SEMINARIO

DEF. FRAME → LATTICE COMPLETO CON $u \wedge \bigvee w_i = \bigvee u \wedge w_i$

→ ALGEBRA DI HEYTING COMPLETA CON $z \wedge x \le y \iff z \le x \Rightarrow y$

MORFISMI: MONOTONI, PRESERVANO $\bigvee$ ARBITRARI E $\wedge$ FINITI.

IN $\mathcal{O}(S)$, $\bigwedge w_i$ è dato da $\bigcup_{z \le w_i\ \forall i} z$, e non è preservato dalle mappe continue. ! → SE VALESSE $\bigvee\bigwedge$, SAREBBE BOOLEANA ↳ VICEVERSA... ???

CERCARE UN CONTROESEMPIO A TUTTE QUESTE COSE!

LEMMA MORFISMO DI FRAME HA AGGIUNTO DX, OSSIA DATO $\varphi : B \to A$ CERCO $\psi : A \to B$ t.c. $\varphi(x) \le y \iff x \le \psi(y)$. Basta definire

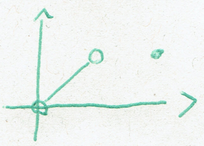
$$\psi(y) = \bigvee \{x : \varphi(x) \le y\}$$

→ ovvio. Per ⇐ vale

$$\varphi(x) \le \varphi \bigvee x = \bigvee_{\varphi(x) \le y} \varphi(x) \le y$$

e ci siamo.

ESEMPIO



RIASSUMO $f : S \to T \rightsquigarrow f^{-1} : \mathcal{O}(T) \to \mathcal{O}(S) \rightsquigarrow f_* : \mathcal{O}(S) \to \mathcal{O}(T)$

f_* NON È MORFISMO DI FRAME, MA PRESERVA $\bigwedge$ IN QUANTO AGGIUNTO DX.

NEGLI SP. TOPOLOGICI UN APERTO $U \subseteq S$ VIENE MANDATO IN $\bigcup_{f^{-1}(W) \subseteq U} W = \overline{f(U^c)}^c$

ADESSO VOGLIO RICOSTRUIRE PUNTI DI UN LOCALE.

DEF. PUNTO → $p^{-1} : \mathcal{O}(X) \to 2 = \{0, 1\}$

→ ELEMENTO PRIMO DI $\mathcal{O}(X)$ $\quad (w_1 \wedge w_2 \le U \Rightarrow w_i \le U\ \exists i)$

SONO EQUIVALENTI: DATO p^{-1} DEFINISCO $K = \bigvee \ker p^{-1}$ E VICEVERSA.

DEF. UNO SP. TOP. SI DICE SOBRIO SE PER OGNI PRIMO DI $\mathcal{O}(S)$, DICIAMO P, ESISTE UNICO $x \in S$: $P = S \setminus \overline{\{x\}}$.

OSS. NEGLI SPAZI TOPOLOGICI f_* MANDA PUNTI IN PUNTI: $f_*(\overline{\{x\}}^c) = \overline{\{f(x)\}}^c$ OSSIA È COME "SE FOSSE f". IN GENERALE MANDA PRIMI IN PRIMI: SE a È PRIMO ALLORA $x \wedge y \le f_* a$ IMPLICA $x \le f_* a$ OPPURE $y \le f_* a$; INOLTRE SE AVESSI $1 \le f_* a$ OTTERREI $1 \le a$.

PROP. $T_2 \Rightarrow$ SOBRIO $\Rightarrow T_0$; INOLTRE NON C'È IMPLICAZIONE FRA T_1 E SOBRIO.

CONTROESEMPIO: $\mathbb{N}$ CON TOPOLOGIA COFINITA È T_1 MA NON SOBRIO ($\emptyset$ è primo!)

