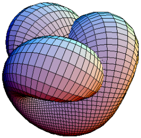
Il problema dell'immersione di varietà compatte in spazi euclidei

Lorenzo Cecchi

20 settembre 2019



Descrizione del problema

Ogni varietà C^∞ si immerge in qualche $\mathbb{R}^k$, ma vale di più:

Teorema (Whitney, 1943)

Per ogni n-varietà liscia esiste:

- *un'immersione in* $\mathbb{R}^{2n-1}$
- *un embedding in* $\mathbb{R}^{2n}$

È quindi ben posto, in particolare, il problema di determinare il minimo k sufficiente per immergere qualunque varietà di dimensione n

La congettura di immersione

Nel 1960 Massey pubblica un articolo in cui riscontra un'omogeneità nel verificarsi di condizioni necessarie all'esistenza di immersioni in codimensione $n - \alpha(n)$, dove $\alpha(n)$ rappresenta il numero di 1 nell'espansione diadica di n

Congettura (di immersione)

Ogni n-varietà liscia compatta si immerge in $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$.

In questo lavoro si ripercorrono le tappe e l'intreccio di idee che hanno portato Cohen a dimostrare la congettura nel 1985

La congettura di immersione

Nel 1960 Massey pubblica un articolo in cui riscontra un'omogeneità nel verificarsi di condizioni necessarie all'esistenza di immersioni in codimensione $n - \alpha(n)$, dove $\alpha(n)$ rappresenta il numero di 1 nell'espansione diadica di n

Congettura (di immersione)

Ogni n-varietà liscia compatta si immerge in $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$.

In questo lavoro si ripercorrono le tappe e l'intreccio di idee che hanno portato Cohen a dimostrare la congettura nel 1985

Il fibrato tangente

Idea di base: data un'immersione $f : M \to \mathbb{R}^k$ il pullback del fibrato tangente di $\mathbb{R}^k$ è banale, ed è dato da $\tau_M \oplus \nu_f$: intuitivamente si tratta di trovare il minimo k per cui esista un fibrato che sommato al tangente dia un fibrato banale

Esempio

Una varietà non orientabile ha fibrato tangente non banale, dunque non può immergersi in codimensione 0.

È naturale dunque interrogarsi sulla struttura di τ_M o, più in generale, su una possibile classificazione di fibrati su M a meno di isomorfismo

Il fibrato tangente

Idea di base: data un'immersione $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ il pullback del fibrato tangente di $\mathbb{R}^k$ è banale, ed è dato da $\tau_M \oplus \nu_f$: intuitivamente si tratta di trovare il minimo k per cui esista un fibrato che sommato al tangente dia un fibrato banale

Esempio

Una varietà non orientabile ha fibrato tangente non banale, dunque non può immergersi in codimensione 0.

È naturale dunque interrogarsi sulla struttura di τ_M o, più in generale, su una possibile classificazione di fibrati su M a meno di isomorfismo

Intreccio di idee

La dimostrazione di Cohen è il risultato della combinazione di contributi da parte di molti ricercatori:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Hirsch} \arrow[dr] & \text{Massey} \arrow[d] & \text{Wu} \arrow[l] & \\
& \text{Cohen} & & \text{Steenrod} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
\text{Ostruzioni} \arrow[uu] & BO(n) \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Stiefel-Whitney} \arrow[uu] \arrow[ll, bend left] &
\end{tikzcd}
$$

Classi di Stiefel-Whitney

Le classi di Stiefel-Whitney sono invarianti coomologici associati a ciascun fibrato; esse possono essere caratterizzate in modo assiomatico:

1. (Esistenza) Per ogni n-fibrato ξ esistono classi caratteristiche
$$w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2), \qquad i \in \mathbb{N}$$
tali che $w_0 = 1$ e $w_i = 0$ per $i > n$
2. (Naturalità) Per ogni $f : B(\xi) \to B(\eta)$ indotta da un morfismo di fibrati vale
$$w_i(\xi) = f^* w_i(\eta)$$

Classi di Stiefel-Whitney

Le classi di Stiefel-Whitney sono invarianti coomologici associati a ciascun fibrato; esse possono essere caratterizzate in modo assiomatico:

1. (Esistenza) Per ogni n-fibrato ξ esistono classi caratteristiche

   $$w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2), \qquad i \in \mathbb{N}$$

   tali che $w_0 = 1$ e $w_i = 0$ per $i > n$
2. (Naturalità) Per ogni $f : B(\xi) \to B(\eta)$ indotta da un morfismo di fibrati vale

   $$w_i(\xi) = f^* w_i(\eta)$$

Classi di Stiefel-Whitney

Le classi di Stiefel-Whitney sono invarianti coomologici associati a ciascun fibrato; esse possono essere caratterizzate in modo assiomatico:

1. (Esistenza) Per ogni n-fibrato ξ esistono classi caratteristiche
$$w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2), \qquad i \in \mathbb{N}$$
tali che $w_0 = 1$ e $w_i = 0$ per $i > n$
2. (Naturalità) Per ogni $f : B(\xi) \to B(\eta)$ indotta da un morfismo di fibrati vale
$$w_i(\xi) = f^* w_i(\eta)$$

Classi di Stiefel-Whitney

3. (Prodotto di Whitney) Vale la relazione

$$w_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j=0}^{i} w_j(\xi) \smile w_{i-j}(\eta)$$

4. (Non banalità) Il fibrato canonico γ^1 su $\mathbb{P}^1$ ha una classe non banale

L'elemento $w = \sum_{i=0}^{\infty} w_i$, detto classe *totale*, è un invertibile di $H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}_2)$, e dunque ammette unico inverso $\bar{w}$. In termini di classi totali l'Assioma 3 si scrive semplicemente

