



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

---

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di laurea triennale in Matematica

Tesi di Laurea

## **Metodi numerici per equazioni differenziali con ritardo**

Relatore  
**Prof. Dario A. Bini**

Candidato  
**Giampaolo Mele**

---

ANNO ACCADEMICO 2010-2011



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Presentazione del problema . . . . .	3
1.2	Equazione logistica . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Risoluzione delle DDE</b>	<b>7</b>
2.1	Metodo di Bellman . . . . .	7
2.2	Metodo dei passi . . . . .	8
2.2.1	Ritardo costante . . . . .	8
2.2.2	Ritardo variabile . . . . .	10
2.2.3	Criterio per la scelta della suddivisione . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Estensione continua di metodi numerici per IVP</b>	<b>13</b>
3.1	Metodi di Runge-Kutta . . . . .	16
3.1.1	Estensione continua dei metodi di Runge-Kutta . . . . .	17
3.1.2	Metodi di collocazione polinomiale . . . . .	19
3.1.3	Esempi . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Approccio standard per DDE</b>	<b>23</b>
4.1	Localizzazione delle discontinuità . . . . .	24
4.2	Ritardo dipendente dal tempo . . . . .	25
4.3	Ritardo dipendente dallo stato . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Implementazione in matlab</b>	<b>31</b>
5.1	Codice . . . . .	32
5.2	Esperimenti numerici . . . . .	37
	<b>Conclusioni ed ulteriori applicazioni</b>	<b>41</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>45</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Presentazione del problema

Le equazioni differenziali con ritardo sono alla base di molti modelli fisici, ingegneristici e biologici, l'interesse per tali problemi è aumentato di recente in seguito allo sviluppo dei computer e all'aumento della potenza di calcolo. Un'equazione differenziale con ritardo è della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Questo è il caso più complesso di equazione differenziale con ritardo, a volte è sufficiente considerare il ritardo costante, quindi problemi del tipo

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

La funzione  $\phi(t)$  è detta storia e nel caso di ritardo costante è sufficiente che il suo dominio sia  $[t_0 - \tau, t_0]$ .

### 1.2 Equazione logistica

Un primo esempio di equazione differenziale con ritardo lo abbiamo nella biologia [Erneux 2009, pag. 9-13]: nel 1838 Pierre Francois Verhulst pubblicò un articolo in cui proponeva un modello matematico per descrivere la crescita delle popolazioni, tale modello si riassume nella seguente equazione differenziale (equazione logistica)

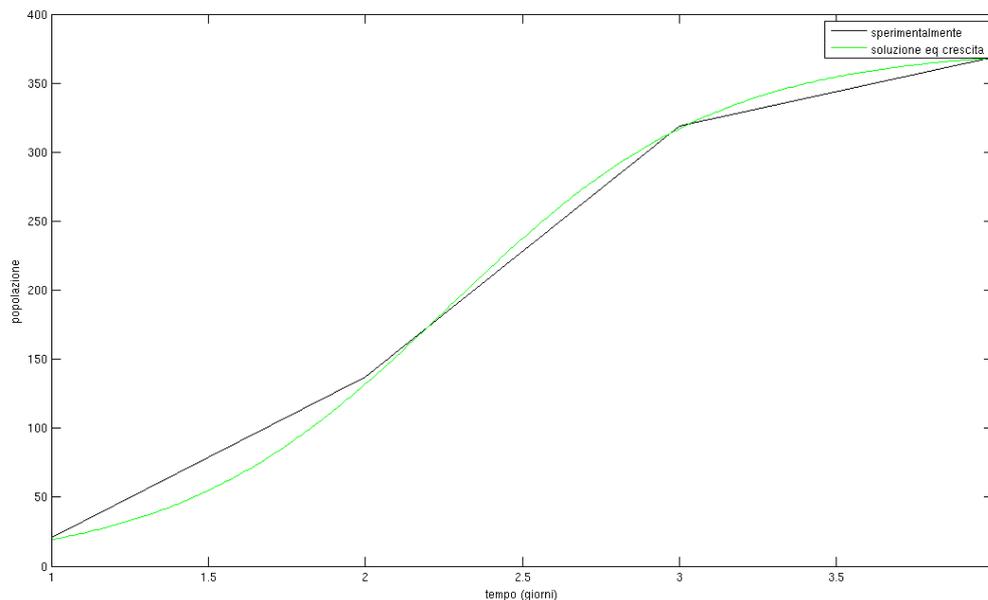
$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

- $N$  è il numero di individui della specie
- $r$  è il tasso di crescita
- $K$  è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

La soluzione di tale equazione è

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

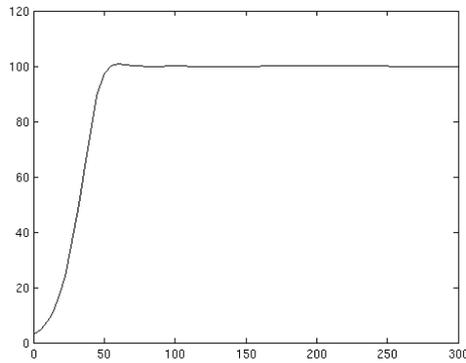
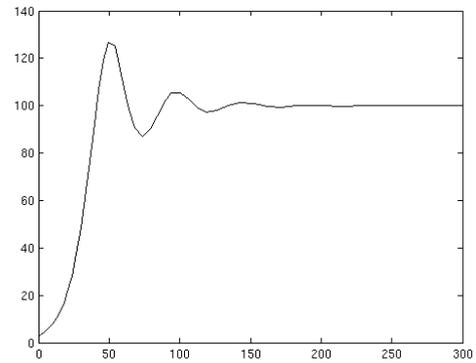
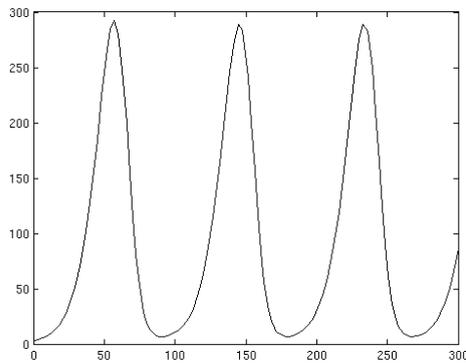
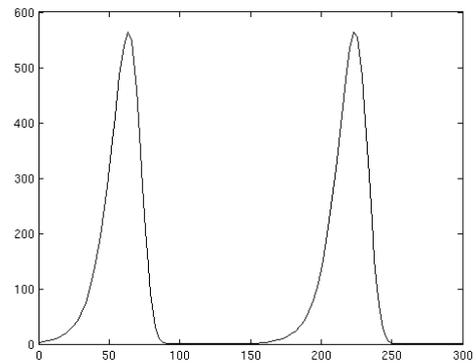
Figura 1.1: Esempio: crescita di *Paramecium caudatum*  $N(4) \simeq K$



Questa è una funzione crescente e limitata, infatti gli individui tendono a riprodursi fino ad arrivare al numero di saturazione  $K$ , daltronde le misurazioni indicano che il numero di individui di alcune specie in alcuni periodi decresce per poi aumentare nuovamente seguendo un andamento oscillatorio, quindi nasce l'esigenza di cambiar modello oppure di correggere l'attuale. L'equazione logistica sottintende che il tasso di nascita/morte degli individui della specie risponda istantaneamente ai cambiamenti della dimensione della popolazione daltronde ci sono dei casi in cui gli individui di una certa specie sentono l'impulso di riprodursi ma non lo fanno subito ma con un certo ritardo, ciò succede se ad esempio sono coscienti della disponibilità di cibo oppure possono essere condizionati dall'ambiente. Hutchinson fu il primo matematico a introdurre il fattore di ritardo nell'equazione logistica per spiegare i fenomeni oscillatori, in tal caso l'equazione diventa

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right)$$

**Esempio 1.1.** Supponiamo che il numero massimo di individui di una certa specie che possono essere presenti in un determinato ambiente sia  $K = 100$ , che il tasso di crescita sia del 10% ovvero  $r = 0.1$ , allora risolvendo l'equazione logistica si ottengono risultati diversi in base al ritardo (Figura 1.2). Il ritardo influisce sulla stabilità della soluzione, infatti se  $\tau = 5$  allora il numero di individui cresce fino a stabilizzarsi al numero massimo  $K$ , quindi il ritardo è trascurabile. Se invece  $\tau = 10$  ci sono delle oscillazioni nei tempi iniziali e dopo la soluzione si stabilizza, inoltre il numero di individui supera la capacità massima dell'ambiente. Se invece  $\tau = 20$  allora la soluzione non si stabilizza ma oscilla in continuazione, mentre se  $\tau = 27$  allora il ritardo porta all'estinzione

Figura 1.2: Grafici al variare di  $\tau$ (a)  $\tau = 5$ (b)  $\tau = 10$ (c)  $\tau = 20$ (d)  $\tau = 27$ 

delle specie, infatti anche se la soluzione oscilla con periodicità dopo il primo picco il numero di abitanti è nullo. Un esempio pratico del fenomeno appena descritto è dato dalla specie del lemmini (roditori artici) che hanno dei cicli, ovvero la popolazione cresce e diminuisce seguendo un andamento oscillatorio come nella figura 1.2 (c).

La tesi tratterà dei metodi numerici che si utilizzano per risolvere le equazioni differenziali con ritardo che d'ora in avanti verranno chiamate con l'acronimo DDE (delay differential equation).



## Capitolo 2

# Risoluzione delle DDE

Si considerino le DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

con

- $f$  continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti
- $\tau$  (la funzione ritardo) non negativa, continua e lipschitziana sull'ultimo argomento
- $\phi$  (la storia) continua e lipschitziana
- l'intervallo in cui è definito il problema compatto

Sotto queste ipotesi la soluzione esiste ed è unica (è possibile indebolire queste ipotesi ma in questo contesto è inopportuno). Si mostreranno due metodi per risolvere questi problemi, entrambi riconducono il problema di risolvere una DDE a quello di risolvere problemi ai valori iniziali che d'ora in avanti saranno denotati con l'acronimo IVP (initial value problem).