$\mathbb{N} \cup \{\omega\}$, CHIUSI = FINITI CHE NON CONTENGONO ω. (MA $\emptyset = \overline{\{\omega\}}^c$)

DEF. DATI $pt(X)$ POSSO METTERE UNA TOPOLOGIA ALLA ZARISKI: I CHIUSI SONO GLI INSIEMI DEL TIPO $\{k \in pt(X) : k \ge U\}$ AL VARIARE DI $U \in X$.

PROP. SE $f : X \to Y$ È MAPPA DI LOCALI, f_* È CONTINUA: SEGUE DALLA DEF.

OSS. POTEVO USARE FILTRI COMPLETAMENTE PRIMI, CHE NEGLI SPAZI SOBRI SONO TUTTI E SOLI GLI INTORNI DEI PUNTI, PER RECUPERARE L'INTUIZIONE DI PUNTO COME "LIMITE" DI APERTI.

TEO. ABBIAMO AGGIUNZIONE
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[r, bend left, "\mathcal{O}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Loc} \arrow[l, bend left, "pt"] \end{tikzcd}$$
. VOGLIO DESCRIVERE UNITÀ E COUNITÀ.

$$\eta_S : S \to pt(\mathcal{O}(S)) \qquad \eta_S(x) = \overline{\{x\}}^c$$
SEMPRE PRIMO

(NATURALITÀ SEGUE DAL CALCOLO DI f_* TRA SP. TOP.)

$$\varepsilon_X^{-1} : X \to \mathcal{O}(pt(X)) \qquad \varepsilon_X^{-1}(U) = \Sigma_U = \{p \in pt(X) : U \not\leq p\}$$
QUESTA È MAPPA IN FRM.

(SEGUE DA $f_*^{-1}(\Sigma_U) = \Sigma_{f(U)}$)

IDENTITÀ TRIANGOLARI

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(S) \arrow[r] \arrow[dr, equal] & \mathcal{O}(pt(\mathcal{O}(S))) \arrow[d] \\ & \mathcal{O}(S) \end{tikzcd} \qquad U \overset{\varepsilon^{-1}}{\longmapsto} \Sigma_U \overset{\eta^{-1}}{\longmapsto} U \qquad \begin{tikzcd} pt(X) \arrow[r] \arrow[dr, equal] & pt(\mathcal{O}(pt(X))) \arrow[d] \\ & pt(X) \end{tikzcd}$$

$$p \longmapsto (\Sigma_p^c)^c \longmapsto p \qquad \overline{\{p\}} = \Sigma_p^c$$

CI STA SOTTO CHE Frm È MONADICA SU Set: BIEZIONI = = ISOMORFISMI.

OSS. ε^{-1} è chiaram. surgettiva. PER AGGIUNZIONE $\varepsilon^{-1}\varepsilon_*\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1} \Rightarrow \varepsilon^{-1}\varepsilon_* = id$ $\Rightarrow \varepsilon_*$ INIETTIVA. DALLA PRIMA AGGIUNZIONE $\varepsilon_{\mathcal{O}(S)} \circ \mathcal{O}(\eta_S) = id_{\mathcal{O}(S)}$

E DUNQUE $\varepsilon_*\mathcal{O} : \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O}$ È ISOMORFISMO NATURALE $\Rightarrow \mathcal{O} \dashv pt$ È AGGIUNZIONE IDEMPOTENTE $\Rightarrow$ ANCHE LE ALTRE DEL TRIANGOLO

~~DEF. UN LOCALE SI DICE SPAZIALE SE DUE APERTI U, V POSSONO ESSERE DISTINTI DAI PROPRI PUNTI, OSSIA SE $U \mapsto \Sigma_U$ È INIETTIVA, OSSIA SE ε~~

DEF. UN LOCALE SI DICE SPAZIALE SE ESISTE S TOPOLOGICO CON $X \cong \mathcal{O}(S)$.

PROP. X È SPAZIALE $\iff \varepsilon_*$ È SURGETTIVA. $\Leftarrow$ È OVVIO; SE INVECE $X \overset{h}{\cong} \mathcal{O}(S)$, RICORDANDO CHE $\varepsilon_*\mathcal{O}$ È ISO NATURALE, SI HA $h \circ \varepsilon_* = \varepsilon_*\mathcal{O} \circ \mathcal{O}(pt(h)) \Rightarrow \varepsilon_*$ ISO.
IN PARTICOLARE SE X È UNO SP. TOP., È QUELLO DEI PROPRI PUNTI.

