Zeri di funzioni olomorfe limitate sulla palla

Giacomo Mezzedimi

16 luglio 2017

1 Introduzione

Indichiamo con Ω un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e, se $f \in H(\Omega)$ è una funzione olomorfa non nulla su Ω, sia $\mathcal{Z}(f)$ l'insieme degli zeri di f in Ω. Viene naturale chiedersi come sia fatto in generale l'insieme degli zeri $\mathcal{Z}(f)$; dalla teoria di base abbiamo questa importante caratterizzazione:

Teorema 1.1. *$\mathcal{Z}(f)$ non ha punti di accumulazione. In particolare $\mathcal{Z}(f)$ è numerabile.*

Restringiamo perciò la nostra attenzione ai sottoinsiemi $\mathcal{Z} \subseteq \Omega$ senza alcun punto di accumulazione. É possibile migliorare tale condizione senza assumere ipotesi aggiuntive su f? Un importante teorema, dovuto a Weierstrass, risponde in modo negativo a questa domanda:

Teorema 1.2 (Weierstrass)**.** *Ogni insieme $\mathcal{Z} \subseteq \Omega$ senza punti di accumulazione è il luogo di zeri $\mathcal{Z}(f)$ di una funzione olomorfa f definita su Ω.*

Diventa perciò importante scegliere una sottoclasse interessante di $H(\Omega)$ che permetta di imporre condizioni più restrittive sui luoghi di zeri delle proprie funzioni. In queste pagine ci concentriamo sulla sottoclasse $H_b = H(B) \cap L^\infty(B)$ delle funzioni olomorfe limitate sulla palla unitaria $B = B(0,1)$, e cerchiamo di dare informazioni quantitative sugli zeri di tali funzioni. Prima di entrare nel merito della questione, spendiamo qualche parola sui prodotti infiniti, che spesso ci serviranno all'interno delle dimostrazioni.

2 Prodotti infiniti

Definizione 2.1. Sia $\{u_k\}$ una successione di numeri complessi, e poniamo $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k)$. Se esiste il limite $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, allora scriviamo $p =$

$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$. Diciamo che tale prodotto infinito converge se la successione $\{p_n\}$ converge.

Abbiamo introdotto il prodotto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, preferendolo a $\prod_{k=1}^{\infty}u_k$, per rendere ancora più evidenti le analogie che a breve troveremo fra il prodotto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ e la somma $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$. Cominciamo con qualche lemma tecnico, per introdurre l'importanza dei prodotti infiniti:

Lemma 2.1. *Siano $u_1,\dots,u_n\in\mathbb{C}$, ed indichiamo $p_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ e $p_n^*=\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)$. Allora valgono le disuguaglianze:*

$$p_n^*\leq\exp\left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|\right),\qquad |p_n-1|\leq p_n^*-1.$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza segue facilmente dalla stima $1+x\leq e^x$ valida per ogni reale positivo x. Per mostrare la seconda, procediamo per induzione, essendo il caso $n=1$ banale. Fissato $k<n$, si hanno le seguenti facili uguaglianze:

$$p_{k+1}-1=p_k(1+u_{k+1})-1=(p_k-1)(1+u_{k+1})+u_{k+1},$$

da cui, per il passo induttivo, si ottiene:

$$|p_{k+1}-1|\leq(p_k^*-1)(1+|u_{k+1}|)+|u_{k+1}|=p_{k+1}^*-1.$$

□

Proposizione 2.2. *Sia $\{u_k\}$ una successione di funzioni a valori complessi limitate su un insieme S, tali che la somma $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(s)|$ converge uniformemente su S. Allora anche il prodotto*

$$f(s)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k(s))$$

converge uniformemente su S e $\mathcal{Z}(f)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{Z}(1+u_k)$, cioè s_0 è uno zero per f se e solo se esiste un indice k per cui $u_k(s_0)=-1$.
Infine, se $\{n_k\}$ è una permutazione di $\mathbb{N}$, allora vale comunque la relazione

$$f(s)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_{n_k}(s)).$$

Dimostrazione. Dalla convergenza uniforme della serie $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(s)|$ segue immediatamente la limitatezza della stessa serie su S; grazie alla prima disuguaglianza del lemma precedente, abbiamo una costante C per cui $|p_n(s)| \leq C$ per ogni n e per ogni $s \in S$, dove p_n indica come al solito il prodotto parziale di f fino al termine n-esimo. Preso un $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, possiamo trovare un intero N_0 per cui vale la limitazione uniforme