### 2.1 Metodo di Bellman

Si consideri la DDE con ritardo costante

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

È possibile determinare la soluzione di tale problema nell'intervallo  $[t_0, t_0 + \tau]$  impostando un IVP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), \phi(t - \tau)) & t_0 \leq t \leq \tau \\ y(t_0) = \phi(t_0) \end{cases}$$

Per determinare la soluzione nell'intervallo successivo  $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$  si definisce  $y_1(t) = y(t - \tau)$  mentre  $y_2(t) = y(t)$  quindi si imposta un IVP con dimensione doppia

$$\begin{cases} y_1'(t) = f(t - \tau, y_1(t), \phi(t - 2\tau)) \\ y_2'(t) = f(t, y_2(t), y_1(t)) \\ y_1(t_0 + \tau) = \phi(t_0) \\ y_2(t_0 + \tau) = y(t_0 + \tau) \end{cases}$$

In generale per trovare la soluzione nell'intervallo  $[t_0 + (k - 1)\tau, t_0 + k\tau]$  si dovrà risolvere un IVP con dimensione  $k$  volte quella della DDE iniziale

$$\begin{cases} y_i'(t) = f(t - (k - i)\tau, y_i(t), y_{i-1}(t)) \\ y_i(t_0 + (k - 1)\tau) = y(t_0 + (i - 1)\tau) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq k$$

Il processo termina quando si giunge a  $k\tau \geq t_f$ .

Con questo metodo è sufficiente esser in grado di risolvere gli IVP.

Il metodo è stato mostrato nel caso dei ritardi costanti ma è possibile generalizzarlo.

E' evidente che il costo computazionale è proibitivo dato che è necessario risolvere IVP a dimensione sempre più grande, quindi questo metodo può esser conveniente nel caso in cui il ritardo sia grande e l'intervallo in cui si vuole approssimare la soluzione sia piccolo.

## 2.2 Metodo dei passi

### 2.2.1 Ritardo costante

Si consideri la DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Si voglia determinare la soluzione nell'intervallo  $[t_0, t_0 + \tau]$ , dato che in questo intervallo si ha che  $t - \tau \in [t_0 - \tau, t_0]$  è possibile trasformare il problema in

$$\begin{cases} y_1'(t) = f(t, y_1(t), \phi(t - \tau)) & t \in [t_0, t_0 + \tau] \\ y_1(t_0) = \phi(t_0) \end{cases}$$

e quest'ultimo è un IVP, risolto questo è possibile determinare la soluzione in  $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ , infatti si avrà un nuovo IVP

$$\begin{cases} y_2'(t) = f(t, y_2(t), y_1(t - \tau)) & t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau] \\ y_2(t_0 + \tau) = y_1(t_0 + \tau) \end{cases}$$

chiaramente la soluzione  $y(t)$  in  $[t_0, t_0 + 2\tau]$  sarà l'incollamento di  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , in generale per avere  $y(t)$  nell'intervallo  $[t_0, t_0 + N\tau]$  si dovranno risolvere  $N$  IVP

$$1 \leq i \leq N \quad \begin{cases} y_i'(t) = f(t, y_i(t), y_{i-1}(t - \tau)) & t \in [t_0 + (i - 1)\tau, t_0 + i\tau] \\ y_i(t_0 + (i - 1)\tau) = y_{i-1}(t_0 + (i - 1)\tau) \end{cases}$$

dove si pone  $y_0(t) := \phi(t)$ , e chiaramente  $y(t)$  sarà l'incollamento di  $y_1(t), \dots, y_N(t)$ , ovvero

$$y(t) = y_i(t) \quad \text{se} \quad (i-1)\tau \leq t \leq i\tau$$

**Esempio 2.1.** Si consideri la seguente DDE

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & t \in [0, T] \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

Usando il metodo dei passi, si determina la soluzione in  $[0, 1]$ , in questo caso si ha l'IVP

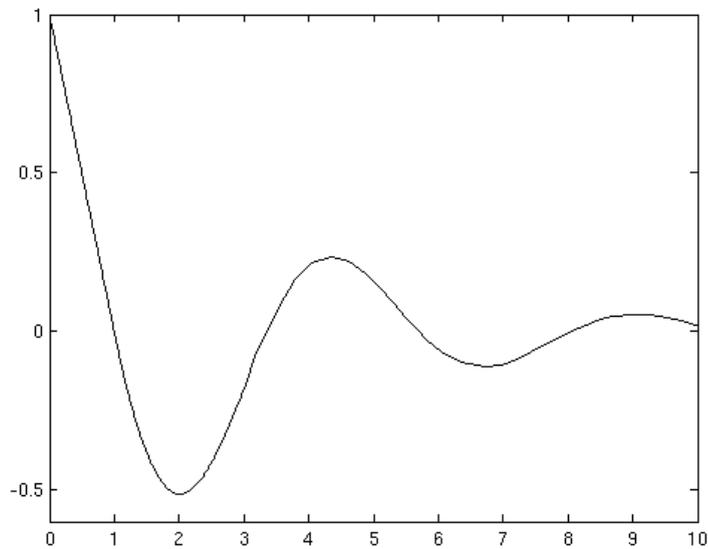
$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0, 1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione  $y_1(t) = 1 - t$ . Nell'intervallo  $[1, 2]$  si ha

$$\begin{cases} y_2'(t) = t - 2 & t \in [1, 2] \\ y_2(1) = 0 \end{cases}$$

Cha ha come soluzione  $y_2(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}$ . Andando avanti si trova la soluzione su tutto  $[0, T]$ .

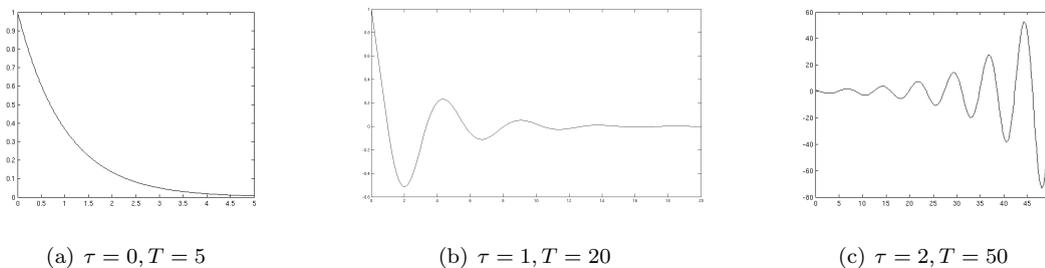
Figura 2.1: Grafico della soluzione con  $T=10$



**Osservazione 2.1.** Si prenda in considerazione l'esempio appena fatto per fare un confronto tra IVP e DDE.

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-\tau) & t \in [0, T] \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

Figura 2.2: Grafici al variare del ritardo



Se il ritardo  $\tau$  è nullo allora il problema è un IVP e di cui si conosce già che la soluzione  $x(t) = e^{-t}$ . Una proprietà importante di questa funzione è che asintoticamente va a zero.

Introducendo un ritardo non trascurabile è lecito chiedersi se questa proprietà si conserva. Come è possibile vedere dai grafici (e non è difficile dimostrarlo formalmente) se il ritardo non è troppo grande la soluzione continua a tendere a zero (a limite oscillando), ma se il ritardo diventa troppo grande (ad esempio  $\tau = 2$ ) la soluzione inizia ad oscillare divergendo. Ciò intuitivamente fa pensare all'esistenza di diagrammi di biforcazione.

### 2.2.2 Ritardo variabile

Si consideri una DDE con ritardo non costante

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

data la suddivisione

$$\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$$

risolvere la DDE equivale a risolvere  $N$  problemi ai valori iniziali

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) = f(t, w_{n+1}(t), x(t - \tau(t, w_{n+1}(t)))) & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ w_{n+1}(t_n) = y_n \end{cases} \quad n = 0, \dots, N - 1$$

dove si pone

$$y_n := y(t_n) \quad x(s) := \begin{cases} \phi(s) & s \leq t_0 \\ w_i(s) & t_{i-1} \leq s \leq t_i \end{cases}$$

Supponendo nota al lettore la teoria sulla risoluzione numerica degli IVP, ci si chiede se questa possa essere utilizzata per risolvere le DDE. Si osserva subito che anche se si è ricondotto il problema delle DDE a quello di risolvere IVP si ha che la risoluzione del  $(n + 1)$ -esimo IVP

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) = f(t, w_{n+1}(t), x(t - \tau(t, w_{n+1}(t)))) & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ w_{n+1}(t_n) = y_n \end{cases}$$

prevede la conoscenza di  $w_1(t), \dots, w_n(t)$ , ovvero detta in un altro modo, è necessario conoscere la soluzione  $y(t)$  nell'intervallo  $[t_0, t_n]$ , daltronde usando un qualsiasi metodo numerico per risolvere IVP si ottiene un'approssimazione di  $y$  nei vari punti di discretizzazione, quindi  $y_0, y_1, \dots, y_n$  con

$y_i \simeq y(t_i)$ , daltronde potrebbe esser necessario conoscere la soluzione anche nell'intervallo  $[t_i, t_{i+1}]$ , quindi si cercherà un'approssimazione continua della soluzione dei vari IVP. Si presentano due strade: interpolare la soluzione oppure estendere i metodi numerici (discreti) a metodi numerici continui. E' preferibile usare la seconda strada dato che ci sono risultati di convergenza più forti; nel prossimo capitolo si introdurranno le estensioni continue dei metodi numerici.