PROP. S È SOBRIO $\iff \eta$ È OMEOMORFISMO $\iff S \cong pt(X)$ per qualche X loc.
S è sobrio $\iff \eta$ è bigezione. INFATTI η È MAPPA APERTA ($\eta_S[U] = \Sigma_U$) E QUESTO SEGUE DAL FATTO CHE $pt(X)$ È SEMPRE SOBRIO.

DIM. $\overline{\{p\}}^c = \Sigma_p$ E ADESSO USO RELAZIONE TRA U e Σ_U, IN PARTICOLARE CHE Σ_p^c IRRIDUCIBILE $\Rightarrow p$ PRIMO. PER IL RESTO LA DIM. È COME PRIMA.

ISOMORFISMO

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\eta_S"] & pt(X) \arrow[d, "\eta_{pt(X)}"] \\ pt(\mathcal{O}(S)) \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & pt \circ pt(X) \end{tikzcd}$$
ISO PER IDEMPOTENZA

COROLLARIO
RESTRINGENDO, HO TROVATO UN'EQUIVALENZA AGGIUNTA
$$\mathrm{Sob} \underset{\sim}{\rightleftarrows} \mathrm{Sp}$$
E Sob È SOTTOCATEGORIA RIFLESSIVA DI Top, CON RIFLESSIONE
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[r, bend left, "pt\mathcal{O}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Sob} \arrow[l, bend left, "\mathrm{INCL.}"] \end{tikzcd}$$

OSS. QUESTA EQUIVALENZA PUÒ ESSERE VISTA COME DUALITÀ TRA $\mathrm{Top} \rightleftarrows \mathrm{Frm}^{op}$ ($\mathrm{Loc} = \mathrm{Frm}^{op}$) DOVE ENTRAMBE LE MAPPE SONO $\mathrm{Hom}(-, 2)$ USANDO DUPLICE STRUTTURA DI 2 (PENSA AL DUALE DI SP. VETT., IN CUI $2 = \mathbb{R}$)

OSS. In tutto ciò abbiamo usato che embedding / suriezioni di locali sono a livello di aperti. In effetti questo vale anche per gli spazi:

- S T_1 e f^{-1} iniettiva → f suriettiva come mappa continua
- S T_0 e f^{-1} suriettiva → f embedding topologico.

DEF. Un embedding di locali $f: Z \to X$ è caratterizzato da $f_* f^{-1} f_* = f_*$ e dunque l'immagine di f_* sono i punti fissi di $J = f_* f^{-1}$. J è una monade in X: $U \le JU$, $JU = J^2 U$, inoltre preserva $\wedge$ finiti. Allora la prendo come def. di nucleo.

PROP. $J: X \to X$ nucleo. Allora il poset $X_J = \{ JU \le U \}$ è un frame, ed esiste $X_J \hookrightarrow X$ è embedding di locali.

DIM. X_J è sicuram. chiuso per $\wedge$ finiti; inoltre posso porre $\bigvee^J U_\alpha = J(\bigvee U_\alpha)$ e questo soddisfa la prop. univ. di $\bigvee$. Inoltre $W \wedge J(\bigvee_\alpha U_\alpha) = J \bigvee (W \wedge U_\alpha)$ e dunque è frame. J inoltre è chiaramente suriettivo $X \to X_J$: è morfismo di frame? Sì per definizione 🙂 e ci siamo.

ESEMPI Dato un aperto $U \in X$, posso costruire un sottoloc. aperto? Considero il morfismo di frame $U \wedge - : X \to {\downarrow}U$; l'aggiunto è l'operazione di Heyting $W \mapsto U \Rightarrow W$, e dunque considero come $J = f_* f^{-1}$, ossia $J(W) = U \Rightarrow U \wedge W = U \Rightarrow W$.