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \smile w(\eta)$$

Classi di Stiefel-Whitney

3. (Prodotto di Whitney) Vale la relazione

$$w_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j=0}^{i} w_j(\xi) \smile w_{i-j}(\eta)$$

4. (Non banalità) Il fibrato canonico γ^1 su $\mathbb{P}^1$ ha una classe non banale

L'elemento $w = \sum_{i=0}^{\infty} w_i$, detto classe *totale*, è un invertibile di $H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}_2)$, e dunque ammette unico inverso $\bar{w}$. In termini di classi totali l'Assioma 3 si scrive semplicemente

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \smile w(\eta)$$

Classi di Stiefel-Whitney

3. (Prodotto di Whitney) Vale la relazione

$$w_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j=0}^{i} w_j(\xi) \smile w_{i-j}(\eta)$$

4. (Non banalità) Il fibrato canonico γ^1 su $\mathbb{P}^1$ ha una classe non banale

L'elemento $w = \sum_{i=0}^{\infty} w_i$, detto classe *totale*, è un invertibile di $H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}_2)$, e dunque ammette unico inverso $\bar{w}$. In termini di classi totali l'Assioma 3 si scrive semplicemente

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \smile w(\eta)$$

Immersioni e classi di Stiefel-Whitney

Fibrato tangente e normale di un'immersione si sommano per dare un fibrato banale, il quale ha $w = 1$. Di conseguenza

Teorema (Dualità di Whitney)

$$w(\nu_M) = \bar{w}(\tau_M)$$

Corollario

Se una n-varietà M si immerge in $\mathbb{R}^{n+k}$ allora

$$\bar{w}_i(\tau_M) = 0 \qquad \textit{per ogni } i > k$$

Esempio (con $n = 2^m$)

$$w(\mathbb{P}^n) = (1+a)^{n+1} \implies \bar{w}(\mathbb{P}^n) = 1 + a + \ldots + a^{n-1}$$

e dunque vale la congettura di immersione.

Immersioni e classi di Stiefel-Whitney

Fibrato tangente e normale di un'immersione si sommano per dare un fibrato banale, il quale ha $w = 1$. Di conseguenza

Teorema (Dualità di Whitney)

$$w(\nu_M) = \bar{w}(\tau_M)$$

Corollario

Se una n-varietà M si immerge in $\mathbb{R}^{n+k}$ allora

$$\bar{w}_i(\tau_M) = 0 \qquad \textit{per ogni } i > k$$

Esempio (con $n = 2^m$)

$$w(\mathbb{P}^n) = (1+a)^{n+1} \implies \bar{w}(\mathbb{P}^n) = 1 + a + \ldots + a^{n-1}$$

e dunque vale la congettura di immersione.

Immersioni e classi di Stiefel-Whitney

Fibrato tangente e normale di un'immersione si sommano per dare un fibrato banale, il quale ha $w = 1$. Di conseguenza

Teorema (Dualità di Whitney)

$$w(\nu_M) = \bar{w}(\tau_M)$$

Corollario

Se una n-varietà M si immerge in $\mathbb{R}^{n+k}$ allora

$$\bar{w}_i(\tau_M) = 0 \qquad \textit{per ogni } i > k$$

Esempio (con $n = 2^m$)

$$w(\mathbb{P}^n) = (1+a)^{n+1} \implies \bar{w}(\mathbb{P}^n) = 1 + a + \ldots + a^{n-1}$$

e dunque vale la congettura di immersione.

Quadrati di Steenrod

I quadrati di Steenrod sono un esempio di *operazione coomologica*, ossia una trasformazione naturale di funtori

$$\theta\colon H^n(-, G_1) \to H^q(-, G_2)$$

Anche in questo caso si dà una caratterizzazione assiomatica (i coefficienti sono in $\mathbb{Z}_2$):

1. (Esistenza) Per ogni coppia $i, n \in \mathbb{N}$ esiste un omomorfismo

$$Sq^i\colon H^n(X) \to H^{n+i}(X)$$

2. (Naturalità) Data $f\colon X \to Y$ si ha

$$Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i$$

Quadrati di Steenrod

I quadrati di Steenrod sono un esempio di *operazione coomologica*, ossia una trasformazione naturale di funtori

$$\theta\colon H^n(-, G_1) \to H^q(-, G_2)$$

Anche in questo caso si dà una caratterizzazione assiomatica (i coefficienti sono in $\mathbb{Z}_2$):

1. (Esistenza) Per ogni coppia $i, n \in \mathbb{N}$ esiste un omomorfismo
$$Sq^i\colon H^n(X) \to H^{n+i}(X)$$
2. (Naturalità) Data $f\colon X \to Y$ si ha
$$Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i$$

Quadrati di Steenrod

I quadrati di Steenrod sono un esempio di *operazione coomologica*, ossia una trasformazione naturale di funtori

$$\theta \colon H^n(-, G_1) \to H^q(-, G_2)$$

Anche in questo caso si dà una caratterizzazione assiomatica (i coefficienti sono in $\mathbb{Z}_2$):

1. (Esistenza) Per ogni coppia $i, n \in \mathbb{N}$ esiste un omomorfismo

$$Sq^i \colon H^n(X) \to H^{n+i}(X)$$

2. (Naturalità) Data $f \colon X \to Y$ si ha

$$Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i$$

Quadrati di Steenrod

3. (Quadrato) Per ogni $a \in H^n(X)$ si ha

$$Sq^0(a) = a, \quad Sq^n(a) = a^2, \quad Sq^i(a) = 0 \text{ per } i > n$$

4. (Formula di Cartan) Vale la relazione

$$Sq^k(a \smile b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \smile Sq^j(b)$$