### 2.2.3 Criterio per la scelta della suddivisione

Nell'algorithmo appena descritto, affinché il problema sia ben posto è necessario scegliere nel modo opportuno  $\Delta$ . Quello che si vuole è che il terzo termine  $t - \tau$  (detto anche argomento deviato) coinvolga solo il passato e non il presente, ovvero si richiede che, data la suddivisione  $\Delta$ , valga  $t - \tau < t_n$  per ogni valore  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ , ovvero

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

Se  $\tau$  è una funzione positiva allora non si hanno problemi dato che questa assume minimo (positivo) in un intervallo compatto. Se invece  $\tau$  è non negativa allora l'algorithmo appena descritto va leggermente modificato, ad esempio se  $\tau = \tau(t)$  e questa si annulla in  $\widehat{t}_1, \dots, \widehat{t}_m$  allora sarà sufficiente risolvere la DDE iniziale in  $[t_0, \widehat{t}_1 - \delta]$  (e qui il ritardo è positivo), risolverla successivamente in  $[\widehat{t}_1 + \delta, \widehat{t}_2 - \delta]$  e così via. Chiaramente questa variante del metodo dei passi presenta un problema dato che in  $[t_i - \delta, t_i + \delta]$  non si conosce la soluzione, daltronde ci sono diverse strade, si può pensare alle interpolazioni oppure per  $\delta$  abbastanza piccolo potrebbe non esser necessario conoscere la soluzione. Se  $\tau$  si annulla in un intervallo  $[\widehat{t}_1, \widehat{t}_2]$  (chiuso per questioni topologiche) allora si risolve la DDE in  $[t_0, \widehat{t}_1 - \delta]$  mentre in  $[\widehat{t}_1, \widehat{t}_2]$  si avrà un IVP

$$\begin{cases} w_2'(t) = f(t, w_2(t), w_2(t)) \\ w_2(\widehat{t}_1) = w_1(\widehat{t}_1 - \delta) \end{cases}$$

Se  $\tau$  dipende anche dallo stato, ovvero  $\tau = \tau(t, y(t))$  è possibile far variare il passo di discretizzazione, ovvero ad ogni iterata dell'algorithmo si controlla che l'argomento deviato sia minore di  $t_n$  altrimenti si dimezza il passo, si procede in questo modo sino a che non si individua il punto  $\widehat{t}$  in cui  $\tau$  si annulla e quindi si procede prendendo questo come primo estremo e risolvendo il problema in  $[\widehat{t}, t_n]$ . Se  $\tau$  si annulla in un intervallo compatto allora la DDE è in realtà un IVP, il problema è stimare l'ampiezza di tale intervallo, ma come si può ben immaginare si utilizza una strategia simile.

Ad ogni modo in questo contesto si evita di approfondire la questione per rendere scorrevole la lettura, basti sapere che il metodo dei passi si generalizza anche al caso in cui  $\tau$  è non positiva, quindi d'ora in avanti si considererà  $\tau$  positiva e  $\Delta$  che rispetta la condizione  $t_{n+1} - t_n < \min \tau$ .



## Capitolo 3

# Estensione continua di metodi numerici per IVP

Dato un IVP

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se  $g$  è continua e lipschitziana rispetto al secondo argomento allora il problema ammette soluzioni.

**Definizione 3.1** (Metodi numerici per IVP). Data una suddivisione  $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$  un metodo numerico a  $k$  passi è una successione

$$y_{n+1} = \alpha_{n,1}y_n + \dots + \alpha_{n,k}y_{n-k+1} + h_{n+1}\phi(y_n, \dots, y_{n-k+1}) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

dove  $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$  e si suppongono noti i primi  $k$  termini  $y_0, \dots, y_{k-1}$ . Inoltre la funzione  $\phi$  è lipschitziana.

**Definizione 3.2** (Estensione continua). Un'estensione continua (o interpolatore) di un metodo numerico è una funzione  $\eta(t)$  polinomiale a tratti definita dalle restrizioni su ogni intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$  di una interpolazione basata sui valori calcolati in un intervallo più ampio possibile  $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}]$  con  $i_n, j_n \geq 0$  della forma

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = \beta_{n,1}(\theta)y_{n+j_n} + \dots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta)y_{n-i_n} + h_{n+1}\Psi(y_{n+j_n}, \dots, y_{n-i_n}, \theta) \quad \theta \in [0, 1]$$

dove  $\eta(t)$  è continua, quindi

$$\eta(t_n) = y_n \quad \text{e} \quad \eta(t_{n+1}) = y_{n+1}$$

Inoltre la funzione  $\Psi$  è lipschitziana.

**Definizione 3.3** (Consistenza di un metodo numerico). Un metodo numerico è consistente di ordine  $p$  se per ogni IVP e per ogni suddivisione  $\Delta$ ,  $p \geq 1$  è il più grande intero tale che

$$\|y(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}\| = O(h_{n+1}^{p+1}) \quad \text{per} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

dove

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} = & \alpha_{n,1}y(t_n) + \cdots + \alpha_{n,k}y(t_{n-k+1}) \\ & + h_{n+1}\phi(y(t_n), \dots, y(t_{n-k+1}))\end{aligned}$$

**Definizione 3.4** (Consistenza di un'estensione continua). Un'estensione continua è consistente di ordine  $q$  se per ogni IVP e per ogni suddivisione  $\Delta$ ,  $q \geq 1$  è il più grande intero tale che

$$\max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|y(t) - \tilde{\eta}(t)\| = O(h_{n+1}^{q+1}) \quad \text{per} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

dove

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(t_n + \theta h_{n+1}) = & \beta_{n,1}(\theta)y(t_{n+j_n}) + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta)y(t_{n-i_n}) \\ & + h_{n+1}\Psi(y(t_{n+j_n}), \dots, y(t_{n-i_n}), \theta)\end{aligned}$$

**Definizione 3.5** (Convergenza). Un metodo numerico è convergente di ordine  $p$  se per ogni IVP e per ogni suddivisione  $\Delta$ , posto  $h = \max_{1 \leq n \leq N} t_n$  vale

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^p)$$

la sua estensione continua è convergente di ordine  $q$  se

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^q)$$

**Teorema 3.1.** Un metodo numerico ad un passo è convergente di ordine  $p$  se e soltanto se è consistente di ordine  $p$ . Inoltre se tale metodo ammette un interpolatore con ordine di consistenza  $q$  allora l'interpolatore è convergente con ordine  $q' = \min\{p, q + 1\}$ .

*Dimostrazione.* Segue da [Ascher-Petzold 1997, par 4.3] e dal teorema 3.2 □

I metodi a più passi possono esser consistenti ma non convergenti, daltronde aggiungendo delle ipotesi è possibile dare criteri di convergenza come mostra il seguente teorema

**Teorema 3.2.** Sia

$$\begin{aligned}y_{n+1} = & \alpha_{n,1}y_n + \cdots + \alpha_{n,k}y_{n-k+1} & 0 \leq n \leq N-1 \\ & + h_{n+1}\phi(y_n, \dots, y_{n-k+1})\end{aligned}$$

un metodo numerico a  $k$  passi convergente di ordine  $p$  e sia

$$C_n = \begin{pmatrix} \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,k-1} & \alpha_{n,k} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la sua matrice associata allora se

- esiste una norma  $\|\cdot\|_*$  tale che  $\|C_n\|_* \leq 1$
- la funzione  $g$  (che definisce l'IVP) è di classe  $C^p$
- i punti  $y_0, \dots, y_{k-1}$  sono una approssimazione di ordine  $p$  della soluzione esatta

allora il metodo è convergente di ordine  $p$ , inoltre se il metodo numerico ammette un'estensione continua consistente di ordine  $q$  allora tale estensione è convergente di ordine  $q' = \min\{p, q + 1\}$

*Dimostrazione.* Per ipotesi si ha che

$$y(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1} = \varepsilon_{n+1} \quad \text{con} \quad \|\varepsilon_{n+1}\| = ch_{n+1}^{p+1}$$

posto

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_n &= [y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}]^T \\ \mathbf{y}(t_n) &= [y(t_n), y(t_{n-1}), \dots, y(t_{n-k+1})]^T \end{aligned}$$

usando la definizione di  $y_n$  si ha

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1} = \mathcal{C}_n(\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n) + h_{n+1}\Gamma_n + \mathbf{E}_{n+1}$$

dove

$$\mathcal{C}_n = C_n \otimes I \quad \Gamma_n = [\phi(\mathbf{y}(t_n) - \phi(\mathbf{y}_n)), 0, \dots, 0]^T \quad \mathbf{E}_{n+1} = [\varepsilon_{n+1}, 0, \dots, 0]$$

Non è difficile dimostrare che se  $\|\mathcal{C}_n\| \leq 1$  allora  $\|\mathcal{C}_n\| \leq 1$  (ad esempio si può usare il principio di equivalenza delle norme e dimostrarlo con una norma comoda come  $\|\cdot\|_\infty$ ), quindi passando alle norme si ha

$$\|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}\| \leq \|\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n\| + h_{n+1}\|\Gamma_n\| + \|\mathbf{E}_{n+1}\|$$

sfruttando la lipshitzianità di  $\phi$  si ha che esiste  $Q > 0$  tale che

$$\|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}\| \leq (1 + hQ)\|\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n\| + c'h^{p+1}$$

iterando si arriva a

$$\|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}\| \leq e^{Q(t_f - t_0)}\|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\| + \frac{e^{Q(t_f - t_0)} - 1}{Q}c'h^p$$

daltronde per ipotesi i primi  $k$  punti sono un'approssimazione di ordine  $p$ , quindi  $\|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\| = O(h^p)$ , pertanto segue la prima parte della tesi.

Resta da mostrare la convergenza dell'estensione continua, daltronde per ipotesi

$$y(t_n + \theta h_{n+1}) - \tilde{\eta}(t_n + \theta h_{n+1}) = \varepsilon_{n+1}(\theta) \quad \text{con} \quad \|\varepsilon_{n+1}(\theta)\| = O(h_{n+1}^{q+1})$$

quindi

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \max_{0 \leq \theta \leq 1} \|\varepsilon_{n+1}(\theta)\| = O(h^{q+1})$$

Usando come nel caso precedente la lipshitzianità di  $\phi$  si conclude

$$\|y(t_n + \theta h_{n+1}) - \eta(t_n + \theta h_{n+1})\| \leq O(h^p) + O(h^{q+1})$$

□

**Esempio 3.1** (Interpolazioni cubiche di Hermite). Se un metodo numerico è consistente di ordine  $p \geq 3$ , allora è possibile estendere questo metodo ad un metodo continuo consistente di ordine 3 usando le interpolazioni cubiche di Hermite, ovvero calcolato  $y_{n+1}$  approssimiamo la soluzione in  $[t_n, t_{n+1}]$  con

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = (1 - \theta)y_n + \theta y_{n+1} + \theta(\theta - 1)[(1 - 2\theta)(y_{n+1} - y_n) + (\theta - 1)h_n f(y_n, t_n) + \theta h_n f(y_{n+1}, t_{n+1})]$$

### 3.1 Metodi di Runge-Kutta

Si consideri l'IVP

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sia  $\Delta = \{t_0, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$  la suddivisione, allora è possibile dividere il problema in  $N$  problemi più piccoli della forma

$$\begin{cases} y'_n(t) = g(t, y_n(t)) & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ y_n(t_n) = y_{n-1}(t_n) \end{cases}$$

Quindi la soluzione  $y$  sarà l'incollamento delle funzioni  $y_n$  e poniamo  $y_0(t_0) = y_0$ .

