

Appunti di Geometria e Topologia Differenziale

Giacomo Mezzedimi

28 settembre 2016

Indice

Introduzione	2
1 Curve in \mathbb{R}^3	3
1.1 Curve regolari e PLA	3
1.2 Versore tangente, versore normale e curvatura di una curva	6
1.3 Orientazione di spazi vettoriali e prodotto vettore in \mathbb{R}^n	8
1.4 Versore binormale e torsione di una curva	13
1.5 Piano e cerchio osculatore	15
1.6 Formule di Frenet e congruenza fra curve	16
1.7 Massimi, minimi e vertici di curve planari	19
2 Superfici in \mathbb{R}^3	21
2.1 Geometria e topologia differenziale in \mathbb{R}^n	21
2.2 Campi vettoriali tangenti e campi normali	32
2.3 Teoria metrica delle superfici	34
2.4 Superfici di rotazione	39
2.5 Isometrie fra superfici	41
2.6 Derivata covariante, trasporto parallelo e geodetiche. Il teorema di Gauss-Bonnet	45
3 Teoria delle varietà	59
3.1 Varietà senza bordo e varietà a bordo	59
3.2 Grado fra varietà e sue applicazioni	62
3.3 Indice di uno zero isolato in un campo tangente	68
3.4 Fibrato normale e intorno tubolare	74

Introduzione

Questi appunti nascono durante il primo semestre dell'anno accademico 2015/2016, periodo nel quale io ho seguito il corso dei professori Frigerio e Martelli; seguono fedelmente le lezioni tenute in classe, ma in alcuni casi ho cercato di rendere piú chiare alcune importanti dimostrazioni che per motivi di tempo erano state solo accennate a lezione.

I libri di riferimento sono principalmente due: "Differential Geometry of Curves and Surfaces" di Do Carmo per la parte su curve e superfici e "Topology from the differentiable viewpoint" di Milnor per la parte generale sulle n -varietá.

Alcuni argomenti trattati nel terzo capitolo sono stati solo accennati o visti in casi particolari, come ad esempio la caratteristica di Eulero; per una trattazione piú completa consiglio il libro di Milnor.

Infine desidero ringraziare tutti coloro che mi hanno aiutato a correggere i (tantissimi) errori che erano presenti qua dentro, sperando di averne corretti il maggior numero possibile; in particolare ringrazio Michele Giordano che si é anche occupato di risistemare alcune parti poco chiare della trattazione. Come sempre, qualunque segnalazione (di errori o possibili miglioramenti) é benvenuta (la mia mail é *mezzedimi@mail.dm.unipi.it*).

Questi appunti si trovano sulla mia pagina web *<http://poisson.phc.unipi.it/~mezzedimi/>*.

Giacomo Mezzedimi

1 Curve in \mathbb{R}^3

1.1 Curve regolari e PLA

Nel seguito considereremo lo spazio euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n dotato del prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ che induce la norma euclidea $\|\cdot\|$.

Definizione 1.1.1. $U \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é C^∞ se la derivata $\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} f^i}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}$ esiste per ogni multiindice $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ e $\forall i = 1, \dots, n$.

Se invece $X \subseteq \mathbb{R}^k$ é un sottoinsieme qualsiasi, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é C^∞ se $\forall p \in X \exists U_p \ni p$ aperto di \mathbb{R}^k e $F : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che F é C^∞ e $F|_{U_p \cap X} = f|_{U_p \cap X}$.

D'ora in poi ogni funzione considerata (se non diversamente specificato) sará C^∞ .

Definizione 1.1.2. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (eventualmente illimitato). Una **curva** é una funzione C^∞ $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Il **supporto** di α é la sua immagine $\alpha(I)$.

La **velocitá** di α é la funzione $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\alpha'(t)$.

Esempio (elica circolare). $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (a \cos \frac{t}{c}, a \sin \frac{t}{c}, b \frac{t}{c})$ con $a, c > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ é detta **elica circolare**.

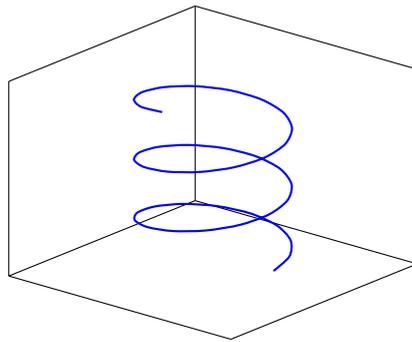


Figura 1: Il supporto di un'elica circolare

La sua velocitá é $\alpha'(t) = (-\frac{a}{c} \sin \frac{t}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{t}{c}, \frac{b}{c})$, il cui modulo é $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}}$ é costante, mai nullo. Se imponiamo che $c^2 = a^2 + b^2$, allora la curva é PLA.

Esempio (cuspidine). $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$ (dunque é una curva piana, e supponiamo che il suo supporto giaccia nel piano $z = 0$ di \mathbb{R}^3) é la **cuspidine**.

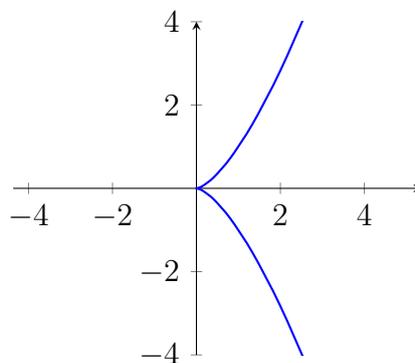


Figura 2: Il supporto della cuspidine nel piano $z = 0$

$\alpha'(t) = (2t, 3t^2, 0)$ e dunque $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t|\sqrt{4 + 9t^2}$ si annulla in $t = 0$ (e inoltre la velocitá tende a 0 avvicinandosi all'origine).

Definizione 1.1.3. α si dice **regolare** se $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$; si dice **parametrizzata per lunghezza d'arco (PLA)** se $\|\alpha'(t)\| = 1 \forall t \in I$.

Definizione 1.1.4. α curva generica. Si definisce **lunghezza** di α il numero:

$$L(\alpha) = \int_I \|\alpha'(t)\| dt \in [0, +\infty].$$

Osservazione. Sia $I = [a, b]$. Data una partizione $\Omega : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ di I , pongo:

$$l_\Omega(\alpha) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$$

e:

$$l(\alpha) = \sup_{\Omega} l_\Omega(\alpha).$$

Allora si può mostrare che $L(\alpha) = l(\alpha)$.

Osservazione. L'elica è regolare, ed è facile calcolare la lunghezza di sue porzioni. La cuspide non è regolare, e calcolare la lunghezza di sue porzioni è un po' più faticoso.

Esempio (spirale logaritmica). $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$, con $a > 0$ e $b < 0$ è detta **spirale logaritmica**. Si ha che:

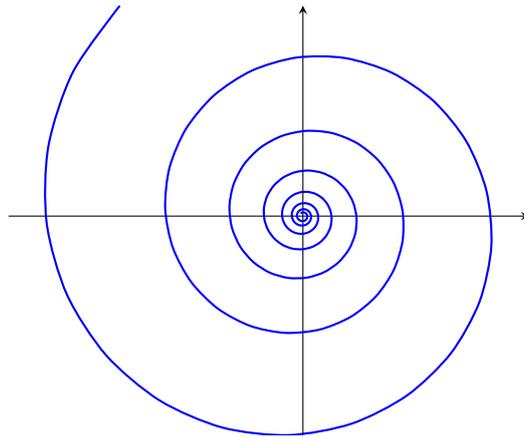


Figura 3: Il supporto della spirale logaritmica nel piano $z = 0$

$$\alpha'(t) = (abe^{bt} \cos t - ae^{bt} \sin t, abe^{bt} \sin t + ae^{bt} \cos t) \rightarrow (0, 0)$$

quando $t \rightarrow \infty$. Però, abbastanza sorprendentemente, la lunghezza di $\alpha|_{\{t \geq t_0\}}$ è finita:

$$L(\alpha|_{\{t \geq t_0\}}) = \int_{t_0}^{\infty} \|\alpha'(t)\| \leq M \int_{t_0}^{\infty} e^{bt} < +\infty.$$

Definizione 1.1.5. Una mappa $\psi : X \rightarrow Y$ fra sottoinsiemi di spazi euclidei si dice **diffeomorfismo** se è C^∞ e invertibile con inversa C^∞ .

Definizione 1.1.6. $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice **riparametrizzazione** di $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se $\exists \psi : J \rightarrow I$ diffeomorfismo crescente fra intervalli tale che $\beta = \alpha \circ \psi$.

Osservazione. Se $\psi : J \rightarrow I$ è un diffeomorfismo, allora $\psi \circ \psi^{-1} = \text{id}$ e dunque, derivando:

$$\psi'(\psi^{-1}(t)) \cdot ((\psi^{-1})'(t)) = 1.$$

In particolare ψ' e $(\psi^{-1})'$ non sono mai nulli.

Teorema 1.1.1. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é regolare \iff ammette una riparametrizzazione $\beta = \alpha \circ \psi$ per lunghezza d'arco.

Dimostrazione. \Leftarrow) $\beta'(t) = \alpha'(\psi(t)) \cdot \psi'(t)$ e $\beta'(t) \neq 0 \forall t \in J$, ma allora $\alpha'(\psi(t)) \neq 0 \forall t \in J$ e per surgettività di ψ si ha che $\alpha'(u) \neq 0 \forall u \in I$.

(Osserviamo che questa implicazione rimane vera anche per ψ qualsiasi)

\Rightarrow) Sia α regolare. Poniamo per semplicità $I = [a, b]$ (altrimenti al posto di a nella dimostrazione si scelga un qualsiasi $t_0 \in I$).

Poniamo:

$$l : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto l(t) := \int_a^t \|\alpha'(u)\| du = L(\alpha|_{[a,t]})$$

perció $l(a) = 0$ e $l'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$, perché α é regolare.

Ma allora l é un diffeomorfismo sulla sua immagine $J = [0, L(\alpha)]$; pongo $\psi = l^{-1} : J \rightarrow I$.

Se $\beta = \alpha \circ \psi$, si ha:

$$\begin{aligned} \|\beta'(s)\| &= \|\alpha'(\psi(s)) \cdot \psi'(s)\| = \left\| \alpha'(\psi(s)) \cdot (l^{-1})'(s) \right\| = \left\| \alpha'(\psi(s)) \cdot \frac{1}{l'(l^{-1}(s))} \right\| = \\ &= \left\| \alpha'(\psi(s)) \cdot \frac{1}{l'(\psi(s))} \right\| = 1. \end{aligned}$$

□

Osservazione. É facile riparametrizzare per lunghezza d'arco l'elica.

Fare la stessa cosa per la cuspidé ristretta a $(0, +\infty)$ o $[1, 2]$ é molto piú difficile.

Esempio (cicloide). $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$ é la **cicloide**.

$\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t, 0)$ e quindi $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} = 2\sin \frac{t}{2}$ (senza il segno perché $\sin \frac{t}{2} > 0$ se $t \in [0, 2\pi]$); osserviamo che $\alpha'(t) = 0 \iff t = 0, 2\pi$.

Dunque α é regolare su $(0, 2\pi)$.

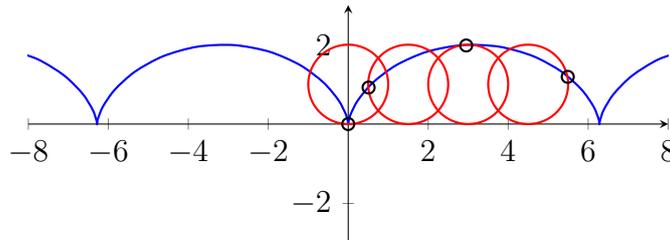


Figura 4: Il supporto della cicloide (in blu) nel piano $z = 0$

Cerchiamo di riparametrizzare α per lunghezza d'arco; si ha:

$$l(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t 2\sin \frac{t}{2} du = 4 - 4\cos \frac{t}{2},$$

dunque $L(\alpha) = 8$.

Inoltre $l : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 8]$, e se $\psi = l^{-1}$, esplicitamente:

$$4 - 4\cos \frac{t}{2} = s \iff \cos \frac{t}{2} = 1 - \frac{s}{4} \iff t = 2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4} \right),$$

cioé se $\psi(s) = 2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4} \right)$, allora $\beta = \alpha \circ \psi$ é PLA.

1.2 Versore tangente, versore normale e curvatura di una curva

Definizione 1.2.1. α regolare. Il **versore tangente** ad α al tempo s é $t(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$, cioè é il versore tangente ad α orientato nel suo verso di percorrenza.

Osservazione. Se α é PLA, il versore tangente é semplicemente la sua velocità.

Osservazione. Se β_1 e β_2 sono due riparametrazioni per lunghezza d'arco di α , allora $\beta_2 = \beta_1 \circ \psi$ per un certo diffeomorfismo ψ , ma prendendo le norme delle derivate si ha che $\|\psi'(t)\| = 1$, cioè $\psi(t) = t + c$ (poiché accettiamo solo riparametrazioni crescenti) e dunque $\beta_2(t) = \beta_1(t + c)$.

Esempio (trattrice). $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2})$ é detta **trattrice**. Si calcola

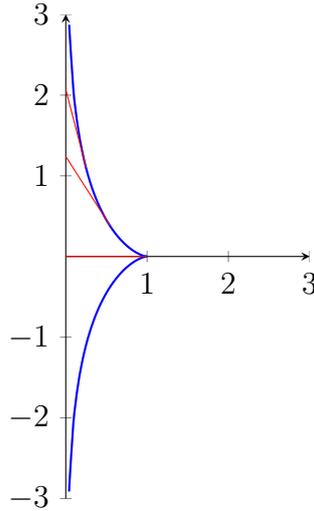


Figura 5: Il supporto della trattrice (in blu) nel piano $z = 0$

che:

$$\alpha'(t) = \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{2} \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} \right) = \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right),$$

dunque α é regolare in $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, ma non é PLA perché:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t - 2 + \frac{1}{\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = |\cot t|.$$

Si ha quindi, per $s \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$:

$$t(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = -\frac{\sin t}{\cos t} \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right) = (-\sin t, -\cos t),$$

mentre, se $s \in (0, \frac{\pi}{2})$, in modo analogo $t(s) = (\sin(s), \cos(s))$.

Il nome trattrice deriva dal fatto che il segmento tangente alla curva in ogni punto che raggiunge l'asse y (in rosso nella figura) ha sempre lunghezza 1; questo può essere verificato semplicemente osservando che l'ascissa del punto $\alpha(s) \pm t(s)$ (a seconda che $s > \frac{\pi}{2}$ o $s < \frac{\pi}{2}$) é sempre 0.

Definizione 1.2.2. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ PLA. Definiamo **curvatura** di α in s $k(s) = \|t'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$.

Se α é regolare e $\beta = \alpha \circ \psi$ é PLA, allora $k_\alpha(u) := k_\beta(\psi^{-1}(u))$.

Osservazione. Grazie all'osservazione precedente, é una buona definizione; inoltre k é invariante per riparametrazioni (cioé non cambia nei punti corrispondenti).

Proposizione 1.2.1. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Allora $k(t) \equiv 0 \iff$ il supporto di α é contenuto in una retta.

Dimostrazione. \Leftarrow) Sicuramente $\alpha(t) = p_0 + f(t)v_0$, in quanto il supporto di α é contenuto in una retta; inoltre possiamo supporre senza perdita di generalitá che $\|v_0\| = 1$ e che α é PLA (altrimenti riparametrizzo e ipotesi e tesi sono invarianti per riparametrazioni). Ma allora $1 = \|\alpha'(t)\| = \|f'(t)v_0\| = \|f'(t)\| \cdot \|v_0\| = \|f'(t)\|$, da cui $f'(t) = \pm 1 \forall t$ e dunque $f' \equiv \pm 1$ per continuitá.

Quindi, a meno di cambiare v_0 con $-v_0$, $\alpha(t) = p_0 + tv_0$, da cui $\alpha''(t) = 0$ e $k \equiv 0$.

\Rightarrow) Come prima, posso supporre α PLA. $k \equiv 0 \Rightarrow \alpha'' \equiv 0 \Rightarrow \alpha' = v_0$ é costante.

Ma allora, preso $t_0 \in I$, $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^t \alpha'(s)ds = \alpha(t_0) + (t - t_0)v_0$, da cui la tesi. \square

Dimostriamo ora un lemma di algebra lineare, che ci servirá spesso in futuro.

Lemma 1.2.2. Sia $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ bilineare. Allora b é C^∞ e, se $\alpha_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono C^∞ , vale la relazione:

$$\frac{d}{dt}b(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = b(\alpha_1'(t), \alpha_2(t)) + b(\alpha_1(t), \alpha_2'(t)).$$

Dimostrazione. Visto che la tesi é una relazione vettoriale, basta mostrarla componente per componente (e dunque di puó supporre senza perdita di generalitá che $k = 1$).

Sappiamo che esiste una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(n, m)$ tale che:

$$b(v, w) = \sum_{i,j} v_i a_{ij} w_j.$$

Se denoto con $v_i(t)$ (risp. $w_j(t)$) la i -esima (risp. j -esima) componente di $\alpha_1(t)$ (risp. $\alpha_2(t)$), derivando la precedente relazione si ha:

$$\frac{d}{dt}b(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \sum_{i,j} ((\alpha_1)'_i a_{ij} (\alpha_2)_j + (\alpha_1)_i a_{ij} (\alpha_2)'_j),$$

da cui la tesi riordinando i termini della somma. \square

Definizione 1.2.3. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva PLA. $\forall t \in I$ tale che $k(t) \neq 0$ (o equivalentemente $\alpha''(t) \neq 0$), si definisce **versore normale** a α in t il versore $n(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$.

Se α é regolare e $k_\alpha(t) \neq 0 \forall t$, allora si definisce $n_\alpha(t) = n_\beta(s)$, dove β é una riparametrazione PLA di α tale che $\beta(s)$ corrisponde a $\alpha(t)$; equivalentemente, si pone $n_\alpha(u) = \frac{t'(u)}{\|t'(u)\|}$.

Osservazione. Le due definizioni sono equivalenti, perché $t(u)$ é esattamente la velocitá di una riparametrazione PLA di α .

Osservazione. Nel caso di un flesso, non si puó definire il versore normale con continuitá: nel

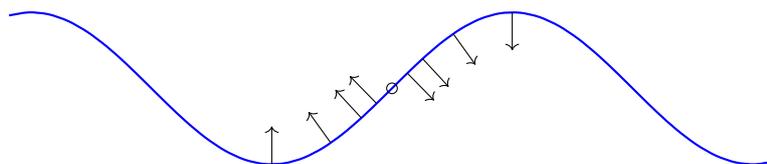


Figura 6: Il versore normale vicino a un flesso

punto segnato, il versore normale non é definito; prima e dopo il punto, il versore cambia verso.

Osservazione. n é veramente normale alla curva, cioè $n(u) \perp t(u) \forall u \in I$. Infatti, derivando entrambi i membri dell'uguaglianza $\langle t(u), t(u) \rangle \equiv 1$, si ottiene:

$$2\langle t'(u), t(u) \rangle \equiv 0, \quad \text{cioé} \quad 2k(u)\langle n(u), t(u) \rangle \equiv 0,$$

dunque $n(u) \perp t(u)$ in quanto $k(u) \neq 0$ (altrimenti non si potrebbe definire $n(u)$).

Definizione 1.2.4. Una curva regolare $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice **biregolare** se $k(t) \neq 0 \forall t \in I$.

Osservazione. Le relazioni $t' = k \cdot n$ (se α é PLA) e $t \perp n$ hanno senso solo per curve biregolari.

1.3 Orientazione di spazi vettoriali e prodotto vettore in \mathbb{R}^n

Definizione 1.3.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n < +\infty$. Due basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ di V si dicono **equivalenti** (si scrive $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$) se la matrice del cambio di base $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\text{id}) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ha determinante positivo.

Osservazione. 1. \sim é una relazione di equivalenza (perché vale la formula di Binet $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$).

2. Esistono esattamente 2 classi di equivalenza. Infatti ne esistono almeno due perché se $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ é base di V , $\mathcal{B}_2 = \{-v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é tale che $\mathcal{B}_1 \not\sim \mathcal{B}_2$; d'altronde, sempre per Binet, se $\mathcal{B}_1 \not\sim \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1 \not\sim \mathcal{B}_3$, allora $\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_3$ (in quanto la matrice del cambio di base ha determinante prodotto di due numeri negativi).

Definizione 1.3.2. Un'**orientazione** su V é la scelta di una di queste due classi di equivalenza.

Definizione 1.3.3. Sia V uno spazio vettoriale orientato. Una base \mathcal{B} di V si dice **positiva** se appartiene alla classe di equivalenza scelta, altrimenti si dice **negativa**.

Proposizione 1.3.1. Siano V, W spazi vettoriali orientati e sia $f : V \rightarrow W$ un isomorfismo. Allora sono fatti equivalenti:

1. $\exists \mathcal{B}_1$ base positiva di V tale che $f(\mathcal{B}_1)$ é base positiva di W .
2. $\forall \mathcal{B}_1$ base positiva di V , la base $f(\mathcal{B}_1)$ é positiva in W .
3. \exists basi positive \mathcal{B}_1 di V e \mathcal{B}_2 di W tali che $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$ ha determinante positivo.
4. $\forall \mathcal{B}_1$ base positiva di V e \mathcal{B}_2 base positiva di W , $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$ ha determinante positivo.

Dimostrazione. Tutte le implicazioni sono banali osservando che ogni base di V si puó ottenere come immagine della base \mathcal{B}_1 data tramite una matrice (del cambio di base) con determinante positivo. \square

Definizione 1.3.4. Se f verifica una di queste condizioni, si dice che f **preserva l'orientazione** (o che é **positiva**).

Esempio. La base canonica induce l'orientazione standard di \mathbb{R}^n , per la quale $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é positiva $\iff \det(A) > 0$.

Proposizione 1.3.2. Siano $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Allora:

1. $\exists! w \in \mathbb{R}^n$, denotato $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$, tale che $\det(v_1, \dots, v_{n-1}, x) = \langle w, x \rangle \forall x \in \mathbb{R}^n$.
2. $\wedge \dots \wedge : (\mathbb{R}^n)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é multilineare alterna (cioé $v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(n-1)} = (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \forall \sigma \in \mathcal{S}_{n-1}$); in particolare é C^∞ .

3. $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = 0 \iff i v_i$ sono linearmente dipendenti.
4. Se v_1, \dots, v_{n-1} sono linearmente indipendenti, allora $v_1, \dots, v_{n-1}, v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ é una base positiva di \mathbb{R}^n .
5. $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \perp v_i \forall i = 1, \dots, n-1$.

Dimostrazione. 1. La mappa:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \det(v_1, \dots, v_{n-1}, x) \end{aligned}$$

é lineare, dunque per il teorema di rappresentazione di Riesz, é rappresentata da un unico funzionale della forma $x \rightarrow \langle w, x \rangle$.

2. Si ha l'uguaglianza fra funzionali:

$$\det(\alpha v_1 + \beta v'_1, v_2, \dots, v_{n-1}, \bullet) = \alpha \det(v_1, \dots, v_{n-1}, \bullet) + \beta \det(v'_1, \dots, v_{n-1}, \bullet).$$

Questo mostra la multilinearitá. Mostrare l'alternanza é analogo.

3. Se i v_i sono dipendenti, $\det(v_1, \dots, v_{n-1}, x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$, dunque $\det(v_1, \dots, v_{n-1}, \bullet)$ é la mappa nulla, che quindi per unicita del funzionale é rappresentata dal funzionale $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = 0$.

Viceversa, se i v_i sono indipendenti, li completo a una base v_1, \dots, v_n di \mathbb{R}^n , e quindi $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, da cui il funzionale $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ che rappresenta la mappa $\det(v_1, \dots, v_{n-1}, \bullet)$ non é 0.

4. Per definizione si ha:

$$\det(v_1, \dots, v_{n-1}, v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) = \langle v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}, v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \rangle = \|v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}\|^2 > 0.$$

5. $\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}, v_i \rangle = \det(v_1, \dots, v_{n-1}, v_i) = 0$.

□

Definizione 1.3.5. $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ si dice **prodotto vettore** di v_1, \dots, v_{n-1} .

Osservazione. In \mathbb{R}^3 , possiamo scrivere una formula esplicita per il prodotto vettore:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & x_1 \\ v_2 & w_2 & x_2 \\ v_3 & w_3 & x_3 \end{pmatrix} &= x_1(v_2 w_3 - w_2 v_3) - x_2(v_1 w_3 - w_1 v_3) + x_3(v_1 w_2 - w_1 v_2) = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 w_3 - w_2 v_3 \\ v_1 w_3 - w_1 v_3 \\ v_1 w_2 - w_1 v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

dunque:

$$v \wedge w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - w_2 v_3 \\ v_1 w_3 - w_1 v_3 \\ v_1 w_2 - w_1 v_2 \end{pmatrix}.$$

Corollario 1.3.3. In \mathbb{R}^3 vale la relazione:

$$\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 \left(1 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|v\|^2 \|w\|^2} \right).$$

Dimostrazione. Con un calcolo diretto si ottiene:

$$\|v \wedge w\|^2 = v_2^2 w_3^2 + w_2^2 v_3^2 - 2v_2 w_2 v_3 w_3 + v_1^2 w_3^2 + w_1^2 v_3^2 - 2v_1 w_1 v_3 w_3 + v_1^2 w_2^2 + w_1^2 v_2^2 - 2v_1 v_2 w_1 w_2$$

e:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 = \\ &= v_1^2 w_2^2 + v_1^2 w_3^2 + v_2^2 w_1^2 + v_2^2 w_3^2 + v_3^2 w_1^2 + v_3^2 w_2^2 - 2v_1 v_2 w_1 w_2 - 2v_1 w_1 v_3 w_3 - 2v_2 w_2 v_3 w_3, \end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

Corollario 1.3.4. *Se $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ sono ortonormali, allora $\{e_1, e_2, e_1 \wedge e_2\}$ é una base ortonormale positiva di \mathbb{R}^3 (anzi, $e_1 \wedge e_2$ é l'unico completamento di e_1, e_2 a base ortonormale positiva).*

Proposizione 1.3.5. *Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$.*

1. *Se $A \in \text{SO}(3)$, allora $A(v \wedge w) = Av \wedge Aw$.*
2. *Se $A \in \text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$, allora $A(v \wedge w) = -Av \wedge Aw$.*

Dimostrazione. 1. Costruiamo le due forme bilineari:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v, w) & \longrightarrow & A(v \wedge w) & (v, w) & \longrightarrow & Av \wedge Aw \end{array}$$

Vogliamo vedere che $\varphi = \psi$; per farlo, basta vederlo sui vettori della base canonica (poiché sono bilineari).

Per definizione si ha:

$$\varphi(e_i, e_j) = A(e_i \wedge e_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ A(\pm e_k) & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

dove $\{e_i, e_j, \pm e_k\}$ é una base ortonormale positiva di \mathbb{R}^3 .

Allo stesso modo:

$$\psi(e_i, e_j) = Ae_i \wedge Ae_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ v_{ij} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

dove $\{Ae_i, Ae_j, v_{ij}\}$ é una base ortonormale di \mathbb{R}^3 .

Ma $\{Ae_i, Ae_j, A(\pm e_k)\}$ é una base ortonormale positiva di \mathbb{R}^3 , e per l'unicità del completamento di due vettori ortonormali a una base ortonormale positiva, si ha necessariamente $v_{ij} = A(\pm e_k)$, cioè la tesi.

2. Analogo al punto precedente, con l'unica differenza che A questa volta porta basi ortonormali positive in basi ortonormali negative. \square

Osservazione. Sia $v = v(s)$ una funzione vettoriale. Allora:

$$\frac{d\|v\|}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\sqrt{\langle v, v \rangle} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\langle v, v \rangle}} \cdot \underbrace{\frac{d}{ds}(\langle v, v \rangle)}_{=2\langle v', v \rangle} = \frac{\langle v', v \rangle}{\|v\|}.$$

Proposizione 1.3.6. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regolare, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ una sua riparametrizzazione PLA. Indichiamo con $s = s(t)$ e $t = t(s)$ i diffeomorfismi tali che $\alpha(t) = \beta(s)$. Allora:

1. $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}$;
2. $\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^4}$;
3. $k_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$.

Dimostrazione. 1. $\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(t(s))\| = 1$, dunque:

$$1 = \left\| \frac{d(\alpha(t(s)))}{ds} \right\| = \left\| \alpha'(t) \frac{dt}{ds} \right\| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}.$$

2. Direttamente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dt}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \right) = -\frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2 \cdot \|\alpha'(t)\|} \cdot \left\langle \frac{d\alpha'(t)}{ds}, \alpha'(t) \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3} \cdot \left\langle \frac{dt}{ds} \alpha''(t), \alpha'(t) \right\rangle = -\frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^4}. \end{aligned}$$

3. Per quanto visto, si ha:

$$\begin{aligned} k_\alpha(t) &= \left\| \frac{d^2\alpha(t)}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d}{ds} \left(\frac{d\alpha(t)}{ds} \right) \right\| = \left\| \frac{d}{ds} \left(\frac{dt}{ds} \frac{d\alpha(t)}{dt} \right) \right\| = \left\| \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) \right\| = \\ &= \left\| \frac{\frac{d\alpha'(t)}{ds} \|\alpha'(t)\| - \frac{d\|\alpha'(t)\|}{ds} \alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} \right\| = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \left\| \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|} \|\alpha'(t)\| - \frac{\langle \frac{d\alpha'(t)}{ds}, \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t) \right\| = \\ &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \left\| \alpha''(t) - \frac{\langle \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t) \right\| = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3} \left\| \|\alpha'(t)\| \alpha''(t) - \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t) \right\|. \end{aligned}$$

Affermo ora (e mi basterebbe per giungere alla tesi), che $\forall v, w \in \mathbb{R}^3$, vale la relazione:

$$\|v \wedge w\| = \left\| \|v\|w - \frac{\langle w, v \rangle}{\|v\|}v \right\|.$$

Per (bi)linearit  di entrambi i membri, mi basta mostrarlo per vettori unitari, dunque devo vedere che $\forall v, w \in \mathbb{R}^3$ tali che $\|v\| = \|w\| = 1$ vale:

$$\|v \wedge w\| = \|w - \langle w, v \rangle v\|.$$

Si ha:

$$\|w - \langle w, v \rangle v\|^2 = \langle w - \langle w, v \rangle v, w - \langle w, v \rangle v \rangle = \langle w, w \rangle - 2\langle w, v \rangle^2 + \langle w, v \rangle^2 \langle v, v \rangle = 1 - \langle w, v \rangle^2,$$

ma in una precedente proposizione abbiamo visto che, per vettori unitari:

$$\|v \wedge w\|^2 = 1 - \langle w, v \rangle^2.$$

□

Corollario 1.3.7. *Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Allora:*

$$k = \frac{|x'y'' + x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se inoltre $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   tale che $\alpha(t) = (t, f(t))$, allora:

$$k = \frac{|f''|}{(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

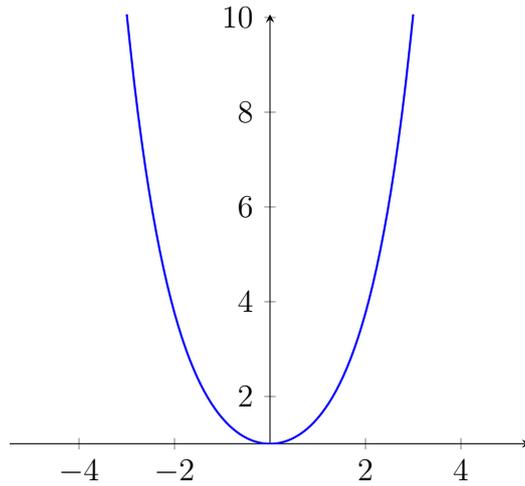


Figura 7: Il supporto della catenaria

Esempio (catenaria). $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, \cosh t)$ é detta **catenaria**. Il nome deriva dal fatto che questa é la forma che assume una corda inestensibile fissata agli estremi; con le formule appena ottenute si ha:

$$k = \frac{|(\cosh t)''|}{(1 + ((\cosh t)')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cosh t}{(1 + \sinh^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Proposizione 1.3.8. Sia $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita in coordinate polari (ρ, θ) da $\rho = \rho(\theta)$. Allora:

1. $L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta;$

2. $k = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Dimostrazione. Dalle relazioni $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$ si ricava:

$$\begin{cases} x' = \rho' \cos \theta - \rho \sin \theta \\ y' = \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta \end{cases}$$

e dunque $\|\alpha'\|^2 = (\rho')^2 + \rho^2$.

Per la formula della curvatura, deriviamo ancora:

$$\begin{cases} x'' = \rho'' \cos \theta - 2\rho' \sin \theta - \rho \cos \theta = (\rho'' - \rho) \cos \theta - 2\rho' \sin \theta \\ y'' = \rho'' \sin \theta + 2\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta = (\rho'' - \rho) \sin \theta + 2\rho' \cos \theta \end{cases}$$

e giungiamo alla tesi applicando la formula del corollario precedente. \square

Esempio (cardioide). La curva in \mathbb{R}^2 parametrizzata in coordinate polari da $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$ per $\theta \in [0, 2\pi]$, é detta **cardioide**. Grazie alle formule appena ottenute, calcoliamo la sua lunghezza e la sua curvatura.

