La Geometria e l'Aritmetica dei Tori Complessi

Giacomo Mezzedimi

22 luglio 2017

1 Superfici di Riemann

1.1 Preliminari

Nel seguito indicheremo con S una superficie di Riemann compatta e connessa, e ci riferiremo ad essa semplicemente come *superficie*.

S può essere interpretata come varietà complessa di dimensione 1. Se ds^2 è una qualsiasi metrica su S con $(1,1)$-forma associata ω, ovviamente la 3-forma $d\omega$ è nulla, e dunque la metrica ds^2 è di Kähler.

L'operatore $\overline{\partial}$ commuta con le proiezioni $\pi^{p,q}$ (nel senso che $\pi^{p,q} \circ \overline{\partial} = \overline{\partial} \circ \pi^{p,q-1}$), quindi se $\varphi = \alpha dz + \beta d\overline{z}$ è una qualsiasi 1-forma su S, φ è armonica se e solo se $\partial\varphi = \overline{\partial}\varphi = 0$ o, equivalentemente, se e solo se $d\varphi = \overline{d}\varphi = 0$, dove $\overline{d} = \partial - \overline{\partial}$. Visto che φ è d-chiusa, localmente è d-esatta, cioè esiste una funzione f tale che $\varphi = df$; grazie alla semplice osservazione

$$0 = \overline{d}\varphi = \overline{d}df = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy,$$

otteniamo che φ è armonica se e solo se è localmente il differenziale di una funzione armonica (nel senso usuale). È dunque ben definito lo spazio $\mathscr{H}(S)$ delle forme armoniche, indipendentemente dalla metrica su S.

In seguito, per semplicità, potremo assumere implicitamente che $\mathrm{vol}(S) = 1$; inoltre, il Kodaira embedding implica che ogni superficie è immergibile iniettivamente in uno spazio proiettivo.

Prima di addentrarci nella teoria vera e propria, vogliamo rimarcare alcuni risultati di base che sottolineano l'importanza dell'unico invariante topologico che le superfici ammettono: il genere $g(S)$. Come usuale, definiamo *genere* di S il numero naturale

$$g(S) = \frac{b_1(S)}{2} = \frac{2 - \chi(S)}{2},$$

che geometricamente indica il numero di "buchi" che ha la superficie S.
Sia $f : S \to S'$ una mappa olomorfa non costante fra due superfici; da argomenti di base abbiamo che l'immagine $f(S)$ è sia aperta che chiusa, e dunque f è surgettiva.

Definizione 1.1.1. Si definisce *grado* di f quel numero naturale n tale che $f_*([S]) = n[S']$, dove $[S], [S']$ sono rispettivamente i generatori di $H^2(S, \mathbb{Z})$ e $H^2(S', \mathbb{Z})$.

Fissato $q \in S'$, indichiamo con Θ la forma di curvatura su $[(q)] \in \mathrm{Pic}(S')$; $f^*\Theta$ è la forma di curvatura su $f^*[(q)] = [f^*(q)] \in \mathrm{Pic}(S)$, e

$$\deg f^*(q) = \int_S f^* \left(\frac{i}{2\pi} \Theta \right) = \langle c_1([f^*(q)]), [S] \rangle = \langle c_1([(q)]), f_*([S]) \rangle = n,$$

da cui la cardinalità di $f^{-1}(q)$ è esattamente n, contando i punti con molteplicità.

Per ogni $p \in S$, possiamo scegliere coordinate locali per cui f si scrive come $z \mapsto w = z^v$; $v = v(p)$ viene chiamato *indice di ramificazione* di f in p, e il punto p si dice *ramificato* se $v(p) > 1$. Dato che ogni punto sufficientemente vicino a un punto ramificato p non è ramificato, la compattezza di S implica che il numero di punti ramificati è finito; ha quindi senso definire il *luogo di ramificazione* come uno dei divisori

$$B = \sum_{p \in S} (v(p) - 1)p \in \mathrm{Div}(S), \qquad B' = \sum_{p \in S} (v(p) - 1)f(p) \in \mathrm{Div}(S').$$

Per ogni $q \in S'$, scriviamo $f^*(q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} v(p)p \in \mathrm{Div}(S)$; chiaramente

$$\deg f^*(q) = n = \sum_{p \in f^{-1}(q)} v(p). \tag{1}$$

Si ha dunque un rivestimento $f : S \backslash B \to S' \backslash B'$ di grado n; se triangoliamo S' in modo che ogni punto di B' sia un vertice, possiamo triangolare S in modo che le celle aperte siano le componenti connesse delle immagini inverse delle celle aperte di S'. Se c_0, c_1, c_2 indicano rispettivamente il numero di 0-,1-,2-celle in S', avremo $n \cdot c_1$ 1-celle e $n \cdot c_2$ 2-celle in S; inoltre, dalla relazione (1), abbiamo

$$|f^{-1}(q)| = n - \sum_{p \in f^{-1}(q)} (v(p) - 1),$$

da cui il numero di vertici nella triangolazione di S è esattamente

$$\sum_{q \in B} \left(n - \sum_{p \in f^{-1}(q)} (v(p) - 1) \right) = n \cdot c_0 - \sum_{p \in S} (v(p) - 1).$$

Da questo si deduce facilmente che

$$\chi(S) = n \cdot c_2 - n \cdot c_1 + n \cdot c_0 - \sum_{p \in S} (v(p) - 1) = n \cdot \chi(S') - \sum_{p \in S} (v(p) - 1), \quad (2)$$

cioè

$$g(S) = n(g(S') - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{p \in S} (v(p) - 1).$$