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} |u_k(s)| < \varepsilon.$$

Se $N \geq N_0$, esiste un M intero per cui $\{1, \ldots, N\} \subseteq \{n_1, \ldots, n_M\}$; indicato con q_M il prodotto parziale di f scritta con la sottosuccessione n_k fino al termine M-esimo, abbiamo l'uguaglianza:

$$q_M - p_N = p_N \left(\prod_{k \in I_{NM}} (1 + u_k) - 1 \right),$$

dove $I_{NM} = \{n_1, \ldots, n_M\} \backslash \{1, \ldots, N\}$. Dato che gli interi in I_{NM} sono tutti maggiori o uguali a N_0, otteniamo grazie al lemma precedente la stima:

$$|q_M - p_N| \leq |p_N|(e^{\varepsilon} - 1) \leq 2|p_N|\varepsilon \leq 2C\varepsilon.$$

Se la permutazione $\{n_k\}$ è la permutazione banale, cioè $n_k = k$ per ogni k, banalmente $q_M = p_M$ e dunque la stima precedente mostra la convergenza uniforme di $\{p_N\}$ alla funzione f. D'altra parte, la stessa stima implica che, per ogni $M > N_0$, si ha:

$$|p_M| \geq |p_{N_0}| - |p_M - p_{N_0}| \geq |p_{N_0}| - 2|p_{N_0}|\varepsilon = (1 - 2\varepsilon)|p_{N_0}|,$$

da cui segue che $f(s_0) = 0$ se e solo se $p_{N_0}(s_0) = 0$ (l'implicazione $\Leftarrow$ è del tutto ovvia).
Infine, la già citata stima $|q_M - p_N| \leq 2C\varepsilon$ mostra anche che $\{q_M\}$ converge allo stesso limite f di $\{p_N\}$. $\square$

Vediamo adesso due importanti conseguenze della proposizione appena dimostrata:

Corollario 2.3. *Sia $\{u_k\} \in \mathbb{R}$ una successione di numeri positivi e strettamente minori di 1. Allora $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - u_k) > 0$ se e solo se $\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$.*

Dimostrazione. Indicato come al solito $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - u_k)$, si osserva subito che la successione $\{p_n\}$ è decrescente e positiva, perciò ha limite, sia esso $p \geq$

0. Se la somma $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ è finita, la condizione sugli zeri della proposizione precedente assicura che $p > 0$. Ma d'altra parte, se la stessa somma diverge, abbiamo la disuguaglianza

$$p \leq p_n \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} u_k\right),$$

dovuta alla stima $1 - u_k \leq e^{-u_k}$ per $|u_k| \leq 1$, e l'ultimo termine sulla destra tende a 0 quando n va a infinito. □

Corollario 2.4. *Sia $\{f_k\} \in H(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe non identicamente 0 su Ω, e supponiamo che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |1 - f_k(z)|$ converga uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di Ω. Allora il prodotto $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di Ω, da cui $f \in H(\Omega)$.*
Inoltre, se $m(f, z)$ indica la molteplicità dello zero di f in z (con la convenzione $m(f, z) = 0$ se $f(z) \neq 0$), vale l'uguaglianza

$$m(f, z) = \sum_{k=1}^{\infty} m(f_k, z),$$

e la somma sulla destra è localmente finita.