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 8.$$

Inoltre:

$$k = \frac{2 \sin^2 \theta - (1 - \cos \theta) \cos \theta + (1 - \cos \theta)^2}{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1 - \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 - 3 \cos \theta + 1}{(4 \sin^2 \frac{\theta}{2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{3(1 - \cos \theta)}{8 \sin^3 \frac{\theta}{2}} = \frac{3 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{4 \sin^3 \frac{\theta}{2}} = \frac{3}{4 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

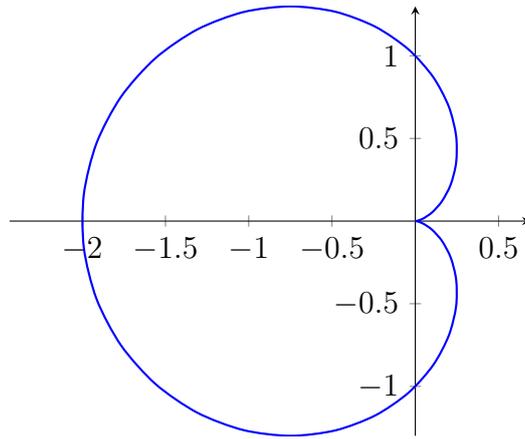


Figura 8: Il supporto della cardioide

1.4 Versore binormale e torsione di una curva

Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ biregolare e PLA. In ogni istante $u \in I$ abbiamo definito il versore tangente $t(u)$, la curvatura $k(u)$, e il versore normale $n(u)$, legati dalle relazioni:

$$t'(u) = k(u) \cdot n(u), \quad t(u) \perp n(u).$$

Segue quindi in modo molto naturale la seguente definizione:

Definizione 1.4.1. Il **versore binormale** di α PLA e biregolare al tempo u é il versore $b(u) = t(u) \wedge n(u)$.

Per costruzione, $\{t(u), n(u), b(u)\}$ é una base ortonormale di \mathbb{R}^3 , detta **triedro di Frenet** di α all'istante u .

Osservazione. Continuiamo ad assumere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ PLA e biregolare. Si ha:

$$b' = (t \wedge n)' = t' \wedge n + t \wedge n' = \underbrace{(k \cdot n)}_{=0} \wedge n + t \wedge n' = t \wedge n',$$

dunque $b'(u) \perp t(u) \forall u \in I$.

Inoltre, come già visto per $t(u)$, $b'(u) \perp b(u) \forall u \in I$ (basta derivare l'uguaglianza $\langle b(u), b(u) \rangle = 1$). Dunque b' é ortogonale a due vettori di una base ortonormale, e perciò é un multiplo del terzo vettore: $b'(u) = \tau(u)n(u) \forall u \in I$ per un certo $\tau(u) \in \mathbb{R}$ dipendente dall'istante u .

Definizione 1.4.2. Nelle notazioni dell'osservazione precedente, il numero $\tau(u)$ si chiama **torsione** di α al tempo u .

Osservazione. Sfruttando l'uguaglianza $b'(u) = \tau(u) \cdot n(u)$, si ottiene:

$$\langle b'(u), n(u) \rangle = \langle \tau(u) \cdot n(u), n(u) \rangle = \tau(u) \langle n(u), n(u) \rangle = \tau(u).$$

In particolare, $\tau(u)$ é C^∞ .

Esempio. Sia $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'elica circolare (con $c^2 = a^2 + b^2$ e dunque α é PLA). Calcoliamo curvatura e torsione di α .

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right),$$

dunque $k(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{c^2}$.

Invece:

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right),$$

quindi con facili calcoli si ricava che:

$$b(s) = t(s) \wedge n(s) = \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \right) \Rightarrow b'(s) = \left(\frac{b}{c^2} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right).$$

Ma visto che b' e n hanno versi opposti, si ottiene:

$$\tau(s) = -\|b'(s)\| = -\frac{b}{c^2}.$$

In conclusione, l'elica ha curvatura e torsione costanti.

Osservazione. Dati due numeri $\tau \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}^+$, esiste sempre un'elica circolare con curvatura (costante) k e torsione (costante) τ .

Infatti questo equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \\ k = \frac{a}{c^2} \\ \tau = -\frac{b}{c^2} \end{cases}$$

e cioè:

$$c^2 = \frac{1}{k^2 + \tau^2}$$

(dunque $a = kc^2$ e $b = -\tau c^2$). Quindi con tutte le eliche circolari realizzo tutte le possibili curvatures e torsioni costanti.

Teorema 1.4.1. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ biregolare. α é piana (cioé ha supporto contenuto in un piano) $\iff \tau \equiv 0$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per entrambe le implicazioni, possiamo supporre α PLA.

\Rightarrow) Se α é piana, $\exists v_0, \|v_0\| = 1$, tale che $\langle \alpha(s), v_0 \rangle = a$ costante. Derivando due volte si ottiene:

$$\langle t(s), v_0 \rangle = 0 \quad \underbrace{k(s)}_{\neq 0} \langle n(s), v_0 \rangle = 0,$$

dunque $v_0 \in \text{Span}(t(s), n(s))^\perp \forall s$. Ma allora $b(s) = \pm v_0 \forall s$, in quanto hanno la stessa norma.

Per continuitá $b(s) = v_0$ o $b(s) = -v_0 \forall s$; in ogni caso $b'(s) \equiv 0$ e dunque $\tau \equiv 0$.

\Leftarrow) Se $\tau \equiv 0, b' \equiv 0$, cioè $b(s) = b_0 \forall s$, con b_0 costante.

La funzione $s \mapsto \langle \alpha(s), b_0 \rangle$ ha derivata $\langle t(s), b_0 \rangle = \langle t(s), b(s) \rangle = 0$, quindi $\langle \alpha(s), b_0 \rangle = a \in \mathbb{R}$ costante, da cui il supporto di α é contenuto in $\{x \mid \langle x, b_0 \rangle = a\}$.

□

Concludiamo la sezione con una formula esplicita per la torsione di una curva regolare generica, che non dimostriamo:

Proposizione 1.4.2. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regolare. Allora:

$$\tau = \frac{\langle (\alpha' \wedge \alpha''), \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} = \frac{\det(\alpha' \mid \alpha'' \mid \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}.$$

1.5 Piano e cerchio osculatore

Data una curva α biregolare e PLA, ci proponiamo di trovare il piano e la circonferenza che meglio approssimano la curva a un dato istante s .

Se $H \subseteq \mathbb{R}^3$ é un piano affine di equazione $\{x \mid \langle x, v_0 \rangle = a\}$, con $\|v_0\| = 1$, pongo $\forall y \in \mathbb{R}^3$:

$$\bar{d}(y, H) = \langle y, v_0 \rangle - a.$$

Osserviamo che \bar{d} non é altro che la distanza “con segno” fra y e H ; infatti, se H fosse un piano vettoriale, si avrebbe, come in figura, che $\bar{d}(y, H) = \langle y, v_0 \rangle = \|y\| \|v_0\| \sin \theta$, con θ l’angolo fra

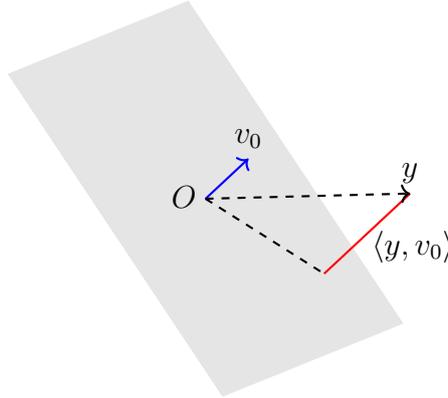


Figura 9: La distanza (in rosso) di un punto da un piano vettoriale

v_0 e y , che é esattamente la formula della distanza fra y e il piano H (se il piano fosse affine, basta aggiungere la costante a).

Osservazione. $\forall s_0 \in I, \exists! H_{s_0} \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che la funzione $s \mapsto \bar{d}(\alpha(s), H_{s_0})$ abbia uno zero di ordine ≥ 3 in s_0 (cioé in cui si annullano derivata prima e seconda).

Tale piano si chiama **piano osculatore** in s_0 ed é parametrizzato da:

$$\alpha(s_0) + \text{Span}(t(s_0), n(s_0)).$$

Dimostrazione. Calcoliamo le derivate di $f(s) = \bar{d}(\alpha(s), H)$, dove $H = \{x \mid \langle x, v_0 \rangle = a\}$.

$$\begin{aligned} f(s) = \langle \alpha(s), v_0 \rangle - a &\Rightarrow f(s_0) = \langle \alpha(s_0), v_0 \rangle - a \\ f'(s) = \langle t(s), v_0 \rangle &\Rightarrow f'(s_0) = \langle t(s_0), v_0 \rangle \\ f''(s) = k(s) \langle n(s), v_0 \rangle &\Rightarrow f''(s_0) = \underbrace{k(s_0)}_{\neq 0} \langle n(s_0), v_0 \rangle. \end{aligned}$$

Dunque $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0 \iff a = \langle \alpha(s_0), v_0 \rangle, v_0 = \pm b(s_0)$ (in quanto é unitario e ortogonale a t e n).

Quindi il piano é unico e in particolare ha giacitura e punto iniziale voluto (in quanto $\langle y, v_0 \rangle = \pm \langle y, b(s_0) \rangle = 0 \iff y \in \text{Span}(t(s_0), n(s_0))$). \square

Proposizione 1.5.1. $\exists!$ circonferenza $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ PLA tale che $\gamma(0) = \alpha(0)$, $\gamma'(0) = \alpha'(0)$ e $\gamma''(0) = \alpha''(0)$.

Tale circonferenza si chiama **cerchio osculatore**, giace sul piano osculatore, ha centro in $C = \alpha(0) + \frac{n(0)}{k(0)}$ e ha raggio $r = \frac{1}{k(0)}$ (detto **raggio di curvatura** di α in 0).

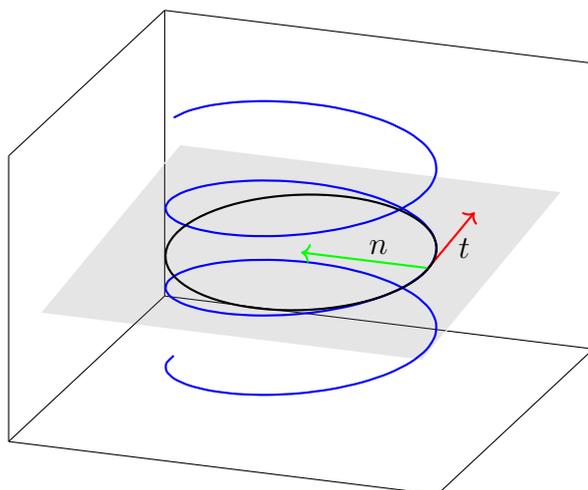


Figura 10: Piano e cerchio osculatore dell'elica circolare all'istante 0

Dimostrazione. Un generico cerchio di raggio R con centro p é parametrizzato da $\gamma(t) = p + v_1 R \cos \frac{t}{R} + v_2 R \sin \frac{t}{R}$, dove v_1, v_2 sono versori ortonormali.

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -v_1 \sin \frac{t}{R} + v_2 \cos \frac{t}{R} \Rightarrow \gamma'(0) = v_2 \\ \gamma''(t) &= -\frac{v_1}{R} \cos \frac{t}{R} - \frac{v_2}{R} \sin \frac{t}{R} \Rightarrow \gamma''(0) = -\frac{v_1}{R}. \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{cases} p + v_1 R = \alpha(0) \\ v_2 = \alpha'(0) = t(0) \\ -\frac{v_1}{R} = \alpha''(0) = k(0)n(0) \end{cases}$$

ma nell'ultima equazione v_1 e $n(0)$ sono versori e $k(0), R > 0$, da cui $n(0) = -v_1$ e $R = \frac{1}{k(0)}$.

Inoltre si ottiene $p = \alpha(0) - v_1 R = \alpha(0) + \frac{n(0)}{k(0)}$ e $v_2 = t(0)$, che sta ad indicare che la circonferenza giace sul piano osculatore. \square

1.6 Formule di Frenet e congruenza fra curve

Teorema 1.6.1. *Sia α biregolare e PLA. Allora valgono le seguenti **formule di Frenet**:*

$$\begin{cases} t' = k \cdot n \\ n' = -k \cdot t - \tau \cdot b \\ b' = \tau \cdot n \end{cases}$$

Dimostrazione. t' e b' sono già noti. b, t, n é una base ortonormale positiva, dunque $n = b \wedge t$ e perciò:

$$n' = b' \wedge t + b \wedge t' = (\tau n) \wedge t + b \wedge (kn) = -\tau b - kt.$$

\square

Osservazione (Interpretazione del segno della torsione). Se α é biregolare, il piano osculatore in ogni punto di α divide \mathbb{R}^3 in due semispazi, ed ha senso distinguere il semispazio “positivo” (quello verso cui punta il binormale) da quello negativo (verso $-b_0$).

Il segno della torsione dice se α sta passando dal semispazio negativo a quello positivo (segno $-$) o viceversa.

Dimostrazione. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ biregolare PLA, $0 \in I$. Sviluppando con Taylor si ha:

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \alpha(0) + \alpha'(0)s + \frac{\alpha''(0)}{2}s^2 + \frac{\alpha'''(0)}{6}s^3 + o(s^3) = \\ &= \alpha(0) + t(0)s + \frac{k(0)n(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)n(0) - k(0)^2t(0) - k(0)\tau(0)b(0)}{6}s^3 + o(s^3)\end{aligned}$$

(in quanto $\alpha'' = kn \Rightarrow \alpha''' = k'n + kn' = k'n + k(-kt - \tau b)$).

Dunque:

$$\alpha(s) = \underbrace{\alpha(0) + t(0)\left(s - \frac{k(0)s^3}{6}\right) + n(0)\left(\frac{k(0)s^2}{2} + \frac{k'(0)s^3}{6}\right) + b(0)\left(-\frac{k(0)\tau(0)s^3}{6}\right)}_{\text{sta sul piano osculatore}} + o(s^3).$$

Quindi, se H é il piano osculatore, la distanza con segno da H , posta positiva nel verso di b , é $\bar{d}(\alpha(s), H) = -\frac{k\tau s^3}{6} + o(s^3)$.

Poiché $k > 0$, passo dal negativo al positivo $\iff \tau < 0$. □

Esercizio. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ biregolare e PLA, $k' \neq 0$. Posto $R = \frac{1}{k}$ il raggio di curvatura e $T = \frac{1}{\tau}$, allora $\alpha(I)$ é contenuto in una superficie sferica $\iff R^2 + (R')^2T^2$ é costante.

Dimostrazione. \Rightarrow) Movimenti rigidi non cambiano la curvatura, dunque a meno di traslare posso supporre che la sfera abbia centro in 0.

$\|\alpha(s)\|^2 \equiv R^2$, dunque derivando si ha che $\langle \alpha, \alpha' \rangle \equiv 0$, cioè $\langle \alpha, t \rangle = 0$; derivando ancora si ottiene che $\langle t, t \rangle + \langle \alpha, kn \rangle = 0$, cioè $k\langle \alpha, n \rangle = -1$.

Derivando ancora una volta l'ultima relazione, ed usando che $\langle \alpha, n \rangle = -\frac{1}{k}$, otteniamo:

$$\begin{aligned}k'\langle \alpha, n \rangle + k\underbrace{\langle \alpha', n \rangle}_{=0} + k\langle \alpha, n' \rangle &= 0 \Rightarrow -\frac{k'}{k} + k\langle \alpha, -kt - \tau b \rangle = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{k'}{k} - k^2\underbrace{\langle \alpha, t \rangle}_{=0} - k\tau\langle \alpha, b \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \alpha, b \rangle = -\frac{k'}{k^2\tau}.\end{aligned}$$

Dunque, scomponendo α in componenti, si ha $\alpha = 0t + \left(-\frac{1}{k}\right)n + \left(-\frac{k'}{k^2\tau}\right)b = -Rn + R'Tb$, e prendendo la norma quadra si giunge a $R^2 + (R')^2T^2 = \text{costante}$.

\Leftarrow) Voglio mostrare che $\beta = \alpha + Rn - R'Tb$ é il centro. Si calcola:

$$\begin{aligned}\beta' &= \alpha' + R'n + Rn' - (R'T)'b - R'Tb' = \alpha' + R'n + R(-kt - \tau b) - (R'T)'b - R't(\tau n) = \\ &= \alpha' - Rkt - ((R'T)' + R\tau)b = \alpha' - t - \left((R'T)' + \frac{R}{T}\right)b = 0,\end{aligned}$$

in quanto $R^2 + (R')^2T^2 = \text{costante} \Rightarrow 2RR' + 2R'T(R'T)' = 0 \Rightarrow R + T(R'T)' = 0$.

Ma allora $\beta \equiv \alpha + Rn - R'Tb$, cioè $\alpha = \beta + (-Rn + R'Tb)$, con β costante e $\| -Rn + R'Tb \|$ costante, cioè la tesi. □

Osservazione. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é un'isometria (cioé preserva le distanze) $\iff \exists A \in O(3), b \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(x) = Ax + b \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Definizione 1.6.1. $\alpha_1, \alpha_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ PLA e biregolari si dicono **congruenti** se $\exists f \in \text{Isom}^+(\mathbb{R}^3)$ tale che $\alpha_2(s) = f(\alpha_1(s)) \forall s \in I$, dove $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{R}^3)$ se f é un'isometria e la sua parte lineare ha determinante positivo.

Proposizione 1.6.2. *Se α_1, α_2 sono PLA, biregolari e congruenti tramite $f(x) = Ax + b$, allora $k_1 \equiv k_2$, $\tau_1 \equiv \tau_2$ e A porta (t_1, n_1, b_1) e (t_2, n_2, b_2) .*

Dimostrazione. Per definizione, $\alpha_2(s) = A\alpha_1(s) + b$, quindi $\alpha_2'(s) = A\alpha_1'(s)$, da cui $t_2 = At_1$. Inoltre derivando ancora, $k_2 n_2 = k_1 A n_1$, ma n_2 e $A n_1$ sono versori, dunque $k_1 = k_2$ e $n_2 = A n_1$. Infine $b_2 = t_2 \wedge n_2 = At_1 \wedge A n_1 = A(t_1 \wedge n_1) = A b_1$, da cui $b_2' = A b_1'$ e cioè $\tau_2 n_2 = \tau_1 A n_1$, ma $n_2 = A n_1$, quindi $\tau_1 = \tau_2$. \square

Teorema 1.6.3 (fondamentale delle curve). *Siano date funzioni $k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\tau : I \rightarrow \mathbb{R} C^\infty$. Allora $\exists \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ biregolare e PLA tale che k e τ siano curvatura e torsione di α ; inoltre tale α é unica a meno di congruenza.*

Dimostrazione. Il triedro di Frenet, nelle incognite $\bar{t}_i, \bar{n}_i, \bar{b}_i$ (dove i indica l' i -esima coordinata), $i = 1, 2, 3$, verifica il sistema:

$$\begin{cases} \bar{t}' = k \bar{n} \\ \bar{n}' = -k \bar{t} - \tau \bar{b} \\ \bar{b}' = \tau \bar{n} \end{cases}$$

É un sistema lineare del primo ordine di 9 equazioni in 9 incognite, che ha dunque una soluzione definita in I , unica se fissiamo le condizioni iniziali $\bar{t}(0), \bar{n}(0), \bar{b}(0)$, $0 \in I^\circ$.

Vediamo che, data $\bar{t}(0), \bar{n}(0), \bar{b}(0)$ terna ortonormale positiva, la terna $\bar{t}(s), \bar{n}(s), \bar{b}(s)$ rimane ortonormale positiva.

Siano $g_1 = \langle \bar{t}, \bar{t} \rangle$, $g_2 = \langle \bar{n}, \bar{n} \rangle$, $g_3 = \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle$, $g_4 = \langle \bar{t}, \bar{n} \rangle$, $g_5 = \langle \bar{t}, \bar{b} \rangle$, $g_6 = \langle \bar{n}, \bar{b} \rangle$.

Le g_i verificano il sistema:

$$\begin{cases} g_1' = 2 \langle \bar{t}', \bar{t} \rangle = 2k \langle \bar{n}, \bar{t} \rangle = 2k g_4 \\ g_2' = 2 \langle \bar{n}', \bar{n} \rangle = -2k \langle \bar{n}, \bar{t} \rangle - 2\tau \langle \bar{b}, \bar{n} \rangle = 2k g_4 - 2\tau g_6 \\ g_3' = 2 \langle \bar{b}', \bar{b} \rangle = 2\tau \langle \bar{n}, \bar{b} \rangle = 2\tau g_6 \\ g_4' = \langle \bar{t}', \bar{n} \rangle + \langle \bar{t}, \bar{n}' \rangle = k \langle \bar{n}, \bar{n} \rangle - k \langle \bar{t}, \bar{t} \rangle - \tau \langle \bar{t}, \bar{b} \rangle = k g_2 - k g_1 - \tau g_5 \\ g_5' = \langle \bar{t}', \bar{b} \rangle + \langle \bar{t}, \bar{b}' \rangle = k \langle \bar{n}, \bar{b} \rangle + \tau \langle \bar{t}, \bar{n} \rangle = k g_6 + \tau g_4 \\ g_6' = \langle \bar{n}', \bar{b} \rangle + \langle \bar{n}, \bar{b}' \rangle = -k \langle \bar{t}, \bar{b} \rangle - \tau \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle + \tau \langle \bar{n}, \bar{n} \rangle = -k g_5 - \tau g_3 + \tau g_2 \end{cases}$$

Sempre per il teorema di Cauchy-Lipschitz, questo sistema con le condizioni iniziali volute ha un'unica soluzione; visto che $g_i \equiv 1 \forall i = 1, 2, 3$ e $g_j \equiv 0 \forall j = 4, 5, 6$ lo risolve, deduciamo che $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ é una terna ortonormale in ogni punto. Per continuitá del determinante, é anche sempre positiva, essendolo in 0.

Definiamo ora $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\gamma(s) = \int_0^s \bar{t}(u) du.$$

Verifichiamo che γ funziona, cioè $k_\gamma \equiv k$ e $\tau_\gamma \equiv \tau$ (infatti sicuramente é PLA e, se valgono queste uguaglianze, anche biregolare). Indico con t, n, b il triedro di Frenet di γ .

Innanzitutto $\gamma'(s) = \bar{t}(s)$, dunque γ é PLA e $t(s) = \bar{t}(s) \forall s \in I$.

Segue che $k \bar{n} = \bar{t}' = t' = k_\gamma n$, ma $k, k_\gamma > 0$ e n, \bar{n} sono versori, quindi $k \equiv k_\gamma$ e $n \equiv \bar{n}$.

Infine $b = t \wedge n = \bar{t} \wedge \bar{n} = \bar{b}$ (poiché abbiamo visto che $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ é una base ortonormale positiva), dunque $\tau_\gamma n = b' = \bar{b}' = \tau \bar{n}$, da cui $\tau \equiv \tau_\gamma$.

Passiamo ora all'unicità: siano γ_1, γ_2 PLA che realizzano k, τ . Allora sicuramente $\exists A \in \text{SO}(3)$, $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $A\gamma_1(0) + v = \gamma_2(0)$, $At_1(0) = t_2(0)$, $An_1(0) = n_2(0)$, $Ab_1(0) = b_2(0)$ (infatti esiste una tale A che porta la prima base nella seconda, e poi sposta $A\gamma_1(0)$ su $\gamma_2(0)$ con v).

Dunque, a meno di congruenza, posso supporre che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $t_1(0) = t_2(0)$, $n_1(0) = n_2(0)$, $b_1(0) = b_2(0)$ (poiché le congruenze non cambiano curvatura e torsione).

Ora t_1, n_1, b_1 e t_2, n_2, b_2 soddisfano il solito sistema di equazioni con le stesse condizioni iniziali; per unicità della soluzione, in particolare $t_1(s) = t_2(s) \forall s \in I$, per cui:

$$\gamma_1(s) = \gamma_1(0) + \int_0^s t_1(u)du = \gamma_2(0) + \int_0^s t_2(u)du = \gamma_2(s).$$

□

1.7 Massimi, minimi e vertici di curve planari

Sia $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regolare e PLA. Sicuramente esiste $t_0 \in [a, b]$ in cui $\|\alpha\|$ ha un massimo (minimo) locale.

Proposizione 1.7.1. t_0 é punto di massimo (risp. minimo) locale per $\|\alpha\| \iff |k(t_0)| \geq \frac{1}{|\alpha(t_0)|}$ (risp. \leq).

Dimostrazione. $\|\alpha\|^2$ ha un massimo locale in $t_0 \iff$

$$\begin{cases} (\langle \alpha, \alpha \rangle)'(t_0) = 0 & \langle \alpha', \alpha \rangle(t_0) = 0 \\ (\langle \alpha, \alpha \rangle)''(t_0) \leq 0 & (\langle \alpha', \alpha \rangle)'(t_0) \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \langle \alpha, t \rangle'(t_0) \leq 0 \iff \langle \alpha'(t_0), t(t_0) \rangle + \langle \alpha(t_0), t'(t_0) \rangle = 1 + k(t_0) \langle \alpha(t_0), n(t_0) \rangle = 1 - k(t_0) \|\alpha(t_0)\| \leq 0 \iff k(t_0) \geq \frac{1}{\|\alpha(t_0)\|} \text{ (in quanto } \alpha(t_0) \perp t(t_0) \text{ e dunque } \alpha(t_0) = \|\alpha(t_0)\| n(t_0)).$$

□

Definizione 1.7.1. $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dice **chiusa** se $\alpha(a) = \alpha(b)$; allo stesso modo, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dice **chiusa** se $\exists T > 0$ periodo tale che $\alpha(s + kT) = \alpha(s) \forall k \in \mathbb{Z}$ e $\forall s \in \mathbb{R}$.

Definizione 1.7.2. Consideriamo un convesso compatto C in \mathbb{R}^2 , e sia $\alpha : [0, M) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva che parametrizza ∂C tale che $\alpha(0) = \alpha(M)$.

Diciamo che $s \in I$ é un **vertice** per α se $k'(s) = 0$, cioè se in s la curvatura ha un punto di massimo o di minimo locale.

Definizione 1.7.3. Una curva si dice **semplice** se il suo supporto non ha autointersezioni.

Osservazione. Nelle ipotesi della precedente definizione, ogni curva chiusa ha un numero pari di vertici, in quanto la curvatura é continua e la curva é chiusa.

Teorema 1.7.2. Una curva chiusa, semplice e bordo di un convesso compatto ha almeno 4 vertici.

Dimostrazione. Sia $\alpha : [0, M) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrizzazione biunivoca della curva. Supponiamo per assurdo che abbia solamente due vertici, s_0 e s_1 ; sia r la retta per s_0 e s_1 e $p \in r$ un punto. Sicuramente r divide la curva in due parti, di cui una con k' sempre positiva e una con k' sempre negativa; sia dunque v un vettore da p ortogonale a r che punta verso il semipiano con $k' \geq 0$.

Consideriamo la funzione $f(s) = \langle \alpha(s) - p, v \rangle$ (non é altro che il prodotto scalare fra il vettore $\overrightarrow{p\alpha(s)}$ e il vettore \vec{v}); dunque f é positiva $\iff \cos \theta \geq 0$, dove θ é l'angolo fra $\overrightarrow{p\alpha(s)}$ e \vec{v} , cioè $\iff k' \geq 0$, per come abbiamo puntato v .

Ma allora la funzione $g(s) = f(s) \cdot k'(s)$ é sempre ≥ 0 . Si calcola:

$$\begin{aligned} \int_0^M f(s)k'(s)ds &= \underbrace{[f(s)k(s)]_0^M}_{=0} - \int_0^M f'(s)k(s)ds = - \int_0^M \langle \alpha'(s), v \rangle k(s)ds = \\ &= - \int_0^M \langle kt(s), v \rangle ds = \int_0^M \langle n'(s), v \rangle ds = \langle \int_0^M n'(s)ds, v \rangle = [\langle n(s), v \rangle]_0^M = 0, \end{aligned}$$

dunque per quanto visto $f(s)k'(s) \equiv 0$, cioè o la curva é contenuta nella retta r (e dunque ha infiniti vertici) oppure $k'(s) = 0$ per infiniti $s \in [0, M)$, entrambi assurdi. □

Osservazione. Se la curva non é semplice, in generale il teorema precedente é falso; un contro-esempio puó essere il seguente:

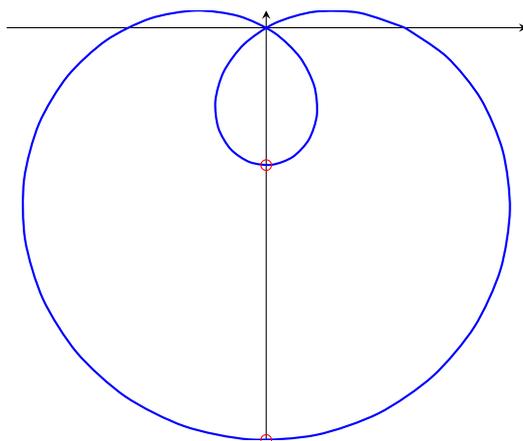


Figura 11: Curva con due soli vertici

in quanto i due punti segnati in rosso nella figura sono gli unici vertici della curva.

2 Superfici in \mathbb{R}^3

2.1 Geometria e topologia differenziale in \mathbb{R}^n

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ qualsiasi, $p \in X$.

Definizione 2.1.1. Il cono tangente a $p \in X$ é $C_p(X) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow X \text{ tale che } \gamma(0) = p \text{ e } \gamma'(0) = v\}$.

Definizione 2.1.2. Lo spazio tangente a X in p é $T_p(X) = \text{Span}(C_p(X))$.

Esempi. • Se X é un aperto di \mathbb{R}^n , allora $C_p(X) = T_p(X) = \mathbb{R}^n$.

Infatti, $\forall p \in X, \forall v \in \mathbb{R}^n$, la curva $\gamma(t) = p + tv$ ha supporto in X per $t \in [0, \varepsilon)$ e $\gamma'(0) = v$.

- Se $X = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq 0\}$ e $p = 0$, allora $C_p(X) = X$.
Infatti, se $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow X$ é tale che $\gamma(0) = 0$ e $\gamma_1(t) \geq 0 \forall t$ (dove $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$), allora $\gamma'_1(0) \geq 0$ e dunque $C_p(X) \subseteq X$. Il viceversa é analogo al punto precedente.
- $T_p(\mathbb{Q}) = \{0\} = C_p(\mathbb{Q}) \forall p \in \mathbb{Q}$, in quanto \mathbb{Q} é totalmente sconnesso e dunque le curve su di esso sono costanti.

Richiamiamo brevemente alcune definizioni e teoremi sul calcolo differenziale in piú variabili, che non dimosteremo:

Definizione 2.1.3. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Allora $\forall p \in U$, il **differenziale** di f in p é l'unica applicazione lineare $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che:

$$f(p + v) = f(p) + df_p(v) + o(\|v\|).$$

Osservazione. Valgono le seguenti proprietá:

1. $\forall v \in \mathbb{R}^n, df_p(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$.
2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, allora $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$.
3. Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma'(x_0) = d\gamma_{x_0}(1)$ (segue immediatamente da 1)).
4. Se $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é una curva con $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, allora $df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0)$.
Infatti $(f \circ \gamma)'(0) = df_p(d\gamma_0(1)) = df_p(v)$.
5. Se $f = (f_1, \dots, f_m), f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, allora $\forall v \in \mathbb{R}^n$:

$$df_p(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} v$$

dove la matrice é detta **matrice Jacobiana**.

Teorema 2.1.1 (di invertibilitá locale). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertibile, allora $\exists V \subseteq U$ aperto, $p \in V$ tale che $f(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aperto e $f : V \rightarrow f(V)$ é un diffeomorfismo.*

Osservazione. La nozione di funzione C^∞ che abbiamo dato per sottoinsiemi qualsiasi estende quella per aperti.

Inoltre composizione di funzioni C^∞ é C^∞ .

Definizione 2.1.4. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é una **varietá** di dimensione k se é localmente diffeomorfa a aperti di \mathbb{R}^k , cioè $\forall p \in X \exists V_p \ni p$ aperto di X diffeomorfo a un aperto Ω di \mathbb{R}^k tramite $\varphi : V_p \rightarrow \Omega$. φ si chiama **carta locale**, mentre φ^{-1} **parametrizzazione locale**. Un **atlante** per X é un insieme di carte i cui domini ricoprono X .

Esempio. $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ é una n -varietá (cioé una varietá di dimensione n). Per mostrarlo, sia $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$; sicuramente $\exists i$ tale che $p_i \neq 0$. Supponiamo che $p_i > 0$ (altrimenti é analogo). Pongo $V_p = \mathbb{S}^n \cap \{x_i > 0\}$. La proiezione sul disco equatoriale:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad V_p &\longrightarrow \mathbb{D}^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1\} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

é C^∞ in quanto restrizione di una proiezione (e dunque C^∞). Inoltre, posta:

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{D}^n &\longrightarrow V_p \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \left(y_1, \dots, \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n y_j^2}, \dots, y_{n+1} \right) \end{aligned}$$

é immediato vedere che $\psi = \varphi^{-1}$ e ψ é C^∞ in quanto ha dominio in un aperto e tutte le sue coordinate sono C^∞ .

Teorema 2.1.2. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ di dimensione k , $p \in X$. Allora $C_p(X) = T_p(X)$ ha dimensione k e, se $\varphi : \Omega \rightarrow V \subseteq X$ é una parametrizzazione intorno a p , allora $T_p(x) = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(\mathbb{R}^k)$.

Dimostrazione. Basta mostrare che $C_p(X) = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(\mathbb{R}^k)$.

\subseteq) $v \in C_p(X) \Rightarrow \exists \gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Posso supporre $\gamma([0, \varepsilon)) \subseteq V$ (altrimenti restringo $[0, \varepsilon)$) e prendere $\bar{\gamma} : [0, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ tale che $\bar{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \gamma$, che é C^∞ . A questo punto basta notare che:

$$d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(\bar{\gamma}'(0)) = (\varphi \circ \bar{\gamma})'(0) = \gamma'(0) = v.$$

\supseteq) Dato $v \in \mathbb{R}^k$, $\gamma(t) = \varphi^{-1}(p) + tv$ sta in Ω per $t \in [0, \varepsilon)$. $d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(v) = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(\gamma'(0)) = (\varphi \circ \gamma)'(0) \in C_p(X)$ per definizione, in quanto $\varphi \circ \gamma$ é una curva C^∞ a valori in X . □

Sia ora $f : X \rightarrow Y$, con X, Y non necessariamente varietá. $\forall p \in X$, pongo $df_p : C_p(X) \rightarrow C_{f(p)}(Y)$ definendo $df_p(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0) \forall \gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow X$.