L'analogia con le classi di Stiefel-Whitney non è casuale: infatti

$$w(\xi) = \phi^{-1} \circ Sq \circ \phi(1)$$

dove ϕ è l'isomorfismo di Thom

Quadrati di Steenrod

3. (Quadrato) Per ogni $a \in H^n(X)$ si ha

$$Sq^0(a) = a, \quad Sq^n(a) = a^2, \quad Sq^i(a) = 0 \text{ per } i > n$$

4. (Formula di Cartan) Vale la relazione

$$Sq^k(a \smile b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \smile Sq^j(b)$$

L'analogia con le classi di Stiefel-Whitney non è casuale: infatti

$$w(\xi) = \phi^{-1} \circ Sq \circ \phi(1)$$

dove ϕ è l'isomorfismo di Thom

Quadrati di Steenrod

3. (Quadrato) Per ogni $a \in H^n(X)$ si ha

$$Sq^0(a) = a, \quad Sq^n(a) = a^2, \quad Sq^i(a) = 0 \text{ per } i > n$$

4. (Formula di Cartan) Vale la relazione

$$Sq^k(a \smile b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \smile Sq^j(b)$$

L'analogia con le classi di Stiefel-Whitney non è casuale: infatti

$$w(\xi) = \phi^{-1} \circ Sq \circ \phi(1)$$

dove ϕ è l'isomorfismo di Thom

L'enunciato

La congettura di immersione nasce dal seguente

Teorema (Massey, 1960)

Sia M una n-varietà compatta e connessa. Allora

$$\bar{w}_i(\tau_M) = 0 \qquad \textit{per ogni } i > n - \alpha(n)$$

Il risultato è ottimale, in quanto

Esempio

Se $n = 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_{\alpha(n)}}$, ponendo

$$M = \mathbb{P}^{2^{h_1}} \times \ldots \times \mathbb{P}^{2^{h_{\alpha(n)}}}$$

si ha $\bar{w}_{n-\alpha(n)} \neq 0$.

L'enunciato

La congettura di immersione nasce dal seguente

Teorema (Massey, 1960)

Sia M una n-varietà compatta e connessa. Allora

$$\bar{w}_i(\tau_M) = 0 \qquad \textit{per ogni } i > n - \alpha(n)$$

Il risultato è ottimale, in quanto

Esempio

Se $n = 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_{\alpha(n)}}$, ponendo

$$M = \mathbb{P}^{2^{h_1}} \times \ldots \times \mathbb{P}^{2^{h_{\alpha(n)}}}$$

si ha $\bar{w}_{n-\alpha(n)} \neq 0$.

Preparazione (prima parte)

Alcune definizioni e risultati preliminari:

- una sequenza di interi positivi $I = (i_1, \ldots, i_r)$ si dice *ammissibile* se $i_j \geq 2i_{j+1}$; si pone $Sq^I = Sq^{i_1} \circ \ldots \circ Sq^{i_r}$
- in questo caso si può definire la corrispondente sequenza di "differenze" $(a_1, \ldots, a_r)$, con $a_j = i_j - 2i_{j+1}$, $a_r = i_r$
- si definiscono le due quantità $e(I) = \sum_j a_j$ e $n(I) = \sum_j i_j$
- vale la relazione $\deg(Sq^I(x)) = \deg(x) + n(I)$

Lemma

Per ogni $x \in H^q(M)$

$$q < e(I) \implies Sq^I(x) = 0$$

Infatti basta osservare che $i_1 > q + i_2 + \ldots + i_r$.

Preparazione (prima parte)

Alcune definizioni e risultati preliminari:

- una sequenza di interi positivi $I = (i_1, \ldots, i_r)$ si dice *ammissibile* se $i_j \geq 2i_{j+1}$; si pone $Sq^I = Sq^{i_1} \circ \ldots \circ Sq^{i_r}$
- in questo caso si può definire la corrispondente sequenza di "differenze" $(a_1, \ldots, a_r)$, con $a_j = i_j - 2i_{j+1}$, $a_r = i_r$
- si definiscono le due quantità $e(I) = \sum_j a_j$ e $n(I) = \sum_j i_j$
- vale la relazione $\deg(Sq^I(x)) = \deg(x) + n(I)$

Lemma

Per ogni $x \in H^q(M)$

$$q < e(I) \implies Sq^I(x) = 0$$

Infatti basta osservare che $i_1 > q + i_2 + \ldots + i_r$.

Preparazione (prima parte)

Alcune definizioni e risultati preliminari:

- una sequenza di interi positivi $I = (i_1, \ldots, i_r)$ si dice *ammissibile* se $i_j \geq 2i_{j+1}$; si pone $Sq^I = Sq^{i_1} \circ \ldots \circ Sq^{i_r}$
- in questo caso si può definire la corrispondente sequenza di "differenze" $(a_1, \ldots, a_r)$, con $a_j = i_j - 2i_{j+1}$, $a_r = i_r$
- si definiscono le due quantità $e(I) = \sum_j a_j$ e $n(I) = \sum_j i_j$
- vale la relazione $\deg(Sq^I(x)) = \deg(x) + n(I)$

Lemma

Per ogni $x \in H^q(M)$

$$q < e(I) \implies Sq^I(x) = 0$$

Infatti basta osservare che $i_1 > q + i_2 + \ldots + i_r$.

