$$

Possiamo dire più esplicitamente chi è $Z(\sigma)$: $Z(\sigma) = \langle\sigma\rangle = H$. Vedremo un esempio più complicato poi...

Calcoliamo il Normalizzatore. Il seguente procedimento si usa in generale! Scrivo purple finché è generico e poi torno al blu.

Mappa N/C:

Definiamo la seguente mappa:

$$F: N(H) \longrightarrow Aut(H)$$
$$g \longmapsto F_g: H \longrightarrow H, \quad h \longmapsto ghg^{-1}$$

La mappa F è ben definita in quanto $g \in N(H)$ e dunque $gHg^{-1} = H$. Inoltre F è una mappa di gruppi (stesso conto degli automorfismi interni). Calcoliamo $\ker F$:

$$\ker F = \{g \in N(H) \mid F_g = id\} = \{g \in N(H) \mid gh = hg \ \forall h \in H\} = Z(H).$$

Abbiamo dunque una mappa iniettiva $\tilde{F}: N(H)/_{C(H)} \longrightarrow Aut(H)$.

Nel caso specifico $Z(H) = Z(\sigma)$ in quanto se g commuta con $\sigma \Rightarrow g$ commuta con tutti gli altri. Vale inoltre che $Aut(H) = (\mathbb{Z}/_7)^* \cong \mathbb{Z}/6$.

Se riesco a mostrare che $\tilde{F}$ è surgettiva avrei la tesi. Un elemento di $Aut(H)$ è un morfismo $\varphi_i: H \longrightarrow H$, $\sigma \longmapsto \sigma^i$ con $(i,7) = 1$

In particolare φ_3 genera $\mathrm{Aut}(H)$ in quanto ha ordine 6

$$\sigma \xrightarrow{1} \sigma^3 \xrightarrow{2} \sigma^9 = \sigma^2 \xrightarrow{3} \sigma^6 = \sigma^{-1} =$$
$$= \sigma^{-1} \xrightarrow{4} \sigma^{-3} \xrightarrow{5} \sigma^{-9} = \sigma^{-2} \xrightarrow{6} \sigma^{-6} = \sigma$$

Se dunque mostro che $\exists\, \tau \in N(H)$ t.c. $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^3$ ho la tesi. Sicuramente $\tau \in N(H)$ perché σ^i genera H. Inoltre dato che σ e σ^i hanno la stessa struttura in cicli una tale τ esiste. Esplicitamente:

$$\begin{array}{c|ccccccc} \sigma & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \sigma^3 & 1 & 4 & 7 & 3 & 6 & 2 & 5 \end{array} \rightsquigarrow \tau = (1)(2,4,3,7,5,6)$$

Dunque la mappa N/C è surgettiva e $|N(H)| = |\ker F|\,|\mathrm{Im} F| = 6 \cdot 7 = 42$ $\square$

Problema Classico 2: Calcolare il centralizzatore di $\sigma = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8,9)(10,11,12) \in S_{12}$

Dim: Come prima calcoliamo le #

Modi di permettere le coppie

Modi di disporre le triplette

$$|cl(\sigma)| = \binom{12}{2}\frac{2!}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\frac{2!}{2}\binom{8}{2}\frac{2!}{2}\cdot\frac{1}{3!}\ \binom{6}{3}\frac{3!}{3}\ \binom{3}{3}\frac{3!}{3}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{12!}{\cancel{10!}\,2!}\cdot\frac{\cancel{10!}}{\cancel{8!}\,2!}\cdot\frac{\cancel{8!}}{\cancel{6!}\,2!}\cdot\frac{1}{3!}\ \frac{\cancel{6!}}{3!\,3!}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{12!}{(2!)^3(3!)^3} = \frac{12!}{2^5\, 3^3}$$ Consiglio sempre di lasciare così ☺

$$\Rightarrow |Z(\sigma)| = 2^5\cdot 3^2.$$

Ovviamente abbiamo $S = \langle (1,2),(3,4),(5,6)\rangle$ e $T = \langle (7,8,9),(10,11,12)\rangle \subseteq Z(\sigma)$
Ma questi sono solamente $2^3\cdot 3^2$ elementi. Dove sono gli altri?