Teorema 2.1.3. df_p é ben definito e, se F é un'estensione locale di f intorno a p , $df_p = dF_p|_{C_p(X)}$.

In particolare, df_p definisce una mappa lineare $df_p : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $df_p = dF_p|_{C_p(X)}$, poiché in questo caso df_p sarebbe ben definito (in quanto restrizione di una funzione ben definita), e si estenderebbe a $T_p(X)$ per linearità di dF_p (che é definito su tutto \mathbb{R}^n) a valori in $T_{f(p)}(Y)$ per definizione.

Ma questo é facile, perché la definizione di df_p che ho dato coincide con quella di dF_p in $C_p(X)$. □

Estendiamo dunque le osservazioni fatte anche a sottoinsiemi qualsiasi di \mathbb{R}^n ; sia appunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme.

Osservazione. 1. Se $U \subseteq X$ aperto, allora $C_p(U) = C_p(X)$ e $T_p(U) = T_p(X)$.

2. $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, p \in X \Rightarrow d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$ (infatti basta estendere f, g a F, G , e a meno di restringere, $G \circ F$ estende $g \circ f$, e per quanto già visto $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$).
3. $f : X \rightarrow X$ identità $\Rightarrow df_p = \text{id}_{T_p(x)} \forall p \in X$.
4. Se $f : X \rightarrow Y$ é diffeomorfismo, allora df_p é un isomorfismo di spazi vettoriali $\forall p \in X$ (infatti per 2) e 3), $(df_p)^{-1} = df_{f(p)}^{-1}$).

Riotteniamo dunque che, se X é una varietà k -dimensionale, $T_p(X)$ é uno spazio vettoriale di dimensione k e in particolare $T_p(X) = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(\mathbb{R}^k)$; infatti, se $\varphi : \Omega \rightarrow U$ é un diffeomorfismo fra $p \in U$ aperto in X e Ω aperto in \mathbb{R}^k , allora $d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}$ dá un isomorfismo fra $\mathbb{R}^k = T_{\varphi^{-1}(p)}(\Omega)$ e $T_p(U) = T_p(X)$.

Teorema 2.1.4 (di invertibilità locale per varietà). *Siano X, Y varietà, $p \in X, f : X \rightarrow Y$. Se df_p é un isomorfismo, allora esistono aperti $U \ni p$ di X e $V \ni f(p)$ di Y tali che $f(U) = V$ e $f|_U$ sia un diffeomorfismo sull'immagine.*

Dimostrazione. Per definizione di varietà, esistono aperti $U' \ni p$ in $X, V' \ni f(p)$ in Y con carte $\varphi : \Omega' \rightarrow U', \psi : Z' \rightarrow V'$, dove $\Omega', Z' \subseteq \mathbb{R}^k$ (infatti $\dim X = \dim Y$, poiché df_p é un isomorfismo).

Considero $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$; $d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(p)} = d\psi_{f(p)}^{-1} \circ df_p \circ d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}$ é un isomorfismo perché composizione di isomorfismi, quindi applico il teorema di invertibilità locale per mappe fra aperti di \mathbb{R}^k e trovo aperti $\Omega \ni \varphi^{-1}(p)$ in $\Omega', Z \ni \psi^{-1}(f(p))$ in Z' tali che $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(\Omega) = Z$ e $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi|_{\Omega}$ é un diffeomorfismo su Z .

Posti $U = \varphi(\Omega)$ e $V = \psi(Z)$, $f = \psi \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow V$ mi dá la tesi perché composizione di diffeomorfismi. \square

Definizione 2.1.5. X, Y varietà. $f : X \rightarrow Y$ si dice **immersione** se df_p é iniettivo $\forall p \in X$. Se un'immersione é anche iniettiva, si dice **embedding**.

Osservazione. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é un'immersione \iff é una curva regolare, dunque in generale le immersioni non sono necessariamente iniettive.

Teorema 2.1.5 (di raddrizzamento dell'immagine). *Sia $f : X \rightarrow Y$ fra varietà e sia $p \in X$ tale che $df_p : T_p(X) \rightarrow T_p(Y)$ sia iniettivo. Allora esistono coordinate in partenza e in arrivo intorno a p e $f(p)$ nelle quali f assume la forma $\mathbb{R}^k \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, dove $k = \dim x$ e $n = \dim Y$ (e sicuramente $n \geq k$ per iniettività del differenziale).*

Dimostrazione. Fisso una carta $\varphi : \Omega \rightarrow U, U \subseteq X$ aperto, $p \in U$. $d(f \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(p)} = df_p \circ d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}$ é iniettivo, dunque voglio dimostrare il teorema sostituendo (U, p) con $(\Omega, \varphi^{-1}(p))$ e f con $f \circ \varphi$: se mostro che trovo coordinate in arrivo per le quali $f \circ \varphi$ é della forma $x \rightarrow (x, 0)$ ho finito.

Fisso anche coordinate in arrivo, cioè fisso un intorno aperto V di $f(p)$ in Y tale che $f(U) \subseteq V$ e una carta $\psi : \Omega' \rightarrow V$; voglio dimostrare che, a meno di restringere U , posso modificare ψ in modo che $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x) = (x, 0)$.

Denoto $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$; $dg_{\varphi^{-1}(p)}$ é iniettivo perché composizione di differenziali iniettivi.

Pongo $h = n - k \geq 0$, e scelgo un complementare H di $dg_{\varphi^{-1}(p)}(\mathbb{R}^k)$ in \mathbb{R}^n , con base v_1, \dots, v_h . Posto $Z = \Omega \times \mathbb{R}^h$ e

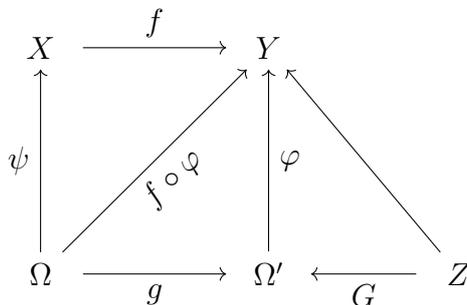
$$G : \quad Z \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ (x, t_1, \dots, t_h) \longmapsto g(x) + t_1 v_1 + \dots + t_h v_h$$

verifico che $dG_{(\varphi^{-1}(p), 0)}$ é invertibile (basta vedere che é surgettivo).

Sia $w \in \text{Im}(dg_{\varphi^{-1}(p)})$; allora $\exists \gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ tale che $\gamma(0) = \varphi^{-1}(p)$ e $(g \circ \gamma)'(0) = w$. Ma se

$\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), 0)$, allora $(G \circ \bar{\gamma})'(0) = w$, per cui $\text{Im}(dG_{(\varphi^{-1}(p), 0)}) \supseteq \text{Im}(dg_{\varphi^{-1}(p)})$.

Inoltre, se $\gamma_i(t) = (\varphi^{-1}(p), 0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$, con t all' i -esima posizione, $G \circ \gamma_i(t) = g(\varphi^{-1}(p)) + tv_i$, dunque $(G \circ \gamma_i)'(0) = v_i$, da cui $\text{Im}(dG_{(\varphi^{-1}(p), 0)}) \supseteq \text{Span}(\text{Im}(dg_{\varphi^{-1}(p)}), v_1, \dots, v_h) = \mathbb{R}^n$, cioè $dG_{(\varphi^{-1}(p), 0)}$ é surgettiva e G é un diffeomorfismo locale.



Scelgo come coordinate locali intorno a $g(p) \in \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ una restrizione di G^{-1} ; visto che in un dato intorno di $g(\varphi^{-1}(p))$ si ha $G((G^{-1} \circ g)(x)) = g(x)$ e $G(x, 0) = g(x)$, si deduce che $G^{-1} \circ g(x) = (x, 0)$.

Per tornare a X e Y , sostituiamo le coordinate in arrivo date da ψ^{-1} con $G^{-1} \circ \psi^{-1}$. \square

Corollario 2.1.6. $f : X \rightarrow Y$ immersione fra varietà. $\forall p \in X \exists U \ni p$ aperto di X tale che $f|_U : U \rightarrow f(U)$ sia un diffeomorfismo.

Dimostrazione. $x \mapsto (x, 0)$ é C^∞ con inversa $(x, 0) \mapsto x$ C^∞ . \square

Proposizione 2.1.7. $f : X \rightarrow Y$ fra varietà. Sono fatti equivalenti:

1. $f : X \rightarrow f(X)$ é un diffeomorfismo sull'immagine;
2. f é un'immersione e un omeomorfismo sull'immagine;
3. f é un'immersione iniettiva e aperta sull'immagine.

Dimostrazione. 1 \Rightarrow 2) Ovvvia.

2 \Rightarrow 3) Ovvvia.

3 \Rightarrow 1) Basta costruire $g : f(X) \rightarrow X$ inversa di f e C^∞ .

f iniettiva $\Rightarrow \exists!$ g inversa, ma f é aperta, dunque tale g é continua; inoltre $\forall q \in f(X)$ posso scegliere un intorno aperto V di q in $f(X)$ che sia l'immagine di un intorno aperto di X su cui g appaia come $(x, 0) \mapsto x$.

Su V , g é evidentemente C^∞ . \square

Esempio. Non tutte le immersioni iniettive sono diffeomorfismi locali sull'immagine; ad esempio la seguente immersione iniettiva:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 t & \longmapsto & \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^2}{1+t^4} \right)
 \end{array}$$

Ogni intervallo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ viene mappato in un sottoinsieme del "fiocco" non aperto (perché ogni suo intorno contiene i due "bracci" immagini di $(-\infty, -M)$ e $(M, +\infty)$).

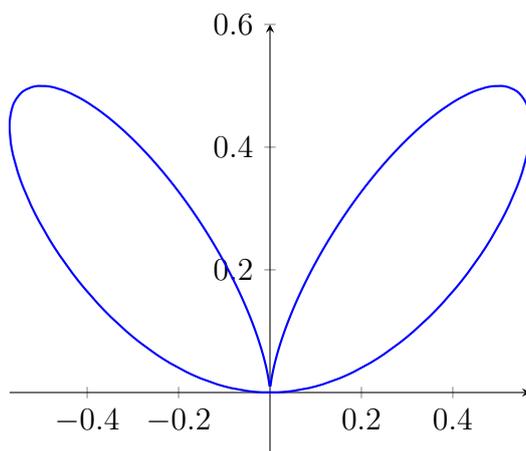


Figura 12: Immersione da \mathbb{R} a \mathbb{R}^2 non aperta

La seguente proposizione ci assicura però che esempi patologici come il precedente non possono verificarsi se $\dim X = \dim Y$.

Proposizione 2.1.8. X, Y varietà, $\dim X = \dim Y$, $f : X \rightarrow Y$. Sono fatti equivalenti:

1. f é un diffeomorfismo sull'immagine e $f(X)$ é aperto in Y ;
2. f é un'immersione iniettiva.

Dimostrazione. 1 \Rightarrow 2) Ovvvia.

2 \Rightarrow 1) Per la proposizione precedente basta mostrare che $f : X \rightarrow Y$ é aperta; ma poiché $\dim X = \dim Y$, un'immersione é un locale diffeomorfismo localmente aperto (per il teorema di invertibilitá locale), dunque aperto. □

Definizione 2.1.6. $f : X \rightarrow Y$ fra varietà, $p \in X$. p si dice (**punto**) **critico** (per f) se $df_p : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$ non é surgettivo, e **regolare** se lo é. $q \in Y$ si dice (**valore**) **critico** se giace nell'immagine dei punti critici e **regolare** altrimenti.

Esempio. Consideriamo la mappa (che in realtà é un rivestimento):

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

per un certo $n > 0$. Vogliamo vedere che non ha punti critici. Dalla definizione:

$$df_x : T_x(\mathbb{S}^1) \longrightarrow T_{f(x)}(\mathbb{S}^1)$$

ed entrambi gli spazi tangenti sono rette, dunque $x \in \mathbb{S}^1$ é regolare $\iff df_x \neq 0$.

Sia $0 \neq v \in T_x(\mathbb{S}^1)$; in particolare, se $\gamma(\theta) = e^{i\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $x = e^{i\theta_0}$, scelgo $v = \gamma'(\theta_0) = (-\sin \theta_0, \cos \theta_0)$.

Si ha:

$$df_x(v) = (f \circ \gamma)'(\theta_0) = (e^{in\theta})'(\theta_0) = (\cos n\theta, \sin n\theta)'(\theta_0) = n(-\sin n\theta_0, \cos n\theta_0) \neq 0$$

$\forall \theta_0$, da cui segue che non ci sono punti critici (notiamo anzi che df_x moltiplica le lunghezze dei vettori di un fattore n , fatto che sta ad indicare che f percorre la circonferenza n volte piú veloce).

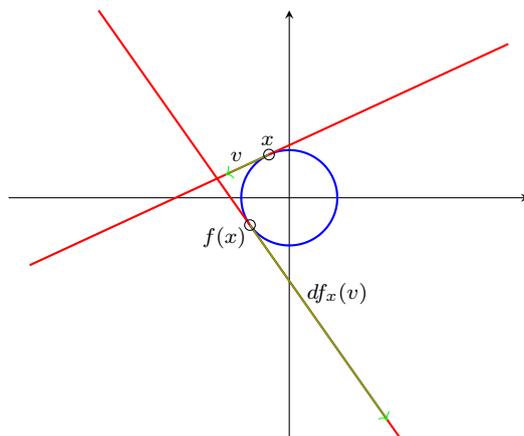


Figura 13: Azione di df_x sugli spazi tangenti

Osservazione. $\forall x \in \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n, T_x(\mathbb{S}^{n-1}) = x^\perp$.

Avendo la stessa dimensione, basta mostrare una sola inclusione; sia dunque $v \in x^\perp$ unitario (poi si estende automaticamente anche ai vettori non unitari per linearit ).
Se $\gamma(\theta) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)v$, si ha che $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$ e $\text{Im}(\gamma) \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$, in quanto $\|\gamma(\theta)\|^2 = \cos^2 \theta \|x\|^2 + \sin^2 \theta \|v\|^2 = 1$ per Pitagora.

Esempio. Consideriamo la funzione “altezza”:

$$f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto z$$

Sia $v \in \mathbb{S}^2$ un qualunque punto; notiamo che f   restrizione di una funzione lineare:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto z$$

dunque il suo differenziale in v   particolarmente semplice:

$$df_v : v^\perp \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto z$$

in quanto il differenziale di una mappa lineare   la mappa stessa e $T_v(\mathbb{S}^2) = v^\perp$ per l’osservazione precedente.

Ma allora v   regolare $\iff df_v \neq 0 \iff v^\perp \neq \{z = 0\} \iff v \neq N, S$. Si conclude dunque che N e S sono gli unici punti critici.

Teorema 2.1.9. $f : X \rightarrow Y$ fra variet , $\dim X = n, \dim Y = m, p \in X$ tale che $df_p : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$   surgettivo (e dunque $n \geq m$). Allora esistono carte $\varphi : \Omega \rightarrow U \subseteq X, \psi : \Omega' \rightarrow V \subseteq Y, U \ni p$ aperto di $X, V \ni f(p)$ aperto di Y tali che $f(U) \subseteq V$ e $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$   la proiezione sulle prime m coordinate.

Dimostrazione. Fisso una carta $\varphi : \Omega \rightarrow U, U \subseteq X$ aperto, $p \in U$ e definisco $g = f \circ \varphi$. $dg_{\varphi^{-1}(p)}$ suriettivo in quanto composizione di differenziali suriettivi.

Detto $K = \text{Ker}(dg_{\varphi^{-1}(p)})$, $\dim K = n - m$ e $\Omega' \times K$   un aperto di \mathbb{R}^n (identificando $K \cong \mathbb{R}^{n-m}$); dunque detto $Z = \Omega' \times K$, definisco:

$$F : \Omega \longrightarrow Z \\ x \longmapsto (g(x), \pi(x))$$

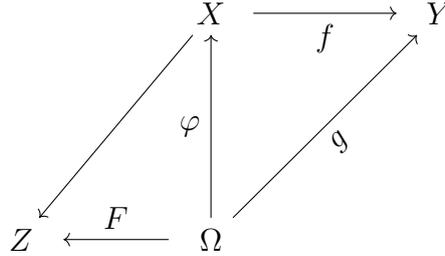
dove $\pi : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow K$ é la proiezione ortogonale.

F é C^∞ e, se $v \in \text{Ker}(dF_{\varphi^{-1}(p)})$, allora (per linearit  di π):

$$\begin{aligned} 0 &= dF_{\varphi^{-1}(p)}(v) = (dg_{\varphi^{-1}(p)}(v), d\pi_p(v)) = (dg_{\varphi^{-1}(p)}(v), \pi(v)) \iff \\ &\iff dg_{\varphi^{-1}(p)}(v) = 0 \text{ e } v \in \text{Ker}(\pi) \iff v \in K \cap K^\perp, \end{aligned}$$

ma $K \cap K^\perp = \{0\}$, cio  $dF_{\varphi^{-1}(p)}$ é iniettiva e dunque é un isomorfismo per dimensione.

Segue che F é un diffeomorfismo locale intorno a $\varphi^{-1}(p)$, cio  $\exists U_{\varphi^{-1}(p)} \ni p$ aperto in X , $V' \ni (g(p), \pi(p))$ aperto in $\Omega' \times K$ tali che $F(U) = V'$ e $F|_U$ é un diffeomorfismo.



Scelgo $F \circ \varphi^{-1}$ come coordinata locale intorno a p . Ogni punto di V' é della forma $(g(x), \pi(x))$; tramite $f \circ (F \circ \varphi^{-1})^{-1}$, tale punto va in $f(F^{-1}(g(x), \pi(x))) = f(F^{-1}(F(x))) = g(x)$, dunque $f \circ F \circ \varphi^{-1}$ é la proiezione sulle prime m coordinate. \square

Corollario 2.1.10. *Nella situazione del teorema precedente, $f^{-1}(f(p)) \cap U$ é una variet  di dimensione $n - m$ definita dall'unica carta:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{n-m} \cap \Omega & \longrightarrow & \Omega & \longrightarrow & f^{-1}(f(p)) \cap U \\ x & \longmapsto & (0, x) & \longmapsto & \varphi(0, x) \end{array}$$

Corollario 2.1.11. *$f : X \rightarrow Y$ fra variet , $\dim X = n$, $\dim Y = m$, $q \in Y$ valore regolare. Allora $f^{-1}(q)$ é una variet  di dimensione $n - m$ e, $\forall p \in f^{-1}(q)$, $T_p(f^{-1}(q)) = \text{Ker}(df_p)$.*

Dimostrazione. Data $p \in f^{-1}(q)$, per ipotesi df_p é surgettivo, dunque per il corollario precedente $\exists U$ aperto in X che contiene p tale che $f^{-1}(q) \cap U$ sia una $(n - m)$ -variet ; ma allora $f^{-1}(q)$ é una $(n - m)$ -variet .

Per la caratterizzazione del tangente, so gi  che $\dim(T_p(f^{-1}(q))) = \dim(\text{Ker}(df_p))$, dunque basta vedere che $T_p(f^{-1}(q)) \subseteq \text{Ker}(df_p)$.

Ma se $v \in T_p(f^{-1}(q))$, $\exists \gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow f^{-1}(q)$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, quindi $df_p(v) = \underbrace{(f \circ \gamma)'(0)}_{=q} = 0$. \square

Osservazione. Riotteniamo (in modo molto pi  rapido) che $T_p(\mathbb{S}^{n-1}) = p^\perp$; infatti se consideriamo la mappa C^∞ :

$$\begin{array}{ccc} n : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|^2 \end{array}$$

$$T_p(\mathbb{S}^{n-1}) = \text{Ker}(df_p) = \text{Ker}(v \mapsto 2\langle p, v \rangle) = p^\perp.$$

Esempio. Sia $S = \{x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2 = c\}$ con $c \neq 0$ il supporto di una quadrica in \mathbb{R}^n . $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é una variet . Infatti, presa:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2 \end{array}$$

si ha che $S = f^{-1}(c)$, dunque per il teorema precedente basta mostrare che c é un valore regolare.

Ma $x \in \mathbb{R}^n$ é valore regolare per $f \iff df_x = \nabla f(x) = (2x_1, \dots, 2x_k, -2x_{k+1}, \dots, -2x_n)$ é surgettivo $\iff df_x \neq 0 \iff x \neq 0$; quindi $c \neq 0$ é valore regolare.

Osservazione. Se nell'esempio precedente $c = 0$, l'insieme S puó non essere una varietà. Ad esempio infatti il luogo di zeri $S_0 = \{x_1^2 - x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ non é una varietà vicino a 0:

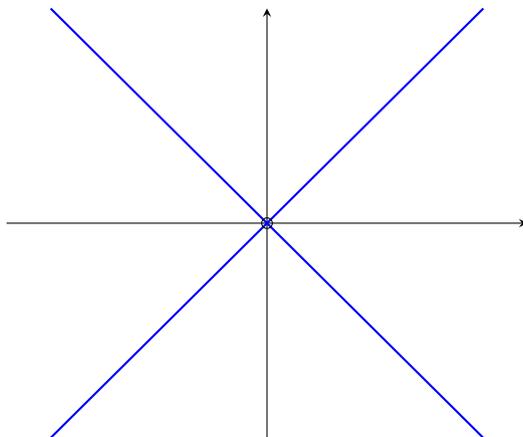


Figura 14: Luogo di zeri non varietà

Definizione 2.1.7. G si dice **gruppo di Lie** se é una varietà differenziabile ed ha anche una struttura di gruppo tale che le operazioni

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \longmapsto & gh \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

di moltiplicazione e inversione siano lisce.

Osservazione. Affinché la precedente definizione sia ben posta, dobbiamo verificare che, se $M^{(k)} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $N^{(h)} \subseteq \mathbb{R}^m$ sono varietà, $M \times N \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ é una varietà di dimensione $k + h$. Ma questo é facile, perché se $U \ni p \in M$, $V \ni q \in N$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^h$ sono carte, $(p, q) \in U \times V$ e $(f, g) : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{k+h}$ é una carta per $M \times N$.

Esempi. $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ e $SO(n)$ sono varietà di \mathbb{R}^{n^2} .

- $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ é un aperto di \mathbb{R}^{n^2} e dunque é una n^2 -varietà. Inoltre $GL(n, \mathbb{R})$ ha esattamente due componenti connesse (per archi), che sono $GL^+(n, \mathbb{R})$ e $GL^-(n, \mathbb{R})$.
- $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$; \det é liscio perché un polinomio; vediamo che 1 é valore regolare. Sia $A \in SL(n, \mathbb{R})$; se $t \ll 1$ e $M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, si ha:

$$\det(A + tM) = \det A \cdot \det(I + tMA^{-1}) = 1 + t \cdot \text{tr}(MA^{-1}) + O(t^2),$$

da cui $d(\det)_A : M \mapsto \text{tr}(MA^{-1})$. Questa mappa ha codominio in \mathbb{R} e dunque é surgettiva se non nulla; visto che $d(\det)_A(A) = n \neq 0$, si ha che A é valore regolare e dunque $1 = \text{Im}(SL(n, \mathbb{R}))$ é valore regolare. Si conclude che $SL(n, \mathbb{R})$ é una $(n^2 - 1)$ -varietà.

Inoltre $T_I(SL(n, \mathbb{R})) = \text{Ker}(d(\det)_I) = \text{Ker}(\text{tr}) = \{M \in \mathcal{M} \mid \text{tr}(M) = 0\}$.

Infine $SL(n, \mathbb{R})$ é connesso (per archi), in quanto si retrae per deformazione su $SO(n)$ (che é connesso per archi, perché con $n - 1$ rotazioni porto una base ortonormale positiva nella base canonica), é chiuso, ma non é limitato, in quanto contiene matrici del tipo $I + nE_{12}$, dove $n \in \mathbb{Z}$ e E_{12} é la matrice con un solo 1 nel posto 1, 2.

- La mappa:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}(n) &\longrightarrow \mathcal{S}(n) = \{C \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid {}^t C = C\} \\ A &\longmapsto {}^t A A \end{aligned}$$

é liscia fra varietà (infatti $\mathcal{S}(n)$ é un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n^2}); visto che $O(n) = f^{-1}(I)$, vediamo che I é un valore regolare.

Sia $A \in O(n)$; come prima:

$$f(A + tM) = {}^t(A + tM)(A + tM) = \underbrace{{}^t A A}_{=I} + t({}^t M A + {}^t A M) + O(t^2),$$

da cui $df_A : M \longmapsto {}^t M A + {}^t A M \in \mathcal{S}(n)$. Ma questa mappa é evidentemente surgettiva, poiché se $N \in \mathcal{S}(n)$, allora $\frac{1}{2} A N \longmapsto N$ tramite df_A , dunque I é valore regolare, cioè $O(n)$ é una varietà di dimensione $\dim \mathcal{M}(n) - \dim \mathcal{S}(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Inoltre $T_I(O(n)) = \text{Ker}(df_I) = \text{Ker}(M \mapsto {}^t M + M) = \mathcal{A}(n)$.

Infine $O(n)$ é compatto, in quanto é chiuso e contenuto in $[-1, 1]^{n^2} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ (poiché le sue colonne sono una base ortonormale e dunque i suoi elementi soddisfano relazioni del tipo $x_{1i}^2 + \dots + x_{ni}^2 = 1 \forall i$), ma non é connesso, in quanto la mappa $\det : O(n) \rightarrow \{\pm 1\}$ é continua e surgettiva verso uno sconnesso.

- $SO(n)$ é un aperto di $O(n)$ in quanto intersezione di $O(n)$ con l'aperto $\det^{-1}(\mathbb{R}^+)$ di \mathbb{R}^{n^2} , dunque é una $\frac{n(n-1)}{2}$ varietà di \mathbb{R}^{n^2} .

Inoltre $SO(n)$ é un retratto per deformazione di $SL(n, \mathbb{R})$ (o di $GL^+(n, \mathbb{R})$) grazie al processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, che prima ortogonalizza e poi normalizza una base positiva di \mathbb{R}^n con cammini continui omotopi all'identità.

Ci occupiamo adesso di classificare, a meno di omeomorfismo, i primi $SO(n)$, in particolare per $n \in \{1, 2, 3, 4\}$:

Esempi (Classificazione dei primi $SO(n)$). Classifichiamo a meno di omeomorfismo $SO(n)$ per $1 \leq n \leq 4$:

1. $SO(1) = \{1\}$.

2. Dall'algebra lineare sappiamo che:

$$SO(2) = \left\{ Rot_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\}.$$

Considero la mappa biunivoca:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow SO(2) \\ \theta &\longmapsto Rot_\theta \end{aligned}$$

f é un omeomorfismo, perché é continua (in quanto \cos e \sin sono funzioni continue) e chiusa, perché va da un compatto a un T2. Segue che $\pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}$.

3. Sappiamo che $\dim SO(3) = 3$ e ogni suo elemento é simile tramite matrici ortogonali a:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Rot_\theta \end{array} \right),$$

con $0 \leq \theta \leq \pi$ (in quanto se $\theta > \pi$, la rendo del tipo precedente prendendo come asse di rotazione l'opposto di quello considerato). Ho quindi una mappa:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{D}^3 &\longrightarrow SO(3) \\ v &\longmapsto Rot_{\pi \|v\|}^v \end{aligned}$$

dove Rot_α^w indica la rotazione di angolo α rispetto all'asse $\text{Span}(w)$; F non é iniettiva, perché $F(v) = F(w) \iff v = w \vee (\|v\| = \|w\| \wedge v = -w)$.

Detta \sim la relazione di equivalenza data dalle precedenti condizioni, F si quozienta a:

$$\tilde{F} : \mathbb{D}^3 / \sim \longrightarrow \text{SO}(3)$$

iniettiva; si osserva che \sim non é altro che la relazione dell'antipodale e che \tilde{F} é un omeomorfismo, da cui:

$$\tilde{F} : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \text{SO}(3)$$

é un omeomorfismo.

Segue che $\pi_1(\text{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e che esiste un rivestimento doppio $\mathbb{S}^3 \rightarrow \text{SO}(3)$.

4. Innanzitutto dobbiamo introdurre il corpo dei **quaternioni**; esso é il corpo non commutativo:

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

\mathbb{H} é un'algebra, perché é sia un anello sia un \mathbb{R} -spazio vettoriale (in modo coerente); in particolare $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ come spazi vettoriali.

Preso $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, si definisce $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ il **coniugato** di q , $\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ la **norma** di q e $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}$ l'**inverso** di q ; si osserva inoltre che $\|q \cdot q'\| = \|q\| \cdot \|q'\|$, e dunque $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ anche come spazi normati, in quanto la norma definita non é altro che quella euclidea. Segue che si può identificare:

$$\sim^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\},$$

e dunque \mathbb{S}^3 é un gruppo (non abeliano) con la moltiplicazione. Inoltre $q \in \mathbb{S}^3 \iff q^{-1} = \bar{q}$.

Quindi si può riassumere tutto quello che é stato visto dicendo che \sim^3 é un gruppo di Lie (in quanto le operazioni sono lisce perché polinomi).

Osservato che $Z(\mathbb{H}) = \langle 1 \rangle \cong \mathbb{R}$, si deduce che $Z(\mathbb{S}^3) = \{\pm 1\} = \mathbb{S}^3 \cap \mathbb{R}$. Consideriamo la mappa:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \text{SO}(4) \\ (q_1, q_2) &\longmapsto \{\mathbb{H} \ni x \mapsto q_1 x \bar{q}_2\} \end{aligned}$$

Vediamo che il codominio é effettivamente quello, cioè che $x \mapsto q_1 x \bar{q}_2$ é una isometria lineare positiva; per farlo innanzitutto dimostriamo che in ogni gruppo di Lie le moltiplicazioni a destra e sinistra sono diffeomorfismi.

Sia G gruppo di Lie e $g \in G$; denotiamo:

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G & R_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gx & x &\longmapsto xg \end{aligned}$$

Queste mappe sono diffeomorfismi, in quanto sono C^∞ e le loro inverse $L_{g^{-1}}$ e $R_{g^{-1}}$ sono C^∞ .

Ritornando al caso dei quaternioni, se $q \in \mathbb{S}^3$, detta $L_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ tale che $L_q(x) = qx$, essa é lineare, é un'isometria (perché $\|qx\| = \|q\|\|x\| = \|x\|$) ed é positiva, in quanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \{\pm 1\} \\ q &\longmapsto \det(L_q) \end{aligned}$$

é continua, il dominio é connesso e $1 \mapsto \det(\text{id}) = 1$.

A questo punto, verificata la buona definizione di ψ , vogliamo vedere che ψ é un omomorfismo di gruppi ($\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ é un gruppo di Lie perché prodotto di gruppi di Lie é un

gruppo di Lie) e che $\text{Ker}(\psi) = \{\pm(1, 1)\}$.
 Che sia un omomorfismo é semplice:

$$\begin{aligned}\psi((q_1, q_2) \cdot (q'_1, q'_2)) &= \psi(q_1 q'_1, q_2 q'_2) = \{x \mapsto q_1 q'_1 \overline{x q_2 q'_2}\} = \{x \mapsto q_1 x \overline{q_2}\} \circ \{x \mapsto q'_1 \overline{x q'_2}\} = \\ &= \psi(q_1, q_2) \circ \psi(q'_1, q'_2);\end{aligned}$$

inoltre $(q_1, q_2) \in \text{Ker}(\psi) \iff q_1 x \overline{q_2} = x \forall x \in \mathbb{H}$, ma se $x = 1$, si ha la condizione $q_1 \overline{q_2} = 1$, cioè $q_1 = q_2$, da cui $(q_1, q_2) \in \text{Ker}(\psi) \iff q_1 x q_1^{-1} = x \forall x \in \mathbb{H} \iff q_1 = q_2 \in Z(\mathbb{S}^3) = \{\pm 1\}$.

Per arrivare a concludere che ψ é un rivestimento doppio, ci rimane da verificare che ψ é un diffeomorfismo locale; per farlo mostriamo che $d\psi_{(q_1, q_2)}$ é invertibile in tutti i $(q_1, q_2) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Per comoditá, estendo temporaneamente:

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathcal{M}(4) \\ (q_1, q_2) &\longmapsto \{x \mapsto q_1 x \overline{q_2}\}\end{aligned}$$

Preso $(h_1, h_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, si ha:

$$\psi(q_1 + th_1, q_2 + th_2)(x) = (q_1 + th_1)x(\overline{q_2 + th_2}) = q_1 x \overline{q_2} + t(h_1 x \overline{q_2} + q_1 x \overline{h_2}) + O(t^2),$$

dunque $d\psi_{(q_1, q_2)} : (h_1, h_2) \mapsto \{x \mapsto h_1 x \overline{q_2} + q_1 x \overline{h_2}\}$.

$$\text{Ker}(d\psi_{(q_1, q_2)}) = \{(h_1, h_2) \mid h_1 x \overline{q_2} + q_1 x \overline{h_2} = 0 \forall x \in \mathbb{H} = \mathbb{R}^4\},$$

ma se $x = 1$, la relazione diventa $h_1 \overline{q_2} + q_1 \overline{h_2} = 0$, cioè $h_1 = -q_1 \overline{h_2} q_2$, da cui:

$$\text{Ker}(d\psi_{(q_1, q_2)}) = \{(h_1, h_2) \mid q_1 x \overline{h_2} = q_1 \overline{h_2} q_2 x \overline{q_2} \forall x \in \mathbb{H}\} = \{(h_1, h_2) \mid x \overline{h_2} q_2 = \overline{h_2} q_2 x \forall x \in \mathbb{H}\}$$

Ma allora $\overline{h_2} q_2 \in \mathbb{R}$, cioè $h_2 = \lambda q_2$, per $\lambda \in \mathbb{R}$; segue anche che $h_1 = -\lambda q_1$, quindi:

$$\text{Ker}(d\psi_{(q_1, q_2)}) = \text{Span}((-q_1, q_2)).$$

Se vediamo che tale retta non sta mai in $T_{(q_1, q_2)}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$, avremmo la tesi; ma $q_1 \in N_{q_1}(\mathbb{S}^3)$ e $q_2 \in N_{q_2}(\mathbb{S}^3)$, perciò $(-q_1, q_2) \in N_{(q_1, q_2)}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$ che interseca $T_{(q_1, q_2)}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$ nella sola origine $(0, 0)$.