A questo punto si riformula il problema in forma integrale

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t, y(t)) dt$$

per approssimare l'integrale della formula precedente si usa una formula di integrazione numerica, quindi sia  $t_{n+1}^i = t_n + c_i h_{n+1}$  una suddivisione dell'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$  allora

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s, y(s)) ds \simeq h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_i g(t_{n+1}^i, y(t_{n+1}^i))$$

pertanto

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_i g(t_{n+1}^i, y(t_{n+1}^i))$$

questo rende possibile la costruzione di un metodo numerico ad un passo, infatti troviamo subito

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_i g(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i)$$

dove si è posto  $Y_{n+1}^i \simeq y(t_{n+1}^i)$ , quindi per calcolare queste approssimazioni è possibile riutilizzare la stessa tecnica con l'integrazione numerica e ottenere

$$Y_{n+1}^i = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} g(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j) \quad 1 \leq i \leq \nu$$

in conclusione è possibile esprimere il metodo ad un passo come

$$\begin{cases} Y_{n+1}^i = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} g(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j) & 1 \leq i \leq \nu \\ y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_i g(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) \end{cases}$$

Questa classe di metodi è nota come metodi di Runge-Kutta a  $\nu$  stadi.

Per rappresentare un metodo di Runge-Kutta si userà la seguente tabella

$c_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$c_m$	$a_{m1}$	$\dots$	$a_{mm}$
	$b_1$	$\dots$	$b_m$

**Teorema 3.3** (Ordine massimo). Un metodo di Runge-Kutta a  $\nu$  stadi ha ordine  $p \leq 2\nu$

*Dimostrazione.* Segue dalle argomentazioni di [Ascher-Petzold 1997, par 4.3].  $\square$

### 3.1.1 Estensione continua dei metodi di Runge-Kutta

L'estensione continua di un metodo di Runge-Kutta è costruita a partire dalla suddivisione dell'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$ , quindi ha la forma

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_i(\theta) g(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

dove  $b_i(\theta)$  sono dei polinomi opportuni con grado  $\leq \delta$  detto grado dell'interpolatore.

Affinchè l'interpolatore sia continuo bisogna chiedere

$$b_i(0) = 0 \quad b_i(1) = 1 \quad 1 \leq i \leq \nu$$

Questi sono detti interpolatori di prima classe e analizzeremo soltanto questa classe di estensioni dei metodi di Runge-Kutta.

**Osservazione 3.1.** Dal teorema 3.2 segue che se un metodo di Runge-Kutta è consistente allora è convergente, se inoltre ammette un'interpolatore consistente allora questo è anche convergente.

**Teorema 3.4.** Se un metodo di Runge-Kutta ammette un interpolatore convergente di ordine  $q$  e di grado  $\delta \geq q$  allora

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|y^{(j)}(t) - \eta^{(j)}(t)\| = O(h^{q-j+1}) \quad 1 \leq j \leq \delta$$

**Teorema 3.5.** Se un metodo di Runge-Kutta ammette un interpolatore convergente di ordine  $q$  e di grado  $\delta \geq q$  allora esiste un altro interpolatore convergente di ordine  $q$  con grado  $q$ .

Le dimostrazioni di questi teoremi si trovano su [Bellen-Zennaro 2003, teo 5.1.5 e 5.1.6]

Da questi due teoremi segue che è necessario trovare interpolatori con uguale grado e ordine di consistenza, non soltanto per abbassare il costo computazionale di calcolo ma anche perchè avere interpolatori con grado troppo alto può essere pericoloso dato che se l'interpolatore ha ordine  $q$  e grado  $\delta \geq q + 1$  allora può succedere che

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\eta^{(k)}(t_n + \theta h_{n+1})| = \infty \quad q + 2 \leq k \leq \delta$$

Quindi d'ora in avanti si assumerà che l'interpolatore abbia uguale ordine e grado.

**Teorema 3.6** (Esistenza degli interpolatori di prima classe). Ogni metodo di Runge-Kutta di ordine  $p$  ha un interpolatore  $\eta(t)$  di ordine (e grado)  $q = 1, \dots, \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$

*Dimostrazione.* Per  $1 \leq i \leq \nu$ , siano  $b_i(\theta)$  i polinomi che soddisfano

$$\beta_i(0) = 0 \quad \int_0^1 \theta^r b_i'(\theta) d\theta = b_i c_i^r \quad 0 \leq r \leq q - 1$$

Per  $r = 0$  la condizione diventa  $b_i(1) = b_i$ , quindi i polinomi  $b_i(\theta)$  definiscono un interpolatore continuo  $\eta(t)$ , bisogna ora mostrare la convergenza.

Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_n) = y(t_n) \\ w'_1(t) = (t - t_n)g(t, y(t)) \\ w_1(t_n) = 0 \\ \vdots \\ w'_{q-1}(t) = (t - t_n)^{q-1}g(t, y(t)) \\ w_{q-1}(t_n) = 0 \end{cases}$$

sia  $(y_{n+1}, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{q-1})$  la soluzione numerica del sistema al tempo  $t_{n+1}$ , allora dalla condizione imposta sui polinomi  $b_i(\theta)$  per  $r = 0$

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_i g(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) = y_n + h_{n+1} \int_0^1 \eta'(t_n + \theta h_{n+1}) d\theta$$

mentre per  $r = 1, \dots, q-1$  abbiamo

$$\bar{w}_r = h_{n+1}^{r+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_i c_i^r g(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) = h_{n+1}^{r+1} \int_0^1 \theta^r \eta'(t_n + \theta h_{n+1}) d\theta$$

quindi, dato che

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = y_n + h_{n+1} \int_0^1 y'(t_n + \theta h_{n+1}) dt \\ w_r(t_{n+1}) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)^r y'(t) dt = h_{n+1}^{r+1} \int_0^1 \theta^r y'(t_n + \theta h_{n+1}) d\theta \end{aligned}$$

il metodo per ipotesi ha ordine  $p$  allora vale che

$$\left\| \int_0^1 \theta^r [y'(t_n + \theta h_{n+1}) - \eta'(t_n + \theta h_{n+1})] d\theta \right\| = O(h_{n+1}^{p-r}) \quad r = 0, \dots, q-1 \quad (3.1)$$

Si consideri l'errore

$$y(t_n + \theta h_{n+1}) - \eta(t_n + \theta h_{n+1}) = \sum_{k=1}^p e_k(\theta) h_{n+1}^k + O(h_{n+1}^{p+1})$$

dove  $e_k(\theta)$  sono polinomi con  $e_k(0) = 0$  e

$$\deg e_k(\theta) \begin{cases} \leq q & \text{se } k \leq q \\ \leq k & \text{se } k > q \end{cases}$$

(per verificarlo basta usare l'espansione in serie di Taylor di  $y(t)$ )

Derivando si ottiene

$$y'(t_n + \theta h_{n+1}) - \eta'(t_n + \theta h_{n+1}) = \sum_{k=1}^p e'_k(\theta) h_{n+1}^{k-1} + O(h_{n+1}^p)$$

usando la (3.1) si ottiene

$$\int_0^1 \theta^r e'_k(\theta) d\theta = 0 \quad \text{per} \quad r + k \leq p$$

Quindi per  $r = 0, \dots, q - 1$  si ha che  $e'_k(\theta)$  è un polinomio di grado al più  $q - 1$  e per tutti i  $k \leq q$  segue che

$$e_k(\theta) \equiv 0 \quad \text{per} \quad 1 \leq k \leq \tilde{q} = \min \{q, p - q + 1\}$$

E quindi l'interpolante ha ordine  $\tilde{q}$ .

In conclusione si osserva che  $\tilde{q}$  è massimizzato dalla scelta di  $q = \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$  e per ogni  $q \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$  si ha  $\tilde{q} = q$  □

La seguente tabella mostra quali sono le condizioni necessarie affinché un interpolatore sia convergente

Ordine	Condizione
1	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i(\theta) = \theta$
2	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i(\theta) c_i = \frac{1}{2} \theta^2$
3	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i(\theta) c_i^2 = \frac{1}{3} \theta^3$ $\sum_{i,j=1}^{\nu} b_i(\theta) a_{i,j} c_i = \frac{1}{6} \theta^3$
4	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i(\theta) c_i^3 = \frac{1}{4} \theta^4$ $\sum_{i,j=1}^{\nu} b_i(\theta) a_{i,j} c_i c_j = \frac{1}{8} \theta^4$ $\sum_{i,j=1}^{\nu} b_i(\theta) a_{i,j} c_j^2 = \frac{1}{12} \theta^4$ $\sum_{i,j,k=1}^{\nu} b_i(\theta) a_{i,j} a_{j,k} c_k = \frac{1}{24} \theta^4$

**Teorema 3.7.** Se un metodo di Runge-Kutta ha un interpolatore convergente di ordine (e grado)  $q \geq 2$  allora ne ha anche uno di ordine (e grado)  $\tilde{q} \leq q - 1$ .

*Dimostrazione.* Segue facilmente dai risultati precedenti. □

In conclusione si ha che esistono sempre interpolatori di prima classe fino all'ordine  $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$ .