Posso anche costruire un sottoloc. chiuso ${\uparrow}U$, punto fisso di $K(W) = U \vee W$.

DEF. $S \subseteq X$ sottolocale, definisco $\overline{S}$ = il più piccolo sottoloc. chiuso che contiene S. Si calcola facilmente: $\overline{S} = {\uparrow}\bigwedge S$; in particolare S è denso $\iff 0 \in S$ (basta osservare che ogni sottoloc. è chiuso per $\wedge$ arbitrari).

TEO (densità di Isbell 1972) ~~...~~ il nucleo $J(U) = (U^*)^*$ è il minimo sottolocale denso di X.

Ricordiamo che $U^* = U \Rightarrow 0$ è il complementare nell'algebra di Heyting. Per le sue proprietà è un sottolocale, ed è sicuramente denso ($0^* = 1$, $1^* = 0$). Inoltre, poiché ogni sottoloc. è chiuso per $\Rightarrow$, abbiamo che $0 \in S \Rightarrow \{x \Rightarrow 0\} \subseteq S$ e dunque $X_J \subseteq S$.

OSS. L'algebra booleana di X_J lo rende un sottolocale molto esotico. Ad esempio se T è uno spazio T_2 senza punti isolati, il sottolocale T_{**} non ha punti. Pensare anche a $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, densi in $\mathbb{R}$, e al sottolocale denso minimo... Vale però che se T è sobrio, ogni sottolocale spaziale di $O(T)$ è indotto da un ssp. topologico di T.

Aspetti algebrici di Frm/Loc

Frm è equazionalm. presentabile, ossia descritto da una classe propria di operazioni ed equazioni:

- 0-arie (0, 1 costanti), • binarie $(a,b) \mapsto a \wedge b$, • k-arie per ogni cardinale k $(a_i)_{i \in k} \mapsto \bigvee_k a_i$
- $(L, \wedge, 1)$ monoide commutativo idempotente, • 0 assorbe $\wedge$, • $\vee$ distribuisce...

In particolare, dai risultati di categorie algebriche, ci basta costruire un aggiunto sinistro al dimenticante $\mathrm{Frm} \to \mathrm{Set}$ per renderlo monadico. Lo costruisco in due tappe:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[r, bend left] & \mathrm{SLat} \arrow[l, bend left, "\text{dimentico } \wedge"] \arrow[r, bend left] & \mathrm{Frm} \arrow[l, bend left, "\text{dimentico } \vee"] \end{tikzcd}$$

SLat: semilattici, dove esistono tutti i $\wedge$ (incluso 1) e i morfismi preservano $\wedge$ finiti.

$\mathcal{D}$: SLat $\to$ Frm $\qquad \mathcal{D}A = \{ x \subseteq A : \downarrow x = x \}$ ↗ ORDINATO PER INCLUSIONE

$$\mathcal{D}h : \mathcal{D}A \to \mathcal{D}B, \quad \mathcal{D}h(x) = \downarrow h[x]$$

VEDIAMO LA BUONA DEF. $\quad x \wedge y = x \cap y, \quad \bigvee x_i = \bigcup x_i$

$$\mathcal{D}h\left(\bigcup x_i\right) = \downarrow h\left[\bigcup x_i\right] = \downarrow \bigcup h[x_i] = \bigcup \downarrow h[x_i] = \bigcup \mathcal{D}h(x_i)$$

E IDEM CON L'INTERSEZIONE. CONSIDERO ORA $\eta_A : A \to \mathcal{D}A$, $\eta_A(x) = \downarrow x$. PER AVERE AGGIUNZIONE MI BASTA PROVARE CHE PER OGNI MAPPA $h : A \to B$ DI SEMILATTICI ESISTE UNICA $f : \mathcal{D}A \to B$ MORFISMO DI FRAME, DELLA FORMA $h = f \circ \eta_A$