Abbiamo ottenuto che ψ é un diffeomorfismo locale, dunque ψ é aperta, ma ψ va da un compatto a un T2, perciò é chiusa; si ottiene da questo che $\text{Im}(\psi)$ é aperta e chiusa in $\text{SO}(4)$, che é connesso, quindi ψ é surgettiva.

Si conclude finalmente che, detto Γ il gruppo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ che agisce in modo propriamente discontinuo:

$$\begin{aligned}\Gamma &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) \\ 1 &\longmapsto \{(q_1, q_2) \mapsto (-q_1, q_2)\}\end{aligned}$$

Γ induce un rivestimento:

$$\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 / \Gamma = \text{SO}(4)$$

di grado 2, che comporta che $\pi_1(\text{SO}(4)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si puó dimostrare (ma richiede conoscenze piú avanzate di topologia algebrica) che $\pi(\text{SO}(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \forall n \geq 3$; il suo rivestimento universale é denotato $\text{Spin}(n)$, ed é un gruppo spinoriale.

2.2 Campi vettoriali tangenti e campi normali

Definizione 2.2.1. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ varietà. Un **campo vettoriale tangente** su X é una funzione $v : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $v(p) \in T_p(X) \forall p \in X$.

Definizione 2.2.2. Un **frame** su X é un insieme v_1, \dots, v_k di campi vettoriali tangenti tali che $v_1(p), \dots, v_k(p)$ sia una base di $T_p(X) \forall p \in X$ (e dunque $\dim X = k$).

Osservazione. La circonferenza \mathbb{S}^1 e il toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ hanno un frame; per la circonferenza é molto facile vederlo (ad esempio in figura), per il toro basta immaginare che é il prodotto di due circonferenze e ragionare su ciascuna.

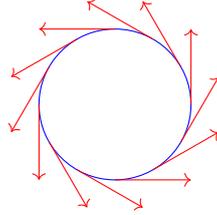


Figura 15: Un frame su \mathbb{S}^1

Osservazione. Sia $\varphi : \Omega \rightarrow U \subseteq X$ una carta, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto. Allora:

$$\left\{ \frac{\partial \varphi(p)}{\partial x_1} = d\varphi_p(e_1), \dots, \frac{\partial \varphi(p)}{\partial x_k} = d\varphi_p(e_k) \right\}$$

é un frame su U (in quanto $d\varphi_p$ é un isomorfismo e quindi porta basi in basi), detto **frame indotto** da φ .

In \mathbb{R}^k considereremo sempre l'orientazione canonica data dalla base canonica.

Definizione 2.2.3. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ varietà. Un'**orientazione** su X é la scelta di un'orientazione su $T_p(X) \forall p \in X$ in modo che $\forall p \in X \exists U \ni p$ aperto in X e un frame locale v_1, \dots, v_k su U tale che $v_1(q), \dots, v_k(q)$ sia positiva $\forall q \in U$.

Definizione 2.2.4. Un atlante $\{\varphi_i : \Omega_i \rightarrow U_i\}$ per X si dice **orientato** se $\forall i, j$, il diffeomorfismo:

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

ha differenziale positivo (cioé Jacobiano con determinante positivo) in ogni punto.

Teorema 2.2.1. X ammette un'orientazione \iff ammette un atlante orientato.
In tal caso X si dice **orientabile**.

Dimostrazione. \Rightarrow) Per ipotesi, $\forall p \in X \exists$ aperto $U_p \ni p$ con un frame su U_p tale che l'orientazione di $T_q(x)$ sia coerente con il frame in ogni $q \in U_p$ (cioé la base data dal frame sia positiva).

Sia $\{\varphi_i : \Omega_i \rightarrow U_i\}$ un atlante tale che Ω_i sia connesso e $\varphi_i(U_i)$ sia contenuto in uno degli $U_p \forall i$. Per ogni i , decido se tenere φ_i o se cambiarla nel modo seguente. $\varphi_i : \Omega_i \rightarrow U_i$ é tale che $d(\varphi_i)_q$ o preserva l'orientazione (da $\mathbb{R}^k = T_q(\Omega_i)$ in $T_{\varphi_i(q)}(X)$) $\forall q \in \Omega_i$ o la inverte $\forall q \in \Omega_i$: infatti la matrice di cambio di base tra il frame indotto da φ_i e quello coerente con l'orientazione di X é C^∞ (se pensata come funzione da U_i in $GL(k, \mathbb{R})$), e siccome U_i é connesso, il segno del determinante di questa matrice é costante.

Se il frame indotto da φ_i é sempre positivo, pongo $\psi_i = \varphi_i : \Omega'_i = \Omega_i \rightarrow U_i$; se invece é sempre negativo, pongo $\psi_i = r \circ \varphi_i : \Omega'_i \rightarrow U_i$, dove $r(x_1, \dots, x_k) = (-x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Ora, l'atlante $\{\psi_i : \Omega_i \rightarrow U_i\}$ é tale che il frame indotto da ψ_i é positivo $\forall i, \forall q \in \Omega'_i$ per costruzione; dico che questo é un atlante orientato.

Infatti per costruzione $d\psi_i$ e $d\psi_j^{-1}$ preservano l'orientazione (sugli spazi coinvolti), per cui $d(\psi_j^{-1} \circ \psi_i)$ ha $\det > 0$ dove é definito.

\Leftrightarrow) Dato un atlante orientato $\{U_i, \varphi_i\}$, basta verificare che i frame indotti dalle φ_i sono orientati coerentemente dove gli U_i si intersecano. Basterá allora definire l'orientazione di $T_p(X)$ come quella indotta da uno di questi frame.

Ma questa é una conseguenza del fatto che $d(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)$ preserva l'orientazione in ogni punto. □

Definizione 2.2.5. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ varietá. Dato $p \in X$, si definisce **spazio normale** a X in p il sottospazio $N_p(X) = (T_p(X))^\perp$ di \mathbb{R}^n .

Definizione 2.2.6. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ varietá. Un **campo normale** é una mappa $C^\infty v : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $v(p) \in N_p(X) \forall p \in X$.

Definizione 2.2.7. Un campo normale v si dice **unitario** se $\|v(p)\| = 1 \forall p \in X$.

Esempio. Se $X = \mathbb{S}^{n-1}$, esistono esattamente due campi normali unitari, che sono $v_+(p) = p$ e $v_-(p) = -p$.

Proposizione 2.2.2. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ varietá di dimensione $n - 1$. Sono fatti equivalenti:

1. X é orientabile;
2. Esiste un campo normale mai nullo su X ;
3. Esiste un campo normale unitario su X .

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 3)$ X orientabile \iff esiste un modo per distinguere basi positive e negative in $T_p(X) \forall p$. Osservo che $\forall p, N_p$ ha dimensione 1. Scelgo n_p in N_p il vettore unitario tale che $(v_1, \dots, v_{n-1}, n_p)$ base positiva di X con (v_1, \dots, v_{n-1}) base positiva di $T_p(X)$. Mostro ora che $n : p \mapsto n_p$ C^∞ in p : esistono infatti $v_1(x), \dots, v_{n-1}(x) : U \mapsto \mathbb{R}^n$ unitari con ogni $v_i(x)$ campo vettoriale, che mi danno una base positiva del tangente. Se ora $n(p) = v_1(p) \wedge \dots \wedge v_{n-1}(p)$ questo funziona ed C^∞ .

$3 \Rightarrow 1)$ Sia v un campo normale unitario su X . $\forall p \in X$, dico che la base $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ di $T_p(X)$ é positiva se $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v(p)\}$ é una base positiva di \mathbb{R}^n ; rimane da verificare che é una buona definizione, ma se per assurdo esistessero due basi v_1, \dots, v_{n-1} e w_1, \dots, w_{n-1} di $T_p(X)$ tali che $\exists M \in \text{GL}^-(T_p(X))$ che porta l'una nell'altra, allora la matrice $\widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in \text{GL}^-(T_p(X) \oplus N_p(X))$ porta la base $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v(p)\}$ in $\{w_1, \dots, w_{n-1}, v(p)\}$, ma sono entrambe basi positive di \mathbb{R}^n , assurdo.

$2 \Rightarrow 3)$ Se v é un campo normale mai nullo su X , allora $v'(p) = \frac{v(p)}{\|v(p)\|}$ é un campo normale unitario su X .

$3 \Rightarrow 2)$ Ovvio. □

Corollario 2.2.3. Tutte le varietá del tipo $X = f^{-1}(y)$, con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e y valore regolare, sono orientabili.

Dimostrazione. Basta osservare che $\nabla f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é un campo normale mai nullo (in quanto il nucleo di df_p é lo spazio tangente). □

2.3 Teoria metrica delle superfici

Definizione 2.3.1. Una superficie S é una varietà 2-dimensionale in \mathbb{R}^3 .

Se $x : \Omega \rightarrow U \subseteq S$ é una parametrizzazione locale, $x = x(u, v)$, indicheremo con x_u, x_v le derivate parziali $x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = dx(e_1)$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = dx(e_2)$.

A volte però, sempre con x_u, x_v indicheremo le mappe $x_u \circ x^{-1}, x_v \circ x^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (cioé potremmo identificare l'aperto $U \subseteq S$ con le sue coordinate locali $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$).

Definizione 2.3.2. La **I forma fondamentale** su S é la restrizione del prodotto $\langle \cdot \rangle$ standard su \mathbb{R}^3 a $T_p(S)$ al variare di $p \in S$ (o la forma quadratica associata).

Se x é una parametrizzazione locale, la matrice che rappresenta la I forma fondamentale rispetto al frame locale indotto da x é dato da:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_u, x_u \rangle & \langle x_u, x_v \rangle \\ \langle x_v, x_u \rangle & \langle x_v, x_v \rangle \end{pmatrix}.$$

Definizione 2.3.3. Siano $p, q \in S$. La **distanza (intrinseca)** fra p e q é data da:

$$d(p, q) = \inf \{L(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow S \text{ } C^\infty \text{ a tratti con } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

Osservazione. É effettivamente una distanza; infatti $d(p, q) \geq 0$ e $d(p, q) \geq d_\varepsilon(p, q)$, dove d_ε indica la distanza euclidea (in quanto il segmento é il cammino di lunghezza minima fra due punti), dunque $d(p, q) = 0 \iff p = q$.

Inoltre d é simmetrica e soddisfa la disuguaglianza triangolare perché la giunzione di due curve C^∞ a tratti é anch'essa una C^∞ a tratti.

Supponiamo per i prossimi risultati S orientata (infatti localmente una superficie é sempre orientabile, e alcuni invarianti che introdurremo cambieranno solo segno scegliendo orientazioni locali opposte).

Dunque $\exists N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ campo normale unitario tale che $\{v_1, v_2, N(p)\}$ é positiva per ogni base positiva $\{v_1, v_2\}$ di $T_p(S)$, $p \in S$.

Questa mappa si chiama **mappa di Gauss**.

Osservazione. $N_p(\mathbb{S}^2) = p$, perché il piano tangente in p é p^\perp , dunque il versore normale a p^\perp non é altro che p stesso.

Proposizione 2.3.1. $\forall p \in S$, $T_p(S) = T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$ e perciò $dN_p \in \text{End}(T_p(S))$.

Inoltre dN_p é autoaggiunto rispetto alla I forma fondamentale.

Dimostrazione. $\forall p \in S$, $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) = N(p)^\perp = T_p(S)$ per definizione.

Per vedere che é autoaggiunto, fissiamo coordinate locali intorno a $p \in S$. Dobbiamo verificare che $\langle v, dN_p(w) \rangle = \langle dN_p(v), w \rangle \forall v, w \in T_p(S)$; basta vederlo per v, w in una base, ma una base é x_u, x_v , e dunque l'unica verifica non banale é $\langle x_u, dN_p(x_v) \rangle = \langle dN_p(x_u), x_v \rangle$, cioè $\langle x_u, d(N \circ x)(e_2) \rangle = \langle d(N \circ x)(e_1), x_v \rangle$.

Rimpiazzando $N \circ x$ con N , poiché $x_u \perp N$ e $x_v \perp N$ in ogni punto, si ha che $0 \equiv \langle x_u, N \rangle$ e $0 \equiv \langle x_v, N \rangle$.

Derivando rispettivamente rispetto a v e u , si ha:

$$\begin{cases} 0 = \langle x_{uv}, N \rangle + \langle x_u, N_v \rangle \\ 0 = \langle x_{uv}, N \rangle + \langle x_v, N_u \rangle \end{cases}$$

cioé la tesi. □

Definizione 2.3.4. $p \in S$. $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ é autoaggiunto, e pertanto ammette una base ortonormale di autovettori. Le direzioni degli autovettori si chiamano **direzioni principali** (sono 0, 2 o tutte, cioè infinite), gli opposti degli autovalori si chiamano **curvature principali**, il determinante di dN_p si chiama **curvatura di Gauss** e $-\frac{1}{2} \text{tr}(dN_p)$ **curvatura media**.

Osservazione. La curvatura di Gauss non dipende dall'orientazione, mentre le altre cambiano segno se si inverte l'orientazione.

Definizione 2.3.5. La **II forma fondamentale** su $T_p(S)$ é (la forma quadratica associata a) il prodotto scalare (non necessariamente definito positivo) dato da:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle -dN_p(x_u), x_u \rangle & \langle -dN_p(x_u), x_v \rangle \\ \langle -dN_p(x_v), x_u \rangle & \langle -dN_p(x_v), x_v \rangle \end{pmatrix}.$$

Definizione 2.3.6. $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ PLA. Si chiama **curvatura normale** di γ in $p = \gamma(0)$ la quantità $k_n(0) = \langle \gamma''(0), N(p) \rangle$.

Osservazione. Se γ é biregolare con versore normale n , allora $k_n(0) = \langle k(0)n(0), N(p) \rangle = k(0)\langle n(0), N(p) \rangle$.

Proposizione 2.3.2. $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ PLA, $\gamma(0) = p \in S$. Allora la curvatura normale di γ in 0 é data dalla II forma fondamentale valutata in $(\gamma'(0), \gamma'(0))$.

Dimostrazione. Sicuramente $0 \equiv \langle \gamma'(t), (N \circ \gamma)(t) \rangle$. Derivando in t si ottiene $0 = \langle \gamma''(t), N(\gamma(t)) \rangle + \langle \gamma'(t), dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \rangle$, da cui valutando in $t = 0$, $0 = \langle \gamma''(0), N(p) \rangle - \text{II}(\gamma'(0), \gamma'(0))$. \square

Corollario 2.3.3. Tutte le curve γ PLA con $\gamma(0) = p \in S$ e stessa velocità in 0 hanno la stessa curvatura normale in p .

Osservazione. Siano v_1, v_2 le direzioni principali in p , con curvature principali λ_1, λ_2 . Se $v \in T_p(S)$ é unitario, allora $v = \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2$ per un certo $\theta \in [0, 2\pi]$. Ma allora:

$$\begin{aligned} \text{II}(v, v) &= \text{II}(\cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2, \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2) = \\ &= -\langle \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2, dN_p(\cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2) \rangle = \\ &= \langle \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2, \lambda_1 \cos(\theta)v_1 + \lambda_2 \sin(\theta)v_2 \rangle = \lambda_1 \cos^2(\theta) + \lambda_2 \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Dunque, se $\lambda_1 \leq \lambda_2$, ottengo che $\lambda_1 \leq \text{II}(v, v) \leq \lambda_2$ e cioè che le direzioni principali sono proprio quelle che realizzano le curvature normali estremali.

In altre parole, le curvature principali sono la massima e la minima curvatura normale in p , e danno la curvatura normale delle curve con velocità lungo le direzioni principali.

Osservazione. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ orientata, con versore normale indotto $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, e fissiamo una parametrizzazione locale $x : \Omega \rightarrow U \subseteq S$.

$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$, in quanto N é l'unico vettore che completa x_u, x_v a base ortonormale positiva di \mathbb{R}^3 . Voglio calcolare $dN(x_u)$ e $dN(x_v)$ ed esprimerli nella base x_u, x_v , ma questo é computazionalmente poco conveniente; é piú facile partire dalla II forma fondamentale.

Per definizione, $e = \text{II}(x_u, x_u) = \text{I}(x_u, -dN(x_u)) = -\langle x_u, N_u \rangle$, ma $\langle x_u, N \rangle = 0$, dunque:

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle x_u, N \rangle = \langle x_{uu}, N \rangle + \langle x_u, N_u \rangle,$$

da cui $e = \langle x_{uu}, N \rangle$.

In maniera del tutto analoga, si ricava $f = \langle x_{uv}, N \rangle$ e $g = \langle x_{vv}, N \rangle$.

Se indichiamo con $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ e M rispettivamente le matrici che rappresentano la I forma, la II forma e dN rispetto alla base x_u, x_v , allora $B = -AM$ (in quanto $\text{II}(w, z) =$

$I(w, -dN(z))$ e dunque $M = -A^{-1}B$ (infatti A é invertibile perché rappresenta un prodotto scalare definito positivo).

In particolare, la curvatura di Gauss, che d'ora in poi indicheremo k , assume l'espressione:

$$k = \det M = \frac{\det B}{\det A} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Definizione 2.3.7. $p \in S$ si dice:

- **planare** se $dN_p = 0$ (e dunque $k_{\text{Gauss}}(p) = 0$);
- **parabolico** se $k_{\text{Gauss}}(p) = 0$, ma $dN_p \neq 0$;
- **ellittico** se $k_{\text{Gauss}} > 0$;
- **iperbolico** se $k_{\text{Gauss}} < 0$.

Esempi. • $S = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ piano. $N(p) = (0, 0, 1) \forall p \in S$ é costante, dunque $dN_p \equiv 0 \forall p \in S$, cioè ogni punto di S é planare.

- $S = \mathbb{S}^2$ sfera. $\forall p \in S$, $N(p) = p$, dunque $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ é l'identità $\forall p \in S$, quindi le curvature principali sono entrambe uguali a 1, tutte le direzioni in ogni punto sono principali e la curvatura di Gauss é costantemente 1; segue che ogni punto di S é ellittico.
- $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ cilindro. Se $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é la proiezione sulle primo due coordinate, allora $N(p) = \pi(p) \forall p \in S$.
 N si estende a una mappa lineare $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, per cui $dN_p = d(\pi|_{T_p(S)})_p = \pi|_{T_p(S)}$; $\forall p \in S$, $\exists v_1$ (verticale) e v_2 (orizzontale) in $T_p(S)$ tali che $\pi(v_1) = 0$, $\pi(v_2) = v_2$.
Dunque le curvature principali sono 0 e 1 e la curvatura di Gauss é ovunque 0; segue che ogni punto di S é un punto parabolico.
- $S = \{z = x^2 - y^2\}$ sella. É una superficie perché luogo di zeri di una funzione con differenziale mai nullo, ed é parametrizzata da:

$$x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \\ (u, v) \longmapsto (u, v, u^2 - v^2)$$

che é un diffeomorfismo (con inversa la proiezione sulle prime due coordinate).

Si calcola:

$$x_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad x_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix}, \quad N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \\ x_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

da cui:

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1 + 4v^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il differenziale di N é perciò rappresentato da $M = -A^{-1}B$; in $(0, 0, 0) = x(0, 0)$, $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, dunque le direzioni principali sono generate da $x_u(0, 0) = (1, 0, 0)$ e $x_v(0, 0) = (0, 1, 0)$, con curvature principali 2 e -2 ; in generale si ha:

$$k = \frac{\det B}{\det A} = \frac{-4}{1 + 4u^2 + 4v^2} \cdot \frac{1}{1 + 4u^2 + 4v^2} < 0,$$

dunque tutti i punti di S sono iperbolici.

Esempio (Elicoide). Presa l'elica, parametrizzata da $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), au)$, con $a \neq 0$, tracciamo le perpendicolari a z passanti per ogni punto $p \in \alpha(I)$; l'unione di queste rette prende il nome di **elicoide** ed é parametrizzato da:

$$x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto (v \cos(u), v \sin(u), au)$$

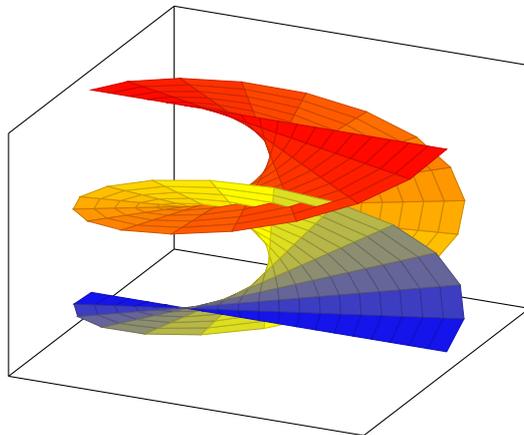


Figura 16: L'elicoide

Evidentemente x ristretto a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ é iniettivo; visto che dalla figura vediamo che l'immagine di x non contiene punti di "autointersezione all'infinito", per vedere che l'elicoide é una superficie ci basta mostrare che il differenziale di x é iniettivo.

I vettori $x_u = (-v \sin(u), v \cos(u), a)$ e $x_v = (\cos(u), \sin(u), 0)$ sono indipendenti \iff il differenziale é iniettivo; ma x_u, x_v sono ortogonali e non nulli, dunque indipendenti. Si conclude che la prima forma associata é:

$$I = \begin{pmatrix} v^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definizione 2.3.8. Data una parametrizzazione $x : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow D \subseteq S$, con S superficie e $x(U) = D$, definisco **area** di D :

$$A(D) = \int_U \|x_u \wedge x_v\| dudv.$$

Osservazione. É una buona definizione, in quanto se cambio parametrizzazione ottengo lo stesso valore dell'integrale per la formula di cambiamento di variabili.

Osservazione. Visto che per generici vettori v, w valgono le relazioni:

$$\begin{cases} \|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 \sin^2(\theta) \\ \|\langle v, w \rangle\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 \cos^2(\theta) \end{cases}$$

si ricava l'uguaglianza $\|v \wedge w\|^2 + \|\langle v, w \rangle\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2$. Ma allora:

$$\|x_u \wedge x_v\|^2 = \underbrace{\|x_u\|^2}_{=E} \underbrace{\|x_v\|^2}_{=G} - \underbrace{\|\langle x_u, x_v \rangle\|^2}_{=F^2},$$

cioé $\|x_u \wedge x_v\| = \sqrt{EG - F^2}$.

Esempio. Consideriamo il toro di raggi a e r , con $a > r$; una sua parametrizzazione é:

$$x(u, v) = ((a + r \cos(u)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u));$$

piú precisamente $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é un rivestimento (é quello universale). Si ha:

$$\begin{cases} x_u = (-r \sin(u) \cos(v), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(u)) \\ x_v = (-(a + r \cos(u)) \sin(v), (a + r \cos(u)) \cos(v), 0) \\ \tilde{N} = x_u \wedge x_v = (-r(a + r \cos(u)) \cos(u) \cos(v), -r(a + r \cos(u)) \cos(u) \sin(v), -r(a + r \cos(u)) \sin(u)) \\ N = \frac{\tilde{N}}{\|\tilde{N}\|} = (-\cos(u) \cos(v), -\cos(u) \sin(v), -\sin(u)) \neq 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che x_u e x_v sono linearmente indipendenti, cioè che il differenziale di $x|_U$ é invertibile, dove $U = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Grazie ai calcoli fatti si ricava:

$$A(\mathbb{T}^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(a + r \cos(u)) dudv = 2\pi r \int_0^{2\pi} (a + r \cos(u)) du = (2\pi r)(2\pi a) = 4\pi^2 ar.$$

Infine si può calcolare la curvatura Gaussiana del toro, che risulta essere:

$$k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r(a + r \cos(u)) \cos(u)}{r^2(a + r \cos(u))^2} = \frac{\cos(u)}{r(a + r \cos(u))}.$$

Definizione 2.3.9. $p \in S$ si dice **ombelicale** se $k_1 = k_2$, dove k_1, k_2 sono le curvatures principali.

Esempi. Aperti del piano e della sfera hanno tutti i punti ombelicali.

Osservazione. In un punto ombelicale non sono ben definite le direzioni principali, nel senso che ogni direzione é principale.

Proposizione 2.3.4. *S superficie connessa. Tutti i punti di S sono ombelicali \iff S é contenuta in un piano o in una sfera.*

Dimostrazione. L'implicazione \Leftarrow é banale; vediamo l'altra.

Se p é ombelicale, allora $dN_p = \lambda_p I$, con $\lambda : p \mapsto \lambda_p$ funzione liscia. Dato $p \in S$, prendo una parametrizzazione $x : U \rightarrow V$, con V intorno di $p = (u, v)$ connesso in S ; $N_u = dN_p(x_u)$ e $N_v = dN_p(x_v)$, dunque $N_u = \lambda x_u$ e $N_v = \lambda x_v$, da cui:

$$\lambda_v x_u + \lambda x_{uv} = N_{uv} = \lambda_u x_v + \lambda x_{uv} \quad \Rightarrow \quad \lambda_u x_v = \lambda_v x_u.$$

Ma x_u e x_v sono indipendenti, dunque $\lambda_u = \lambda_v = 0$, cioè λ é una costante.

Se $\lambda \equiv 0$, allora $dN_p \equiv 0 \forall p \in S$, quindi S é contenuta in un piano, in quanto:

$$\begin{cases} \langle x, N \rangle_u = \langle x_u, N \rangle + \langle x, N_u \rangle = 0 \\ \langle x, N \rangle_v = \langle x_v, N \rangle + \langle x, N_v \rangle = 0 \end{cases}$$

cioé $\langle x, N \rangle = \text{costante}$.

Se invece $\lambda \neq 0$ e $x \in S$, prendo $y(u, v) = x(u, v) - \frac{N(u, v)}{\lambda}$; $y_u = x_u - \frac{N_u}{\lambda} = 0$ e analogamente $y_v = 0$, dunque y é costante e:

$$d(x, y) = \|y - x\| = \left\| \frac{N}{\lambda} \right\| = \frac{1}{|\lambda|},$$

cioé S é contenuta nella sfera di centro y e raggio $\frac{1}{|\lambda|}$. □

Esercizio. *S diffeomorfa alla sfera \mathbb{S}^2 . Esiste sempre un punto $p \in S$ ombelicale?*

2.4 Superfici di rotazione

Sia $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, con I aperto, $\mathbb{R}^2 = \{(x, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$, $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ tale che γ sia un diffeomorfismo sull'immagine (e dunque γ regolare) e $\varphi(t) > 0 \forall t \in I$.

Definizione 2.4.1. La **superficie di rotazione** S di generatrice γ é l'insieme ottenuto ruotando γ intorno all'asse z .

Proposizione 2.4.1. S é effettivamente una superficie, parametrizzata da opportune restrizioni di:

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Prendiamo le restrizioni di x a $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times I$, $(0, \pi) \times I$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \times I$, $(\pi, 2\pi) \times I$; per definizione, $S = x(\mathbb{R} \times I)$. Verifico che $x((\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times I)$ é un aperto U di S e che $x : (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times I \rightarrow U$ é un diffeomorfismo (e per gli altri la verifica é analoga). Ma $x((\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times I) = S \cap \{x > 0\}$ é un aperto di S , x é C^∞ e una sua inversa é data da:

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\arctan \frac{y}{x}, \gamma^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \right),$$

che é C^∞ . □

Definizione 2.4.2. Le curve su S della forma $t \mapsto x(u_0, t)$ si chiamano **meridiani**, mentre quelle della forma $t \mapsto x(t, v_0)$ **paralleli**.

Definizione 2.4.3. Una curva si dice **linea di curvatura** se la sua velocità genera una direzione principale in ogni istante.

In generale, per una qualsiasi superficie di rotazione, si calcola:

$$x_u = \begin{pmatrix} -\varphi \sin u \\ \varphi \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_v = \begin{pmatrix} \varphi' \cos u \\ \varphi' \sin u \\ \psi' \end{pmatrix}, \quad N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(\psi' \cos u, \psi' \sin u, -\varphi')}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}},$$

$$x_{uu} = \begin{pmatrix} -\varphi \cos u \\ -\varphi \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{uv} = \begin{pmatrix} -\varphi' \sin u \\ \varphi' \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{vv} = \begin{pmatrix} \varphi'' \cos u \\ \varphi'' \sin u \\ \psi'' \end{pmatrix},$$

da cui:

$$A = \begin{pmatrix} \varphi^2 & 0 \\ 0 & (\varphi')^2 + (\psi')^2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} \begin{pmatrix} -\varphi\psi' & 0 \\ 0 & \psi'\varphi'' - \varphi'\psi'' \end{pmatrix}.$$

Visto che sia A che B sono diagonali (e dunque anche M), ricaviamo che meridiani e paralleli sono mutuamente ortogonali e linee di curvatura, e che x_u, x_v generano direzioni principali in ogni punto. Inoltre otteniamo:

$$k = \frac{\det B}{\det A} = \frac{-\varphi\psi'(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')}{(\varphi')^2 + (\psi')^2} \cdot \frac{1}{\varphi^2((\varphi')^2 + (\psi')^2)} = \frac{\psi'(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')}{\varphi((\varphi')^2 + (\psi')^2)}.$$

Osservazione. Se γ é PLA, allora $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$ e derivando $2\varphi'\varphi'' + 2\psi'\psi'' = 0$, da cui $\psi'\psi'' = -\varphi'\varphi''$, che sostituiti nella formula precedente danno:

$$k = \frac{-(\varphi')^2\varphi'' - (\psi')^2\varphi''}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

Esempio (pseudosfera). Abbiamo visto che la sfera é una superficie con curvatura costante in ogni punto uguale a 1; viceversa la sella é una superficie con tutti punti iperbolici, ma la curvatura non é costantemente -1 ; una superficie di rotazione con $k \equiv -1$ non esiste propriamente, ma la seguente ha $k \equiv -1$ in ogni punto in cui é definita.

Sia $\gamma : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2})$ la trattrice; la superficie di rotazione ottenuta ruotando γ intorno all'asse z si chiama **pseudosfera** (in realtà γ non é regolare in $t = \frac{\pi}{2}$, quindi non definiamo la pseudosfera sul piano $\{z = 0\}$).

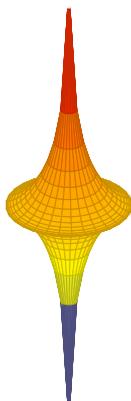


Figura 17: La pseudosfera

Sostituendo nella formula precedente:

$$k = \frac{\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \left(-\cos^2(t) - \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} + \cos^2(t) \right)}{\sin(t) \frac{\cos^4(t)}{\sin^4(t)}} = -1.$$

Esempio (Curve lossodromiche sulla sfera). Una parametrizzazione della sfera é $x(\theta, \varphi) = (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta)) : (0, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$; si ha che $x_\theta = (\cos(\theta) \cos(\varphi), \cos(\theta) \sin(\varphi), -\sin(\theta))$ e $x_\varphi = (-\sin(\theta) \sin(\varphi), \sin(\theta) \cos(\varphi), 0)$, quindi:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

Vogliamo trovare le **curve lossodromiche** sulla sfera, cioè le curve su \mathbb{S}^2 che formano un angolo costante con i meridiani; cerchiamo dunque le $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ tali che l'angolo fra $\alpha'(t)$ e x_θ sia costantemente β . In altre parole imponiamo:

$$\cos(\beta) = \frac{\langle \alpha'(t), x_\theta \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|x_\theta\|} = \frac{\langle \alpha'(t), x_\theta \rangle}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Scriviamo α come $\alpha(t) = x(\theta(t), \varphi(t))$; allora $\alpha'(t) = x_\theta \theta'(t) + x_\varphi \varphi'(t)$, perciò:

$$\cos(\beta) = \frac{\theta'(t)}{\sqrt{\theta'(t)^2 + \sin^2(\theta(t)) \varphi'(t)^2}}.$$

Si ricava:

$$\begin{aligned} \theta'(t)^2 (\cos^2(\beta) - 1) + \sin^2(\theta(t)) \varphi'(t)^2 \cos^2(\beta) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^2(\theta(t)) \varphi'(t)^2 = \tan^2(\beta) \theta'(t)^2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sin(\theta(t))}{\theta'(t)} &= \pm \frac{\tan(\beta)}{\varphi'(t)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\varphi'(t)}{\tan(\beta)} = \pm \int \frac{\theta'(t)}{\sin(\theta(t))}, \end{aligned}$$

da cui $(\varphi + c) \cot(\beta) = \pm \log(\tan(\theta/2))$. Queste sono le curve volute.

Teorema 2.4.2. $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie compatta. Allora $\exists p \in S$ ellittico, cioè con $k(p) > 0$.

Dimostrazione. Sia $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = \|x\|^2$. f ha massimo per compattezza di S in $p_0 \neq 0$. $f(x) = \langle x, x \rangle$, dunque $df_p(v) = 2\langle p, v \rangle$.

p_0 è di massimo, dunque $0 = df_p(v) = 2\langle p_0, v \rangle \forall v \in T_{p_0}(S)$; ma allora $p_0 \in (T_{p_0}(S))^\perp = N_{p_0}(S)$, e dunque $N(p_0) = \frac{p_0}{\|p_0\|}$ (infatti posso scegliere N così localmente anche se la superficie non è orientata).

$\forall \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ PLA tale che $\gamma(0) = p_0$, $f \circ \gamma$ ha un massimo in 0, dunque $(f \circ \gamma)''(0) \leq 0$. Ora:

$$(f \circ \gamma)''(t) = (2\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle)' = 2 \underbrace{\|\gamma'(t)\|^2}_{=1} + 2\langle \gamma''(t), \gamma(t) \rangle,$$

quindi:

$$0 \geq 2 + 2\langle \gamma''(0), \gamma(0) \rangle = 2 + 2\langle \gamma''(0), N(p_0) \rangle \cdot \|p_0\|,$$

da cui $k_{norm}(0) \cdot \|p_0\| \leq -1$.