### 3.1.2 Metodi di collocazione polinomiale

Una classe importante di metodi di Runge-Kutta che permette la costruzione immediata degli interpolatori sono i metodi di collocazione polinomiale. L'idea alla base di questi metodi è quella di cercare una soluzione polinomiale a tratti, quindi si cerca  $\eta(t)$  di grado  $\leq \nu$  che soddisfi

$$\begin{cases} \eta'(t_{n+1}^i) = g(t_{n+1}^i, \eta(t_{n+1}^i)) & 1 \leq i \leq \nu \\ \eta(t_n) = y_n \end{cases}$$

a questo punto è possibile determinare i coefficienti del metodo e l'interpolatore

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \int_0^{c_i} L_j(\xi) d\xi & i, j &= 1, \dots, \nu \\ b_i(\theta) &= \int_0^\theta L_i(\xi) d\xi & i &= 1, \dots, \nu \end{aligned}$$

dove

$$L_i(\xi) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\nu} \frac{\xi - c_k}{c_i - c_k}$$

**Teorema 3.8.** Per ogni scelta di  $c_1, \dots, c_m \in [0, 1]$  si ha che il metodo di collocazione polinomiale ha ordine  $p \geq \nu$  e l'interpolatore ha ordine  $q = \nu$ , inoltre come conseguenza del teorema (3.1) segue che l'interpolatore è convergente con ordine  $q' = \nu$  (se  $p = \nu$ ) oppure  $q' = \nu + 1$  (se  $p > \nu$ ).

### 3.1.3 Esempi

**Esempio 3.2** (Metodi di Gauss). I metodi di Gauss a  $\nu$  stadi hanno ordine  $p = 2\nu$ , gli interpolatori hanno ordine di consistenza  $q = \nu$  e ordine di convergenza  $q' = \min\{p, q + 1\}$

- $\nu = 1$  (punto di mezzo) :  $p = 2, q = 1, q' = 2$ ;

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \quad b_1(\theta) = \theta$$

- $\nu = 2$  (Hammer-Hollingworth):  $p = 4, q = 2, q' = 3$ ;

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{aligned} b_1(\theta) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\theta \left( \theta - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ b_2(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\theta \left( \theta - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned}$$

**Esempio 3.3** (Metodi di Radau). I metodi di Radau a  $\nu$  stadi hanno ordine  $p = 2\nu - 1$ , gli interpolatori hanno ordine di consistenza  $q = \nu$  e ordine di convergenza  $q' = \min\{p, q + 1\}$

- $\nu = 1$  (Eulero) :  $p = 1, q = 1, q' = 1$ ;

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad b_1(\theta) = \theta$$

- $\nu = 2$  (Ehle):  $p = 3, q = 2, q' = 3$ ;

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$b_1(\theta) = -\frac{3}{4}\theta(\theta - 2)$$

$$b_2(\theta) = \frac{3}{4}\theta\left(\theta - \frac{2}{3}\right)$$

**Esempio 3.4** (Metodi di Lobatto). I metodi di Lobatto a  $\nu$  stadi hanno ordine  $p = 2\nu - 2$ , gli interpolatori hanno ordine di consistenza  $q = \nu$  e ordine di convergenza  $q' = \min\{p, q + 1\}$

- $\nu = 2$  (trapezi):  $p = 2, q = 2, q' = 2$ ;

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$b_1(\theta) = -\frac{1}{2}\theta(\theta - 2)$$

$$b_2(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2$$

- $\nu = 2$  (Ehle):  $p = 4, q = 3, q' = 4$ ;

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$b_1(\theta) = 2\theta\left(\frac{1}{3}\theta^2 - \frac{3}{4}\theta + \frac{1}{2}\right)$$

$$b_2(\theta) = -4\theta^2\left(\frac{1}{3}\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$b_3(\theta) = 2\theta^2\left(\frac{1}{3}\theta - \frac{1}{4}\right)$$



## Capitolo 4

# Approccio standard per DDE

Per approccio standard si intende l'utilizzo dei metodi numerici continui per la risoluzione delle DDE. Come si è visto nel capitolo precedente, data una suddivisione

$$\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$$

risolvere una DDE equivale a risolvere  $N$  IVP con soluzione continua.

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) = f(t, w_{n+1}(t), x(t - \tau(t, w_{n+1}(t)))) & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ w_{n+1}(t_n) = y_n \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

dove

$$y_n := y(t_n) \quad x(s) := \begin{cases} \phi(s) & s \leq t_0 \\ w_i(s) & t_{i-1} \leq s \leq t_i \end{cases}$$

Daltronde nel momento in cui utilizziamo un metodo numerico con ordine di consistenza  $p$  chiediamo che la soluzione  $y$  abbia le prime  $p$  derivate continue e questo non è vero per le DDE.

Per vederlo è sufficiente riprendere l'esempio 2.1, in questo caso abbiamo una discontinuità già nella derivata prima, infatti  $y'(0)^- = 0$  mentre  $y'(0)^+ = -y(-1) = -1$ , quindi la derivata prima è discontinua in 0. Ripetendo lo stesso ragionamento troviamo che  $y''(t) = -y'(t-1)$ , quindi  $y''(1)^- = -1$  mentre  $y''(1)^+ = 1$ , in generale si trova che  $y^{(k+1)}$  ha una discontinuità in  $k$ .

**Esempio 4.1** (Ritardo costante). In generale la soluzione di una DDE con ritardo costante

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

può avere le derivate discontinue nei punti  $t_0 + k\tau$  al variare di  $k \in \mathbb{Z}$ ; in particolare  $y^{(k+1)}$  può avere una discontinuità nel punto  $t_0 + k\tau$ .

Pertanto per risolvere una DDE con ritardo costante certamente è necessario scegliere, ai fini della consistenza del metodo, una suddivisione  $\Delta$  che contenga i punti  $t_0 + k\tau \leq t_f$ .

**Definizione 4.1.** Il punto  $\xi$  è una discontinuità di ordine  $k$  se per  $0 \leq s \leq k-1$  si ha che  $y^{(s)}(\xi)$  esiste e  $y^{(k)}$  è lipschitziana e continua in un intorno di  $\xi$ , mentre  $y^{(k+1)}$  è discontinua in  $\xi$

Nelle DDE si verifica il fenomeno della “propagazione delle discontinuità”, in particolare se la soluzione ha una discontinuità di ordine  $k$  allora ne ha anche una di ordine  $k + 1$  a causa del ritardo. D’ora in avanti con il termine discontinuità si intenderà discontinuità di grado  $k$ .

Pertanto quando si utilizza un metodo consistente di ordine  $p$  è necessario includere nella suddivisione  $\Delta$  le discontinuità fino all’ordine  $p - 1$ .

## 4.1 Localizzazione delle discontinuità

Si consideri una DDE della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

allora il numero e la collocazione delle discontinuità delle soluzione dipende dal comportamento della funzione

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$$

Questa funzione è chiamata argomento deviato.

Si osserva subito che  $\alpha(t) \leq t$  essendo il ritardo una funzione non negativa. Per esaminare il caso generale, supponiamo  $\alpha(t) > t_0$  e che la storia non si incolli alla soluzione in modo liscio, nel senso che in un intorno di  $t_0$  la soluzione non è derivabile con continuità, ovvero  $\phi'(t_0)^- \neq y'(t_0) = f(t_0, \phi(t_0), \phi(\alpha(t_0)))$ . Non è difficile vedere che se le funzioni  $f, \phi, \alpha$  sono continue allora  $y'$  è continua per  $t > t_0$ .

Se inoltre queste funzioni sono anche derivabili allora esiste  $y''$  per ogni valore  $t$  eccetto i punti  $\xi$  tali che sono radici semplici dell’equazione  $\alpha(t) = t_0$ , infatti formalmente

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t), y(\alpha(t))) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t), y(\alpha(t))) y'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, y(t), y(\alpha(t))) y'(\alpha(t)) \alpha'(t)$$

quindi si avrà

$$y''(\xi)^+ = \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\xi) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(t_0)^+ \alpha'(\xi)$$

$$y''(\xi)^- = \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\xi) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(t_0)^- \alpha'(\xi)$$

Dato che  $\alpha'(\xi) \neq 0$  ( $\xi$  è radice semplice di  $\alpha(t) = t_0$ ) allora  $y''(\xi)^+ \neq y''(\xi)^-$  quindi  $y''$  ha una discontinuità in  $\xi$ . Chiamiamo  $\xi$  discontinuità primaria di primo livello, per comodità indicizziamo e denotiamo con  $\xi_{1,i}$  le discontinuità primarie al primo livello, ovvero le radici semplici di  $\alpha(t) = t_0$ , ovvero

$$\forall i \quad \alpha(\xi_{1,i}) = t_0 \quad \text{e} \quad \alpha'(\xi_{1,i}) \neq 0$$

come anticipato prima le discontinuità si propagano a causa del ritardo e non è difficile vedere che le discontinuità primarie al primo livello danno luogo ad eventuali discontinuità di  $y'''$  (se esiste), è possibile ripetere lo stesso ragionamento e cercare le radici semplici di  $\alpha(t) = \xi_{1,i}$  e verificare

con gli stessi conti che  $y'''$  è discontinua in tali punti. Chiamiamo le radici semplici di  $\alpha(t) = \xi_{1,i}$  discontinuità primarie al secondo livello.

Si definiscono discontinuità primarie al  $k$ -esimo livello le radici semplici di  $\alpha(t) = \xi_{k-1,i}$  e questi sono punti in cui  $y^{(k+1)}$  (se esiste) potrebbe esser discontinua. E' chiaro che le discontinuità di ordine  $p$  sono incluse nell'insieme delle discontinuità primarie al livello  $p$ , pertanto la richiesta che si farà sulla suddivisione, se il metodo è consistente di ordine  $p$ , sarà

$$\xi_{i,j} \in \Delta \quad \text{con} \quad j \leq p-1 \quad , \quad \xi_{i,j} \leq t_f$$

Daltronde trovare  $\xi_{i,j}$  può esser particolarmente difficile, si analizzerà a fondo il caso  $\tau = \tau(t)$  e si darà un'idea di come affrontare  $\tau = \tau(t, y(t))$ .