Dimostrazione. La prima parte segue immediatamente dalla Proposizione 2.2. Per l'altra parte, sia $z \in \Omega$ e prendiamo un intorno V di z su cui solo un numero finito di f_k si annulla (tale intorno esiste per la prima ipotesi, in quanto in tale serie possono comparire solo un numeri finito di 1). Se $I \subseteq \mathbb{N}$ indica l'insieme di indici k per cui f_k ha uno zero in V, possiamo scrivere:

$$f(z) = \prod_{k \in I} f_k(z) \prod_{k \notin I} f_k(z).$$

Per la Proposizione 2.2, il secondo prodotto non ha zeri in V, da cui segue l'uguaglianza fra le molteplicità. □

3 Il Teorema di Fattorizzazione di Weierstrass

Dopo aver richiamato e dimostrato alcuni fatti tecnici riguardanti i prodotti infiniti di numeri e di funzioni olomorfe, passiamo alla parte interessante della trattazione. In questa seconda sezione ci occupiamo di dimostrare il già citato Teorema di Weierstrass, che assicura che ogni insieme senza punti di accumulazione è luogo di zeri di una certa funzione olomorfa: nel fare questo, esibiamo esplicitamente una tale funzione.

Definizione 3.1. Fissato un $p \geq 0$, consideriamo il p-esimo fattore elementare

$$E_p(z) = (1-z) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right),$$

con la convenzione $E_0(z) = 1 - z$.

Questi fattori elementari, misteriosi a prima vista, hanno l'importante proprietà di avere un solo zero, in $z = 1$, ed essere allo stesso tempo molto vicini a 1 se $|z| < 1$, chiedendo che p sia abbastanza grande (vedi Lemma 3.1). Un'altra interessante proprietà, che giustifica le frazioni all'esponente, è che la funzione $E_p(z)$ ha una derivata particolarmente semplice:

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= -\exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right) + (1-z)\left[\left(\sum_{k=0}^{p-1} z^k\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right)\right] = \\ &= (-1 + 1 - z^p) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right) = -z^p \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right). \end{aligned}$$

La seguente è una utile disuguaglianza che useremo spesso in seguito:

Lemma 3.1. *Se* $|z| \leq 1$, *allora* $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.

Dimostrazione. Il caso $p = 0$ è evidente. Per il caso generale, il conto precedente implica che la derivata $-E_p'(z)$ ha uno zero di ordine p in 0, e la sua espansione in serie di potenze ha coefficienti reali mai negativi; visto che

$$1 - E_p(z) = -\int_0^z E_p'(w)dw,$$

si ha che $1 - E_p(z)$ ha uno zero di ordine $p+1$ in 0 e, posto $\phi(z) = \frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$, ϕ ammette una scrittura in serie di potenze con tutti i coefficienti reali e mai negativi. Da questo segue che, se $|z| \leq 1$, $|\phi(z)| \leq \phi(1) = 1$, come voluto. □

Quello che vogliamo mostrare adesso è che i fattori elementari sono i "mattoni" con cui costruire funzioni olomorfe con zeri prefissati; il seguente teorema procede esattamente in questa direzione:

Teorema 3.2. *Sia* $\{z_k\}$ *una successione di numeri complessi non nulli tali che* $r_k = |z_k| \to \infty$ *quando* $n \to \infty$. *Se* $\{p_k\}$ *è una successione di interi non negativi tali che* $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_k}\right)^{1+p_k} < \infty$ *per ogni* $r \geq 0$, *allora il prodotto*

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{p_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)$$

definisce una funzione intera P che ha esattamente gli z_k come zeri. Più precisamente, se z_0 appare m volte nella successione $\{z_k\}$, allora P ha in z_0 uno zero di molteplicità esattamente m.