Preparazione (prima parte)

Alcune definizioni e risultati preliminari:

- una sequenza di interi positivi $I = (i_1, \dots, i_r)$ si dice *ammissibile* se $i_j \geq 2i_{j+1}$; si pone $Sq^I = Sq^{i_1} \circ \dots \circ Sq^{i_r}$
- in questo caso si può definire la corrispondente sequenza di "differenze" $(a_1, \dots, a_r)$, con $a_j = i_j - 2i_{j+1}$, $a_r = i_r$
- si definiscono le due quantità $e(I) = \sum_j a_j$ e $n(I) = \sum_j i_j$
- vale la relazione $\deg(Sq^I(x)) = \deg(x) + n(I)$

Lemma

Per ogni $x \in H^q(M)$

$$q < e(I) \implies Sq^I(x) = 0$$

Infatti basta osservare che $i_1 > q + i_2 + \dots + i_r$.

Preparazione (prima parte)

Alcune definizioni e risultati preliminari:

- una sequenza di interi positivi $I = (i_1, \dots, i_r)$ si dice *ammissibile* se $i_j \geq 2i_{j+1}$; si pone $Sq^I = Sq^{i_1} \circ \dots \circ Sq^{i_r}$
- in questo caso si può definire la corrispondente sequenza di "differenze" $(a_1, \dots, a_r)$, con $a_j = i_j - 2i_{j+1}$, $a_r = i_r$
- si definiscono le due quantità $e(I) = \sum_j a_j$ e $n(I) = \sum_j i_j$
- vale la relazione $\deg(Sq^I(x)) = \deg(x) + n(I)$

Lemma

Per ogni $x \in H^q(M)$

$$q < e(I) \implies Sq^I(x) = 0$$

Infatti basta osservare che $i_1 > q + i_2 + \dots + i_r$.

Preparazione (prima parte)

Alcune definizioni e risultati preliminari:

- una sequenza di interi positivi $I = (i_1, \dots, i_r)$ si dice *ammissibile* se $i_j \geq 2i_{j+1}$; si pone $Sq^I = Sq^{i_1} \circ \dots \circ Sq^{i_r}$
- in questo caso si può definire la corrispondente sequenza di "differenze" $(a_1, \dots, a_r)$, con $a_j = i_j - 2i_{j+1}$, $a_r = i_r$
- si definiscono le due quantità $e(I) = \sum_j a_j$ e $n(I) = \sum_j i_j$
- vale la relazione $\deg(Sq^I(x)) = \deg(x) + n(I)$

Lemma

Per ogni $x \in H^q(M)$

$$q < e(I) \implies Sq^I(x) = 0$$

Infatti basta osservare che $i_1 > q + i_2 + \dots + i_r$.

Preparazione (seconda parte)

Lemma

Per ogni I ammissibile esiste J ammissibile e $k \in \mathbb{N}$ tali che

$$\deg(x) = e(I) \implies Sq^I(x) = (Sq^J(x))^{2^k}$$

e inoltre $e(J) < e(I)$.

Dimostrazione.

Si pone $J = (i_{k+1}, \dots, i_r)$, dove k è il minimo intero per cui $a_k > 0$; banalmente $e(I) = a_k + e(J)$ e

$$\deg(Sq^J(x)) = \deg(x) + n(J) = e(J) + n(J) + a_k = i_k$$

e gli omomorfismi rimanenti sono tutti quadrati. $\square$

Preparazione (seconda parte)

Lemma

Per ogni I ammissibile esiste J ammissibile e $k \in \mathbb{N}$ tali che

$$\deg(x) = e(I) \implies Sq^I(x) = (Sq^J(x))^{2^k}$$

e inoltre $e(J) < e(I)$.

Dimostrazione.

Si pone $J = (i_{k+1}, \dots, i_r)$, dove k è il minimo intero per cui $a_k > 0$; banalmente $e(I) = a_k + e(J)$ e

$$\deg(Sq^J(x)) = \deg(x) + n(J) = e(J) + n(J) + a_k = i_k$$

e gli omomorfismi rimanenti sono tutti quadrati. $\square$

Preparazione (terza parte)

Lemma

Sia $x \in H^q(M)$. Se $e(I) < q$ allora

$$\deg(Sq^I(x)) = 1 + 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_{q-1}}$$

Infatti $n(I) = \sum_{j=1}^{r}(2^j - 1)a_j \implies \deg(Sq^I(x)) = 1 + \sum_{j=1}^{r} 2^j a_j$

Lemma

Per ogni $x \in H^q(M)$ con $0 < q < n$ vale

$$x \smile \bar{w}_{n-q} = \sum_{i>0} Sq^i(x) \smile \bar{w}_{n-q-i}$$

Preparazione (terza parte)

Lemma

Sia $x \in H^q(M)$. Se $e(I) < q$ allora

$$\deg(Sq^I(x)) = 1 + 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_{q-1}}$$

Infatti $n(I) = \sum_{j=1}^{r}(2^j - 1)a_j \implies \deg(Sq^I(x)) = 1 + \sum_{j=1}^{r} 2^j a_j$

Lemma

Per ogni $x \in H^q(M)$ con $0 < q < n$ vale

$$x \smile \bar{w}_{n-q} = \sum_{i>0} Sq^i(x) \smile \bar{w}_{n-q-i}$$

La dimostrazione

Se $\bar{w}_{n-q} \neq 0$ allora l'omomorfismo

$$\phi\colon H^q(M;\mathbb{Z}_2) \to H^n(M;\mathbb{Z}_2), \qquad \phi(x) = x \smile \bar{w}_{n-q}$$

è non banale e, senza perdita di generalità, si scrive come somma di Sq^I ammissibili con $e(I) \leq q$, di cui uno non nullo

A questo punto

- se $e(I) < q$ allora $n = \deg(Sq^I(x))$ e si applica il lemma precedente
- se $e(I) = q$ si considera $Sq^I = (Sq^J)^{2^k}$, da cui $n = 2^k \deg(Sq^I(x))$ e si applica il lemma precedente

Si conclude osservando l'equivalenza tra i seguenti fatti:

- $n = 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_q}$ per qualche $h_1, \ldots, h_q \in \mathbb{N}$
- $\alpha(n) \leq q$

La dimostrazione

Se $\bar{w}_{n-q} \neq 0$ allora l'omomorfismo

$$\phi\colon H^q(M;\mathbb{Z}_2) \to H^n(M;\mathbb{Z}_2), \qquad \phi(x) = x \smile \bar{w}_{n-q}$$

è non banale e, senza perdita di generalità, si scrive come somma di Sq^I ammissibili con $e(I) \leq q$, di cui uno non nullo

A questo punto

- se $e(I) < q$ allora $n = \deg(Sq^I(x))$ e si applica il lemma precedente
- se $e(I) = q$ si considera $Sq^I = (Sq^J)^{2^k}$, da cui $n = 2^k \deg(Sq^J(x))$ e si applica il lemma precedente

Si conclude osservando l'equivalenza tra i seguenti fatti:

- $n = 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_q}$ per qualche $h_1, \ldots, h_q \in \mathbb{N}$
- $\alpha(n) \leq q$

La dimostrazione

Se $\bar{w}_{n-q} \neq 0$ allora l'omomorfismo

$$\phi\colon H^q(M;\mathbb{Z}_2) \to H^n(M;\mathbb{Z}_2), \qquad \phi(x) = x \smile \bar{w}_{n-q}$$

è non banale e, senza perdita di generalità, si scrive come somma di Sq^I ammissibili con $e(I) \leq q$, di cui uno non nullo

A questo punto

- se $e(I) < q$ allora $n = \deg(Sq^I(x))$ e si applica il lemma precedente
- se $e(I) = q$ si considera $Sq^I = (Sq^J)^{2^k}$, da cui $n = 2^k \deg(Sq^I(x))$ e si applica il lemma precedente

Si conclude osservando l'equivalenza tra i seguenti fatti:

- $n = 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_q}$ per qualche $h_1, \ldots, h_q \in \mathbb{N}$
- $\alpha(n) \leq q$

La dimostrazione

Se $\bar{w}_{n-q} \neq 0$ allora l'omomorfismo

$$\phi\colon H^q(M;\mathbb{Z}_2) \to H^n(M;\mathbb{Z}_2), \qquad \phi(x) = x \smile \bar{w}_{n-q}$$

è non banale e, senza perdita di generalità, si scrive come somma di Sq^I ammissibili con $e(I) \leq q$, di cui uno non nullo
A questo punto

- se $e(I) < q$ allora $n = \deg(Sq^I(x))$ e si applica il lemma precedente
- se $e(I) = q$ si considera $Sq^I = (Sq^J)^{2^k}$, da cui $n = 2^k \deg(Sq^I(x))$ e si applica il lemma precedente

Si conclude osservando l'equivalenza tra i seguenti fatti:

- $n = 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_q}$ per qualche $h_1, \ldots, h_q \in \mathbb{N}$
- $\alpha(n) \leq q$

Ostruzioni

Dato un fibrato su un CW complesso si possono dare condizioni necessarie e sufficienti di tipo algebrico, dette *ostruzioni*, a costruire una sua sezione ricorsivamente su ciascun i-scheletro

L'ostruzione all'estensione di k sezioni (di un n-fibrato) su B^i è data da un elemento di $H^i(B; \pi_{i-1}(V_k(\mathbb{R}^n)))$

Fatto

$V_k(\mathbb{R}^n)$ è $n-k-1$-connesso e

- $\pi_{n-k} \cong \mathbb{Z}$ se $k=1$ oppure $n-k$ è pari
- $\pi_{n-k} \cong \mathbb{Z}_2$ altrimenti

$$\begin{tikzcd} E(\Phi^*\xi) \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"] & E(\xi) \arrow[d, "\pi"] \\ D^i \arrow[r, "\Phi"] & B^i \end{tikzcd}$$

La prima ostruzione non banale è quindi in $H^{n-k+1}(B; \pi_{n-k})$.

Teorema

La riduzione modulo 2 dell'ostruzione primaria coincide con la classe di Stiefel-Whitney w_{n-k+1}.

Ostruzioni

Dato un fibrato su un CW complesso si possono dare condizioni necessarie e sufficienti di tipo algebrico, dette *ostruzioni*, a costruire una sua sezione ricorsivamente su ciascun i-scheletro
L'ostruzione all'estensione di k sezioni (di un n-fibrato) su B^i è data da un elemento di $H^i(B; \pi_{i-1}(V_k(\mathbb{R}^n)))$

Fatto

$V_k(\mathbb{R}^n)$ è $n-k-1$-connesso e

- $\pi_{n-k} \cong \mathbb{Z}$ se $k = 1$ oppure $n-k$ è pari
- $\pi_{n-k} \cong \mathbb{Z}_2$ altrimenti

La prima ostruzione non banale è quindi in $H^{n-k+1}(B; \pi_{n-k})$.

$$\begin{tikzcd} E(\Phi^*\xi) \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"] & E(\xi) \arrow[d, "\pi"] \\ D^i \arrow[r, "\Phi"] & B^i \end{tikzcd}$$

Teorema

La riduzione modulo 2 dell'ostruzione primaria coincide con la classe di Stiefel-Whitney w_{n-k+1}.