Osservo che esiste U sottogruppo di $Z(\sigma)$ che "permuta" le tre coppie nel senso che

$$(12)(34)(56) \overset{U}{\rightsquigarrow} (34)(5,6)(1,2)$$

Un tale elemento non sta in S, ma comunque commuta con σ (Analogamente abbiamo V che permuta i due 3-cicli finali. Chi sono U e V?

$$U = \langle (1,3,5)(2,4,6),\ (1,3)(2,4)\rangle$$
$$V = \langle (7,10)(8,11)(9,12)\rangle$$
Convincersene

Osservo che U e V Normalizzano S e T (i.e $\forall u \in U$ $uSu^{-1} = S$ e anche $uTu^{-1} = T$). Inoltre U e V commutano e hanno in totale $3!\cdot 2$ elementi.
Ho dunque
- $S\times T$ con $2^3\cdot 3^2$ elementi
- $U\times V$ con $2^2\cdot 3$ elementi
- $S\times T \cap U\times V = \{e\}$
- $U\times V$ Normalizzano $S\times T$

Dunque $Z(\sigma) = (S\times T)(U\times V)$ ed è un gruppo per quanto già visto. $\square$

Def: Definiamo $A_n < S_n$ gruppo ALTERNO. Sono le permutazioni "pari" cioè quelle che se si scrivono come prodotto di trasposizioni, il numero di trasposizioni utilizzate è pari.

Oss: Andrebbe verificato che è un sottogruppo, ma è stato già fatto.

Oss: A_n è il ker del morfismo "segno" dunque è normale in S_n e ha indice 2. Inoltre A_n è generato dai 3-cicli $(1,2,3), (2,3,4), \_\_\_, (n-2, n-1, n)$

Fatti noti e molto utili (di dimostrazione un po' così):

(1) A_n è SEMPLICE (i.e. non ha sottogruppi normali non banali) $\forall n \geq 5$

(2) $\mathrm{Aut}(S_n) \cong S_n \quad \forall n \neq 2, 6$

Dim:

(1) Per induzione su n: Per $n=5$ si fa a mano contando le classi di coniugio. Per quelli dopo si devono fare magheggi... [...] Vedere se riportare

(2) Si mostra che $\forall n \neq 6$ $\varphi \in \mathrm{Aut}$ è interno e poi si conclude osservando che $S_n/Z(S_n) \cong \mathrm{Int}(S_n)$ Ma $Z(S_n)$ è banale.

Problema di Immersione: Trovare il più piccolo n t.c. $D_{15} \hookrightarrow S_n$.

Dim: L'idea è quella di trovare un elemento di ordine 15 in S_n, guardare nel normalizzatore e cercare lì dentro qualcosa di ordine 2 (la simmetria) che dà le relazioni del Diedrale.
Il più piccolo n per cui c'è un elemento di ordine 15 in S_n è S_8 ed è un 3-ciclo 5-ciclo. Sia dunque $\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7,8)$. Vediamo cosa c'è in $N(\langle\sigma\rangle)$
Come già visto:

$$N(\langle\sigma\rangle) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\langle\sigma\rangle) \cong (\mathbb{Z}/_{15})^* \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_4 .$$
$$\tau \longmapsto (\sigma \longmapsto \tau\sigma\tau^{-1})$$

Cerco un elemento di ordine 2 in $\mathrm{Aut}(\langle\sigma\rangle)$ per poi "riportarlo indietro". Considero

$$\varphi_{-1}: \langle\sigma\rangle \longrightarrow \langle\sigma\rangle \qquad \sigma \longmapsto \sigma^{-1}$$

Cerchiamo dunque $\tau \in N(\langle\sigma\rangle)$ t.c. $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Si trova con il solito trucco:

$$\begin{array}{ccccccccc} \sigma & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \sigma^{-1} & 1 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{array} \rightsquigarrow \tau = (2,3)(5,8)(6,7)$$

Adesso per costruzione vale che $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$ e inoltre τ ha ordine 2 e σ ha ordine 15. È sufficiente dunque definire

$$\begin{aligned} F: D_{15} &\longrightarrow S_8 \\ r &\longmapsto \sigma \\ s &\longmapsto \tau \end{aligned}$$

e si ha la tesi

Oss: Il procedimento seguito è stato super generale per ogni problema. In particolare abbiamo risolto l'immersione di D_m in S_n.