Dimostrazione. Fissiamo $r > 0$. Se $|z| \leq r$, il Lemma 3.1 mostra che, non appena $r_k \geq r$:

$$\left|1 - E_{p_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_k}\right|^{1+p_k} \leq \left(\frac{r}{r_k}\right)^{1+p_k}.$$

Perciò l'ipotesi assicura che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left|1 - E_{p_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)\right|$ converge uniformemente sui compatti, e il Corollario 2.4 permette di concludere. □

A questo punto siamo in grado di provare il Teorema di Fattorizzazione di Weierstrass:

Teorema 3.3 (Weierstrass). *Sia f una funzione intera tale che $f(0) \neq 0$, e sia $\mathcal{Z}(f) = \{z_k\}$, con gli zeri ripetuti secondo le loro molteplicità. Allora esiste una funzione intera g e una successione $\{p_k\}$ di interi non negativi tali che:*

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_{p_k}\left(\frac{z}{z_k}\right).$$

Dimostrazione. Osserviamo che possiamo applicare il risultato precedente, perchè se ci sono infiniti zeri, non possono essere tutti contenuti in un compatto; sia perciò P il prodotto considerato nel teorema precedente, formato con gli zeri di f Allora la funzione $\frac{f}{P}$ ha solo singolarità rimovibili nel piano, dunque può essere estesa a una funzione intera. Visto che il piano è semplicemente connesso, e $\frac{f}{P}$ non ha zeri, possiamo scrivere $\frac{f(z)}{P(z)} = e^{g(z)}$ per una certa funzione intera g. □

È importante osservare che l'ipotesi tecnica $f(0) \neq 0$ non causa nessun problema, in quanto se f avesse uno zero di molteplicità m in 0, basterebbe considerare $\tilde{f}(z) = \frac{f(z)}{z^m}$ ed applicare il teorema a $\tilde{f}$.

Per concludere la sezione, forniamo una dimostrazione del teorema di Weierstrass enunciato nell'introduzione, che estende il Teorema 3.2; indichiamo come usuale con S^2 la sfera di Riemann, ricordando che possiamo identificare $\mathbb{C}$ come $S^2 \backslash \{\infty\}$.

Teorema 3.4. *Sia $\Omega \subsetneq S^2$ un aperto, e consideriamo un insieme $\mathcal{Z} \subseteq \Omega$ senza punti di accumulazione. Associamo inoltre ad ogni $\alpha \in \mathcal{Z}$ un numero $m(\alpha) > 0$. Allora esiste una funzione $f \in H(\Omega)$ tale che $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$, e tale che f ha in $\alpha \in \mathcal{Z}$ uno zero di molteplicità esattamente $m(\alpha)$.*

Dimostrazione. A meno di considerare una trasformazione della sfera S^2 del tipo $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ per opportuni $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, possiamo supporre che $\infty \in \Omega \backslash \mathcal{Z}$. Allora $S^2 \backslash \Omega$ è un compatto non vuoto di $\mathbb{C}$, e ∞ non è punto limite di $\mathcal{Z}$. Chiaramente, se $\mathcal{Z}$ è finito, una opportuna funzione razionale dà facilmente la tesi; se invece $\mathcal{Z}$ è numerabile, scriviamo gli elementi di $\mathcal{Z}$ come una successione $\{\alpha_k\}$ in cui gli zeri sono ripetuti secondo la loro molteplicità. Inoltre, per ogni $k \geq 1$, sia $\beta_k \in S^2 \backslash \Omega$ il punto di minima distanza di α_k dal compatto $S^2 \backslash \Omega$. Necessariamente la distanza $|\beta_k - \alpha_k|$ deve tendere a 0 quando k va a infinito, altrimenti $\mathcal{Z}$ avrebbe un punto limite in Ω. Mostriamo che la funzione