In particolare $k_{norm} < 0 \forall$ tale γ , quindi le curvatures principali sono entrambe negative e $k(p_0) > 0$. \square

2.5 Isometrie fra superfici

Definizione 2.5.1. $S, S' \subseteq \mathbb{R}^3$ superfici. S si dice **congruente** a S' se $\exists f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometria positiva tale che $f(S) = S'$.

Osservazione. Tutte le grandezze fin qua introdotte (curvature principali, media, di Gauss) sono invarianti per congruenza, in quanto le due mappe di Gauss sono coniugate tramite l'isometria, e dunque hanno traccia, autovalori e determinante uguali.

Definizione 2.5.2. $f : S \rightarrow S'$ fra superfici si dice **isometria** se è bigettiva e $df_p : T_p(S) \rightarrow T_{f(p)}(S')$ è un'isometria rispetto alla I forma.

Osservazione. Ogni congruenza definisce un'isometria per restrizione.

Proposizione 2.5.1. *L'insieme delle isometrie è un gruppo con la composizione.*

Dimostrazione. Se f e g sono isometrie componibili, allora $f \circ g$ è un'isometria, in quanto $d(f \circ g) = df \circ dg$. Inoltre un'isometria fra spazi euclidei (in questo caso gli spazi tangenti) è un isomorfismo, quindi per il teorema di invertibilità locale, se f è un'isometria, allora è un diffeomorfismo locale bigettivo, per cui f^{-1} è C^∞ e la tesi segue dal fatto che $d(f_p^{-1}) = (df_p)^{-1}$. \square

Proposizione 2.5.2. $f : S \rightarrow S'$ isometria. Allora f preserva la distanza (intrinseca), cioè $d(f(p), f(p')) = d(p, p') \forall p, p' \in S$.

Dimostrazione. Se γ è una curva C^1 a tratti in S , allora:

$$L(f \circ \gamma) = \int_I \|(f \circ \gamma)'(s)\| ds = \int_I \|df_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\| ds = \int_I \|\gamma'(s)\| ds = L(\gamma),$$

in quanto df è un'isometria. Dunque $d(f(p), f(p')) \leq d(p, p')$.

L'altra disuguaglianza si ha analogamente con f^{-1} . \square

In realtà vale anche il viceversa, ma questo è un fatto che non dimostriamo:

Proposizione 2.5.3. *Ogni bigezione che preserva la distanza (intrinseca) é un'isometria.*

Definizione 2.5.3. $f : S \rightarrow S'$ si dice **isometria locale** se df_p é un'isometria lineare $\forall p \in S$. In particolare, f é un diffeomorfismo locale.

Osservazione. Se f é un'isometria locale, $\forall p \in S \exists U \ni p$ aperto e $V \ni f(p)$ aperto di S' tale che $f(U) = V$ e $f|_U$ é un'isometria su V .

Definizione 2.5.4. S, S' si dicono **localmente isometriche** se $\forall p \in S \exists U \ni p$ aperto, V aperto di S' tale che U sia isometrico a V e viceversa.

Osservazione. L'essere localmente isometrici non implica l'esistenza di isometrie locali globalmente definite.

Proposizione 2.5.4. S, S' sono localmente isometriche $\iff \forall p \in S, \exists U \ni p$ aperto di S, V aperto di $S', \varphi : \Omega \rightarrow U, \psi : \Omega \rightarrow V$ parametrizzazioni locali con gli stessi coefficienti della I forma e viceversa.

Dimostrazione. \Rightarrow) Per ipotesi dato $p \in S \exists U \ni p$ tale che $f|_U : U \rightarrow V$ sia un'isometria.

A meno di restringere U , posso porre $U = \varphi(\Omega)$ per qualche parametrizzazione locale $\varphi : \Omega \rightarrow S$.

Posto $\psi = f \circ \varphi$ ho la tesi, in quanto $\psi : \Omega \rightarrow V$ é un diffeomorfismo e:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial u} = d\psi(e_1) = d(f \circ \varphi)(e_1) = df \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} = d\psi(e_2) = d(f \circ \varphi)(e_2) = df \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \end{cases}$$

da cui i prodotti scalari sono gli stessi in quanto df é un'isometria.

\Leftarrow) Date φ, ψ come nell'enunciato, dico che $f = \psi \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow V$ é un'isometria.

Infatti, ripetendo gli stessi calcoli del punto precedente si vede che df é un'isometria sulla base $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ dello spazio tangente, dunque é un'isometria su tutto lo spazio tangente per bilinearit .

□

Esempio. Le tre superfici $H = \{z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3, C = \{x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3, Z = \{z^2 = x^2 + y^2 \mid z > 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ sono localmente isometriche.

Dimostrazione. Per H e C , consideriamo:

$$\begin{aligned} f : H &\longrightarrow C \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(x), \sin(x), y) \end{aligned}$$

$\forall p \in H$, una base di $T_p(H)$ é data da e_1, e_2 ; inoltre:

$$df(e_1) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad df(e_2) = \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sono ortonormali, dunque df preserva i prodotti scalari e perci  f é una isometria locale surgettiva.

Invece per H e Z dobbiamo ricorrere al risultato precedente: siano $\varphi, \psi : (0, \infty) \times (0, \pi) \rightarrow H, Z$ tali che:

$$\varphi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), 0), \quad \psi(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \cos(v\sqrt{2}), \frac{u}{\sqrt{2}} \sin(v\sqrt{2}), \frac{u}{\sqrt{2}} \right).$$

φ e ψ sono immersioni e (a meno di congruenza) le rispettive immagini sono H e Z ; inoltre:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u \sin(v) \\ u \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(v\sqrt{2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(v\sqrt{2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u \sin(v\sqrt{2}) \\ u \cos(v\sqrt{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed é una banale verifica vedere che in entrambi i casi $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$. \square

Definizione 2.5.5. Presa una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$, una grandezza si dice **intrinseca** se dipende solo dal tipo di isometria di S .

Nel caso di grandezze dipendenti dalla scelta di coordinate, una grandezza é intrinseca se dipende solo da E, F, G e loro derivate.

Esempi. La distanza intrinseca é una grandezza intrinseca.

Invece le curvatures principali, la curvatura media, e, f, g non sono intrinseche, in quanto cilindro e piano sono localmente isometrici, ma non hanno tali grandezze coincidenti.

Definizione 2.5.6. Fissiamo una carta $\varphi : \Omega \rightarrow U \subseteq S$. A φ é associato il frame locale x_u, x_v e la normale $N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$, in modo che x_u, x_v, N sia una base di \mathbb{R}^3 positiva in ogni punto di U . Allora si definiscono **simboli di Christoffel** i coefficienti Γ_{ij}^k tali che:

$$\begin{cases} x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + eN \\ x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + fN \\ x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + gN \end{cases}$$

Proposizione 2.5.5. *I simboli di Christoffel sono intrinseci.*

Dimostrazione. Dalla definizione:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle x_{uu}, x_u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle x_u, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle x_{uu}, x_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u} \langle x_u, x_v \rangle - \langle x_{uv}, x_u \rangle = F_u - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle x_u, x_u \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

e tale sistema é risolubile perché la matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ é invertibile. Dunque Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 sono intrinseci perché funzioni di E, F, G e loro derivate. Per gli altri simboli di Christoffel il ragionamento é analogo. \square

Teorema 2.5.6 (Egregium di Gauss). *La curvatura di Gauss k é intrinseca, cioé se $f : S \rightarrow S'$ é un'isometria, allora $k_S(p) = k_{S'}(f(p)) \forall p \in S$.*

Dimostrazione. Poiché $(x_{uu})_v = (x_{uv})_u$, si ricava:

$$(\Gamma_{11}^1)_v x_u + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + e_v N + \Gamma_{11}^1 x_{uv} + \Gamma_{11}^2 x_{vv} + e N_v = (\Gamma_{12}^1)_u x_u + (\Gamma_{12}^2)_u x_v + f_u N + \Gamma_{12}^1 x_{uu} + \Gamma_{12}^2 x_{uv} + f N_u.$$

Ora sostituisco x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} qua dentro e prendo il coefficiente di x_v , osservando che, se A é la matrice che rappresenta dN rispetto a x_u, x_v , allora $N_u = dN(e_1) = a_{11}x_u + a_{21}x_v$ e $N_v = dN(e_2) = a_{12}x_u + a_{22}x_v$:

$$(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} = (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + f a_{21}.$$

Dunque $ea_{22} - fa_{21}$ é intrinseca. Ma:

$$A = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{eF-fE}{EG-F^2} & \frac{fF+Eg}{EG-F^2} \end{pmatrix},$$

dunque:

$$ea_{22} - fa_{21} = \frac{e(fF + Eg) - f(eF - fE)}{EG - F^2} = - \frac{E(eg - f^2)}{EG - F^2} = -Ek,$$

da cui la tesi. □

Corollario 2.5.7. *Sfera, piano e sella non sono localmente isometrici.*

Abbiamo anche mostrato:

Proposizione 2.5.8. *Se $F = 0$, cioè $x_u \perp x_v$, allora vale la formula:*

$$k = - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right).$$

Osservazione. La formula calcola k senza menzionare N ; osserviamo inoltre che é possibile mettere metriche su superfici senza esplicitare una parametrizzazione, ad esempio su $\{(u, v) \mid v > 0\}$ la metrica $\begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix}$ rende il semipiano un piano iperbolico, in quanto in ogni punto vale $k = -1$ (si traslascia il conto esplicito).

Proposizione 2.5.9. *$S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie. $\forall p \in S \exists U(p) \subseteq S$ che é grafico di una funzione.*

Dimostrazione. Con una traslazione porto p in 0 e con una matrice di $O(3)$ metto $T_p = \{z = 0\}$. Data una parametrizzazione $x : U' \rightarrow U$ con $x(0,0) = 0$, x_u, x_v stanno nel piano tangente $\{z = 0\}$; se denoto con π la proiezione $\pi(x, y, z) = (x, y)$, allora $d\pi_{T_p(S)} = \text{id}$ e dunque $d(\pi \circ x)_{(0,0)}$ é invertibile, cioè $\pi \circ x$ é un diffeomorfismo locale con inversa locale $g : U \supseteq V \rightarrow U'$. Se f é l'ultima coordinata della funzione $x \circ g$, si ha che $x(V)$ é grafico di f . □

Corollario 2.5.10. *A meno di isometria, $\forall p \in S \exists U \ni p$ aperto grafico di una funzione f con $\nabla f(0) = 0$.*

Proposizione 2.5.11. *$f : U \rightarrow \mathbb{R}$, U aperto di S , $\nabla f(0) = 0$. Allora $\text{II} = Hf$, dove Hf rappresenta la matrice Hessiana di f .*

Dimostrazione. Per quanto visto, $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$ per una certa funzione f ; $x_u = (1, 0, f_u)$, $x_v = (0, 1, f_v)$, $N = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} = (0, 0, 1)$ in $(u, v) = (0, 0)$.

Inoltre $x_{uu} = (0, 0, f_{uu})$, $x_{uv} = (0, 0, f_{uv})$, $x_{vv} = (0, 0, f_{vv})$, dunque:

$$\text{II} = \begin{pmatrix} \langle N, x_{uu} \rangle & \langle N, x_{uv} \rangle \\ \langle N, x_{vu} \rangle & \langle N, x_{vv} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix} = Hf.$$

□

Corollario 2.5.12. *$S \subseteq \mathbb{R}^3$, $p \in S$, $k = k(p)$ curvatura Gaussiana. Allora $k > 0 \iff \exists U \ni p$ intorno aperto di p che sta in un unico semispazio rispetto a $T_p(S)$.*

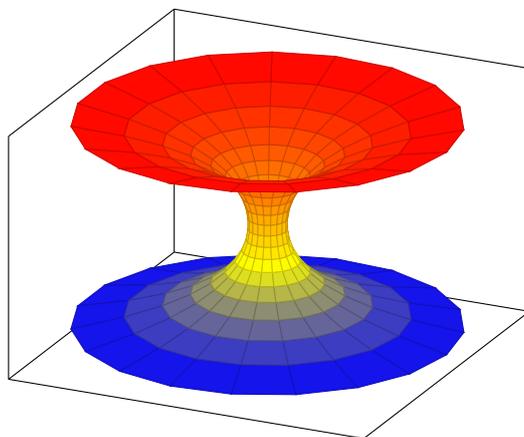
Dimostrazione. Localmente S é grafico di $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\nabla f_p = 0$ e $\text{II} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$ a meno della scelta della parametrizzazione, dove k_1, k_2 sono le curvatures principali.

Dunque $k = k_1 k_2 > 0 \iff k_1, k_2$ sono concordi $\iff f$ ha un massimo/minimo in $p \iff f$ in un intorno di p sta interamente in uno solo dei due semispazi individuati da $T_p(S)$. □

Esempio (Catenoide). Definiamo **catenoide** la superficie di rotazione generata dalla catenaria; ha parametrizzazione:

$$x : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto a(\cosh(v) \cos(u), \cosh(v) \sin(u), v)$$

con $a \neq 0$.



Visto che:

$$x_u = a(-\cos(v) \sin(u), \cosh(v) \cos(v), 0) \quad \text{e} \quad x_v = a(\sinh(v) \cos(u), \sinh(v) \sin(u), 1),$$

allora la prima forma fondamentale della catenoide é:

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = a^2 \cosh^2(v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre la catenoide é omeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, e dunque ha gruppo fondamentale isomorfo a \mathbb{Z} .

Esempio. Catenoide ed elicoide sono localmente isometrici. Infatti se riparametrizziamo l'elicoide con:

$$x(u, v) = a(\sinh(v) \cos(u), \sinh(v) \sin(u), u),$$

allora:

$$x_u = a(-\sinh(v) \sin(u), \sinh(v) \cos(u), 1) \quad \text{e} \quad x_v = a(\cosh(v) \cos(u), \cosh(v) \sin(u), 0),$$

dunque la I forma fondamentale diventa:

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = a^2 \cosh^2(v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cioé la tesi. Si potrebbe anche vedere che la mappa che manda l'elicoide nella catenoide tramite le parametrizzazioni é un rivestimento (quello universale).

2.6 Derivata covariante, trasporto parallelo e geodetiche. Il teorema di Gauss-Bonnet

Data una curva $\gamma : I \rightarrow S$, $I = [0, a]$, S superficie, denoto con:

$$\mathfrak{T}(\gamma) = \{W : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid W(t) \in T_{\gamma(t)}(S) \forall t \in I\}$$

l'insieme dei campi lungo γ .

Esempio. Se γ é costante, $\mathfrak{T}(\gamma) = \{W : I \rightarrow T_{\gamma(0)}(S)\}$.

Preso $t \in I$, indico con $\pi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\gamma(t)}(S)$ la proiezione ortogonale.

Definizione 2.6.1. Definisco **derivata covariante** di $W(t) \in \mathfrak{T}(\gamma)$:

$$\frac{DW(t)}{dt} = \pi_t \left(\frac{dW(t)}{dt} \right).$$

Definizione 2.6.2. $W \in \mathfrak{T}(\gamma)$ si dice **parallelo** se $\frac{DW}{dt} \equiv 0$, ovvero se $W'(t) \perp T_{\gamma(t)}(S) \forall t \in I$.

Supponiamo che $\gamma(I) \subseteq U$ aperto coordinato con coordinate (u, v) , cioè $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $\varphi = (u, v)^{-1}$.

Se $W(t) = \alpha(t)x_u(\gamma(t)) + \beta(t)x_v(\gamma(t))$, allora dal fatto che W é C^∞ si deduce che anche α, β lo sono e:

$$\begin{aligned} W' &= \alpha'x_u + \beta'x_v + \alpha \cdot (u'x_{uu} + v'x_{uv}) + \beta \cdot (u'x_{uv} + v'x_{vv}) = \\ &= x_u \underbrace{(\alpha' + \alpha u' \Gamma_{11}^1 + \alpha v' \Gamma_{12}^1 + \beta u' \Gamma_{12}^1 + \beta v' \Gamma_{22}^1)}_{= \frac{DW}{dt}} + x_v \underbrace{(\beta' + \alpha u' \Gamma_{11}^2 + \alpha v' \Gamma_{12}^2 + \beta u' \Gamma_{12}^2 + \beta v' \Gamma_{22}^2)}_{= \frac{DW}{dt}} + \\ &\quad + \text{componenti normali} \end{aligned}$$

Corollario 2.6.1. La derivata covariante é intrinseca, cioè se $f : S \rightarrow S'$ é un'isometria, $\gamma_1 : I \rightarrow S$, $\gamma_2 = f \circ \gamma_1 : I \rightarrow S'$, $W_1 \in \mathfrak{T}(\gamma_1)$, $W_2(t) = df_{\gamma_1(t)}(W_1(t))$, allora:

$$\frac{DW_2(t)}{dt} = df_{\gamma_1(t)} \left(\frac{DW_1(t)}{dt} \right).$$

Corollario 2.6.2. Dato $v_0 \in T_{\gamma(0)}(S)$, $\exists! V \in \mathfrak{T}(\gamma)$ parallelo tale che $V(0) = v_0$.

Dimostrazione. Visto che $\frac{DV}{dt} = 0$, α e β risolvono il sistema lineare del primo ordine:

$$\begin{cases} \alpha' = -\alpha u' \Gamma_{11}^1 - \alpha v' \Gamma_{12}^1 - \beta u' \Gamma_{12}^1 - \beta v' \Gamma_{22}^1 \\ \beta' = -\alpha u' \Gamma_{11}^2 - \alpha v' \Gamma_{12}^2 - \beta u' \Gamma_{12}^2 - \beta v' \Gamma_{22}^2 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione prolungabile a tutto I se fissiamo le condizioni iniziali $\alpha(0), \beta(0)$ (date da $V(0) = v_0$).

Se γ non é contenuta in un'unica carta il risultato non cambia, in quanto la soluzione é sempre definita su tutto I (altrimenti se si bloccasse a t_0 , spostandosi su una carta che contiene t_0 si riuscirebbe a prolungarla fino a $t_0 + \varepsilon$), e continua ad essere unica (poiché se in corrispondenza di p_0 si avesse una biforcazione, spostandosi su una carta che contiene p_0 si avrebbe un assurdo). \square

Definizione 2.6.3. L'unico campo ottenuto nel corollario precedente si chiama **trasporto parallelo** di v_0 .

Proposizione 2.6.3. $\forall t_0 \in I$, indicato con V_{v_0} il trasporto parallelo di v_0 , la mappa:

$$\begin{array}{ccc} T_{\gamma(0)}(S) & \longrightarrow & T_{\gamma(t_0)}(S) \\ v_0 & \longmapsto & V_{v_0}(t_0) \end{array}$$

é un'isometria lineare.

Dimostrazione. Sicuramente $\frac{D}{dt}$ é lineare, in quanto é composizione di due mappe lineari; in particolare i campi paralleli sono un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{T}(\gamma)$, isomorfo a $T_{\gamma(0)}(S)$, quindi il trasporto parallelo é lineare (per unicitá del trasporto parallelo).

Per vedere che é un'isometria, basta vedere che, se V, W sono paralleli, allora $\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t) \rangle = 0$.
Ma:

$$\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t) \rangle = \langle V'(t), W(t) \rangle + \langle V(t), W'(t) \rangle = \underbrace{\langle \frac{DV}{dt} + \lambda N(\gamma(t)), W \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle V, \frac{DW}{dt} + \mu N(\gamma(t)) \rangle}_{=0} = 0$$

da cui la tesi. □

Osservazione. Nella dimostrazione precedente ho mostrato anche che:

$$\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t) \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle,$$

quindi in particolare V parallelo $\Rightarrow \|V\| = \text{costante}$.

Osservazione. Siano (u, v) le coordinate di una parametrizzazione ortogonale (cioé $F = 0$). Siano $e_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|}$, $e_2 = \frac{x_v}{\|x_v\|}$ e $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$; denotando con e_i anche il campo $e_i(t) = e_i(\gamma(t)) \in \mathfrak{T}(\gamma)$, vogliamo calcolare la quantità $\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \rangle$.

$e_1 = \frac{1}{\|x_u\|}x_u = E^{-\frac{1}{2}}x_u$, dunque $\alpha = E^{-\frac{1}{2}}$ e $\beta = 0$; visto che la parametrizzazione é ortogonale, usando la formula esplicita per la derivata covariante si ricava:

$$\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \rangle = G^{-\frac{1}{2}} \langle \frac{De_1}{dt}, x_v \rangle = G^{\frac{1}{2}} (\Gamma_{11}^2 E^{-\frac{1}{2}} u' + \Gamma_{12}^2 E^{-\frac{1}{2}} v').$$

Ma $\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}$ e $\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}$, dunque:

$$\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \rangle = G^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{E_v}{2G} E^{-\frac{1}{2}} u' + \frac{G_u}{2G} E^{-\frac{1}{2}} v' \right) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u').$$

Definizione 2.6.4. $\gamma : I \rightarrow S$ si dice **geodetica** se $\frac{D\gamma'}{dt} = 0 \forall t \in I$ o, equivalentemente, se $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}(S) \forall t \in I$, cioé $\gamma''(t) = \lambda(t)N(t)$.

Osservazioni. 1. γ geodetica $\Rightarrow \gamma'$ parallelo $\Rightarrow \|\gamma'\|$ costante, cioé la velocità delle geodetiche ha modulo costante.

2. Dati $p \in S$ e $v_0 \in T_p(S)$, esiste una geodetica $\gamma : (-a, b) \rightarrow S$, $a, b > 0$ tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v_0$ ed é unica nel senso che ne esiste una sola massimale (cioé definita in un intervallo massimale, che può non essere $(-a, b)$).

Infatti, in coordinate locali $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ é geodetica $\iff \gamma' = u'x_u + v'x_v$ é parallelo \iff posto $\alpha = u'$, $\beta = v'$, si ha:

$$\begin{cases} u'' = -\Gamma_{11}^1 (u')^2 - 2\Gamma_{12}^1 u'v' - \Gamma_{22}^1 (v')^2 \\ v'' = -\Gamma_{11}^2 (u')^2 - 2\Gamma_{12}^2 u'v' - \Gamma_{22}^2 (v')^2 \end{cases}$$

3. Se $f : S \rightarrow S'$ é un'isometria (locale) e γ é una geodetica, lo é anche $f \circ \gamma$.

Infatti:

$$\frac{D(f \circ \gamma)'(t)}{dt} = df_{\gamma(t)} \left(\frac{D\gamma'(t)}{dt} \right) = 0,$$

in quanto df é un'isometria lineare.

Esempi. 1. Se $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ é il piano, e $\gamma : I \rightarrow S$ é una curva, allora le derivate successive $\gamma^{(n)}(t)$ stanno nel tangente $T_{\gamma(t)}(S)$, che é S stessa. In particolare $\gamma''(t) \in T_{\gamma(t)}(S)$, per cui $\frac{D\gamma'}{dt} = \gamma''$.

Perció γ é una geodetica $\iff \gamma'' = 0 \iff \gamma'(t) = v$ costante, cioè $\gamma(t) = p + tv$ (sono le rette a velocità costante).

2. Se $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ cilindro, sappiamo che $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ tale che $f(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ é un'isometria locale. Dunque $f(p + tv)$ é una geodetica $\forall p, v$.

Se $p = (p_1, p_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, allora $f(p + tv) = f(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2) = (\cos(p_1 + tv_1), \sin(p_1 + tv_1), p_2 + tv_2)$ é un'elica circolare (anche degenerare in una retta o in una circonferenza).

Queste sono tutte e sole le geodetiche di S , in quanto per ogni punto e per ogni direzione passa una tale geodetica (e ce ne deve essere esattamente una).

3. Sulla sfera \mathbb{S}^2 , le geodetiche sono parametrizzazioni a velocità costante di cerchi massimi, cioè intersezioni di \mathbb{S}^2 con piani passanti per l'origine.

Infatti, se γ é una tale curva PLA, si ha $\|\gamma''(t)\| = k_\gamma(t) = 1$; ma $dN = \text{Id}$, quindi $k_n(\gamma) \equiv 1$, per cui la componente normale di $\gamma''(t)$ ha norma 1, dunque γ'' ha solo componente normale, cioè $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$.

Le altre curve su \mathbb{S}^2 non sono geodetiche perché per ogni punto e per ogni direzione passa un cerchio massimo (oppure perché le altre curve hanno componente normale di norma < 1).

Proposizione 2.6.4. $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie chiusa. Allora le geodetiche si estendono su tutto \mathbb{R} , cioè l'intervallo massimale di esistenza I della geodetica é \mathbb{R} .

Dimostrazione. Se per assurdo $\sup I = T < +\infty$, sia $t_0 < T$ e $t \in (t_0, T)$. Sappiamo che:

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \int_{t_0}^t \gamma'(s) ds$$

$\forall t \in (t_0, T)$, dunque passando al limite $\gamma(T) = \gamma(t_0) + \int_{t_0}^T \gamma'(s) ds$, in quanto $\|\gamma'(s)\|$ é costante e $\gamma(T) \in S$ per chiusura; ma allora posso estendere γ in un intorno di T , assurdo. \square

Esempio (Geodetiche su superfici di rotazione). Sia S una superficie di rotazione parametrizzata da:

$$x(u, v) = (f(v) \cos(u), f(v) \sin(u), g(v)),$$

con $f(v) > 0$ e (f, g) curva regolare. La prima forma fondamentale é:

$$I = \begin{pmatrix} f(v)^2 & 0 \\ 0 & (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \end{pmatrix},$$

quindi:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E} = 0 \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{F_u - E_v}{2G} = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E} = \frac{f'}{f} \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G} = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{F_v - G_u}{2E} = 0 \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G} = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} \end{cases}$$

Sia $\gamma(s) = x(u(s), v(s))$ una curva su S ; essa é una geodetica \iff :

$$\begin{cases} 2u'v' \frac{f'}{f} + u'' = 0 \\ -(u')^2 \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} + (v')^2 \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} + v'' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (f^2 u')' = 0 \\ ((f')^2 + (g')^2)(v')^2 + f^2(u')^2 = \text{costante} \end{cases}$$

(in quanto presa la l'ultima relazione, nella quale é stato sostituito $\frac{c^2}{f}$ a u' , e derivata, si ottiene la seconda relazione del primo sistema) cioè una tale curva γ é una geodetica \iff é PLA (a meno di riscalare) e la quantità $f^2 u'$ rimane costante.

Da questo si ricava subito che i meridiani percorsi a velocità costante sono geodetiche, in quanto u costante $\Rightarrow u' = 0$ (si poteva anche ragionare per simmetria, in quanto dati $p \in S$ e $v_0 \in T_p(S)$, deve esistere un'unica geodetica per p con tale velocità e quindi essa deve essere invariante per riflessione rispetto al piano per l'asse di simmetria e v_0 , altrimenti ne esisterebbero due distinte con lo stesso tangente in p , da cui la geodetica deve stare su tale piano); invece non tutti i paralleli a velocità costante sono geodetiche, ma solo quelli per cui $f' = 0$, in quanto $v' = 0$, e dunque $u' = \text{cost} \neq 0$ (altrimenti se u e v fossero costanti la curva starebbe ferma).

Infine, se una curva $\gamma = x(u(s), v(s))$ PLA forma un angolo θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ con il parallelo corrispondente, si ha:

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle x_u, \gamma' \rangle|}{\|x_u\| \|\gamma'\|} = \frac{|\langle x_u, x_u u' + x_v v' \rangle|}{\|x_u\|} = |u'| \|x_u\| = f |u'|,$$

quindi γ é una geodetica $\iff (f^2 u')' = 0 \iff f \cos(\theta) = \text{cost} \iff R \cos(\theta) = \text{cost}$, dove R é la distanza dall'asse z (quest'ultima relazione é nota come **relazione di Clairaut**).

Per le geodetiche non meridiani né paralleli, vale infine il risultato:

Proposizione 2.6.5. *Sia S una superficie di rotazione. Se γ é una geodetica PLA su S ma non é né un meridiano né un parallelo, allora si può scrivere v in funzione di u , cioè $v = v(u)$.*

Dimostrazione. La curva é PLA, quindi:

$$((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + f^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 1.$$

Visto che γ non é un meridiano, allora $\frac{du}{ds} \neq 0$; inoltre sappiamo che $f^2 u' = c$ é costante. Se ne ricava:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{du}\right)^2 &= ((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + f^2 \Rightarrow \frac{1}{(u')^2} = ((f')^2 + (g')^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + f^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{f^2}{c^2} \frac{f^2 - c^2}{(f')^2 + (g')^2} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \pm \frac{f}{c} \sqrt{\frac{f^2 - c^2}{(f')^2 + (g')^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v(u) = \pm \frac{1}{c} \int f \sqrt{\frac{f^2 - c^2}{(f')^2 + (g')^2}} + \text{cost.} \end{aligned}$$

□

Osservazione. Se γ é una geodetica come sopra, e $\frac{dv}{du} = 0$, allora v é un massimo o un minimo locale. Infatti in tal caso $\theta = 0$ e dunque $\cos(\theta) = 1$, quindi dalla relazione di Clairaut segue che R é minimo fra i punti del supporto della curva. Ma per unicitá delle geodetiche, il parallelo tangente a γ nel punto non può essere una geodetica, quindi $f' \neq 0$. Ma questo significa che dall'altra parte del parallelo, R continua a scendere, quindi la geodetica γ deve rimanere dalla stessa parte rispetto al parallelo per minimalitá di R ristretta ai punti della curva.

Esempio (Geodetiche sull'iperboloide). Consideriamo l'iperboloide $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Osserviamo subito che l'unico parallelo geodetico é quello in corrispondenza di $z = 0$, in quanto l'unico punto critico di f é quello.

Sia $p \in S$ nel semispazio $z > 0$ e consideriamo la geodetica uscente da p con angolo θ verso il basso rispetto al parallelo in p . Allora:

- se $R \cos(\theta) = 1$, tale geodetica spiraleggia e si avvicina a $C = S \cap \{z = 0\}$, cioè $v \rightarrow 0$ e $u \rightarrow \infty$;
- se $R \cos(\theta) < 1$, tale geodetica taglia trasversalmente C e si allontana da esso, cioè $v \rightarrow -\infty$;
- se $R \cos(\theta) > 1$, tale geodetica incontra tangente un parallelo sopra C e torna in su allontanandosi da esso, cioè $v \rightarrow +\infty$.

Vediamo separatamente i casi:

- Sappiamo che la geodetica é definita su tutto \mathbb{R} ; dalla relazione $R \cos(\theta) = 1$ e dalla ovvia disuguaglianza $R \geq 1$ si ottiene che $\theta(s)$ non si annulla mai e che la geodetica non passa per C : se una delle due situazioni si verificasse, si avrebbe che la geodetica sarebbe tangente a C , assurdo per unicitá della geodetica. Dunque R e θ decrescono e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta(s) = \theta_0 \geq 0$; se $\theta_0 > 0$, si avrebbe che la geodetica scenderebbe costantemente di una certa quantitá ad ogni intervallo di tempo, quindi andrebbe verso $v \rightarrow -\infty$ e passerebbe per C , assurdo. Si conclude che $\theta \rightarrow 0$ e quindi $R \rightarrow 1$, cioè la geodetica é costretta a spiraleggiare intorno a C .
- Se $R \cos(\theta) < 1$, allora dalla disuguaglianza $R \geq 1$ si ha che θ é sempre strettamente positivo; quindi la geodetica taglia C e da quel punto é costretta ad andare verso $v \rightarrow -\infty$, in quanto R (e quindi θ) aumenta.
- Se $R \cos(\theta) = c > 1$, la geodetica arriva tangente al parallelo di raggio $R = \frac{c}{\cos(\theta)}$ e da quel punto é costretta a risalire perché $\cos(\theta) \leq 1$; aumentando R , anche θ aumenta e la geodetica va verso $v \rightarrow +\infty$.

Enunciamo un teorema che ci serve per mostrare il prossimo esempio:

Teorema 2.6.6. *S superficie. Se una geodetica spiraleggia intorno a una curva, quest'ultima é una geodetica.*

Esempio (Geodetiche sul paraboloido). $S = \{z = x^2 + y^2\}$ paraboloido; $f(v) = v$ e $g(v) = v^2$. É evidente che non ci sono paralleli geodetici e che le geodetiche passanti per l'origine sono esattamente i meridiani (per unicitá delle geodetiche). Voglio vedere che tutte le altre geodetiche si autointersecano infinite volte.

A meno di spostarmi in un intorno, posso supporre che la geodetica γ formi un angolo $\theta > 0$ verso il basso con il parallelo corrispondente (i punti con $\theta = 0$ sono un discreto); dunque $R \cos(\theta) = c > 0$. Ma allora $R(s) > c$ e perciò la geodetica non si può avvicinare troppo all'origine; $\theta(s)$ é decrescente, quindi é costretto (visto che la geodetica non può scendere arbitrariamente) a valere 0 in un punto s_0 finito (non può spiraleggiare intorno a un parallelo perché non é una geodetica).

Osserviamo a questo punto che per unicitá della geodetica il piano contenente l'asse z e s_0 é piano di simmetria della geodetica, quindi se mostriamo che $u(s) \rightarrow +\infty$, avremmo che la geodetica si autointersecherebbe infinite volte (per simmetria della geodetica prima e dopo s_0); $u(s)$ cresce (altrimenti la curva tornerebbe indietro e passerebbe tangente a un meridiano, assurdo), quindi avrà un certo limite $u_0 \in \mathbb{R} \cup +\infty$. Visto che $\frac{dv}{du} \neq 0$ fuori da s_0 (in quanto la geodetica dopo s_0 va verso $v \rightarrow +\infty$ perché R aumenta):

$$\frac{du}{dv} = \frac{c}{f} \sqrt{\frac{(f')^2 + (g')^2}{f^2 - c^2}} \Rightarrow u(v) = c \int \frac{1}{f} \sqrt{\frac{(f')^2 + (g')^2}{f^2 - c^2}} dv = c \int \frac{1}{v} \sqrt{\frac{1 + 4v^2}{v^2 - c^2}} dv \rightarrow +\infty,$$

ció la tesi.