DIM. PRIMA DI TUTTO MI SEMBRA CHE η_A SIA NATURALE E SIA MORFISMO DI SEMILATTICI:

$$\eta_A(x \wedge y) = \downarrow x \wedge y = \downarrow x \cap \downarrow y \text{ E CI SIAMO; } \eta_A(1) = \downarrow 1 = A = 1_{\mathcal{D}A}.$$

LA NATURALITÀ SEGUE DALLA DEF. STESSA. INFINE DEVO DEFINIRE f: ESSENDO MORFISMO DI FRAME

$$f(x) = f(\downarrow x) = f\left(\bigcup \downarrow y : y \in x\right) = \bigvee f(\downarrow y) = \bigvee h(y)$$

E L'UNICITÀ È FATTA.

PER L'ESISTENZA BASTA PORRE $f(x) = \bigvee_{y \in x} h(y) = \bigvee h[x]$ E VEDERE CHE FUNZIONA.
(UNICA COSA NON BANALE $f(x) \wedge f(y) \le f(x \cap y)$) ↗ L'ALTRA DISUGUAGLIANZA SEGUE DA MONOTONIA, VISTO CHE È SUP DI QUALCOSA E h È MONOTONA.

VEDIAMO ADESSO G : Set $\to$ SLat

$GM = \{ x \subseteq M : x \text{ è finito} \}$ ↗ ORDINATO PER INCLUSIONE AL CONTRARIO (IN MODO CHE $\emptyset = 1$)

$x \wedge y = x \cup y$, $Gf(x) = f[x]$. STAVOLTA $\eta_M(x) = \{x\}$, E DATA $h : M \to N$ DI INSIEMI, ESISTE UNICA $f : GM \to N$ DI SEMILATTICI TALE CHE $h = f \circ \eta_M$, DEFINITA

$$f(x) = f\left(\bigwedge \{x_i\}\right) = \bigwedge h(x_i), \text{ OSSIA } f(x) = \bigwedge h[x].$$

COROLLARIO $\quad U$: Frm $\to$ Set È MONADICO, E DI CONSEGUENZA:

- U RIFLETTE ISOMORFISMI
- U CREA TUTTI I LIMITI E LI PRESERVA (Frm È COMPLETA)
- Frm È COCOMPLETA
- OGNI MAPPA DI Frm SI FATTORIZZA COME IN MODO UNICO A MENO DI ISOMORFISMO (IN PARTICOLARE L'IMMAGINE È UN SOTTOLOCALE)

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & X \\ & X_J \arrow[u, "i_J"'] \end{tikzcd}$$

$X_J = p(Y)$

CONCLUSIONI: ALCUNE COSE BELLE!

- INCLUSIONI DI SOTTOCAT. RIFLESSIVE RegKLoc $\hookrightarrow$ CRegLoc $\hookrightarrow$ Loc
  È TUTTO COSTRUTTIVO: IN PARTICOLARE PRODOTTO DI COMPATTI REGOLARI È COMPATTO REGOLARE, E VALE ANCHE SENZA IPOTESI DI REGOLARITÀ (AC!)
- ALTRA INCLUSIONE: ParLoc $\hookrightarrow$ CRegLoc E I PRODOTTI RESTANO DENTRO
- SUPERAMENTO DEL CONCETTO DI INSIEME MISURABILE, EVITANDO BANACH-TARSKI: BASTA PRENDERE I SOTTOLOCALI ANZICHÉ I SOTTOSPAZI COME σ-ALGEBRA. OGNI MISURA SU UN LOCALE ("GLI APERTI") SI ESTENDE A TUTTI I SOTTOLOCALI; LE CONTRADDIZIONI DI B-T SI EVITANO PERCHÉ DUE SOTTOSP. DISGIUNTI NON LO SONO NECESSARIAMENTE COME SOTTOLOCALI (RICORDIAMO ESEMPIO DI $\mathbb{Q}$ E $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: L'INTERSEZIONE È VUOTA, MA NON LO È L'INTERSEZIONE COME SOTTOLOCALI).