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_k \left(\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k} \right)$$

soddisfa le proprietà richieste. Poniamo $r_k = 2|\alpha_k - \beta_k|$ e prendiamo un compatto K di Ω. Data la compattezza di K e di $S^2 \backslash \Omega$, e visto che $r_k \to 0$, si ha che $r_k < |z - \beta_k|$ per ogni $z \in K$ e per ogni $k \geq N$ abbastanza grande. Ma allora $\left| \frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k} \right| \leq \frac{1}{2}$, da cui, per il Lemma 3.1, segue che

$$\left| 1 - E_k \left(\frac{\alpha_k - \beta_k}{z - \beta_k} \right) \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

per ogni $z \in K$ e $k \geq N$, e la tesi segue applicando il Corollario 2.4. □

4 La Formula di Jensen

Come già detto nell'introduzione, vogliamo concentrarci su particolari sottoclassi di funzioni di $H(\Omega)$, per trarre delle informazioni quantitative sugli zeri di tali funzioni; questa teoria prende spunto dalla cosiddetta Formula di Jensen (Teorema 4.3), che enunceremo e dimostreremo fra poco. Prima però calcoliamo un integrale definito che ricorrerà spesso nelle prossime pagine.

Lemma 4.1. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0.$

Dimostrazione. Consideriamo la regione $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) < 1\}$ semplicemente connessa. Visto che $1-z$ non si annulla mai su Ω, esiste una $h \in H(\Omega)$ tale che $1 - z = e^{h(z)}$ in Ω, e tale h è unica se chiediamo che $h(0) = 0$. Visto che $\mathfrak{Re}(1 - z)$ è sempre positiva in Ω, abbiamo che

$$\mathfrak{Re}(h(z)) = \log |1 - z|, \qquad |\mathfrak{Im}(h(z))| < \frac{\pi}{2}$$

per ogni $z \in \Omega$. Fissato un δ sufficientemente piccolo, sia Γ_δ il cammino $\Gamma_\delta(t) = e^{it}$ per $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$, e sia γ_δ l'arco di cerchio di centro 1 che passa da $e^{i\delta}$ a $e^{-i\delta}$ all'interno della palla unitaria B. Visto che il cammino γ_δ è percorso in senso opposto rispetto a Γ_δ, e dato che $h(0) = 0$, il teorema di Cauchy dà l'uguaglianza:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \log|1-e^{i\theta}|d\theta = \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z}\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z}\right).$$

Ma la lunghezza di γ_δ è sicuramente minore di $\pi\delta$, quindi basta stimare il modulo dell'ultimo integrale per ottenere la tesi; grazie alle disuguaglianze ottenute all'inizio, abbiamo:

$$\left|\int_{\gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z}\right| \leq \pi\delta \sup_{z\in\gamma_\delta}\left[\log|1-z|\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\pi}{2}\mathfrak{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right] \leq C\delta\log(1/\delta),$$

e l'ultimo termine tende a 0 se $\delta \to 0$, e questo permette di concludere. □

Prima di passare alla formula di Jensen, vogliamo richiamare un risultato di base che useremo all'interno della dimostrazione della formula:

Teorema 4.2. *Sia $\Omega = B(0,r)$ una palla aperta, e $f \in H(\Omega)$ mai nulla su Ω. Allora $\log|f|$ è armonica in Ω.*

Dimostrazione. Ω è semplicemente connesso, quindi esiste una $g \in H(\Omega)$ tale che $f = e^g$ in Ω. Detta $u = \mathfrak{Re}(g)$, sappiamo che u è armonica in Ω e $|f| = e^u$, da cui la tesi. □

Teorema 4.3 (Formula di Jensen)**.** *Sia $\Omega = B(0,R)$, $f \in H(\Omega)$ tale che $f(0) \neq 0$, e fissiamo $0 < r < R$. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono gli zeri di f in $\overline{B(0,r)}$, ripetuti secondo le loro molteplicità, vale l'uguaglianza:*

$$|f(0)|\prod_{k=1}^{n}\frac{r}{|\alpha_k|} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right).$$