Esempio (Geodetiche sul toro). Sia T il toro parametrizzato da $x(u, v) = ((r \cos(v) + a) \cos(u), (r \cos(v) + a) \sin(u), r \sin(v))$. Allora gli unici paralleli geodetici sono $\{v = 0\}$ e $\{v = \pi\}$, cioè il parallelo massimo e quello minimo. Inoltre, se una geodetica passa tangente a un parallelo $\{v = v_0\}$, per la relazione di Clairaut si ha che R è minimo in quel punto (e vale R_0), dunque la geodetica deve stare nella parte di toro $\{R \geq R_0\}$, cioè $\{|v| \leq v_0\}$.

Queste geodetiche tagliano il parallelo $\{v = 0\}$ con un angolo tale che $\cos(\theta) = \frac{R_0}{a+r} > \frac{a-r}{a+r}$, cioè $\theta < \arccos\left(\frac{a-r}{a+r}\right) =: \theta^*$.

Se invece una geodetica taglia il parallelo geodetico $\{v = 0\}$ con un angolo $\theta > \theta^*$, dalla relazione di Clairaut segue che θ non si annulla mai e che dunque la geodetica arriva a tagliare trasversalmente il parallelo $\{v = \pi\}$.

Se infine una geodetica taglia il parallelo $\{v = 0\}$ con un angolo $\theta = \theta^*$, essa è costretta a spiraleggiare intorno all'altro parallelo geodetico $\{v = \pi\}$, in quanto non può toccarlo (altrimenti dalla relazione di Clairaut lo toccherebbe in modo tangente).

Dimostriamo come ultimo esempio una proposizione in cui si applica direttamente la teoria fatta sulle geodetiche:

Proposizione 2.6.7. *Le isometrie di \mathbb{S}^2 sono tutte e sole quelle indotte da isometrie di \mathbb{R}^3 , cioè $\text{Isom}(\mathbb{S}^2) = \text{O}(3)$.*

Dimostrazione. Se $f \in \text{O}(3)$, allora $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ (in quanto mantiene la norma) è un diffeomorfismo. Se $f(v) = w$, f manda il tangente a v , cioè v^\perp , nel tangente a w , cioè w^\perp , perché conserva il prodotto scalare; inoltre $df_v : v^\perp \rightarrow w^\perp$ è un'isometria perché $df_v = f|_{v^\perp}$ in quanto f è lineare.

Viceversa, un'isometria f di \mathbb{S}^2 manda geodetiche in geodetiche, quindi manda cerchi massimi in cerchi massimi; a meno di isometrie di \mathbb{R}^3 , posso supporre che $f(N) = N$ e che $df_N = \text{id}$. Vediamo che $f = \text{id}$.

Dato $v \in T_N(\mathbb{S}^2)$, esiste un'unica geodetica che parte da N con tale velocità iniziale; tramite f , questa geodetica deve andare in se stessa per unicità della geodetica passante per $f(N) = N$ con velocità $f(v) = v$. Ripetendo questo ragionamento per tutti i vettori nel tangente $T_N(\mathbb{S}^2)$, segue la tesi perché i cerchi massimi ricoprono la sfera. \square

In modo analogo si mostra:

Proposizione 2.6.8. *Se T è il toro, allora $\text{Isom}(T) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array} \right) \mid A \in \text{O}(2) \right\}$*

D'ora in poi assumeremo S orientata da N .

Data $\gamma : I \rightarrow S$ PLA e $v \in \mathfrak{T}(\gamma)$, $\|v(t)\| = 1$, osserviamo che una base ortonormale positiva di $T_{\gamma(t)}(S)$ è $\{v(t), \bar{v}(t) = N(\gamma(t)) \wedge v(t)\}$.

Definizione 2.6.5. Il **valore algebrico** della derivata covariante di v è il numero $\left[\frac{Dv(t)}{dt} \right] = \left\langle \frac{Dv(t)}{dt}, \bar{v}(t) \right\rangle \in \mathbb{R}$.

Osservazione. Visto che $\|v(t)\| = 1$, si ha:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle v(t), v(t) \rangle = 2 \left\langle \frac{Dv}{dt}, v \right\rangle,$$

quindi $\frac{Dv}{dt}$ è tutta diretta verso \bar{v} , cioè:

$$\frac{Dv}{dt} = \left[\frac{Dv}{dt} \right] \bar{v}.$$

Definizione 2.6.6. Visto che γ é PLA, γ' é unitario e dunque ha senso parlare del valore algebrico di $\frac{D\gamma'}{dt}$; esso si chiama $k_g(\gamma)$, cioè **curvatura geodetica** di γ .

Osservazione. γ é geodetica $\iff k_g = 0$; inoltre:

$$k_\gamma^2 = \|\gamma''\|^2 = |\langle \gamma'', N \rangle|^2 + \left\| \frac{D\gamma'}{dt} \right\|^2 = k_n(\gamma)^2 + k_g(\gamma)^2.$$

Lemma 2.6.9. $X \in \mathfrak{X}(S)$, $p \in S$ con $X(p) \neq 0$. Allora esiste un integrale primo locale $f_x : U \rightarrow \mathbb{R}$, dove $p \in U$ aperto.

Dimostrazione. Sia $x : \Omega \rightarrow U$ una parametrizzazione locale qualsiasi; in coordinate:

$$X(u, v) = a(u, v)x_u + b(u, v)x_v.$$

Dato $q \in U$, dico che $\gamma_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ é una **linea integrale** di X se:

$$\begin{cases} \gamma'_q(t) = X(\gamma_q(t)) \\ \gamma_q(0) = q \end{cases}$$

Se $\gamma_q(t) = x(u(t), v(t))$, per lineare indipendenza di x_u, x_v la condizione precedente diventa:

$$\begin{cases} u'(t) = a(u(t), v(t)) \\ v'(t) = b(u(t), v(t)) \\ x(u(0), v(0)) = q \end{cases}$$

dunque, essendo il precedente un sistema lineare del primo ordine, a meno di restringere U esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\forall q \in U \exists! \gamma_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ linea integrale per X e la mappa:

$$\begin{array}{ccc} (-\varepsilon, \varepsilon) \times U & \rightarrow & S \\ (t, q) & \mapsto & \gamma_q(t) \end{array}$$

é C^∞ .

Sia ora $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ una curva con $\alpha(0) = p$ tale che $\{X(p), \alpha'(0)\}$ é base di $T_p(S)$. Sia inoltre:

$$\begin{array}{ccc} \psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & S \\ (s, t) & \longmapsto & \gamma_{\alpha(t)}(s) \end{array}$$

ψ é C^∞ e:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial s}(0, 0) = \left[\frac{d}{ds} (\gamma_{\alpha(0)}(s)) \right]_{s=0} = \gamma'_p(0) = X(p) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, 0) = \left[\frac{d}{dt} (\gamma_{\alpha(t)}(0)) \right]_{t=0} = \left[\frac{d\alpha(t)}{dt} \right]_{t=0} = \alpha'(0) \end{cases}$$

formano una base di $T_p(S)$, per cui per il teorema di invertibilitá locale, a meno di restringere ε , ψ é una parametrizzazione locale.

Se $(s, t) = \psi^{-1}$, pongo $f_x = t$; osservo che:

$$\begin{cases} f_x(q) = f_x(q') \iff q, q' \text{ appartengono alla stessa linea integrale locale} \\ \text{Ker}((df_x)_p) = \text{Span}(X(p)) \end{cases}$$

ció f_x é un integrale primo, come voluto. □

Teorema 2.6.10. $p \in S$. Esiste una parametrizzazione $x : \Omega \rightarrow U \ni p$ ortogonale, cioè tale che $x_u \perp x_v$ in ogni punto di Ω , ovvero $F \equiv 0$.

Dimostrazione. Dato $p \in S$, costruisco un frame locale ortogonale su U prendendo un frame indotto da una parametrizzazione locale e lo ortogonalizzo con Gram-Schmidt; dico che tale frame é indotto (a meno di costanti moltiplicative) da una parametrizzazione φ , che mi darebbe la tesi.

Chiamo il frame costruito $(X, Y) \in \mathfrak{T}(U)^2$; per il lemma ho due integrali primi f_x, f_y associati (a meno di restringere U). Pongo $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta(q) = (f_x(q), f_y(q))$. $\text{Ker}(d\theta_p) = \text{Ker}((df_x)_p) \cap \text{Ker}((df_y)_p) = \text{Span}(X(p)) \cap \text{Span}(Y(p)) = \{0\}$, quindi a meno di restringere U , $\theta : U \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é un diffeomorfismo.

Per costruzione, $\theta(\text{linea di flusso di } X) = \text{linea verticale di } \mathbb{R}^2$, $\theta(\text{linea di flusso di } Y) = \text{linea orizzontale di } \mathbb{R}^2$; quindi affermo che $\varphi = \theta^{-1}$ é la parametrizzazione cercata; effettivamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \theta^{-1}}{\partial u} = \underbrace{\lambda(u, v)}_{\in \mathbb{R}} Y(\varphi(u, v)) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \theta^{-1}}{\partial v} = \underbrace{\mu(u, v)}_{\in \mathbb{R}} X(\varphi(u, v)) \end{cases}$$

□

Osservazione. Non si può chiedere sia $x_u \perp x_v$ sia $\|x_u\| = \|x_v\| = 1$, infatti in questo caso U sarebbe localmente isometrico a \mathbb{R}^2 e in particolare $k \equiv 0$ (cosa che in generale é decisamente falsa).

$\gamma : I \rightarrow S$ curva, $v, w \in \mathfrak{T}(\gamma)$, con $\|v\| = \|w\| = 1$. Sia S orientata da $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$; visto che $\{v(t), \bar{v}(t)\}$ é una base ortonormale positiva di $T_{\gamma(t)}(S)$, si ha $\forall t$:

$$w(t) = \langle w(t), v(t) \rangle v(t) + \langle w(t), \bar{v}(t) \rangle \bar{v}(t).$$

La mappa $f : t \mapsto (\langle w(t), v(t) \rangle, \langle w(t), \bar{v}(t) \rangle) \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ crea un diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \varphi & \downarrow e = (\cos(x), \sin(x)) \\ I & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

con I, \mathbb{R} semplicemente connessi, quindi per la teoria dei rivestimenti esiste un sollevamento φ (unico a meno di traslazioni di 2π) tale che $\langle w(t), v(t) \rangle = \cos(\varphi(t))$ e $\langle w(t), \bar{v}(t) \rangle = \sin(\varphi(t))$. Tale φ si chiama **determinazione dell'angolo** da v a w .

Lemma 2.6.11. *Nella situazione precedente, vale la relazione:*

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left[\frac{Dv}{dt} \right] + \varphi'.$$

Dimostrazione. Per costruzione, $w = \cos(\varphi)v + \sin(\varphi)\bar{v}$, mentre $\bar{w} = N \wedge w = \cos(\varphi)N \wedge v + \sin(\varphi)N \wedge \bar{v} = \cos(\varphi)\bar{v} - \sin(\varphi)v$; quindi $w' = -\varphi' \sin(\varphi)v + \cos(\varphi)v' + \varphi' \cos(\varphi)\bar{v} + \sin(\varphi)\bar{v}'$, ed usando che $\langle \bar{v}, \bar{v}' \rangle = 0$ (in quanto $\|\bar{v}\| = 1$) e che $\langle v', \bar{v} \rangle + \langle v, \bar{v}' \rangle = 0$ (in quanto $\langle v, \bar{v} \rangle = 0$), si ottiene:

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \langle w', \bar{w} \rangle = \cos^2(\varphi)\langle \bar{v}, v' \rangle + \varphi' \cos^2(\varphi) + \varphi' \sin^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\langle v, \bar{v}' \rangle = \varphi' + \langle v', \bar{v} \rangle = \left[\frac{Dv}{dt} \right] + \varphi'.$$

□

Definizione 2.6.7. $\gamma : I \rightarrow S$ curva si dice **curva semplice, chiusa, regolare a tratti, senza cuspidi** se valgono le condizioni:

1. $I = [t_0, t_k]$, $t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k$ tali che $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é una curva regolare PLA;
2. $\gamma(t_0) = \gamma(t_k)$ e $\gamma|_{[t_0, t_k]}$ é iniettiva;
3. $\lim_{t \rightarrow t_i^-} \gamma'(t) \neq -\lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma'(t)$.

In questa situazione, definiamo l'**angolo esterno** θ_i come l'angolo $\in (-\pi, \pi)$ da $\lim_{t \rightarrow t_i^-} \gamma'(t)$ a $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma'(t)$.

Definizione 2.6.8. $R \subseteq S$ si dice **regione** se é compatta con parte interna non vuota e ∂R é l'immagine di una curva semplice chiusa regolare a tratti senza cuspidi.

Una regione R si dice **semplice** se $R \cong \mathbb{D}^2$ e $R \subseteq U$ dominio di una carta ortogonale.

Osservazione. Se S é orientata, anche R lo é ed ogni componente di ∂R eredita un'orientazione (al di fuori dei punti angolosi) per cui $v \in T_p(\partial R)$ é positivo se $\{w, v\}$ é una base positiva $\forall w \in T_p(S) \setminus C_p(R)$ (cioé $\forall w$ che "punta fuori" R).

É facile vedere che é una buona definizione.

Teorema 2.6.12 (delle tangenti rotanti). *R regione semplice, S orientata, $x : \Omega \rightarrow U \supseteq R$ parametrizzazione ortogonale intorno a R , $\gamma : [t_0, t_k] \rightarrow U$ parametrizzazione di ∂R , θ_i angoli esterni nei punti t_i , φ_i determinazione dell'angolo da x_u a γ'_i , con $\gamma_i = \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Allora:*

$$\sum_{i=0}^{k-1} (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i = 2\pi.$$

Idea della dimostrazione. Ci possiamo ricondurre a una curva liscia "allisciando" i punti angolosi; in questo modo non contiamo piú l'angolo θ_i ma aggiungiamo una quantità equivalente nell'altra sommatoria (in quanto nel punto "allisciato" la velocità ruota di un angolo θ_i).

Preso dunque γ liscia, visto che $R \cong \mathbb{D}^2$, posso deformare γ con un'omotopia di curve semplici chiuse lisce a una circonferenza "piccola a piacere". Detta $\gamma_t : [0, l_t] \rightarrow U$ la curva interpolante all'istante $t \in [0, 1]$, si ha:

$$\int_0^{l_t} \varphi'(s) ds = 2k_t\pi,$$

dove $k_t \in \mathbb{Z}$ é il numero di "giri" in senso orario che fa la curva γ_t . Ma per un ragionamento di continuità, essendo \mathbb{Z} un discreto si deve avere $k_t \equiv k \in \mathbb{Z}$.

A questo punto basta osservare che per una circonferenza interamente contenuta in U vale $k = 1$. \square

Teorema 2.6.13 (Gauss-Bonnet locale). *Sia $R \subseteq S$ una regione semplice, S orientata. Allora:*

$$\int_R k dA + \int_{\partial R} k_g(s) ds + \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i = 2\pi,$$

dove ∂R é parametrizzato da $\gamma : [t_0, t_k] \rightarrow U$ PLA e $\int_R k dA = \int_{x^{-1}(R)} (k \circ x) \sqrt{EG - F^2} dudv$, con x parametrizzazione intorno a R (la definizione é ben posta in quanto la quantità $\sqrt{EG - F^2}$ si modifica esattamente come il determinante del Jacobiano del cambiamento di carte).

Dimostrazione. Fisso una parametrizzazione ortogonale $x : \Omega \rightarrow U \supseteq R$ intorno a R e chiamo $e_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|}$. Se $\gamma = x(u(t), v(t))$ parametrizza ∂R , chiamo e_1 anche il campo $e_1 \circ \gamma_i \in \mathfrak{X}(\gamma_i) \forall i$, con $\gamma_i = \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Sia φ_i una determinazione dell'angolo da e_1 a γ'_i . Allora:

$$k_{g,i}(s) = \left[\frac{D\gamma'_i}{ds} \right] = \left[\frac{De_1}{ds} \right] + \varphi'_i = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') + \varphi'_i,$$

dunque sommando su tutti gli i e integrando:

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} k_g(s) ds &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') + \varphi'_i \right) ds = \\ &= \int_{x^{-1}(R)} \left(\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v \right) dudv + \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) \end{aligned}$$

per il teorema della divergenza in due dimensioni (in quanto $(u', v') \in \mathbb{S}^1$); usando a questo punto un calcolo fatto in precedenza si arriva all'uguaglianza:

$$\int_{\partial R} k_g(s) ds = - \underbrace{\int_{x^{-1}(R)} k\sqrt{EG} dudv}_{=\int_R k dA} + \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)).$$

Applicando il teorema delle tangenti rotanti si giunge alla tesi. \square

Osservazione (Interpretazione geometrica della curvatura). Sia $p \in S$ e sia R una regione semplice piccola intorno a p con ∂R parametrizzato da $\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial R$ liscia. Preso $v_0 \in T_p(S)$, $\|v_0\| = 1$, sia x una parametrizzazione locale intorno a p , con $v_0 = \frac{x_u(p)}{\|x_u(p)\|}$. Se $v(t)$ é il trasporto parallelo di v_0 lungo γ , allora si ha:

$$0 = \left[\frac{Dv(t)}{dt} \right] = \left[\frac{D \frac{x_u}{\|x_u\|}}{dt} \right] + \varphi',$$

con φ determinazione dell'angolo fra $\frac{x_u}{\|x_u\|}$ e $v(t)$, da cui integrando:

$$0 = - \int_R k + \varphi(1) - \varphi(0) \quad \Rightarrow \quad \varphi(1) - \varphi(0) = \int_R k.$$

La stessa uguaglianza può essere scritta in modo locale:

$$k(p) = \lim_{A(R) \rightarrow 0} \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{A(R)},$$

dove $A(R)$ indica l'area della regione R .

Definizione 2.6.9. Un **triangolo** é una regione omeomorfa a \mathbb{D}^2 con esattamente 3 **vertici**, cioè 3 punti angolosi al bordo.

Se R é una regione, una **triangolazione** di R é una suddivisione $R = \bigcup_{i=1}^F T_i$ di R in triangoli, tale che:

1. $T_i^\circ \cap T_j^\circ = \emptyset \quad \forall i \neq j$;
2. $T_i \cap T_j$ é o un vertice di entrambi o un lato di entrambi.

Se F é il numero dei triangoli (detti **facce**), E quello dei lati, V quello dei vertici, allora la **caratteristica di Eulero** di una triangolazione T é:

$$\chi(T) = F - E + V.$$

Definizione 2.6.10. Vedremo (all'interno della dimostrazione di Gauss-Bonnet), che il numero $\chi(T)$ non dipende dalla triangolazione T di R scelta, quindi possiamo (ben) definire $\chi(R) := \chi(T)$.

Teorema 2.6.14. *Ogni regione ammette una triangolazione con triangoli semplici (cioé contenuti in carte ortogonali)*

Idea della dimostrazione. Per compattezza della regione, posso trovare un numero di Lebesgue e ricoprire la regione con carte ortogonali abbastanza piccole. \square

Teorema 2.6.15 (Gauss-Bonnet). *$R \subseteq S$ regione, S orientata. Allora:*

$$\int_R k + \int_{\partial R} k_g(s) + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi\chi(R),$$

dove i θ_i sono gli angoli esterni alla regione nei punti angolosi.

Dimostrazione. Vogliamo vedere che la tesi vale sostituendo $\chi(T)$ a $\chi(R)$, per ogni triangolazione T di R ; in questo modo avremmo dimostrato anche l'indipendenza della caratteristica di Eulero dalla triangolazione.

Osserviamo che ci possiamo ridurre a una triangolazione semplice, suddividendo baricentricamente la triangolazione data (cioé dividendo ogni triangolo in 6 piú piccoli tracciando le mediane) e ripetendo la divisione (ad un certo punto i triangoli saranno abbastanza piccoli da essere contenuti in carte ortogonali); in questo modo é facile verificare che la caratteristica di Eulero della triangolazione non cambia. Sia dunque T una triangolazione semplice e per ogni triangolo T_i , chiamo $\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i$ i suoi angoli esterni e $\varphi_j^i = \pi - \theta_j^i$ i corrispondenti angoli interni. $\forall i$ vale:

$$\int_{T_i} k + \int_{\partial T_i} k_g + \sum_{j=1}^3 \theta_j^i = 2\pi,$$

quindi sommando su tutti gli i e sostituendo i θ_j^i con i φ_j^i :

$$\int_R k + \int_{\partial R} k_g + 3\pi F - \sum_{i,j} \varphi_j^i = 2\pi F,$$

dove ho usato che ogni lato di T non su ∂R appartiene esattamente a due T_i , che inducono su di esso orientazioni opposte (perché k_γ cambia segno).

Chiamo V_i, E_i, V_e, E_e il numero di vertici e lati interni ed esterni (cioé di bordo) e V_{ec}, V_{et} i vertici di bordo che sono rispettivamente vertici di ∂R e vertici di T non di ∂R . Per un double-counting sui lati, vale $3F = 2E_i + E_e$ e:

$$\sum_{i,j} \varphi_j^i = 2\pi V_i + \pi V_{et} + \pi V_{ec} - \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi V_i + \pi V_e - \sum_{i=1}^k \theta_i,$$

dunque:

$$3\pi F - \sum_{i,j} \varphi_j^i = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_{i=1}^k \theta_i.$$

Ma $E_e = V_e$, quindi:

$$3\pi F - \sum_{i,j} \varphi_j^i = 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - 2\pi V_e + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi E - 2\pi V + \sum_{i=1}^k \theta_i.$$

Si conclude:

$$\int_R k + \int_{\partial R} k_g + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(T).$$

\square

Corollario 2.6.16. *Se S é compatta, orientabile e senza bordo, allora:*

$$\int_S k = 2\pi\chi(S).$$

Osservazione. $\chi(S)$ é invariante per diffeomorfismo, perché un diffeomorfismo porta triangolazioni in triangolazioni; dunque la quantità $\int_S k$ é invariante per diffeomorfismo.

Esempio. Dalla figura notiamo che la caratteristica di Eulero del toro é $F - E + V = 32 - 48 + 16 = 0$.

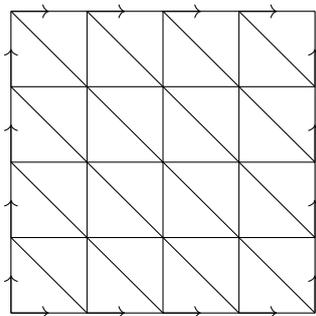


Figura 18: Triangolazione del toro

Esempio. Vedendo la sfera circoscritta ad un icosaedro, osserviamo che essi hanno la stessa caratteristica di Eulero, perché la sfera ammette una triangolazione data da uno “smussamento” dei triangoli dell’icosaedro; ne ricaviamo che $\chi(\mathbb{S}^2) = 12 - 30 + 20 = 2$.

La caratteristica di Eulero per le superfici orientabili é completamente determinata dai seguenti due teoremi, che non dimostriamo:

Teorema 2.6.17 (di classificazione delle superfici orientabili). *S superficie compatta orientabile. Allora S é diffeomorfa a un g -toro, dove lo 0-toro é la sfera. Il “numero di buchi” g é detto **genere** della superficie.*

Teorema 2.6.18. *La caratteristica di Eulero del g -toro é $\chi(T_g) = 2 - 2g$.*

Corollario 2.6.19. *S superficie compatta orientabile. Allora, se $k \geq 0$ in ogni $p \in S$, S é diffeomorfa a \mathbb{S}^2 .*

Equivalentemente, se $S \not\cong \mathbb{S}^2$, allora $\exists p \in S$ tale che $k(p) < 0$.

Dimostrazione. S é compatta, dunque esiste un punto $p \in S$ ellittico, cioè $k(p) > 0$. Ma allora $2\pi\chi(S) = \int_S k > 0$, in quanto p ha un intorno in cui $k > 0$ per permanenza del segno.

Per il teorema di classificazione delle superfici orientabili, ne deduciamo che $S \cong \mathbb{S}^2$. □

Corollario 2.6.20. *T triangolo su S con lati geodetici e angoli interni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Allora, se $k > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \pi$, mentre se $k < 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi$.*

Dimostrazione. Per il teorema di Gauss-Bonnet:

$$\int_T k + \int_{\partial T} \underbrace{k_g}_{=0} + (\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) = 2\pi\chi(T) = 2\pi,$$

dunque:

$$\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = - \int_T k.$$

□

Osservazione. Se $K \equiv k_0$ costante (come sulla sfera o sulla pseudosfera), allora:

$$\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -k_0 \cdot A(T).$$

Quindi ad esempio sulla sfera (unitaria) vale la relazione:

$$A(T) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi,$$

mentre sulla pseudosfera:

$$A(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

3 Teoria delle varietà

3.1 Varietà senza bordo e varietà a bordo

Proposizione 3.1.1. $f : M \rightarrow N$ varietà differenziabili di dimensione n , M compatta. Allora i valori regolari formano un aperto R in N , e $f|_{f^{-1}(R)} : f^{-1}(R) \rightarrow R$ é un rivestimento. In particolare su ogni componente connessa R_i di R la cardinalità di $f^{-1}(x)$ per $x \in R$ non dipende da x .

Dimostrazione. $y \in N$ valore regolare. $\forall x_i \in f^{-1}(y)$, $\exists U_i = U(x_i)$ tale che $f(U_i) = V_i$ é un aperto di N e $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V_i$ é un diffeomorfismo (in quanto la dimensione delle due varietà é la stessa).

Gli x_i sono un discreto (poiché ognuno ha un intorno che lo separa dagli altri) chiuso, ma M é compatta, quindi $\#\{x_i\} < +\infty$.

Infine, detto V l'aperto:

$$V = \left(\bigcap V_i \right) \setminus f \left(M \setminus \left(\bigcup U_i \right) \right),$$

(é un'intersezione finita di aperti meno l'immagine di un chiuso in un compatto), V é un aperto ben rivestito per costruzione, quindi otteniamo la tesi. \square

Osservazione. L'ipotesi di compattezza su M é necessaria; se infatti $f = \text{id}|_{(a,b)} : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, tutti i valori sono regolari ma f non é un rivestimento (non é neanche surgettiva).

Osservazione. Se M non é compatta, i valori regolari possono non essere un aperto; la figura seguente (dove la successione $\{x_i\}$ é convergente) dá un controesempio.

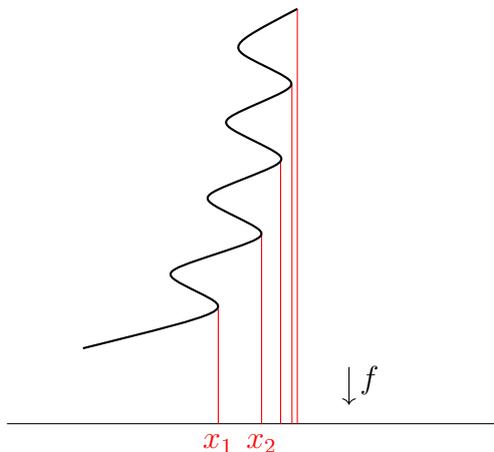


Figura 19: I valori regolari possono non essere un aperto

Nel seguito sia \mathbb{H}^n (o piú semplicemente \mathbb{H} se non c'è ambiguità) $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.1.1. $S \subseteq \mathbb{R}^N$ é una n -varietà differenziabile a bordo se $\forall x \in S \exists U = U(x)$ intorno aperto diffeomorfo a un aperto di \mathbb{H}^n .

I punti di S che vanno a finire (tramite una di queste carte) in $\partial\mathbb{H} = \{x_n = 0\}$ formano il **bordo**, indicato con ∂S .

Osservazione. ∂S é il sottoinsieme di S formato da quegli $x \in S$ tali che $C_x(S) \subsetneq T_x(S)$. Infatti tale proprietà é vera per \mathbb{H} e si mantiene per diffeomorfismo.

Proposizione 3.1.2. Sia S una varietà a bordo. Allora ∂S é una $(n-1)$ -varietà senza bordo.

Dimostrazione. Le carte di S ristrette a ∂S (il bordo finisce nel bordo per l'osservazione precedente) danno carte da ∂S a $\partial\mathbb{H}$, che é una $(n-1)$ -varietà senza bordo. \square

Proposizione 3.1.3. M varietà senza bordo, $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ liscia, $0 \in \mathbb{R}$ valore regolare per g . Allora $S = \{x \in M \mid g(x) \geq 0\}$ é una varietà con bordo e $\partial S = \{x \mid g(x) = 0\}$.

Dimostrazione. $x \in M$ punto regolare. Localmente, in un intorno di x , g é una proiezione su \mathbb{R} :

$$\begin{array}{ccc} U(x) & \xrightarrow{g} & V \subseteq \mathbb{R} \\ \varphi \downarrow \wr & & \wr \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R} \end{array}$$

Localmente, tramite la carta φ , $g(x) \geq 0$ é un semispazio \mathbb{H} , dunque segue la tesi. \square

Esempio. $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ é una n -varietà a bordo, con $\partial \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. Basta infatti applicare la proposizione precedente a $g(x) = 1 - \|x\|^2$.

Teorema 3.1.4. $f : M^{(m)} \rightarrow N^{(n)}$ fra varietà, $m \geq n$, M a bordo, N senza bordo. Se $y \in N$ é valore regolare sia per f che per $f|_{\partial M} : \partial M \rightarrow N$, allora $f^{-1}(y)$ é una $(m - n)$ -varietà a bordo con $\partial f^{-1}(y) = \partial M \cap f^{-1}(y)$.

Dimostrazione. Sia $x \in M$ tale che $f(x) = y$. Se $x \in M^\circ$, la dimostrazione é già stata vista. Sia quindi $x \in \partial M$. Posso supporre $M = \mathbb{H}^m$ (a meno di lavorare in una carta).

Esiste $g : M \subseteq V \rightarrow N$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, che estende f per definizione di mappa C^∞ ; $dg_x = df_x$ e $df_x : \mathbb{R}^m = T_x(\mathbb{H}) \rightarrow T_{f(x)}(N)$ ha rango massimo, quindi x é punto regolare anche per g . A meno di scegliere V piú piccolo, g é regolare su tutto V .

y é valore regolare per g , dunque $g^{-1}(y)$ é una $(m - n)$ -varietà; se $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ é la proiezione tale che $\pi \geq 0$ per $x \in M$, allora se dimostro che x é regolare per $\pi|_{g^{-1}(y)} : g^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$, allora ho la tesi per la proposizione precedente.

$\text{Ker}(d(\pi|_{g^{-1}(y)})) = T_x(g^{-1}(y)) \cap \partial H = \text{Ker}(dg_x) \cap \{x_n = 0\} = \text{Ker}(df_x) \cap \{x_n = 0\} = \text{Ker}(d(f|_{\{x_n=0\}}))$ ha dimensione $m - 1 - n$, ma $g^{-1}(y)$ ha dimensione $m - n$ e \mathbb{R} ha dimensione 1, quindi $d(\pi|_{g^{-1}(y)})$ é surgettivo. \square

Definizione 3.1.2. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ varietà di dimensione k . Si dice che $X \subseteq M$ ha **misura 0** se per ogni carta $\varphi : M \supseteq U \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, l'insieme $\varphi(X \cap U)$ ha misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^k .

Osservazione. Questo non ci permette di definire una misura su M , stiamo solo identificando gli insiemi di misura nulla.

Osservazione. $X \subseteq M$ ha misura nulla $\Rightarrow M \setminus X$ é denso.

Inoltre unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

Teorema 3.1.5 (Lemma di Sard). $f : M \rightarrow N$ fra varietà. Allora l'insieme dei valori critici di f ha misura nulla in N .

Idea della dimostrazione. Dando per buono il caso in cui M e N siano aperti di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^k , data una carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ per N , se $X = \{\text{valori critici di } f\}$, voglio mostrare che $\varphi(X \cap U)$ ha misura nulla in \mathbb{R}^k .

$X \cap U = \{f(p) \mid p \in f^{-1}(U), df_p \text{ non surgettivo}\}$; componendo con φ (che é un diffeomorfismo), mi sono ricondotto al caso $N = \mathbb{R}^k$ (rimpiazzando M con $f^{-1}(U)$). $f^{-1}(U)$ é a base numerabile, quindi lo ricopro con una quantità numerabile di carte W_i ; se ne ricava:

$$X \cap U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{f(p) \mid p \in W_i, df_p \text{ non surgettivo}\}.$$

Applicando il caso classico a $f|_{W_i} : W_i \rightarrow U$, ho che $X \cap U$ é unione numerabile di insiemi a misura nulla, dunque ha misura nulla.

Il caso di varietà a bordo é analogo sostituendo \mathbb{H} a \mathbb{R}^k . \square

Corollario 3.1.6 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni $f \in \mathbb{C}[z]$ non costante ha uno zero in \mathbb{C} .*

Dimostrazione. Identificando $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la funzione f può essere estesa a $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ ponendo $f(\infty) = \infty$. Tale estensione è liscia: fuori dall'infinito essa è semplicemente un polinomio, mentre in un intorno di ∞ si può cambiare carta con $z \mapsto \frac{1}{z}$ e vedere che all'infinito c'è un polo di ordine finito (dunque la funzione converge a ∞ in un intorno di ∞).

Se $z \neq \infty$ è un punto critico di f , allora $f'(z) = 0$; quindi i punti critici sono in numero finito. Allora $R = \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty, \text{valori critici}\}$ è connesso, dunque ho un rivestimento $\tilde{f} : f^{-1}(R) \rightarrow R$ che comporta che la cardinalità delle fibre $|f^{-1}(x)| = c$ è costante.