Ostruzioni

Dato un fibrato su un CW complesso si possono dare condizioni necessarie e sufficienti di tipo algebrico, dette *ostruzioni*, a costruire una sua sezione ricorsivamente su ciascun i-scheletro
L'ostruzione all'estensione di k sezioni (di un n-fibrato) su B^i è data da un elemento di $H^i(B; \pi_{i-1}(V_k(\mathbb{R}^n)))$

Fatto

$V_k(\mathbb{R}^n)$ è $n-k-1$-connesso e

- $\pi_{n-k} \cong \mathbb{Z}$ se $k=1$ oppure $n-k$ è pari
- $\pi_{n-k} \cong \mathbb{Z}_2$ altrimenti

La prima ostruzione non banale è quindi in $H^{n-k+1}(B; \pi_{n-k})$.

$$\begin{tikzcd} E(\Phi^*\xi) \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"] & E(\xi) \arrow[d, "\pi"] \\ D^i \arrow[r, "\Phi"] & B^i \end{tikzcd}$$

Teorema

La riduzione modulo 2 dell'ostruzione primaria coincide con la classe di Stiefel-Whitney w_{n-k+1}.

Il teorema di Hirsch

Nel 1959 Smale identifica le immersioni lisce $S^n \to \mathbb{R}^k$, a meno di omotopia regolare, con elementi di $\pi_k(V_k(\mathbb{R}^n))$. Estendendo i suoi risultati, Hirsch trova la seguente condizione sufficiente:

Teorema (Hirsch)

Se M si immerge in $\mathbb{R}^{k+r}$ con un r-campo trasversale allora si immerge in $\mathbb{R}^k$.

Esempio

Ogni 3-varietà compatta si immerge in $\mathbb{R}^4$. È sufficiente immergere M in $\mathbb{R}^6$ con due sezioni del fibrato normale, definite inizialmente su M^0. Queste sezioni:

- si estendono a M^1 per connessione di $V_2(\mathbb{R}^3)$
- si estendono a M^2 perché $w_2(\nu_M) = \bar{w}_2(\tau_M) = 0$ (per Massey)
- si estendono a $M^3 = M$ perché $V_2(\mathbb{R}^3) \cong SO(3) \cong \mathbb{P}^3$ e dunque $\pi_2 = 0$

Il teorema di Hirsch

Nel 1959 Smale identifica le immersioni lisce $S^n \to \mathbb{R}^k$, a meno di omotopia regolare, con elementi di $\pi_k(V_k(\mathbb{R}^n))$. Estendendo i suoi risultati, Hirsch trova la seguente condizione sufficiente:

Teorema (Hirsch)

Se M si immerge in $\mathbb{R}^{k+r}$ con un r-campo trasversale allora si immerge in $\mathbb{R}^k$.

Esempio

Ogni 3-varietà compatta si immerge in $\mathbb{R}^4$. È sufficiente immergere M in $\mathbb{R}^6$ con due sezioni del fibrato normale, definite inizialmente su M^0. Queste sezioni:

- si estendono a M^1 per connessione di $V_2(\mathbb{R}^3)$
- si estendono a M^2 perché $w_2(\nu_M) = \bar{w}_2(\tau_M) = 0$ (per Massey)
- si estendono a $M^3 = M$ perché $V_2(\mathbb{R}^3) \cong SO(3) \cong \mathbb{P}^3$ e dunque $\pi_2 = 0$

Il teorema di Hirsch

Nel 1959 Smale identifica le immersioni lisce $S^n \to \mathbb{R}^k$, a meno di omotopia regolare, con elementi di $\pi_k(V_k(\mathbb{R}^n))$. Estendendo i suoi risultati, Hirsch trova la seguente condizione sufficiente:

Teorema (Hirsch)

Se M si immerge in $\mathbb{R}^{k+r}$ con un r-campo trasversale allora si immerge in $\mathbb{R}^k$.

Esempio

Ogni 3-varietà compatta si immerge in $\mathbb{R}^4$. È sufficiente immergere M in $\mathbb{R}^6$ con due sezioni del fibrato normale, definite inizialmente su M^0. Queste sezioni:

- si estendono a M^1 per connessione di $V_2(\mathbb{R}^3)$
- si estendono a M^2 perché $w_2(\nu_M) = \bar{w}_2(\tau_M) = 0$ (per Massey)
- si estendono a $M^3 = M$ perché $V_2(\mathbb{R}^3) \cong SO(3) \cong \mathbb{P}^3$ e dunque $\pi_2 = 0$

Il teorema di Hirsch

Nel 1959 Smale identifica le immersioni lisce $S^n \to \mathbb{R}^k$, a meno di omotopia regolare, con elementi di $\pi_k(V_k(\mathbb{R}^n))$. Estendendo i suoi risultati, Hirsch trova la seguente condizione sufficiente:

Teorema (Hirsch)

Se M si immerge in $\mathbb{R}^{k+r}$ con un r-campo trasversale allora si immerge in $\mathbb{R}^k$.

Esempio

Ogni 3-varietà compatta si immerge in $\mathbb{R}^4$. È sufficiente immergere M in $\mathbb{R}^6$ con due sezioni del fibrato normale, definite inizialmente su M^0. Queste sezioni:

- si estendono a M^1 per connessione di $V_2(\mathbb{R}^3)$
- si estendono a M^2 perché $w_2(\nu_M) = \bar{w}_2(\tau_M) = 0$ (per Massey)
- si estendono a $M^3 = M$ perché $V_2(\mathbb{R}^3) \cong SO(3) \cong \mathbb{P}^3$ e dunque $\pi_2 = 0$

Il teorema di Hirsch

Nel 1959 Smale identifica le immersioni lisce $S^n \to \mathbb{R}^k$, a meno di omotopia regolare, con elementi di $\pi_k(V_k(\mathbb{R}^n))$. Estendendo i suoi risultati, Hirsch trova la seguente condizione sufficiente:

Teorema (Hirsch)

Se M si immerge in $\mathbb{R}^{k+r}$ con un r-campo trasversale allora si immerge in $\mathbb{R}^k$.