Dimostrazione. Ordiniamo gli zeri α_k in modo che i primi m stiano in $B(0,r)$ e gli altri in $\partial B(0,r)$. Consideriamo la funzione olomorfa:

$$g(z) = f(z)\prod_{k=1}^{m}\frac{r^2-\overline{\alpha_k}z}{r(\alpha_k - z)}\prod_{k=m+1}^{n}\frac{\alpha_k}{\alpha_k - z}.$$

g è olomorfa in una certa palla aperta $B(0,r') \subseteq \Omega$ contenente $\overline{B(0,r)}$, e non ha nessuno zero in $B(0,r')$, perciò il teorema precedente assicura che $\log|g|$ è armonica in $B(0,r')$, da cui:

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(re^{i\theta})|d\theta.$$

Notiamo che i fattori nel primo prodotto della scrittura di g hanno modulo 1 se $|z| = r$ (basta scrivere $r^2 = z\bar{z}$), perciò, se scriviamo $\alpha_k = re^{i\theta_k}$ per $k \geq m+1$, abbiamo l'uguaglianza:

$$\log|g(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})| - \sum_{k=m+1}^{n} \log|1 - e^{i(\theta-\theta_k)}|.$$

Il Lemma 4.1 mostra dunque che l'integrale $\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})|d\theta$ non cambia se g viene sostituito da f; combinando quest'ultima osservazione con la facile uguaglianza $|g(0)| = |f(0)|\prod_{k=1}^{m} \frac{r}{|\alpha_k|} = |f(0)|\prod_{k=1}^{n} \frac{r}{|\alpha_k|}$, otteniamo la tesi. $\square$

Come già osservato nell'enunciato del teorema di Weierstrass, l'ipotesi $f(0) \neq 0$ non è assolutamente restrittiva, in quanto dividere per un certo z^m elimina solo radici nulle.

La formula di Jensen è estremamente interessante anche perchè fornisce delle limitazioni dall'alto sul numero di zeri $n(r)$ che una data funzione intera f può avere nella palla chiusa $\overline{B(0,r)}$. Infatti, fissiamo un $r > 0$, e supponiamo senza perdita di generalità che $f(0) = 1$; denotato $M(r) = \sup_\theta |f(re^{i\theta})|$, la formula di Jensen dà che:

$$M(2r) \geq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(2re^{i\theta})|d\theta\right) = \prod_{k=1}^{n(2r)} \frac{2r}{|\alpha_k|} \geq \prod_{k=1}^{n(r)} \frac{2r}{|\alpha_k|} \geq 2^{n(r)},$$

dove $\{\alpha_k\}$ è la successione degli zeri di f, ordinati per modulo decrescente. Dunque:

Teorema 4.4. *$n(r) \leq \log_2 M(2r)$.*

Perciò abbiamo mostrato che il numero di zeri di f di modulo minore o uguale a r è controllato dal massimo valore che assume f sulla palla chiusa di raggio $2r$; se ci concentriamo sulla classe di funzioni intere per cui $M(r) < \exp(Ar^k)$ per certe costanti positive A, k, allora il Teorema 4.4 produce la stima:

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \leq k.$$

Non è difficile vedere che questa è la migliore stima ottenibile per la classe di funzioni scelta sopra: se k è un intero positivo e $f(z) = 1 - e^{z^k}$, allora $n(r) \sim kr^k$ (infatti l'equazione $e^{z^k} = 1$ si riscrive come $z^k = 2\pi m$, ma la condizione $|z| \leq r$ limita il numero di m a $\frac{1}{\pi}r^k$, e ogni m dà luogo a k soluzioni), e dunque:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r} = k.$$

5 Zeri di funzioni olomorfe limitate

In quest'ultima sezione ci occupiamo finalmente dell'obiettivo principale della trattazione: trovare le esatte condizioni che gli zeri di una funzione olomorfa limitata sulla palla deve soddisfare. Il prossimo teorema ci dà una condizione sufficiente:

Teorema 5.1. *Sia $\{\alpha_k\}$ una successione di numeri (anche ripetuti) non nulli in $B(0,1)$, tale che $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<\infty$. Allora, preso un qualunque intero $m\geq 0$, la funzione $B(z)$ definita dal prodotto*

$$B(z)=z^m\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\overline{\alpha_k}z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$$

sta in H_b, e $\mathcal{Z}(B)=\{\alpha_k\}$ (più eventualmente lo 0, se $m>0$), con le giuste molteplicità. Una tale funzione B prende il nome di prodotto di Blaschke.