Visto che f non è costante, $c > 0$ e dunque f è surgettiva (i punti critici stanno nell'immagine di f per continuità di f). \square

Teorema 3.1.7 (Classificazione delle 1-varietà). *M 1-varietà connessa. Allora M è diffeomorfa a una fra \mathbb{S}^1 , $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$.*

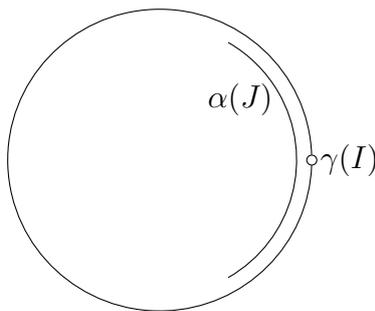
Idea della dimostrazione. L'insieme $\{\gamma : I \rightarrow M \text{ curva PLA iniettiva}\}$ è parzialmente ordinato da $\gamma \preceq \gamma'$ se $I \subseteq I'$ e $\gamma|_I = \gamma'$ (I varia nell'insieme degli intervalli aperti di \mathbb{R}). Questo insieme verifica la proprietà della catena ascendente, per cui posso prenderne un elemento massimale γ .

γ è un'immersione e, poiché $\dim(M) = 1$, è aperta (in quanto la dimensione è la stessa); se I è il dominio di γ , $\gamma(I) \subseteq M$ è aperto.

Se $\gamma(I)$ è anche chiuso, $M = \gamma(I)$ e γ è un diffeomorfismo, per cui $M \cong I \cong (0, 1)$. Altrimenti $\exists x \in M$ con $x \in \overline{\gamma(I)} \setminus \gamma(I)$.

Se $x \in \partial M$, allora I non era limitato e a meno di aggiungere 1 o 2 estremi, ho $M \cong [0, 1)$ o $M \cong [0, 1]$.

Se $x \notin \partial M$, esiste una carta PLA intorno a x ; poiché γ è massimale, la parametrizzazione $\alpha : J \rightarrow M$ intorno a x non può essere usata per estendere γ , dunque esistono punti di γ in entrambe le componenti di $J \setminus \alpha^{-1}(x)$. Con un po' di lavoro si può vedere che $\gamma(I)$ e $\alpha(J)$ sono disposte tipo:



Usando questo fatto si costruisce una mappa ψ ben definita:

$$\begin{array}{ccc} I \sqcup J & \xrightarrow{\gamma \sqcup \alpha} & M \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \frac{I \sqcup J}{\sim} & & \end{array}$$

dove $I \sqcup J$ indica la sovrapposizione di I e J e \sim è la relazione di equivalenza su $I \sqcup J$ di "essere lo stesso punto"; si mostra che $I \sqcup J / \sim$ è diffeomorfo a \mathbb{S}^1 , ma visto che l'immagine di $I \sqcup J / \sim$ in M è aperta e chiusa (perché è compatto), necessariamente si deve avere $M \cong \mathbb{S}^1$. \square

Teorema 3.1.8. *M varietà compatta a bordo. Allora non esiste una retrazione di M su ∂M , cioè $\nexists r : M \rightarrow \partial M$ liscia tale che $r(x) = x \forall x \in \partial M$.*

Dimostrazione. Sia per assurdo $r : M \rightarrow \partial M$ una retrazione. Per il lemma di Sard esiste $x_0 \in \partial M$ regolare per r . Poiché $r|_{\partial M} = \text{id}$, x_0 é regolare anche per $r|_{\partial M}$.

∂M é una $(n-1)$ -varietá senza bordo, per cui $r^{-1}(x_0)$ é una 1-varietá il cui bordo é $r^{-1}(x_0) \cap \partial M = \{x_0\}$, poiché $r|_{\partial M} = \text{id}$.

Visto che M é compatta, $r^{-1}(x_0)$, essendo chiuso, é compatto, dunque ho un numero finito di componenti connesse, ciascuna delle quali é compatta (perché chiusa), per cui é diffeomorfa a \mathbb{S}^1 o a $[0, 1]$. Ma allora ciascuna componente contribuisce con 0 o con 2 punti di bordo, cioè $|\partial r^{-1}(x_0)|$ é pari, assurdo. \square

Corollario 3.1.9 (Teorema del punto fisso di Brower). $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ continua. Allora f ha un punto fisso.

Dimostrazione. Sia come primo caso $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ liscia e supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x \forall x \in \mathbb{D}^n$. Definisco $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ tale che $r(x)$ é l'intersezione fra $\partial \mathbb{D}^n$ e la semiretta da $f(x)$ a x ; esplicitamente si ha $r(x) = f(x) + t(x - f(x))$, con $\|r(x)\| = 1$, cioè:

$$t = \frac{\langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 - \|f(x)\|^2 \|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}.$$

t dipende in modo C^∞ da x , per cui r é C^∞ e chiaramente $r(x) = x \forall \|x\| = 1$. Per il teorema precedente ho la tesi nel caso liscio.

Sia adesso $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ continua. Per Stone-Weierstrass, $\forall \varepsilon > 0$ esiste un polinomio $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $|P(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in \mathbb{D}^n$.

$P(\mathbb{D}^n) \subseteq (1 + \varepsilon)\mathbb{D}^n$, quindi, se $Q(x) = \frac{1}{1+\varepsilon}P(x)$, $Q(\mathbb{D}^n) \subseteq \mathbb{D}^n$ e $|Q(x) - f(x)| < 2\varepsilon \forall x \in \mathbb{D}^n$. Se per assurdo $f(x) \neq x \forall x \in \mathbb{D}^n$, allora la funzione:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^n &\longrightarrow [0, +\infty) \\ x &\longmapsto \|f(x) - x\| \end{aligned}$$

ha minimo $M > 0$, quindi se $\varepsilon = \frac{M}{4}$, trovo $Q : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ tale che $d(Q(x), x) > M - 2\varepsilon > 0$, assurdo per la prima parte della dimostrazione. \square

3.2 Grado fra varietá e sue applicazioni

Definizione 3.2.1. $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. $f, g : X \rightarrow Y$ si dicono (**lisciamente**) **omotope** se esiste un'omotopia liscia F che le collega, cioè $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ liscia tale che $f = F(\bullet, 0)$ e $g = F(\bullet, 1)$.

F si dice **isotopia (liscia)** se é un'omotopia e $f_t = F(\bullet, t) : X \rightarrow Y$ é un diffeomorfismo $\forall t \in [0, 1]$.

Proposizione 3.2.1. Omotopia e isotopia sono relazioni di equivalenza fra mappe $X \rightarrow Y$ lisce.

Dimostrazione. Le proprietá riflessiva e simmetrica sono ovvie. Vediamo la transitivitá.

Se F é omotopia fra f, g e G é omotopia fra g, h , prendo $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tale che $\varphi|_{[0, 1/3]} = 0$, $\varphi|_{[2/3, 1]} = 1$ ed é liscia; cambio $F(x, t)$ con $\bar{F}(x, t) = F(x, \varphi(t))$ e $G(x, t)$ con $\bar{G}(x, t) = G(x, \varphi(t))$. É del tutto evidente che l'incollamento viene liscio. \square

Lemma 3.2.2. $f, g : M \rightarrow N$ omotope fra varietá senza bordo della stessa dimensione, con M compatta. Se $y \in M$ é valore regolare per f e g , allora $|f^{-1}(y)| \equiv |g^{-1}(y)| \pmod{2}$.

Dimostrazione. Sia F omotopia liscia fra f, g . I valori regolari per f, g formano un aperto denso, quindi esiste $U \subseteq N$ aperto connesso di valori regolari per f, g tale che $y \in U$. I valori

critici per F hanno misura nulla, dunque non possono contenere U , perciò esiste $y \in U$ che sia regolare anche per F .

Ma allora $F^{-1}(y)$ é una varietà di dimensione $n+1-n=1$ (in quanto y é regolare sia per F , sia per $F|_{\partial(M \times [0,1])} = (f, g)$) con bordo, e $\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial(M \times [0,1]) = F^{-1}(y) \cap (M \times \{0,1\}) = (F^{-1}(y) \cap (M \times \{0\})) \cup (F^{-1}(y) \cap (M \times \{1\})) = f^{-1}(y) \sqcup g^{-1}(y)$.

Ora, ogni componente connessa di $\partial F^{-1}(y)$ é chiusa e dunque compatta (e sono in numero finito), quindi é diffeomorfa a \mathbb{S}^1 o a $[0,1]$. Ma allora $|\partial F^{-1}(y)| = |f^{-1}(y)| + |g^{-1}(y)|$ é pari, dunque $|f^{-1}(y)| \equiv |g^{-1}(y)| \pmod{2}$. \square

Osservazione. In generale é falso che $|f^{-1}(y)| = |g^{-1}(y)|$; un facile controesempio é dato dalle proiezioni (omotope):

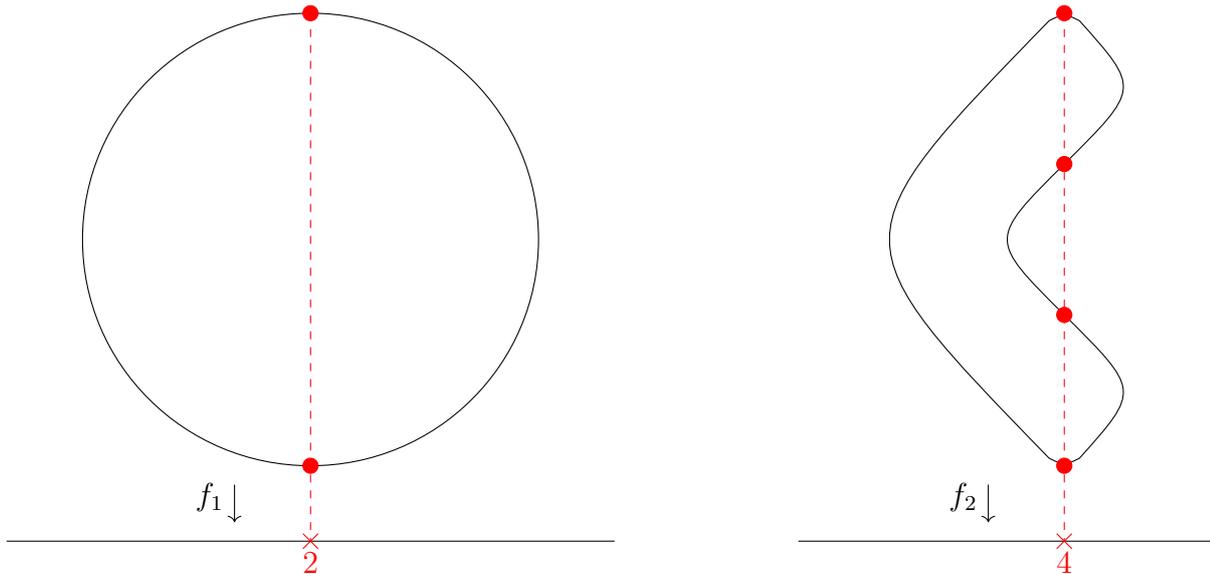


Figura 20: Mappe omotope con numero di controimmagini di uno stesso punto diverso

Corollario 3.2.3. $M \neq \{x_0\}$ varietà compatta senza bordo. Allora non esiste un'omotopia fra l'identità $\text{id} : M \rightarrow M$ e una costante $c : M \rightarrow M$.

Dimostrazione. Preso $x \neq x_0$, esso é regolare per entrambe le mappe, ma $|\text{id}^{-1}(x)| = 1 \not\equiv 0 = |c^{-1}(x)| \pmod{2}$. \square

Abbiamo quindi fatto vedere che il numero $|f^{-1}(x)| \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con $x \in M$ non dipende dalla scelta di f nell'insieme delle mappe omotope ad essa; vediamo ora che quel numero é anche indipendente da x (pur di rimanere nella sua componente connessa).

Lemma 3.2.4. Esiste $U \subseteq \mathbb{D}^n$ aperto, $0 \in U$ tale che $\forall p \in U, \exists f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diffeomorfismo isotopo all'identità con f_t tale che $f(0) = p$ e $f_t(x) = x \forall \|x\| \geq 1, \forall t \in [0,1]$.

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto il caso $n=1$. Sia φ una funzione liscia tale che $\varphi(x) = 0 \forall |x| \geq \frac{1}{2}, \varphi(x) = 1 \iff x = 0, 0 \leq \varphi(x) \leq 1 \forall x$.

Ogni derivata di φ ha supporto in $\mathbb{D}^1 = [-1,1]$, quindi $\exists M = \max |\varphi'|$; sia $U = (-\frac{1}{M}, \frac{1}{M})$.

$f_t(x) = x + t\varphi(x)p$, infatti $f_0 = \text{id}$ e $f_1(0) = p$; pongo $f = f_1$. Inoltre se $\|x\| \geq 1, \varphi(x) = 0$ e dunque $f_t(x) = x \forall x \forall t$.

$f'_t = 1 + t\varphi'p > 0$, perché $|\varphi'p| < 1$ per costruzione e $|t| < 1$; ma allora f_t é un diffeomorfismo perché crescente ed é l'identità fuori da un compatto.

Passiamo adesso al caso generale; usando la stessa notazione precedente di φ e M , pongo $U = \{x \mid \|x\| < \frac{1}{M}\}$. Metto p sulla prima coordinata di \mathbb{R}^n , cioè $p = (p_0, 0, \dots, 0)$, e denoto

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(y, x) \mid y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$.

Sia $\sigma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione liscia tale che $\sigma(x) = 0 \forall \|x\| \geq \frac{1}{2}$, $\sigma(x) = 1 \iff x = 0$, $0 \leq \sigma(x) \leq 1$. Definisco $f_t(y, x) = (y + t\varphi(y)p_0\sigma(x), x)$ e $f = f_1$; $f(0, 0) = p$ e, come nel caso unidimensionale, se $\|(y, x)\| \geq 1$, allora $|y| \geq \frac{1}{2}$ o $\|x\| \geq \frac{1}{2}$, dunque in ogni caso $f_t(y, x) = (y, x)$. Rimane da vedere che f_t é un diffeomorfismo $\forall t$, cioè che df_t é invertibile; ma la matrice associata a df_t é:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 + t\varphi'p_0\sigma & * \\ \hline 0 & \text{Id}_{n-1} \end{array} \right)$$

con $1 + t\varphi'p_0\sigma > 0$, dunque é invertibile $\forall t$. □

Lemma 3.2.5 (di omogeneità). *M varietà connessa. $\forall x, y \in M$ esiste $\varphi : M \rightarrow M$ diffeomorfismo isotopo all'identità tale che $\varphi(x) = y$.*

Dimostrazione. $\forall x \in M$, definisco $U(x) = \{y \mid \exists \varphi : M \rightarrow M \text{ tale che } \varphi(x) = y, \varphi \simeq \text{id}\}$; $U(x)$ é aperto in M , perché se $y \in U(x)$, esiste $U \subseteq U(x)$ aperto, $U \ni y$, tale che $\psi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ diffeomorfismo, con $V \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{D}^n$ del lemma precedente, quindi ogni punto di $U(x)$ ha un intorno aperto contenuto in $U(x)$.

Inoltre, se $x \neq y$, $U(x) = U(y) \circ U(x) \cap U(y) = \emptyset$, quindi gli $\{U(x)\}_{x \in M}$ formano una partizione di M , ma M é connesso, dunque $M = U(x)$. □

Teorema 3.2.6. *$f : M \rightarrow N$, M, N varietà senza bordo della stessa dimensione, M compatta, N connessa. Se x, y sono valori regolari per f , allora $|f^{-1}(x)| \equiv |f^{-1}(y)| \pmod{2}$.*

*Il numero $\deg_2(f) = |f^{-1}(x)| \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ é detto **grado modulo 2** di f e, se $f \simeq g$ sono omotope, allora $\deg_2(f) = \deg_2(g)$.*

Dimostrazione. Sappiamo che esiste un'isotopia liscia (e dunque omotopia) φ_t tale che $\varphi_0 = \text{id}$ e $\varphi_1(x) = y$; inoltre $f = \varphi_0 \circ f \simeq \varphi_1 \circ f$ e $(\varphi_1 \circ f)^{-1}(y) = f^{-1} \circ \varphi_1^{-1}(y) = f^{-1}(x)$.

y é valore regolare per f , dunque anche per $\varphi_1 \circ f$ (perché φ_1 é un diffeomorfismo); ma allora $|f^{-1}(y)| \equiv |(\varphi_1 \circ f)^{-1}(y)| = |f^{-1}(x)| \pmod{2}$. □

A questo punto vogliamo estendere il grado modulo 2 al grado intero, ma come abbiamo visto non possiamo definirlo semplicemente come il numero di controimmagini, perché esso cambia cambiando punto regolare o scegliendo una mappa diversa nella stessa classe di omotopia; per ovviare a questo problema l'idea é contare le controimmagini con un segno, ma per farlo é necessaria l'ipotesi che le varietà considerate siano tutte orientabili.

Definizione 3.2.2. *M varietà con bordo. Un'orientazione per M é la scelta di un'orientazione su $T_x(M) \forall x \in M$ in modo che $\forall x \in M$ esista $U \ni x$ aperto in M e un frame locale v_1, \dots, v_n su U tale che $v_1(q), \dots, v_n(q)$ sia positiva $\forall q \in U$.*

Definizione 3.2.3. *Un'orientazione su M di dimensione $n \geq 2$ ne induce una su ∂M in modo che, preso $v_1 \in T_x(M) \setminus C_x(M)$, $\{v_2, \dots, v_n\}$ base di $T_x(\partial M)$ é positiva se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base positiva di $T_x(M)$.*

Se invece M ha dimensione 1, allora l'orientazione di $\partial M = \{x_1, x_2\}$ é la scelta di un segno $+$ o $-$ per x_1, x_2 in modo che il verso di percorrenza positivo di M sia da $-$ a $+$.

Osservazione. É una semplice verifica vedere che la precedente é una buona definizione.

Osservazione. Se M, N sono varietà orientate, $M \times N$ prende un'orientazione naturale tale che se $(x, y) \in M \times N$, una base di $T_{(x,y)}(M \times N) = T_x(M) \times T_y(N)$ é positiva se é unione di due basi positive di $T_x(M)$ e $T_y(N)$.

Osservazione. Sia M una varietà senza bordo e $N = [0, 1] \times M$. Allora $\partial N = \{0\} \times M \sqcup \{1\} \times M$ e, dati gli ovvi diffeomorfismi $M \rightarrow \{0\} \times M$ e $M \rightarrow \{1\} \times M$, vediamo che le orientazioni indotte su $\{0\} \times M$ e $\{1\} \times M$ sono opposte. Infatti una base $\{+, v_2, \dots, v_n\}$ di $\{1\} \times M$ é positiva \iff la base $\{-, v_2, \dots, v_n\}$ di $\{0\} \times M$ é positiva, dove $\{v_2, \dots, v_n\}$ é una base positiva di M .

Definizione 3.2.4. $f : M \rightarrow N$ fra varietà orientate della stessa dimensione, M compatta, N connessa, $y \in N$ valore regolare. Si definisce **grado** di f in y il numero:

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(df_x),$$

dove $\text{sgn}(df_x)$ é 1 se manda basi positive di $T_x(M)$ in basi positive di $T_{f(x)}(N)$ e -1 altrimenti.

Osservazione. Sappiamo già che $\deg(f, y)$ é costante su ogni componente connessa dell'aperto dei valori regolari di N , in quanto f ristretta ai punti regolari é un rivestimento.

Lemma 3.2.7. $X^{(n+1)}$ varietà orientata, compatta con bordo, $M = \partial X$ tale che l'orientazione di M coincida con quella del bordo di X . Sia $g : X \rightarrow N$ e si denoti con $f : M \rightarrow N$ la restrizione di g a $M = \partial X$. Se $y \in N$ un valore regolare per f , allora $\deg(f, y) = 0$.

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema avremo bisogno di alcuni risultati parziali:

Lemma 3.2.8. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ una curva regolare. Allora, per ogni $t_0 \in [0, 1]$ esiste $\epsilon > 0$ che soddisfa la proprietà:

Se $t_1 \in (t_0 \pm \epsilon) \cap [0, 1]$ e v_2, \dots, v_n sono vettori di $T_{\gamma(t_1)}X$ tali che $\{\gamma'(t_1), v_2, \dots, v_n\}$ sia una base di $T_{\gamma(t_1)}X$, allora esistono campi vettoriali lisci $v_i : (t_0 \pm \epsilon) \cap [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $i = 1, \dots, n$ tali che $v_i(t_1) = v_i$ per ogni i , e tali che per ogni $t \in (t_0 \pm \epsilon)$, l'insieme $\{\gamma'(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ sia una base di $T_{\gamma(t)}X$

Dimostrazione. Trattiamo il caso in cui $t_0 \neq 0, 1$ (se $t_0 = 0, 1$ la dimostrazione á analoga). Vogliamo mostrare che é possibile costruire una carta intorno a $\gamma(t_0)$ in modo tale che la curva γ , letta in tale carta, abbia velocit costante. Tale risultato discende per immediatamente dal teorema di raddrizzamento dell'immagine. A questo punto la dimostrazione del teorema ovvia. \square

Lemma 3.2.9. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ una curva regolare, allora esistono n campi vettoriali continui $v_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ lungo γ tali che per ogni $t \in [0, 1]$ l'insieme $\{\gamma'(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ fornisce una base positiva di $T_{\gamma(t)}(X)$.

Dimostrazione. Estendo $\gamma'(0)$ ad una base positiva $\{\gamma'(0), v_1(0), \dots, v_n(0)\}$ di $T_{\gamma(0)}(X)$, e sia t_0 l'estremo superiore dei valori di $s \in [0, 1]$ per cui esistono n campi vettoriali continui $v_i : [0, s] \rightarrow \mathbb{R}^N$ lungo γ che estendano la nostra scelta iniziale e che, per ogni $t \in [0, s]$ forniscano una base di $T_{\gamma(t)}(X)$. Tale insieme é non vuoto in quanto contiene 0. A questo punto mi basta dimostrare che questo estremo superiore é un massimo e che tale massimo uguale a 1, in quanto per continuit di v_i e di γ' abbiamo che la base $\{\gamma'(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\}$, essendo positiva in $t = 0$, sar positiva per ogni $t \in [0, 1]$.

Sia $\epsilon > 0$ il valore fornito dal lemma 3.2.8 in corrispondenza di t_0 . Se $t_0 = 0$ allora t_0 é un massimo, altrimenti, per definizione di estremo superiore, esisterebbero $t_1 \in (t_0 - \epsilon, t_0]$ e campi vettoriali continui $v_i : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ lungo γ tali che $\{\gamma'(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ una base di $T_{\gamma(t)}(X)$ per ogni $0 \leq t \leq t_1$. Sempre per il lemma 3.2.8 possiamo estendere questi campi a una base mobile continua di $T_{\gamma(t)}(X)$ su $[0, t_0]$ e, nel caso in cui $t_0 \neq 1$, anche su $[0, t_0 + \epsilon/2]$, il che contraddice la definizione di t_0 . \square

Lemma 3.2.10. *Sia $f : M \rightarrow N$, e sia $y \in N$ valore regolare per f . Allora esiste un intorno U di y in N tale che, per ogni $z \in U$, il valore z é regolare per f e $\deg(f, y) = \deg(f, z)$.*

Dimostrazione. y regolare implica che $f^{-1}(y)$ é un sottinsieme discreto di M . Essendo M compatta, $f^{-1}(y)$ finito, diciamo $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Per definizione di valore regolare, per ogni $i = 1, \dots, k$ possiamo scegliere un intorno aperto connesso U_i di x_i in M tale che $f|_{U_i}$ sia un diffeomorfismo aperto di N . Notiamo anche che, per continuitá, per ogni i , la restrizione $f|_{U_i}$ preserva l'orientazione in ogni punto di U_i o la inverte in ogni punto e dunque $\text{sgn}(df_y(x)) = \text{sgn}(df_y(x_i)) \forall x \in U_i$. Se $V_i = f(U_i)$, definisco:

$$U = \left(\bigcap V_i \right) \setminus f \left(M \setminus \left(\bigcup U_i \right) \right)$$

Sia ora $z \in U$. Poiché $U \subseteq V_i$, il punto z ha esattamente una controimmagine $z_i \in U_i$. Inoltre, poiché $U \cap f(M \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_k)) = \emptyset$, al di fuori dell'unione degli U_i non esistono controimmagini di z . Possiamo dunque concludere che z é un valore regolare per f e:

$$\deg(f, z) = \sum_{i=1}^k \text{sgn}(df_y(z_i)) = \sum_{i=1}^k \text{sgn}(df_y(x_i)) = \deg(f, y)$$

□

Siamo a questo punto pronti per dimostrare il lemma 3.2.7. Sia dunque y un valore regolare per f . Per il lemma 3.2.10, esiste un intorno U di y tale che $\deg(f, y) = \deg(f, z)$ per ogni $z \in U$. Inoltre per il lemma di Sard esiste un valore $y' \in U$ regolare per g . Se mostriamo che $\deg(f, y') = 0$, allora avremmo che $\deg(f, y) = \deg(f, y') = 0$ come voluto. Possiamo dunque supporre fin da subito y regolare sia per f sia per g .

Poiché y é regolare per g , l'insieme $g^{-1}(y)$ é una sottovarietà 1-dimensionale chiusa (dunque compatta) di X , ed pertanto unione di un numero finito di archi e di circonferenze. Inoltre $f^{-1}(y)$ consta esattamente delle estremitá degli archi contenuti in $g^{-1}(y)$, pertanto, se A é un tale arco con estremitá $a_0, a_1 \in M$, per concludere sufficiente dimostrare che $\deg(f, a_0) + \deg(f, a_1) = 0$.

Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ una parametrizzazione regolare di A e siano $v_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ i campi vettoriali forniti dal lemma 3.2.9. Poiché $g|_A$ é costante, si ha che $dg_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0 \forall t$, tuttavia $dg_{\gamma(t)}$ é suriettivo, perci per motivi di dimensione il differenziale $dg_{\gamma(t)}$ manda i vettori $\{v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ in una base \mathcal{B}_t di $T_y(B)$. Se $D_t \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ é la matrice di cambio di base tra \mathcal{B}_0 e \mathcal{B}_t , allora $D_0 = Id$ e $t \mapsto \det D_t$ é una funzione continua che non si annulla mai, quindi $\det D_1 > 0$ e dunque $\mathcal{B}_0 \sim \mathcal{B}_1$.

Ossendo ora y regolare per f , il differenziale $df_{\gamma(0)} : T_{\gamma(0)}(M) \rightarrow T_y(N)$ é necessariamente iniettivo. Dunque $\gamma'(0) \notin T_{\gamma(0)}(M)$, e abbiamo lo spezzamento in somma diretta $T_{\gamma(0)}(X) = T_{\gamma(0)}(M) \oplus \text{Span}(\gamma'(0))$. Sia $\pi : T_{\gamma(0)}X \rightarrow T_{\gamma(0)}M$ la proiezione associata a questo spezzamento, e poniamo $v'_i(0) = \pi(v_i(0))$. Abbiamo quindi che $\{v'_1(0), \dots, v'_n(0)\}$ é una base di $T_{\gamma(0)}(M)$, che chiameremo \mathcal{C}_0 . Poiché $v_i(0) = v'_i(0) + \alpha_i \gamma'(0)$ per qualche $\alpha_i \in \mathbb{R}$, per ogni i abbiamo che $df_{\gamma(0)}(v'_i(0)) = dg_{\gamma(0)}(v'_i(0)) = dg_{\gamma(0)}(v_i(0))$, per cui $df_{\gamma(0)}(\mathcal{C}_0) = \mathcal{B}_0$, e inoltre la matrice di cambio di base tra $\{\gamma'(0), v_1(0), \dots, v_n(0)\}$ e $\{\gamma'(0), v'_1(0), \dots, v'_n(0)\}$ é triangolare superiore con solo 1 sulla diagonale, per cui $\{\gamma'(0), v'_1(0), \dots, v'_n(0)\}$ é una base positiva di $T_{\gamma(0)}(X)$ e dunque, essendo $\gamma'(0)$ un vettore interno, \mathcal{C}_0 é una base negativa di $T_{\gamma(0)}(M)$.

Con procedimento analogo é possibile costruire una base \mathcal{C}_1 di $T_{\gamma(1)}(M)$ tale che $df_{\gamma(1)}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}_1$ tuttavia, essendo $\gamma'(1)$ esterno, \mathcal{C}_1 una base positiva di $T_{\gamma(1)}(M)$.

La base positiva \mathcal{C}_1 e la base negativa \mathcal{C}_0 vengono mappate rispettivamente da $df_{\gamma(0)}$ e da $df_{\gamma(1)}$ in \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_0 , che sono basi equivalenti di $T_y(N)$. Da qui segue la tesi. □

Osservazione. $f : M \rightarrow N$; se cambio l'orientazione di M o di N , allora $\deg(f, y)$ cambia di segno (con $y \in N$ valore regolare).

Lemma 3.2.11. $f, g : M^{(n)} \rightarrow N^{(n)}$ omotope fra varietà orientate senza bordo, M compatta, N connessa. Se $y \in N$ é valore regolare per f e g , allora $\deg(f, y) = \deg(g, y)$.

Dimostrazione. Sia $F : [0, 1] \times M = X \rightarrow N$ tale che $f = F(1, \bullet)$ e $g = F(0, \bullet)$. Per il lemma $\deg(F|_{\partial X}, y) = 0$, ma $\partial X = \{0\} \times M \sqcup \{1\} \times M$, dunque $\deg(F|_{\{0\} \times M}, y) + \deg(F|_{\{1\} \times M}, y) = 0$. Ma $F|_{\{0\} \times M} = g$, $F|_{\{1\} \times M} = f$, $\{1\} \times M$ ha la stessa orientazione di M e $\{0\} \times M$ ha l'orientazione opposta a M , quindi $-\deg(g, y) + \deg(f, y) = 0$. \square

Ora, in modo totalmente analogo a come già fatto per il grado modulo 2, si mostra il teorema:

Teorema 3.2.12. $f : M \rightarrow N$, M, N varietà orientate senza bordo della stessa dimensione, M compatta, N connessa. Se x, y sono valori regolari per f , allora $\deg(f, x) = \deg(f, y)$. Dunque possiamo definire $\deg(f) := \deg(f, y) \in \mathbb{Z}$ per un qualunque y regolare, e $\deg(f)$ é invariante per omotopia.

Osservazione. Se M é una varietà compatta orientabile, e $f : M \rightarrow M$, allora $\deg(f)$ non dipende dall'orientazione di M (purché sia coerente in partenza e in arrivo).

Osservazione. $f : M \rightarrow N$, M, N con le solite proprietà. Se f non é surgettiva, allora $\deg(f) = 0$.

Con il prossimo esempio osserviamo che effettivamente il grado di una mappa può essere un qualunque numero intero.

Esempio. Sia $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tale che $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Allora $\deg(f) = n$.

Infatti se $n = 0$, ovviamente $\deg(f) = 0$ perché f non é surgettiva. Se invece $n > 0$, allora $f^{-1}(1)$ é un n -poligono regolare con vertici in ζ_n^i per $i = 0, \dots, n-1$; il tangente in ζ_n^i viene mappato da $df_{\zeta_n^i}$ in $(0, n) \in T_1(\mathbb{S}^1)$, quindi $df_{\zeta_n^i}$ ha segno $+$ per ogni i , cioè $\deg(f) = n$.

Se $n < 0$, il ragionamento é del tutto analogo (infatti $z^n = (\bar{z})^{-n}$ e $-n > 0$).

Osservazione. Se $f : M \rightarrow N$ é un diffeomorfismo, allora $\deg(f) = \pm 1$.

Proposizione 3.2.13. $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$, con M, N, P varietà orientabili, senza bordo della stessa dimensione, con M, N compatte e N, P connesse. Allora $\deg(g \circ f) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

Dimostrazione. Sia $w \in P$ regolare per $g \circ f$; si ha che:

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f, w) &= \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(w)} \operatorname{sgn}(d(g \circ f)_x) = \sum_{x \in f^{-1}(g^{-1}(w))} \operatorname{sgn}(dg_{f(x)} \circ df_x) = \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(g^{-1}(w))} \operatorname{sgn}(dg_{f(x)}) \cdot \operatorname{sgn}(df_x) = \sum_{y \in g^{-1}(w)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(dg_y) \cdot \operatorname{sgn}(df_x) = \\ &= \sum_{y \in g^{-1}(w)} \left(\operatorname{sgn}(dg_y) \underbrace{\sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(df_x)}_{=\deg(f)} \right) = \deg(f) \cdot \deg(g). \end{aligned}$$

\square

Esempio (Riflessioni sulla sfera). Sia $r_i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ restrizione della mappa $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$. Allora $\deg(r_i) = -1$.

Dimostrazione. Poniamo $i = 1$ per semplicitá di notazione. Sia $x = e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$.

Evidentemente $r_1(x) = x$ e $T_x(\mathbb{S}^n) = x^\perp = \{x_2 = 0\}$, dunque $\{e_1, \hat{e}_2, \dots, e_n\}$ é una base per $T_x(\mathbb{S}^n)$ e $dr_1 = r_1$ scambia il segno della prima coordinata. dr_1 é un endomorfismo e $\det(r_1|_{T_x(\mathbb{S}^n)}) = -1 < 0$, quindi il grado del diffeomorfismo r_1 é -1 . \square

Corollario 3.2.14. Sia $ant : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ la mappa antipodale. Allora $\deg(ant) = (-1)^{n+1}$.

Corollario 3.2.15. La mappa antipodale é omotopa all'identitá $\iff n$ é dispari.

Definizione 3.2.5. M varietá senza bordo si dice **pettinabile** se esiste un campo di vettori tangenti mai nulli (cioé \iff esiste un campo tangente unitario).

Corollario 3.2.16 (Teorema della non pettinabilitá della sfera). \mathbb{S}^n é pettinabile $\iff n$ é dispari.

Dimostrazione. \Leftarrow) Definisco $v(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{n+1}, -x_n)$ grazie alla paritá di $n+1$; v é un campo tangente, perché $\langle v(x), x \rangle = 0 \forall x$, ed é unitario.