## 4.2 Ritardo dipendente dal tempo

Si consideri una DDE della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

In questo caso è possibile risolvere la DDE usando il metodo dei passi come indicato dal seguente algoritmo

### 1 Localizzazione delle discontinuità

Risolvere

$$\begin{cases} \xi_{k,j} - \tau(\xi_{k,j}) = \xi_{k-1,i} \\ \xi_{0,1} = t_0 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq p \quad , \quad \xi_{k,j} \leq t_f$$

e ordinare le discontinuità in modo da avere

$$\xi_1 < \dots < \xi_s$$

mentre  $\xi_0 = t_0, \xi_{s+1} = t_f$

### 2 Calcolo della soluzione discreta

Risolvere con un metodo discreto con ordine di consistenza  $p$

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \phi(t - \tau(t))) & \xi_0 \leq t \leq \xi_1 \\ z(\xi_0) = \phi(\xi_0) \end{cases}$$

### 3 Iterare per $i = 1, \dots, s$

- Calcolare e memorizzare l'estensione continua  $\eta(t)$  in  $[\xi_{i-1}, \xi_i]$  interpolando la soluzione solo in  $[\xi_{i-1}, \xi_i]$

– Risolvere con il metodo discreto

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \eta(t - \tau(t))) & \xi_i \leq t \leq \xi_{i+1} \\ z(\xi_i) = \phi(\xi_i) \end{cases}$$

4 Tracciare il grafico di  $\eta(t)$  in  $[\xi_0, \xi_{s+1}]$

La convergenza del metodo dei passi segue dal seguente teorema

**Teorema 4.1** (Convergenza del metodo dei passi). Sotto le seguenti ipotesi

- La suddivisione  $\Delta$  contiene le discontinuità presenti in  $[t_0, t_f]$  di ordine al più  $p$ , detontate con  $\xi_1, \dots, \xi_s$
- Il metodo numerico è consistente di ordine  $p$  ed è 0-stabile
- L'interpolante ha ordine di consistenza  $q$
- L'interpolazione avviene in  $[t_{n-i_n}, t_{n+j_{n+1}}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$

Allora allora il metodo è convergente con ordine  $q' = \min\{p, q + 1\}$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Per dimostrare il teorema si useranno i seguenti lemmi

**Lemma 4.1.** Siano  $\{y_n^\alpha\}_{n=0}^N$  e  $\{y_n^\beta\}_{n=0}^N$  le soluzioni numeriche ottenute con un metodo 0-stabile dei seguenti IVP

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(a) = \beta \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

Esistono due costanti  $M$  ed  $S$  indipendenti dalla suddivisione  $\Delta$  tali che

$$\begin{aligned} \max_{k \leq n \leq N} \|y_n^\alpha - y_n^\beta\| &\leq M \max_{0 \leq s \leq k-1} \|y_s^\alpha - y_s^\beta\| \\ \max_{a \leq t \leq b} \|\eta^\alpha(t) - \eta^\beta(t)\| &\leq S \max_{0 \leq s \leq k-1} \|y_s^\alpha - y_s^\beta\| \end{aligned}$$

**Lemma 4.2.** Siano  $\{y_n\}_{n=0}^N$  e  $\{z_n\}_{n=0}^N$  le soluzioni numeriche ottenute con un metodo 0-stabile dei seguenti IVP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), v(t)) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

Esistono due costanti  $M$  ed  $S$  indipendenti dalla suddivisione  $\Delta$  ed un  $h_0$  tale che se  $h_i \leq h_0$  allora

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \|y_n - z_n\| &\leq M \max_{1 \leq s \leq k-1} \|y_s - z_s\| + M \max_{a \leq t \leq b} \|u(t) - v(t)\| \\ \max_{a \leq t \leq b} \|\eta(t) - \zeta(t)\| &\leq S \max_{1 \leq s \leq k-1} \|y_s - z_s\| + S \max_{a \leq t \leq b} \|u(t) - v(t)\| \end{aligned}$$

La dimostrazione di questi lemmi è soltanto tecnica e segue le stesse idee della dimostrazione del teorema 3.2, per i dettagli si veda [Bellen-Zennaro 2003, lemmi 4.1.3 e 4.1.4]

*Dimostrazione del teorema 3.9.* La tesi si dimostra per induzione sul numero di discontinuità  $\xi_i$ . Nell'intervallo  $[\xi_0, \xi_1]$  il problema diventa

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \phi(t - \tau(t))) & \xi_0 \leq t \leq \xi_1 \\ z(\xi_0) = \phi(\xi_0) \end{cases}$$

su questo intervallo, ponendo  $g(t, y(t)) = f(t, z(t), \phi(t - \tau(t)))$ , la tesi è vera per il teorema 3.2. Supponendo la tesi valida fino a  $\xi_i$  allora bisognerà mostrare che è valida anche su  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  dove il problema da risolvere è

$$\begin{cases} w'(t) = f(t, w(t), \eta(t - \tau(t))) & \xi_i \leq t \leq \xi_{i+1} \\ w(\xi_i) = \eta(\xi_i) \end{cases}$$

Si osservi che non è possibile applicare il teorema 3.2 a questo problema dato che  $\eta(t)$  è una funzione polinomiale a tratti quindi  $\eta(t - \tau(t))$  potrebbe non essere abbastanza regolare, daltronde è possibile applicare il teorema 3.2 al seguente IVP

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t - \tau(t))) & \xi_i \leq t \leq \xi_{i+1} \\ x(\xi_i) = y(\xi_i) \end{cases} \quad (4.1)$$

ora il termine  $y(t - \tau(t))$  è abbastanza regolare, quindi si avrà

$$\max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|y(t) - \zeta(t)\| = O(h^{q'}) \quad (4.2)$$

Si consideri ora il problema ausiliario

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \eta(t - \tau(t))) & \xi_i \leq t \leq \xi_{i+1} \\ z(\xi_i) = y(\xi_i) \end{cases}$$

Dal lemma 3.1, posto  $\rho(t)$  l'interpolatore per il problema ausiliario, si ha che

$$\max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|\rho(t) - \eta(t)\| \leq \max_{0 \leq s \leq k-1} \|y_s^\alpha - y_s^\beta\|$$

per ipotesi induttiva

$$\max_{\xi_0 \leq t \leq \xi_i} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

quindi dal lemma 3.1 applicato usando il dato iniziale segue che

$$\max_{0 \leq s \leq k-1} \|y_s^\alpha - y_s^\beta\| \leq M \|y(\xi_i) - \eta(\xi_i)\| = O(h^{q'})$$

e quindi

$$\max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|\rho(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'}) \quad (4.3)$$

A questo punto riprendendo il problema originario (3.2) nell'intervallo  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  usando il lemma 3.2 ponendo  $u(t) = y(t - \tau(t))$  e  $v(t) = \eta(t - \tau(t))$ , scegliendo un passo di discretizzazione abbastanza piccolo

$$\begin{aligned} \max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|\rho(t) - \zeta(t)\| &\leq S \max_{1 \leq s \leq k-1} \|y_s - z_s\| + S \max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|y(t - \tau(t)) - \eta(t - \tau(t))\| \\ &\leq S \max_{1 \leq s \leq k-1} \|y_s - z_s\| + S \max_{t \leq \xi_i} \|y(t) - \eta(t)\| \end{aligned}$$

Dato che la costante  $S$  dipende solo dalla soluzione del problema  $y(t)$  allora usando il lemma 3.2 si ha

$$\max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|\rho(t) - \zeta(t)\| = O(h^{q'})$$

quindi usando la formula (3.4) si ottiene

$$\max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|\eta(t) - \zeta(t)\| = O(h^{q'}) \quad (4.4)$$

Ora si conclude usando la disuguaglianza triangolare e in sequenza le formule (3.3) e (3.5)

$$\begin{aligned} \max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|y(t) - \eta(t)\| &= \max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|y(t) - \zeta(t) - \eta(t) + \zeta(t)\| \\ &\leq \max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|y(t) - \zeta(t)\| + \max_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \|\eta(t) - \zeta(t)\| \\ &= O(h^{q'}) \end{aligned}$$

□

### 4.3 Ritardo dipendente dallo stato

Si considerino le DDE della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

è possibile utilizzare l'approccio standard anche in questo caso, però è necessario fare una richiesta ulteriore, ovvero sarà necessario che l'interpolazione avvenga anche nell'intervallo corrente, quindi si chiederà che  $j_n = 0$ . Sotto questa ulteriore ipotesi vale il teorema 3.9 [Bellen-Zennaro 2003, par. 4.3]. Osserviamo subito che questo non è comunque soddisfacente e che computazionalmente il problema è decisamente più difficile, infatti ai fini della convergenza è necessario che le discontinuità della soluzione siano punti interni alla griglia  $\Delta$  e come mostrato prima per trovare le (eventuali) discontinuità è necessario risolvere

$$\begin{cases} \xi_{i+1} - \tau(\xi_{i+1}, y(\xi_{i+1})) = \xi_i \\ \xi_0 = t_0 \end{cases}$$

Una possibile strategia per localizzare le discontinuità è quella di scegliere una griglia  $\Delta$  in modo casuale (ad esempio equispaziata) risolvere la DDE con l'approccio standard e successivamente risolvere

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_{i+1} - \tau(\widehat{\xi}_{i+1}, \eta(\xi_{i+1})) = \widehat{\xi}_i \\ \widehat{\xi}_0 = t_0 \end{cases}$$

E' possibile dimostrare allora  $\widehat{\xi}_i$  tende a  $\xi_i$  con ordine di accuratezza che dipende dall'ordine dell'interpolatore e dall'ordine della discontinuità  $\xi_i$ . Quindi successivamente si risolverà nuovamente la DDE utilizzando come griglia  $\Delta$  quella delle discontinuità appena calcolate.

E' possibile raffinare questo metodo per renderlo efficiente, l'idea è quella di "catturare" le discontinuità. Come detto all'inizio le discontinuità della soluzione da un certo  $t$  in poi sono dovute

alla preparazione (tramite il ritardo) di discontinuità presenti prima di  $t$  (quindi tutto inizia dal possibile punto di discontinuità nell'incollamento con la storia), pertanto il primo punto di discontinuità è  $t_0$  e gli altri sono dovuti alla sua propagazione.