Esempio

Ogni 3-varietà compatta si immerge in $\mathbb{R}^4$. È sufficiente immergere M in $\mathbb{R}^6$ con due sezioni del fibrato normale, definite inizialmente su M^0. Queste sezioni:

- si estendono a M^1 per connessione di $V_2(\mathbb{R}^3)$
- si estendono a M^2 perché $w_2(\nu_M) = \bar{w}_2(\tau_M) = 0$ (per Massey)
- si estendono a $M^3 = M$ perché $V_2(\mathbb{R}^3) \cong SO(3) \cong \mathbb{P}^3$ e dunque $\pi_2 = 0$

Una riscrittura

Teorema (di classificazione)

Le classi di omotopia di mappe $f : B \to BO(n)$ sono in bigezione con le classi di isomorfismo di fibrati su B, dove la corrispondenza è data dal pullback di γ^n tramite f.

Componendo una mappa di classificazione $M \to BO(k)$ con l'inclusione $BO(k) \hookrightarrow BO$ si ottiene una classificazione a meno di equivalenza stabile $M \to BO$

Inoltre la teoria di Hirsch, dato un diagramma commutativo a meno di omotopia come quello a fianco, implica l'esistenza di un'immersione in codimensione k

$$\begin{tikzcd} & BO(k) \arrow[d, hook] \\ M \arrow[ur, "\tilde{\nu}_M"] \arrow[r, "\nu_M"'] & BO \end{tikzcd}$$

L'obiettivo è dunque realizzare questo sollevamento con $k = n - \alpha(n)$

Una riscrittura

Teorema (di classificazione)

Le classi di omotopia di mappe $f : B \to BO(n)$ sono in bigezione con le classi di isomorfismo di fibrati su B, dove la corrispondenza è data dal pullback di γ^n tramite f.

Componendo una mappa di classificazione $M \to BO(k)$ con l'inclusione $BO(k) \hookrightarrow BO$ si ottiene una classificazione a meno di equivalenza stabile $M \to BO$

Inoltre la teoria di Hirsch, dato un diagramma commutativo a meno di omotopia come quello a fianco, implica l'esistenza di un'immersione in codimensione k

$$\begin{tikzcd} & BO(k) \arrow[d, hook] \\ M \arrow[ur, "\tilde{\nu}_M"] \arrow[r, "\nu_M"] & BO \end{tikzcd}$$

L'obiettivo è dunque realizzare questo sollevamento con $k = n - \alpha(n)$

La mappa in coomologia (prima parte)

Si consideri $\nu_M^*\colon H^*(BO) \to H^*(M)$ e sia

$$I_n = \bigcap_M \ker \nu_M^*$$

al variare di tutte le n-varietà

Si ottiene il diagramma

$$\begin{tikzcd} H^*(BO)/I_n \arrow[r, "\tilde{\nu}_M^*"] & H^*(M) \\ & H^*(BO) \arrow[ul, "\rho^*"] \arrow[u, "\nu_M^*"'] \end{tikzcd}$$

con ρ^* proiezione al quoziente

La mappa in coomologia (prima parte)

Si consideri $\nu_M^*\colon H^*(BO) \to H^*(M)$ e sia

$$I_n = \bigcap_M \ker \nu_M^*$$

al variare di tutte le n-varietà
Si ottiene il diagramma

$$\begin{tikzcd} H^*(BO)/I_n \arrow[r, "\tilde{\nu}_M^*"] & H^*(M) \\ & H^*(BO) \arrow[ul, "\rho^*"] \arrow[u, "\nu_M^*"'] \end{tikzcd}$$

con ρ^* proiezione al quoziente

La mappa in coomologia (seconda parte)

Inoltre poiché $H^*(BO(n-\alpha(n))) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_{n-\alpha(n)}]$ e $BO = \varinjlim BO(k)$, data

$$i^* \colon H^*(BO) \to H^*(BO(n-\alpha(n)))$$

si ha $\ker i^* = \mathbb{Z}_2[w_{n-\alpha(n)+1}, w_{n-\alpha(n)+2}, \dots]$. In particolare, per ogni $j > n-\alpha(n)$, il teorema di Massey implica

$$0 = \bar{w}_j(\tau_M) = w_j(\nu_M) = \nu_M^* w_j \implies \ker i^* \subset I_n$$

e si ottiene

$$\begin{tikzcd}
H^*(BO)/I_n & \\
H^*(BO(n-\alpha(n))) \arrow[u, "\rho_n^*"] & H^*(BO) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[ul, "\rho^*"']
\end{tikzcd}$$

La mappa in coomologia (seconda parte)

Inoltre poiché $H^*(BO(n-\alpha(n))) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_{n-\alpha(n)}]$ e $BO = \varinjlim BO(k)$, data

$$i^* : H^*(BO) \to H^*(BO(n-\alpha(n)))$$

si ha $\ker i^* = \mathbb{Z}_2[w_{n-\alpha(n)+1}, w_{n-\alpha(n)+2}, \dots]$. In particolare, per ogni $j > n - \alpha(n)$, il teorema di Massey implica

$$0 = \bar{w}_j(\tau_M) = w_j(\nu_M) = \nu_M^* w_j \implies \ker i^* \subset I_n$$

e si ottiene

$$\begin{tikzcd} H^*(BO(n-\alpha(n))) \arrow[r, "\rho_n^*"] & H^*(BO)/I_n & \\ & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & H^*(BO)/I_n & \\ H^*(BO(n-\alpha(n))) \arrow[ur, "\rho_n^*"] & & H^*(BO) \arrow[ll, "i^*"] \arrow[ul, "\rho^*"'] \end{tikzcd}$$

La mappa in coomologia (seconda parte)