Dimostrazione. Consideriamo la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|1-\frac{\alpha_k-z}{1-\overline{\alpha_k}z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right|.$$

Se $|z|\leq r<1$, il termine k-esimo di tale serie è:

$$\left|\frac{\alpha_k+|\alpha_k|z}{(1-\overline{\alpha_k}z)\alpha_k}\right|(1-|\alpha_k|)\leq\frac{1+r}{1-r}(1-|\alpha_k|),$$

dunque per il Corollario 2.4 la funzione B è ben definita e $B\in H(B(0,1))$. Per vedere che $B(z)$ è limitata sulla palla unitaria, basta osservare che ogni fattore presente nel prodotto che definisce B ha valore assoluto minore di 1, da cui $|B(z)|<1$ su $B(0,1)$. □

Trovato che la condizione $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<\infty$ è sufficiente per l'esistenza di una funzione olomorfa in H_b con tali zeri prefissati, passiamo a mostrare che la stessa condizione è anche necessaria. Nel farlo, dimostreremo che essa è una condizione necessaria per gli zeri di una classe di funzioni molto più ampia, che andiamo ora ad introdurre.

Per ogni numero reale positivo t, definiamo $\log^+ t=\max\{\log t,0\}$. Definiamo la classe di Nevanlinna $\mathcal{N}$ come l'insieme delle funzioni in $H(B(0,1))$ per cui:

$$\sup_{r\in(0,1)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta\right]<\infty.$$

Chiaramente la classe $\mathcal{N}$ è un'estensione di H_b, e la condizione precedente impone una limitazione alla crescita di $|f(z)|$ quando $|z| \to 1$; è importante notare che la stessa condizione non imporrebbe niente se sostituissimo log a $\log^+$.

Finalmente, il prossimo teorema mostra che la condizione sugli zeri trovata precedentemente è necessaria per tutte le funzioni $f \in \mathcal{N}$:

Teorema 5.2. *Sia $f \in \mathcal{N}$ non identicamente nulla in $B(0,1)$, e siano $\{\alpha_k\}$ gli zeri di f, ripetuti secondo la loro molteplicità. Allora:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |\alpha_k|) < \infty.$$

Dimostrazione. Come al solito, se f ha uno zero di ordine m in 0, si può considerare $g(z) = \frac{f(z)}{z^m} \in \mathcal{N}$, che ha gli stessi zeri non nulli di f. Quindi assumiamo senza perdita di generalità $f(0) \neq 0$. Inoltre la tesi è ovviamente soddisfatta se il numero di zeri di f in $B(0,1)$ è finito, quindi assumiamo anche che $|\mathcal{Z}(f)| = \infty$. Se $n(r)$ indica il numero di zeri di f nella palla $\overline{B(0,r)}$, e n è un naturale fissato, scegliamo un $r < 1$ per cui $n(r) > n$; la formula di Jensen

$$|f(0)| \prod_{k=1}^{n(r)} \frac{r}{|\alpha_k|} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta\right)$$

implica che:

$$|f(0)| \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{|\alpha_k|} \leq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta\right).$$

Per ipotesi esiste una costante $C > 0$ che maggiora il termine di destra per ogni $r \in (0,1)$, perciò:

$$\prod_{k=1}^{n} |\alpha_k| \geq C^{-1}|f(0)|r^n$$

per ogni $r \in (0,1)$. Prendendo il limite per $r \to 1^-$, otteniamo finalmente la disuguaglianza:

$$\prod_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \geq C^{-1}|f(0)| > 0,$$

che permette di concludere grazie al Corollario 2.3. □