Si consideri dunque il problema locale

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) = f(t, w_{n+1}(t), x(t - \tau(t, w_{n+1}(t)))) & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ w_{n+1}(t_n) = y_n \end{cases} \quad (4.5)$$

dove

$$x(s) = \begin{cases} \phi(s) & \text{se } s \leq t_0 \\ \eta(s) & \text{se } t_0 \leq s \leq t_n \\ w_{n+1}(s) & \text{se } t_n \leq s \leq t_{n+1} \end{cases}$$

si assumi che ci sia una discontinuità  $\xi$  nell'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$  dovuta alla propagazione di una precedente discontinuità  $\widehat{\xi}_i$  tale che

$$\xi - \tau(\xi, w_{n+1}(\xi)) = \widehat{\xi}_i$$

Risolvendo la (3.6) è possibile controllare che l'interpolatore  $\eta$  è tale che l'approssimazione dell'argomento deviato  $t - \tau(t, \eta(t))$  attraversi o meno  $\xi$ , ovvero cerchiamo  $\xi$  tali che

$$\xi - \tau(\xi, \eta(\xi)) = \widehat{\xi}_i$$

Se tali  $\xi$  esistono e sono nell'intervallo  $[t_n, t_{n+1})$  allora si rigetta il passo corrente di discretizzazione e l'interpolatore e si sceglie un nuovo passo di discretizzazione  $h_{n+1}^{\text{new}}$  (più piccolo) e si ripete lo stesso ragionamento su  $[t_n, t_n + h_{n+1}^{\text{new}}]$ . L'algoritmo va avanti fino a che non si trova un intervallo sufficientemente piccolo tale che

$$\xi - \tau(\xi, \eta(\xi)) = \widehat{\xi}_i$$

non ha soluzioni in  $[t_n, t_n + \bar{h}]$ . A questo punto possono succedere due cose:

$$t_n + \bar{h} - \tau(t_n + \bar{h}, \eta(t_n + \bar{h})) = \widehat{\xi}_i$$

e in tal caso si è trovata la discontinuità, oppure la discontinuità si trova dopo  $t_n + \bar{h}$ , quindi si ripete lo stesso algoritmo su  $[t_n + \bar{h}, t_{n+1}]$ .

L'algoritmo appena descritto in genere è molto efficiente nel senso che esperimenti numerici hanno confermato che includendo le approssimazioni delle discontinuità calcolate con questo metodo nella suddivisione  $\Delta$  si hanno buoni risultati di convergenza in accordo al teorema 4.1 (esteso). Daltronde è chiaro che l'algoritmo potrebbe avere un costo computazionale troppo alto oppure potrebbe non funzionare nel caso in cui le discontinuità siano troppo vicine.



## Capitolo 5

# Implementazione in matlab

In quest'ultimo capitolo si mostrerà un'implementazione pratica degli algoritmi descritti.

Fissiamo le notazioni: consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

per comodità di notazione poniamo

$$s = t - \tau(t, y(t))$$

quindi il problema viene riscritto come

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(s)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Sia  $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_N = t_f\}$ , allora seguendo l'algoritmo dei passi bisogna risolvere gli IVP

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) = f(t, w_{n+1}(t), x(s)) & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ w_{n+1}(t_n) = y_n \end{cases} \quad (5.1)$$

dove

$$x(s) = \begin{cases} \phi(s) & \text{se } s \leq t_0 \\ w_i(s) & \text{se } t_i \leq s \leq t_{i+1} \end{cases}$$

Pertanto è necessario risolvere  $n$  IVP e la soluzione numerica che accettiamo è l'incollamento delle funzioni  $\eta_i$  che sono gli interpolatori.

Pertanto se  $\eta_i$  è l'interpolatore della soluzione in  $[t_i, t_{i+1}]$  allora possiamo scrivere la relazione

$$\begin{cases} \eta_0(t) = \phi(t) \\ \eta'_{i+1}(t) = f(t, \eta_{i+1}(t), \eta_j(s)) \\ \eta_{i+1}(t_i) = \eta_i(t_i) \end{cases}$$

dove  $j$  è tale che  $s \in [t_j, t_{j+1}]$ . Pertanto iterativamente vanno calcolate tutte le funzioni  $\eta_i$ .

## 5.1 Codice

Listing 5.1: Implementazione del metodo dei passi per la risoluzione delle DDE

```
function [ mesh y ] = DDEsolver( supmesh , history, tau, f, tol )

% input
% supmesh : suddivisione iniziale sulla quale avviare il metodo dei passi
% history : storia della DDE
% tau : funzione ritardo
% f : definisce il problema
% tol : il numero di punti che deve avere la suddivisione (equispaziata) dei singoli IVP

% output
% mesh : suddivisione finale
% y : valutazioni della soluzione nella suddivisione mesh

% inizializzazione
y(1:length(supmesh),1:tol)=0;
mesh(1:length(supmesh),1:tol)=0;

% risoluzione del primo problema (caso base)

% storia con il ritardo
function x = pasthistory(t,y)
    s=t-tau(t,y);
    x=history(s);
end

% funzione ausiliaria che definisce il problema per past history

function x = auxpasthistory(t,y)
    x=f(t,y,pasthistory(t,y));
end

% calcolo della prima griglia di integrazione
mesh(1,:)=linspace(supmesh(1),supmesh(2),tol);

% calcolo della soluzione (discreta)
y(1,:)=ODEsolver(mesh(1,:),@auxpasthistory,history(supmesh(1)));

% funzione che interpola

function x=interp(t)

    % ricerca dell'intervallo di appartenenza di t
```

```

    if (t<=supmesh(1))
        x=history(t);
    else

        j=1;
        while(supmesh(j)<t)
            j=j+1;
        end
        j=j-1;

        % interpolazione della soluzione
        x=interpolator(mesh(j,:),@pastinterp,t,y(j,:));

    end
end

% funzione che interpola ritardata

function x = pastinterp(t,y)

    % calcolo dell'argomento deviato
    s=t-tau(t,y);

    x=interp(s);

end

% funzione che definisce il problema

function x=aux(t,y)

    % calcolo dell'argomento deviato
    s=t-tau(t,y);

    x=f(t,interp(t),interp(s));

end

for i=2:1:length(supmesh)-1

    % calcolo della griglia di integrazione
    mesh(i,:)=linspace(supmesh(i),supmesh(i+1),tol);
    % calcolo della soluzione discreta
    y(i,:)=ODEsolver(mesh(i,:),@aux,y(i-1,tol));

end

```

```
% concatenazione dei vettori (soluzione)
z=[];
w=[];
for i=1:1:max(size(supmesh))-1

    z=[z, y(i,:)];
    w=[w, mesh(i,:)];

end

y=z;
mesh=w;

end
```

Di seguito ci sono le funzioni ODEsolver che risolve un IVP con Runge-Kutta classico a 4 stadi e interpolator che è il suo rispettivo interpolatore

Listing 5.2: Risolutore di IVP

```
function y = ODEsolver( mesh, f, y1 )

% punto iniziale
y(1)=y1;

for i=1:length(mesh)-1
    % tempo corrente
    t = mesh(i);

    % passo di discretizzazione corrente
    h=mesh(i+1)-mesh(i);

    % punti della submesh
    t1=t;
    t2=t+h/2;
    t3=t+h/2;
    t4=t+h;

    % calcolo degli Y
    Y1=y(i);
    Y2=y(i)+0.5*h*f(t1,Y1);
    Y3=y(i)+0.5*h*f(t2,Y2);
    Y4=y(i)+h*f(t3,Y3);

    % calcolo del punto y(i+1)
    y(i+1)=y(i)+h*(1/6*f(t1,Y1)+1/3*f(t2,Y2)+1/3*f(t3,Y3)+1/6*f(t4,Y4));

end

end
```

Listing 5.3: Interpolatore del metodo

```

function eta = interpolator( mesh , f , t , y )

theta=2;
i=1;

h=mesh(2)-mesh(1);

while( (theta<0 || theta >1) && i < max(size(mesh)) )
    % tempo corrente in cui valutare l'interpolatore
    tn=mesh(i);

    % passo di discretizzazione corrente
    h=mesh(i+1)-mesh(i);

    % valore di theta (deve esser compreso tra 0 ed 1)
    theta=(t-tn)/h;

    i=i+1;
end

i=i-1;

% punti della submesh
t1=t;
t2=t+h/2;
t3=t+h/2;
t4=t+h;

% calcolo degli Y
Y1=y(i);
Y2=y(i)+0.5*h*f(t1,Y1);
Y3=y(i)+0.5*h*f(t2,Y2);
Y4=y(i)+h*f(t3,Y3);

eta=y(i)+h*((-1/2*theta+2/3)*theta * f(t1,Y1)+ 1/3*theta*f(t2,Y2)+ 1/3*theta*f(t3,Y3)
    +(1/2*theta-1/3)*theta*f(t4,Y4));

end

```

Si osservi che nel codice non ci sono tutti i controlli, si suppone ad esempio che la suddivisione  $\Delta$  rispetti  $t_{n+1} - t_n < \min \tau$  e al tempo stesso contenga tutte le discontinuità di grado al più 4, quindi questo codice è di certo migliorabile, daltronde per una questione di leggibilità si preferisce in questo contesto lasciarlo tale dato che lo si userà solo per fare esempi sugli errori.

## 5.2 Esperimenti numerici

Nel capitolo precedente si è dimostrato che utilizzando un metodo consistente e convergente per risolvere una DDE, sotto l'ipotesi che le discontinuità della soluzione siano incluse nella griglia  $\Delta$ , la soluzione numerica è una buona stima della soluzione, per l'esattezza l'errore è dello stesso ordine della convergenza del metodo usato.

Se le discontinuità non sono incluse in  $\Delta$  a priori la soluzione numerica potrebbe non essere una buona stima della soluzione o per lo meno non si hanno risultati sull'ordine di convergenza del metodo. Di seguito sono proposti degli esperimenti numerici realizzati con matlab usando il codice della sezione precedente, questi hanno il fine di mostrare quanto sia importante includere le discontinuità nella griglia.