Inoltre poiché $H^*(BO(n-\alpha(n))) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_{n-\alpha(n)}]$ e $BO = \varinjlim BO(k)$, data

$$i^* : H^*(BO) \to H^*(BO(n-\alpha(n)))$$

si ha $\ker i^* = \mathbb{Z}_2[w_{n-\alpha(n)+1}, w_{n-\alpha(n)+2}, \dots]$. In particolare, per ogni $j > n-\alpha(n)$, il teorema di Massey implica

$$0 = \bar{w}_j(\tau_M) = w_j(\nu_M) = \nu_M^* w_j \implies \ker i^* \subset I_n$$

e si ottiene

$$\begin{tikzcd}
H^*(BO)/I_n & \\
H^*(BO(n-\alpha(n))) \arrow[u, "\rho_n^*"] & H^*(BO) \arrow[l, "i^*"] \arrow[ul, "\rho^*"']
\end{tikzcd}$$

La mappa in coomologia (terza parte)

Mettendo insieme il tutto

$$
\begin{tikzcd}
H^*(BO)/I_n \arrow[r, "\tilde{\nu}_M^*"] & H^*(M) \\
H^*(BO(n-\alpha(n))) \arrow[u, "\rho_n^*"] & H^*(BO) \arrow[l, "i^*"] \arrow[u, "\nu_M^*"'] \arrow[ul, "\rho^*"]
\end{tikzcd}
$$

Si è ottenuta una mappa

$$\tilde{\nu}_M^* \circ \rho_n^* \colon H^*(BO(n-\alpha(n))) \to H^*(M)$$

candidata a corrispondere, in coomologia, al sollevamento cercato

La mappa in coomologia (terza parte)

Mettendo insieme il tutto

$$\begin{tikzcd} H^*(BO)/I_n \arrow[r, "\tilde{\nu}_M^*"] & H^*(M) \\ H^*(BO(n-\alpha(n))) \arrow[u, "\rho_n^*"] & H^*(BO) \arrow[l, "i^*"] \arrow[u, "\nu_M^*"'] \arrow[ul, "\rho^*"'] \end{tikzcd}$$

Si è ottenuta una mappa

$$\tilde{\nu}_M^* \circ \rho_n^* \colon H^*(BO(n-\alpha(n))) \to H^*(M)$$

candidata a corrispondere, in coomologia, al sollevamento cercato

Cosa rimane da fare

Ciò che si è visto è solo la prima parte del programma di dimostrazione delineato da Brown e Peterson

1. Calcolare esplicitamente l'ideale I_n
2. Costruire uno spazio BO/I_n e una mappa $\rho\colon BO/I_n \to BO$ tale che:
    - $H^*(BO/I_n) = H^*(BO)/I_n$ e ρ induca ρ^* in coomologia
    - Ciascuna mappa classificante ν_M si fattorizza (a meno di omotopia) come composizione $M \xrightarrow{\tilde{\nu}_M} BO/I_n \xrightarrow{\rho} BO$
3. In analogia al diagramma di sopra, costruire una fattorizzazione di ρ (a meno di omotopia) tramite una mappa $\rho_n\colon BO/I_n \to BO(n-\alpha(n))$

Cohen realizza quest'ultimo punto nel 1985, trovando il sollevamento $\rho_n \circ \tilde{\nu}_M$ e risolvendo definitivamente il problema

Cosa rimane da fare

Ciò che si è visto è solo la prima parte del programma di dimostrazione delineato da Brown e Peterson

1. Calcolare esplicitamente l'ideale I_n
2. Costruire uno spazio BO/I_n e una mappa $\rho\colon BO/I_n \to BO$ tale che:
   - $H^*(BO/I_n) = H^*(BO)/I_n$ e ρ induca ρ^* in coomologia
   - Ciascuna mappa classificante ν_M si fattorizza (a meno di omotopia) come composizione $M \xrightarrow{\tilde{\nu}_M} BO/I_n \xrightarrow{\rho} BO$
3. In analogia al diagramma di sopra, costruire una fattorizzazione di ρ (a meno di omotopia) tramite una mappa $\rho_n\colon BO/I_n \to BO(n - \alpha(n))$

Cohen realizza quest'ultimo punto nel 1985, trovando il sollevamento $\rho_n \circ \tilde{\nu}_M$ e risolvendo definitivamente il problema

Sviluppi ulteriori e problemi aperti

Alcuni spunti di riflessione:

- vale un analogo teorema per embedding?
- è possibile migliorare ulteriormente il risultato di Cohen restringendosi, ad esempio, a varietà con bordo oppure orientabili (oppure entrambe)?

Teorema (Haefliger, 1961)

Per ogni n-varietà liscia k-connessa, con $2k + 3 \leq n$, esiste un embedding in $\mathbb{R}^{2n-k}$.

Sviluppi ulteriori e problemi aperti

Alcuni spunti di riflessione:

- vale un analogo teorema per embedding?
- è possibile migliorare ulteriormente il risultato di Cohen restringendosi, ad esempio, a varietà con bordo oppure orientabili (oppure entrambe)?

Teorema (Haefliger, 1961)

Per ogni n-varietà liscia k-connessa, con $2k + 3 \leq n$, esiste un embedding in $\mathbb{R}^{2n-k}$.

Sviluppi ulteriori e problemi aperti

Alcuni spunti di riflessione:

- vale un analogo teorema per embedding?
- è possibile migliorare ulteriormente il risultato di Cohen restringendosi, ad esempio, a varietà con bordo oppure orientabili (oppure entrambe)?

Teorema (Haefliger, 1961)

Per ogni n-varietà liscia k-connessa, con $2k+3 \leq n$, esiste un embedding in $\mathbb{R}^{2n-k}$.

Ringraziamenti

Grazie a tutti per l'attenzione!