\Rightarrow) Se per assurdo esiste v campo tangente unitario, voglio mostrare che esso costruisce un'omotopia fra la mappa antipodale e l'identitá.

Definisco:

$$f_t : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \\ x \mapsto \cos(t\pi)x + \sin(t\pi)v(x)$$

Per il teorema di Pitagora $\|f_t(x)\| = 1 \forall x$, dunque la mappa é ben definita; inoltre $f_0 = \text{id}$ e $f_1 = ant$, assurdo. □

Proposizione 3.2.17. n pari. Ogni $\varphi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ammette un x tale che $\varphi(x) = \pm x$.

Dimostrazione. Se per assurdo esiste φ tale che $\varphi(x) \neq \pm x \forall x \in \mathbb{S}^n$, allora definisco $v(x) = \pi_{x^\perp}(\varphi(x) - x)$, dove $\pi_{x^\perp} : \mathbb{R}^n \rightarrow x^\perp$ é la proiezione sul tangente in x ; per l'ipotesi di assurdo, $v(x)$ é un campo tangente mai nullo. □

Osservazione. Se $f : M^{(n)} \rightarrow N^{(n)}$ é un diffeomorfismo e v é un campo vettoriale tangente su M , allora $v' = df_{f^{-1}(x)} \circ v \circ f^{-1}$ é un campo vettoriale tangente su N . Inoltre $v(f^{-1}(x)) = 0 \iff v'(x) = 0$.

Corollario 3.2.18. Se $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ é una superficie diffeomorfa a \mathbb{S}^2 , allora non ammette campi tangenti mai nulli.

Osservazione. Ogni superficie di rotazione ha un campo tangente mai nullo; un modo per ottenerlo é prendere un campo tangente mai nullo sulla curva generatrice e ruotarlo.

3.3 Indice di uno zero isolato in un campo tangente

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $x \in U$ e $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale che ha x come zero isolato, cioé esiste $V \ni x$ aperto tale che $V \subseteq U$ e x é l'unico zero di v in V .

In tale situazione, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $D = \overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq V$; ma allora, normalizzato il campo $v|_{\partial D} : \partial D = \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, otteniamo un campo $\bar{v} : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ fra due sfere orientate come bordi di \mathbb{D}^n .

Definizione 3.3.1. Si definisce **indice** di x in v il grado del precedente campo \bar{v} :

$$i_v(x) := \deg(\bar{v}).$$

Osservazione. L'indice di x in v non dipende da $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione. Prendiamo $\varepsilon < \varepsilon'$ e denotiamo $N \subseteq V$ la n -varietá $N = \{x \mid \varepsilon \leq \|x\| \leq \varepsilon'\}$ con bordo $\partial N = +\mathbb{S}_{\varepsilon'}^{n-1} \sqcup -\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$. La tesi é mostrare che le mappe $\bar{v}_{\varepsilon'} : \mathbb{S}_{\varepsilon'}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ e $\bar{v}_\varepsilon : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ hanno lo stesso grado.

Ma $\bar{v} = \frac{v(x)}{\|v(x)\|} : N \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ é tale che $\bar{v}|_{\mathbb{S}_{\varepsilon'}^{n-1}} = \bar{v}_{\varepsilon'}$, $\bar{v}|_{\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}} = \bar{v}_\varepsilon$ e $\deg(\bar{v}_{\partial N}) = 0$, dunque $\deg(\bar{v}_{\varepsilon'}) - \deg(\bar{v}_\varepsilon) = 0$. □

Come al solito, ora vogliamo estendere il concetto di indice su varietà via carte; abbiamo prima bisogno di qualche lemma.

Lemma 3.3.1 (Formula di Taylor per topologi). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $f(0) = 0$. Allora esistono $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + x_n g_n(x_1, \dots, x_n),$$

$$\text{e } g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

Dimostrazione. Posso considerare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ed estendere per componenti. Ma in questo caso:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dx_i} dt = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dx_i} dt}_{=g_i},$$

ed è immediato osservare che $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. □

Lemma 3.3.2. Ogni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diffeomorfismo tale che $f(0) = 0$ è isotopo all'identità se preserva l'orientazione, a una qualsiasi riflessione se la inverte.

Dimostrazione. Definiamo $f_t(x) = \frac{f(tx)}{t}$; per il lemma:

$$f_t(x) = \frac{1}{t}(tx_1 g_1(tx) + \dots + tx_n g_n(tx)) = x_1 g_1(tx) + \dots + x_n g_n(tx),$$

dunque ridefinisco $f_t(x) := x_1 g_1(tx) + \dots + x_n g_n(tx)$ e in questo modo riesco a definire $f_0(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(0) = df_0$. Ad ogni tempo t , f_t è un diffeomorfismo, quindi $f \sim df_0$ sono isotope.

A questo punto, se $df_0 \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$, lo connetto tramite un arco all'identità, mentre se $df_0 \in \text{GL}^-(n, \mathbb{R})$, lo connetto tramite un arco a una qualsiasi riflessione. □

In modo del tutto analogo si prova:

Teorema 3.3.3. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto stellato con centro 0, $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ embedding (cioè $f(C) \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto e $f|_C$ è un diffeomorfismo tale che $f(0) = 0$). Allora f è isotopa all'identità o a una riflessione (a seconda che preservi l'orientazione) tramite dei diffeomorfismi f_t tali che $f_t(0) = 0 \forall t \in [0, 1]$.

Proposizione 3.3.4. La definizione di indice è invariante per diffeomorfismo, cioè se $\varphi : V \rightarrow V'$ è un diffeomorfismo fra due aperti $V, V' \subseteq \mathbb{R}^n$ e $v : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale tangente con uno zero isolato in $\varphi^{-1}(x)$, allora $i_v(\varphi^{-1}(x)) = i_{v'}(x)$, dove $v' = d\varphi_{\varphi^{-1}(x)} \circ v \circ \varphi^{-1}$.

Dimostrazione. A meno di restringere l'aperto, posso supporre V stellato intorno a $\varphi^{-1}(x)$, dunque esiste un'isotopia fra φ e una fra l'identità e una riflessione.

Se φ preserva l'orientazione, ho dei diffeomorfismi φ_t tali che $\varphi_0 = \text{id}$ e $\varphi_1 = \varphi$; supponendo che $x = \varphi^{-1}(x) = 0$, ho che anche $\varphi_t(0) = 0$. Definiamo:

$$v_t(x) = (d\varphi_t)_{\varphi_t^{-1}(x)} \circ v \circ \varphi_t^{-1}(x);$$

per compattezza, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B(x, \varepsilon)} = \overline{B(0, \varepsilon)} \subseteq \varphi_t(V) \forall t \in [0, 1]$, dunque, a meno di restringere, $D = \overline{B(\varphi^{-1}(x), \varepsilon)} = \overline{B(0, \varepsilon)} \subseteq V$. Quindi per ogni tempo t , $v_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v_0 = v$ e $v_1 = v'$.

Ogni v_t é ottenuto da v_0 tramite un diffeomorfismo, quindi 0 é uno zero isolato anche per i v_t ; ma se $\varepsilon' < \varepsilon$ e:

$$\begin{aligned} \bar{v}_t : \mathbb{S}_{\varepsilon'}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{v_t(x)}{\|v_t(x)\|} \end{aligned}$$

ho ottenuto un'omotopia fra \bar{v}_0 e \bar{v}_1 , da cui $i_v(0) = \deg(\bar{v}_0) = \deg(\bar{v}_1) = i_{v'}(0)$.

Se invece φ inverte l'orientazione, possiamo supporre che φ sia una riflessione ρ , poiché altrimenti $f \circ \rho$ preserva l'orientazione e dunque per la prima parte mi basta vedere che ρ non cambia l'indice.

$v' = \rho \circ v \circ \rho$ su una sferetta $\mathbb{S}_{\varepsilon}^{n-1}$, dunque se $\bar{v}' = \rho \circ \bar{v} \circ \rho$, ho che $\deg(\bar{v}') = \deg(\rho) \cdot \deg(\bar{v}) \cdot \deg(\rho) = \deg(\bar{v})$. \square

Definizione 3.3.2. $M^{(k)} \subseteq \mathbb{R}^n$, v campo vettoriale tangente, $x \in M$ zero isolato per v . Presa una carta $\varphi : M \supseteq U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^k$ intorno a x , si definisce **indice** di x in v il numero $i_v(x) := i_{v'}(x')$, dove v' é il campo immagine in \mathbb{R}^k .

Osservazione. La definizione é ben posta perché per la proposizione precedente l'indice é invariante per diffeomorfismo.

Esempi. Il campo $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $v(z) = z^n$, con $n > 0$, ha uno zero isolato in 0. Visto che la restrizione di v a \mathbb{S}^1 é già normalizzata, otteniamo che $i_v(0) = n$.

Il ragionamento é analogo per $v(z) = (\bar{z})^{-n}$, con $n < 0$.

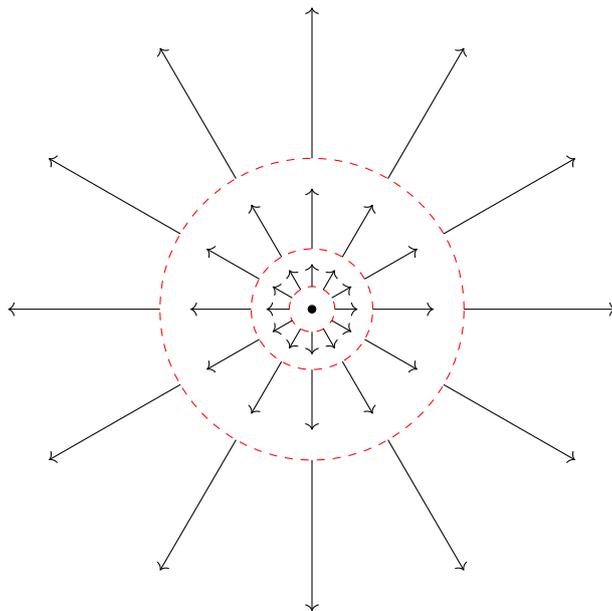


Figura 21: Il campo vettoriale $v(z) = z$ di indice 1 in 0

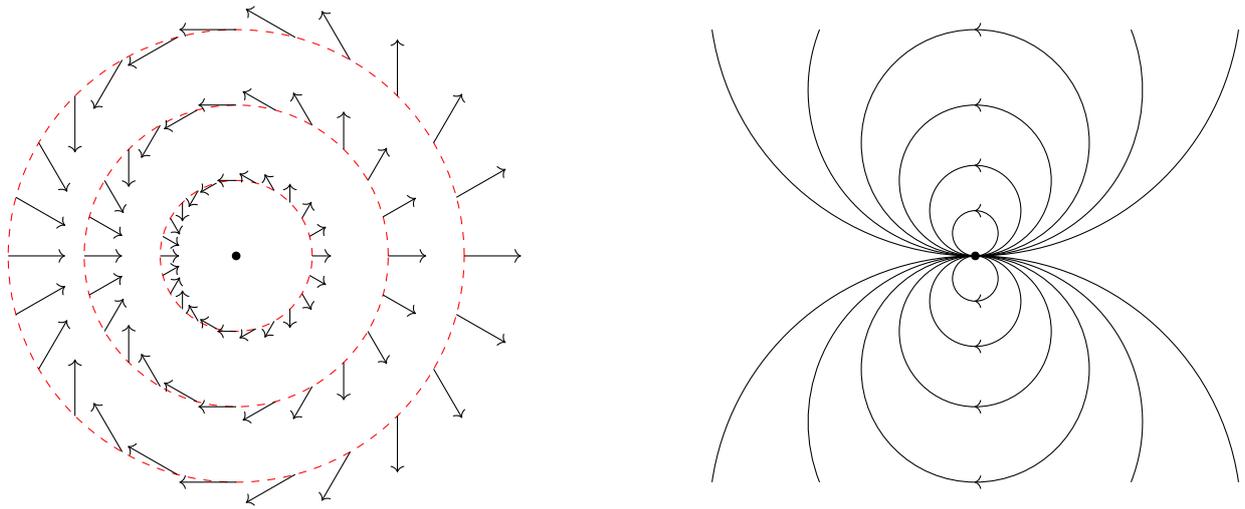


Figura 22: Il campo vettoriale $v(z) = \frac{1}{4}z^2$ di indice 2 in 0 e le sue linee di flusso

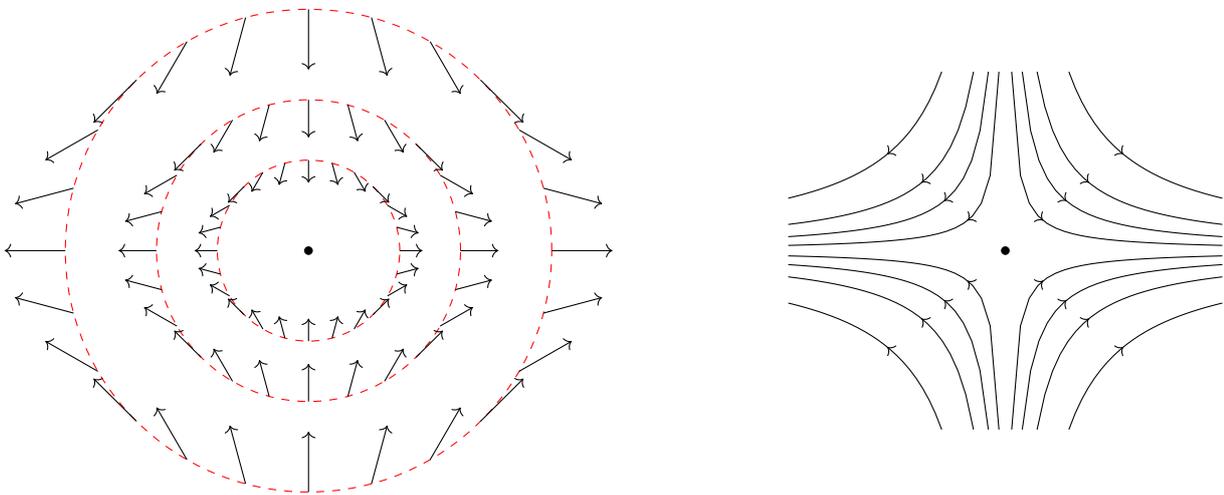


Figura 23: Il campo vettoriale $v(z) = \frac{1}{4}\bar{z}$ di indice -1 in 0 e le sue linee di flusso

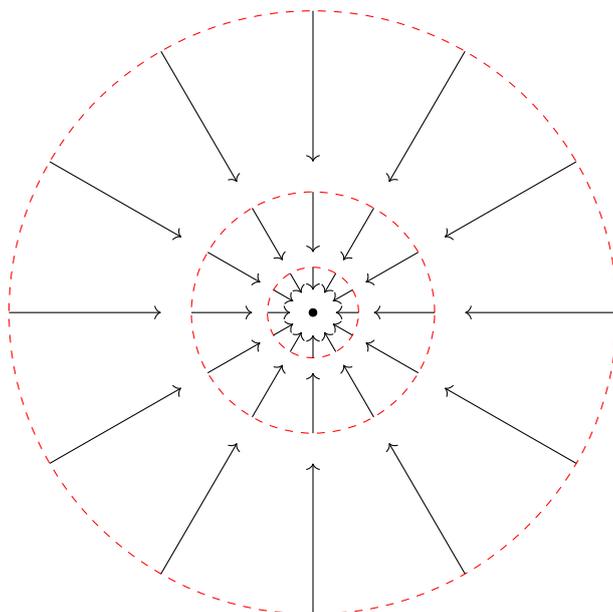


Figura 24: Il campo vettoriale dell'antipodale $v(z) = -\frac{1}{2}z$ di indice 1 in 0

Grazie a questi esempi abbiamo visto che esistono zeri isolati con indice un qualunque intero diverso da 0. Vediamo ora un campo vettoriale in cui 0 ha indice 0.

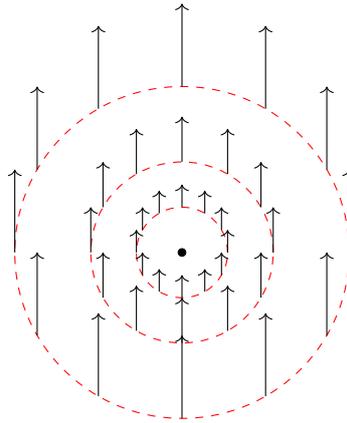


Figura 25: Il campo vettoriale $v(z) = \frac{1}{2} \|z\|$ di indice 0 in 0

Infatti, se restringiamo questo campo a una circonferenza, esso é un campo costante, dunque in particolare non surgettivo, quindi ha grado 0.

Osservazione. Il campo vettoriale di indice 2 visto negli esempi precedenti puó essere perturbato in modo da creare due zeri isolati, ciascuno di indice 1:

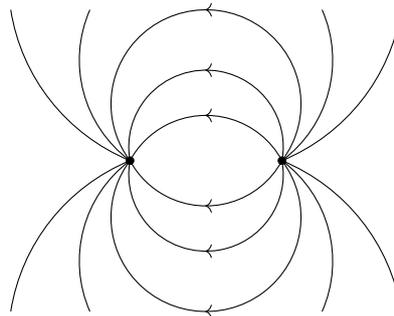


Figura 26: Campo di indice 2 perturbato in modo da creare due zeri di indice 1

Andremo adesso a studiare l'indice di zeri in campi su varietá; per convenzione, considereremo sempre campi vettoriali v su M varietá (che puó avere bordo) con l'ipotesi che siano uscenti in ∂M , cioè $\forall x \in \partial M, v(x) \in T_x(M) \setminus C_x(M)$.

Definizione 3.3.3. $M^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^n$ varietá con bordo. Si definisce **mappa di Gauss** la mappa $g : \partial M \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ che manda x nella normale esterna a ∂M in x normalizzata.

Proposizione 3.3.5 (Lemma di Hopf). $M^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^n$ varietá con bordo compatta. Dato un campo vettoriale tangente v su M uscente al bordo con zeri isolati, vale la relazione:

$$\sum_{x \text{ zero di } v} i_v(x) = \deg(g),$$

dove g é la mappa di Gauss.

Dimostrazione. Siano $\{x_1, \dots, x_n\} \in M$ gli zeri di v e sia $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B(x_i, \varepsilon)} \cap \overline{B(x_j, \varepsilon)} = \emptyset$ $\forall i \neq j$; denotiamo $M' = M \setminus \bigsqcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.

v é definito per restrizione su M' , dunque, se \bar{v} é il campo v normalizzato, $\deg(\bar{v}|_{\partial M'}) = 0$. Ma $\partial M' = \partial M \sqcup \bigsqcup_{i=1}^n \partial B(x_i, \varepsilon)$, dunque:

$$0 = \deg(\bar{v}|_{\partial M}) + \sum_i \deg(\bar{v}|_{\partial B(x_i, \varepsilon)}) = \deg(\bar{v}|_{\partial M}) - \sum_i i_v(x_i).$$

Visto che due campi unitari uscenti al bordo di una varietá sono sempre omotopi (ad esempio tramite una rotazione), segue che $\deg(\bar{v}|_{\partial M}) = \deg(g)$, cioè la tesi. \square

Esempio. Se $M = \mathbb{D}^2$, g é l'identità e dunque $\deg(g) = 1$; in particolare, non esistono campi tangenti uscenti al bordo su \mathbb{D}^2 senza zeri.

Tale lemma serve per dimostrare il teorema di Poincaré-Hopf, la cui dimostrazione é rimandata all'ultima sezione:

Teorema 3.3.6 (Poincaré-Hopf). *M varietá compatta, possibilmente con bordo, $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo tangente uscente dal bordo con zeri isolati. Allora:*

$$\sum_{x \text{ zero di } v} i_v(x) = \chi(M).$$

Esempio. Consideriamo il campo tangente su \mathbb{S}^n tangente ai meridiani tale che $\|v(x)\| = \sin(\theta)$, dove θ é l'angolo azimutale relativo a x ; tale campo ha due zeri isolati ai poli, ed é uscente dal polo sud ed entrante al polo nord. Per quanto abbiamo visto, l'indice del polo sud é sempre 1, mentre l'indice del polo nord é $(-1)^n$; ne ricaviamo che:

$$\chi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Un corollario immediato di questa osservazione é che le sfere n -dimensionali con n pari non sono pettinabili.

Definizione 3.3.4. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x \in U$ zero isolato per il campo $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. x si dice **zero non degenero** se dv_x é invertibile.

Proposizione 3.3.7. *Se x é uno zero non degenero, allora $i_v(x) = \text{sgn}(dv_x) = \pm 1$.*

Dimostrazione. dv_x é invertibile, dunque v é un diffeomorfismo locale. A meno di restringere U , $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é un embedding, dunque é isotopo (a seconda che mantenga o inverta l'orientazione) all'identità o a una rotazione. Se la mantiene, $i_v(x) = 1$, altrimenti $i_v(x) = -1$. \square

Lemma 3.3.8. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ varietá, $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo tangente, $x \in M$ zero per v . Il differenziale $dv_x : T_x(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tale che $dv_x(T_x(M)) \subseteq T_x(M)$.

Dimostrazione. Consideriamo in U i campi vettoriali coordinati e^1, \dots, e^k . Localmente, il campo immagine v' é della forma:

$$v' = \sum_{i=1}^k v_i e^i,$$

con $v_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ coefficienti e $h : \mathbb{R}^k \supseteq U \rightarrow V \subseteq M$ tale che $h(0) = x$. Denotiamo $t^i = dh_u(e^i)$ per $u \in U$; allora, per linearitá del differenziale, $v = \sum_{i=1}^k v_i t^i$, dunque:

$$\frac{\partial v}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial v_i}{\partial u_j} t^i + \sum_{i=1}^k v_i \frac{\partial t^i}{\partial u_j}.$$

Ma se $u = 0$, $v_i = 0 \forall i$ e dunque in $u = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial v_i}{\partial u_j} t^i.$$

Visto che t^1, \dots, t^k sono una base per $T_x(M)$ (in quanto immagini di vettori linearmente indipendenti), concludiamo che $dv_x(t^j) = \frac{\partial v}{\partial u_j} \in T_x(M)$ e cioè $dv_x(T_x(M)) \subseteq T_x(M)$. \square

Osservazione. Nella base t^1, \dots, t^k indotta dalla carta, il differenziale dv_x é rappresentato dalla matrice $\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right)_{i,j}$.

Definizione 3.3.5. Uno zero isolato x per un campo tangente $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **non degenerare** se $dv_x \in \text{End}(T_x(M))$ é invertibile.

Proposizione 3.3.9. *Uno zero non degenerare ha indice $\pm 1 = \text{sgn}(dv_x)$.*

Dimostrazione. Per il lemma precedente, x é non degenerare se e solo se $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^k$ é non degenerare; ma l'enunciato é già stato visto nel caso di aperti di \mathbb{R}^k . \square

Concludiamo la sezione con un importante teorema, che in un certo senso inverte il teorema di Poincaré-Hopf:

Teorema 3.3.10. *Una varietà compatta e connessa ammette un campo vettoriale mai nullo (con vettori uscenti al bordo se $\partial M \neq \emptyset$) $\iff \chi(M) = 0$.*

Idea della dimostrazione. L'implicazione \implies segue da Poincaré-Hopf; per l'altra, preso un qualunque campo su M , ci possiamo ricondurre al caso di zeri non degeneri (ragionando come nell'esempio in cui abbiamo diviso uno zero di indice 2 in due zeri di indice 1) e possiamo verificare che, presi due zeri non degeneri di indice opposto in un aperto coordinato, essi si "cancellano" creando un nuovo campo senza nessuno zero in quell'aperto coordinato. \square

3.4 Fibrato normale e intorno tubolare

Definizione 3.4.1. $M^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^N$ varietà. Si definisce **fibrato normale** di M l'insieme:

$$N(M) = \{(p, v) \mid p \in M, v \in (T_p(M))^\perp\} \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Inoltre, preso $p \in M$, poniamo:

$$N_p(M) = \{(p, v) \mid v \in (T_p(M))^\perp\}.$$

Osservazione. $N_p(M)$ é uno spazio vettoriale di dimensione $k = N - n$.

Teorema 3.4.1. *$N(M)$ é una varietà di dimensione N in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{2N}$.*

Dimostrazione. La tesi equivale a costruire un atlante per $N(M)$. Innanzitutto notiamo che l'insieme:

$$N(U) = \{(p, v) \in N(M) \mid p \in U\} = (U \times \mathbb{R}^N) \cap N(M)$$

é aperto in $N(M)$ per topologia di sottospazio.

Dato $(p, v) \in N(M)$, sia $\varphi : \Omega \rightarrow U$ una carta per M intorno a p ; ortonormalizzando la base $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right\}$ otteniamo un frame ortonormale v_{k+1}, \dots, v_N su U . Sia $v_1(p), \dots, v_k(p)$ un completamento di v_{k+1}, \dots, v_N a base ortonormale di \mathbb{R}^N , cosí che $N_p(M) = \text{Span}(v_1(p), \dots, v_k(p))$; poiché la mappa:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \det(v_1(p), \dots, v_k(p), v_{k+1}(x), \dots, v_N(x)) \end{array}$$

é continua e diversa da 0 in p , a meno di restringere U posso supporre che $\{v_1(p), \dots, v_k(p), v_{k+1}(x), \dots, v_N(x)\}$ sia una base $\forall x \in U$.

Ortonormalizzando $v_1(p), \dots, v_k(p)$ rispetto a $v_{k+1}(x), \dots, v_N(x)$, ottengo una base $\{v_1(x), \dots, v_k(x)\}$ di $N_x(M)$, che varia in modo C^∞ rispetto a x . A questo punto considero:

$$\begin{aligned} \psi : \quad \Omega \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow N(U) \\ (x, a_1, \dots, a_k) &\longmapsto (\varphi(x), a_1 v_1(x) + \dots + a_k v_k(x)) \end{aligned}$$

ψ é C^∞ ed é evidentemente una bigezione; infine, se $D(x)$ é la matrice $(v_1(x), \dots, v_N(x))$, D é invertibile e D^{-1} dipende in modo C^∞ da x , dunque per concludere basta osservare che:

$$\psi^{-1}(q, v) = (\varphi^{-1}(q), \pi_k(D(\varphi^{-1}(q))^{-1}(v))),$$

dove $\pi_k : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ é la proiezione, é C^∞ . □

D'ora in poi, assumeremo che M é compatta.

Definizione 3.4.2. Dato $\varepsilon > 0$, definiamo:

$$N_\varepsilon(M) = \{(p, v) \in N(M) \mid \|v\| < \varepsilon\}$$

e intorno tubolare:

$$U_\varepsilon(M) = \{q \in \mathbb{R}^N \mid d(q, M) < \varepsilon\}.$$

Lemma 3.4.2. Dato $x \in \mathbb{R}^N$, esiste $p \in M$ tale che $d(x, M) = d(x, p)$.

Per qualsiasi punto con questa proprietà, $x - p \in N_p(M)$.

Dimostrazione. La prima affermazione segue dalla compattezza di M , in quanto $d(x, \bullet) : M \rightarrow \mathbb{R}$ é continua.

Per la seconda, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é tale che $f(q) = \|q - x\|^2$, allora $df_p = 2\langle p - x, \bullet \rangle$, ed essendo p punto di minimo, $df_p(p) = \langle p - x, p \rangle = 0$. □

Nel seguito, denoteremo con θ la mappa:

$$\begin{aligned} \theta : \quad N(M) &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (p, v) &\longmapsto p + v \end{aligned}$$

Teorema 3.4.3. Esiste un $\varepsilon > 0$ tale che:

1. θ si restringe ad un diffeomorfismo fra $N_\varepsilon(M)$ e $U_\varepsilon(M)$, che é aperto in \mathbb{R}^N ;
2. $\forall x \in U_\varepsilon(M)$, esiste un unico $r(x) \in M$ di minima distanza da x su M ;
3. $r : U_\varepsilon(M) \rightarrow M$ é C^∞ ;
4. $\overline{U_{\varepsilon/2}(M)}$ é una varietà con bordo di dimensione N e con normale uscente $\frac{x-r(x)}{\|x-r(x)\|}$.

Dimostrazione. 1. θ é regolare (cioé é un locale diffeomorfismo) in ogni punto della forma $(p, 0) \in N(M)$, in quanto $\text{Im}(d\theta_{(p,0)}) \supseteq T_p(M)$ (poiché $\theta : N(M) \supseteq M \times \{0\} \rightarrow M$ é “come l'identità”) e $\text{Im}(d\theta_{(p,0)}) \supseteq N_p(M)$ (poiché $\theta : N(M) \supseteq \{p\} \times N_p(M) \rightarrow N_p(M)$ é “come l'identità”), dunque $d\theta_{(p,0)}$ é surgettivo. Usando la compattezza di M , per il numero di Lebesgue esiste $\varepsilon > 0$ tale che $d\theta$ é surgettivo su $N_\varepsilon(M)$.

Per vedere la globale iniettività, supponiamo per assurdo che non esista $\varepsilon > 0$ tale che $\theta|_{N_\varepsilon(M)}$ sia iniettiva. Allora esistono $(p_n, v_n) \neq (p'_n, v'_n)$ con $\|v_n\|, \|v'_n\| \rightarrow 0$ tali che $\theta(p_n, v_n) = \theta(p'_n, v'_n)$; per compattezza posso supporre che $p_n \rightarrow p_\infty$ e $p'_n \rightarrow p'_\infty$, dunque, visto che $p_\infty \leftarrow p_n + v_n = p'_n + v'_n \rightarrow p'_\infty$, si ha che $p_\infty = p'_\infty$. Ma allora θ non é iniettiva su nessun intorno di $(p_\infty, 0) = (p'_\infty, 0)$, assurdo.

Il fatto che $\theta(N_\varepsilon(M)) = U_\varepsilon(M)$ discende direttamente dal lemma precedente.

2. Dato $x \in U_\varepsilon(M)$, siano p_1, p_2 di minima distanza da x . $x - p_1 = v_1 \in N_{p_1}(M)$, $x - p_2 = v_2 \in N_{p_2}(M)$ e $\|v_1\|, \|v_2\| < \varepsilon$, dunque $(p_1, v_1), (p_2, v_2) \in N_\varepsilon(M)$ e $\theta(p_1, v_1) = \theta(p_2, v_2)$, da cui $(p_1, v_1) = (p_2, v_2)$ e in particolare $p_1 = p_2$.
3. Detta $\pi_M : N(M) \rightarrow M$ la proiezione tale che $\pi_M(p, v) = p$, quanto visto nel punto precedente dimostra anche che $r(x) = \pi_M(\theta^{-1}(x))$.
4. Sia $g : U_\varepsilon(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(x) = d(x, M)^2 = \|x - r(x)\|^2$; allora $\overline{U_{\varepsilon/2}(M)} = g^{-1}((-\infty, \varepsilon^2/4])$. Per vedere quest'ultimo punto, basta vedere che il differenziale di g in x é un multiplo non nullo del prodotto scalare con $x - r(x)$; in effetti:

$$dg_x(v) = 2 \left\langle \underbrace{x - r(x)}_{\in N_{r(x)}(M)}, v - \underbrace{dr_x(v)}_{\in T_{r(x)}(M)} \right\rangle = 2 \langle x - r(x), v \rangle.$$

□

Siamo ora pronti per dimostrare il teorema di Poincaré-Hopf:

Teorema 3.4.4 (Poincaré-Hopf). *Sia M compatta senza bordo, v campo tangente con zeri non degeneri (e dunque isolati). Allora:*

$$\sum_p i_v(p) = \deg(N),$$

dove $N : \partial U_{\varepsilon/2}(M) \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ é la mappa di Gauss.

Dimostrazione. Sia $U = U_{\varepsilon/2}(M)$. Estendiamo v a $\bar{v} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ tale che $\bar{v}(x) = v(r(x)) - r(x) + x$; \bar{v} é uscente da \bar{U} , in quanto $\forall x \in \partial \bar{U}$:

$$\langle \bar{v}(x), N(x) \rangle = \langle v(r(x)) - r(x) + x, \frac{x - r(x)}{\|x - r(x)\|} \rangle = \|x - r(x)\| > 0.$$

Inoltre $\bar{v}(x) = 0 \iff x \in M$ e $v(x) = 0$, in quanto $v(r(x))$ e $x - r(x)$ sono ortogonali e dunque indipendenti; affermo quindi che, se $p \in M$, $i_v(p) = i_{\bar{v}}(p)$.

Osserviamo subito che questo, per il lemma di Hopf, ci basta per giungere alla tesi; per vedere questo fatto, dobbiamo mostrare che p é non degenera anche per \bar{v} e $\det(dv_p) = \det(d\bar{v}_p)$. Ma questo é facile, perché $d\bar{v}_p$ é semplicemente dv_p su $T_p(M)$, mentre é l'identità su $N_p(M)$, da cui:

$$d\bar{v}_p = \left(\begin{array}{c|c} dv_p & \\ \hline & \text{Id} \end{array} \right).$$

□

Osservazione. Per dimostrare completamente il teorema di Poincaré-Hopf, dovremmo dimostrare che il numero $\sum_p i_v(p) = \deg(N)$, indipendente dal campo, coincide con la caratteristica di Eulero della varietà M . Con gli strumenti introdotti riusciamo a dare l'idea di come si fa solamente sulle superfici: data una triangolazione di M , riusciamo sempre a costruire un campo con zeri nei centri, vertici e punti medi dei lati dei triangoli, uscente dai centri, entrante nei vertici e di sella nei punti medi (si dovrebbe anche verificare che il campo si "incolla" bene fra triangolo e triangolo). In questo modo:

$$\sum_p i_v(p) = 1 \cdot F + (-1) \cdot E + 1 \cdot V = \chi(M),$$

in quanto se il campo é uscente l'indice é 1, se é entrante é $(-1)^2 = 1$ e se crea un punto di sella é -1 .

Nel caso di varietà di dimensione superiore a 2, il ragionamento é del tutto analogo considerando triangolazioni fatte da n -simplessi e usando il fatto che:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i k_i,$$

dove k_i é il numero di i -simplessi presenti nella triangolazione.