**Esempio 5.1.** Si consideri la DDE seguente (esempio 2.1)

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & t \in [0, 3] \end{cases}$$

Non è difficile scrivere la soluzione di questo problema, ad esempio usando il metodo dei passi, in  $[0, 3]$  la soluzione è

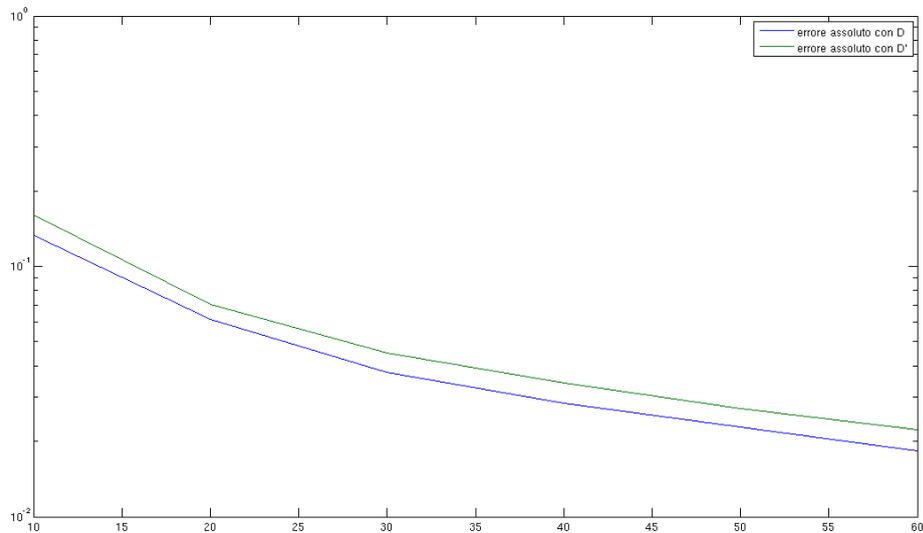
$$y(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2} & 1 \leq t \leq 2 \\ -\frac{t^3}{6} + \frac{3}{2}t^2 - 4t + \frac{17}{6} & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Si voglia ora determinare la soluzione numerica utilizzando l'approccio standard, come metodo numerico si può utilizzare Runge-Kutta classico con relativa estensione continua, questo è convergente di ordine 4 e l'estensione continua è convergente di ordine 2.

0	0	0	0	0	$b_1(\theta) = (-\frac{1}{2}\theta + \frac{2}{3})\theta$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$b_2(\theta) = \frac{1}{3}\theta$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$b_3(\theta) = \frac{1}{3}\theta$
1	0	0	1	0	$b_4(\theta) = (\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3})\theta$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$		

Le discontinuità della soluzione sono localizzate negli interi, quindi ai fini della convergenza della soluzione numerica alla soluzione, bisogna che  $\{0, 1, 2, 3\} \in \Delta$ .

Essendo nota la soluzione del problema è possibile calcolare l'errore assoluto, dunque utilizzando il metodo appena descritto, scegliendo  $\Delta = \{0, 1, 2, 3\}$  e come  $\Delta' = \{0, 0.5, 1.3, 2.2, 3\}$ , posto  $h = (t_{i+1} - t_i)/N$  (ovvero nella risoluzione dell'IVP consideriamo la suddivisione equispaziata) otteniamo in scala logaritmica



Quindi è evidente che nel caso in si sceglie  $\Delta$  il metodo è convergente di ordine 2, mentre se si sceglie  $\Delta'$  la convergenza è più lenta

N	errore con $\Delta$	errore con $\Delta'$
10	0.1329	0.1600
20	0.0613	0.0707
30	0.0377	0.0450
40	0.0283	0.0344
50	0.0227	0.0270
60	0.0184	0.0223

Daltronde questo è un esempio fortunato come in generale il caso delle DDE con ritardo costante, infatti con l'incremento di  $N$  l'errore assoluto con  $\Delta$  e  $\Delta'$  tende ad esser lostesso. L'esempio che segue mostra un comportamento decisamente peggiore.

**Esempio 5.2** ([Feldstein-Neves 1984]). Si consideri la seguente DDE

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}y(y(t) - \sqrt{2} + 1) & t \in [1, 3] \\ y(t) = 1 & t \leq 1 \end{cases}$$

La soluzione di questa DDE è la seguente

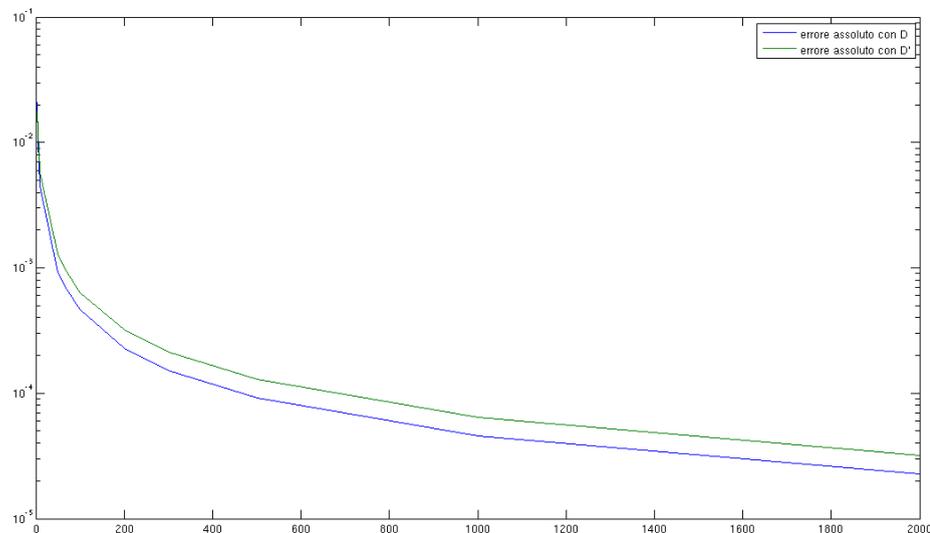
$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{t}{4} + \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{t} & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Si consideri il seguente metodo di Runge-Kutta con relativo interpolatore

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
 \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
 \hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 b_1(\theta) = -\frac{3}{4}\theta^2 + \theta \\
 b_2(\theta) = 0 \\
 b_3(\theta) = \frac{3}{4}\theta^2
 \end{array}$$

Questo metodo è convergente di ordine 3 e l'estensione continua è convergente di ordine 2.

La soluzione della DDE ha una discontinuità in 2, quindi ai fini della convergenza è necessario includerle 2 nella suddivisione, daltronde è possibile fare scelte particolarmente sbagliate, infatti se si vuol risolvere il problema in  $[1, 3.11111]$  allora ogni suddivisione  $\Delta$  equispaziata provoca la propagazione della discontinuità in ogni intervallo di integrazione. Si considerino dunque le due suddivisioni:  $\Delta = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3.11111\}$  e  $\Delta' = \{1, 1.7037, 2.4074, 3.1111\}$



Si osserva che in accordo con il teorema 4.1 la convergenza del metodo dei passi è di ordine 3 se si sceglie  $\Delta$ , mentre con  $\Delta'$  è di ordine 2.

N	errore con $\Delta$	errore con $\Delta'$
3	0.020991262384127	0.017744352867936
5	0.010278532116582	0.012465780914469
10	0.004512684162531	0.005750132670051
50	0.000918383645406	0.001287267751515
70	0.000677030564511	0.000940632930354
100	0.000465559043085	0.000633592107134
200	0.000229255749912	0.000318725862569
300	0.000151769755634	0.000213068390289
500	0.000091428520250	0.000128912477018

Quindi anche con  $N$  molto grande la scelta della suddivisione continua ad influire sull'ordine di convergenza.



# Conclusioni ed ulteriori applicazioni

In questo lavoro si sono mostrati i principali algoritmi per risolvere le DDE e tracciare un grafico approssimativo della soluzione. Gli aspetti che senz'altro sarebbero da approfondire sono il caso delle DDE con il ritardo dipendente dallo stato (di cui si è dato solo un cenno), e il caso delle SDDE (stiff delay differential equation). Entrambi gli argomenti sono molto vasti e tutt'ora fonte di ricerca. Per studiare questi casi è comunque necessario introdurre il concetto di passo di discretizzazione variabile, specialmente nel caso delle SDDE, ovvero è necessario introdurre un criterio per infittire la discretizzazione attorno ai picchi della soluzione e rilassarla quando questa resta con buona approssimazione costante.

Un aspetto molto importante e sul quale si basano molte applicazioni della teoria sulle DDE è quello della stabilità dei punti di equilibrio. Si è visto che un punto stabile per una equazione differenziale (o un sistema dinamico in generale) può diventare instabile a causa del ritardo (osservazione 2.1) e viceversa. Pertanto nasce la necessità di capire quando il ritardo causa in cambiamento qualitativo della soluzione e quindi tracciare diagrammi di biforcazione. Un'applicazione immediata è l'esempio dell'equazione logistica, si è infatti mostrato che il ritardo può causare l'estinzione di una specie, quindi è interessante capire da quali fattori dipende il ritardo (presenza di predatori, cibo, clima, ...). Sulla stessa linea si basano molte applicazioni in medicina, infatti uno degli articoli più famosi sulle DDE è quello di Culshaw-Ruan "A delay-differential equation model of HIV infection of CD4<sup>+</sup> T-cells" dove viene proposto un modello matematico basato sulle DDE per descrivere il comportamento del virus HIV.

Pertanto quello delle DDE è un campo molto vasto e pieno di applicazioni, personalmente spero di poter in futuro lavorarci ancora e approfondire questi aspetti.



# Bibliografia

- [Erneux 2009] Thomas Erneux, Applied Delay Differential Equations, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, Springer 2009. ISBN: 0387743715
- [Bellen-Zennaro 2003] Alfredo Bellen e Marino Zennaro, Numerical methods for delay differential equations, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, USA 2003, ISBN: 0198506546
- [Ascher-Petzold 1997] Uri Ascher e Linda Petzold, Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations, SIAM 1997, ISBN10:0898714125
- [Feldstein-Neves 1984] Alan Feldstein e Kenneth Neves, High Order Solutions for state-dependent delay differential equations with nonsmooth solutions, Society for Industrial and Applied Mathematics 1984



# Ringraziamenti

Probabilmente queste parole non sono sufficienti per ringraziare tutti in modo adeguato, ad ogni modo ringrazio:

I miei genitori che mi sono stati sempre vicini e che sempre hanno creduto nelle mie capacità, spesso più di quanto ci credessi io

Mia sorella, che con il suo carattere solare e impulsivo spesso ha illuminato le mie giornate

Il professor Dario Bini per avermi assistito nella stesura della tesi e per tutto quello che mi ha insegnato in questi anni

Tutti i miei amici, vicini e lontani, per le serate trascorse insieme e per essermi stati accanto nei momenti più difficili