In modo simile, possiamo legare i fibrati canonici K_S e $K_{S'}$: se ω è una 1-forma meromorfa globale su S', scrivibile localmente come $\omega = \frac{g(w)}{h(w)} dw$, per ogni $p \in S$ con indice di ramificazione $v(p) = v$ si possono trovare coordinate locali tali che $w = z^v$, e perciò

$$f^* \omega = \frac{g(z^v)}{h(z^v)} dz^v = v z^{v-1} \frac{g(z^v)}{h(z^v)} dz,$$

cioè $\operatorname{ord}_p(f^* \omega) = v \cdot \operatorname{ord}_{f(p)}(\omega) + v - 1$, da cui

$$(f^* \omega) = f^*(\omega) + \sum_{p \in S} (v(p) - 1) p.$$

In altre parole $K_S = f^* K_{S'} + B$, e in particolare

$$\deg K_S = n \cdot \deg K_{S'} + \sum_{p \in S} (v(p) - 1). \quad (3)$$

Grazie a questa serie di osservazioni deduciamo facilmente:

Teorema 1.1.1 (Formula di Riemann-Hurwitz). $\deg K_S = -\chi(S) = 2g - 2$.

Dimostrazione. Se $f \in H^0(S, \mathscr{M}_S)$ è una funzione meromorfa globale su S, scritta localmente come $\frac{g(z)}{h(z)}$, con g, h coprimi, f induce una mappa olomorfa globale

$$\begin{array}{rccc} f: & S & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & z & \longmapsto & [g(z), h(z)] \end{array}$$

Visto che $\chi(\mathbb{P}^1) = 2 = -\deg K_{\mathbb{P}^1}$, dalle relazioni (2) e (3) otteniamo

$$\chi(S) = n \cdot \chi(\mathbb{P}^1) - \sum_{p \in S} (v(p) - 1) = -n \cdot \deg K_{\mathbb{P}^1} - \sum_{p \in S} (v(p) - 1) = -\deg K_S,$$

cioè la tesi. $\square$

Per completezza osserviamo anche che:

Corollario 1.1.2.
- *Il numero di punti di ramificazione di f, contati con molteplicità, coincide con il numero $\sum_{p \in S} (v(p) - 1) = -\chi(S) + n \cdot \chi(S')$, e in particolare è pari;*
- *Se f non è costante, $g(S) \geq g(S')$.*

L'ultimo risultato preliminare su cui ci vogliamo soffermare è la cosiddetta *formula del genere*, che lega il genere di una superficie in $\mathbb{P}^2$ al grado del polinomio omogeneo che la caratterizza; prima di enunciarla e dimostrarla, richiamiamo una formula nota:

Proposizione 1.1.3 (Formula di aggiunzione)**.** *Sia S una superficie in $\mathbb{P}^2$. Allora il fibrato canonico K_S può essere descritto come*

$$K_S = (K_{\mathbb{P}^2} \otimes [S])_{|S}.$$

Dimostrazione. Indichiamo con $N_S = \frac{T'_{\mathbb{P}^2|S}}{T'_S}$ il fibrato normale a S; come usuale, possiamo identificare il fibrato N_S^* come il sottofibrato del cotangente $(T'_{\mathbb{P}^2|S})^*$ formato dai covettori nulli su T'_S.
Se S è data su degli aperti U_α da delle f_α olomorfe, il line bundle $[S]$ è dato dalle funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$; visto che f_α è nulla su $V \cap U_\alpha$, e visto che il differenziale $df_\alpha \in H^0(U_\alpha, \mathcal{O}(N_S^*))$ non è mai zero per liscezza di S, abbiamo che

$$df_\alpha = d(g_{\alpha\beta} f_\beta) = dg_{\alpha\beta} f_\beta + g_{\alpha\beta} df_\beta = g_{\alpha\beta} df_\beta,$$

e dunque le df_α si rincollano a una sezione globale mai zero di $N_S^* \otimes [S]$. Tale sezione produce un frame globale per $N_S^* \otimes [S]$, e quindi $N_S^* \otimes [S]$ è banale,

cioè $N_S^* = [-S]_{|S}$.
Considerando la successione esatta

$$0 \longrightarrow N_S^* \longrightarrow (T'_{\mathbb{P}^2|S})^* \longrightarrow (T'_S)^* \longrightarrow 0,$$

si ottiene facilmente che

$$\left(\bigwedge^2 (T'_{\mathbb{P}^2})^*\right)_{|S} \cong \bigwedge^1 (T'_S)^* \otimes N_S^*,$$

da cui

$$K_S = K_{\mathbb{P}^2|S} \otimes N_S = (K_{\mathbb{P}^2} \otimes [S])_{|S}.$$

□

Teorema 1.1.4 (Formula del genere)**.** *Sia S una superficie in $\mathbb{P}^2$ definita da un polinomio omogeneo di grado d. Allora*

$$g(S) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Dimostrazione. Sappiamo che, indicato con H un iperpiano generico di $\mathbb{P}^2$, $K_{\mathbb{P}^2} = -3[H]$, mentre $[S] = d[H]$, da cui $K_{\mathbb{P}^2} \otimes [S] = (d-3)[H]$. Visto che per la formula di aggiunzione il grado $\deg K_S$ coincide con la cardinalità dell'intersezione fra S e $(d-3)H$, abbiamo che

$$g(S) = \frac{2 + \deg K_S}{2} = \frac{2 + d(d-3)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

□

In particolare otteniamo che tutte le cubiche lisce in $\mathbb{P}^2$ sono tori.

1.2 Superfici di genere 0 e 1

Grazie alla teoria richiamata, siamo in grado di descrivere in modo piuttosto esplicito le superfici di genere 0 e 1. In particolare, mostreremo che l'unica superficie di genere 0 è la sfera di Riemann $\mathbb{P}^1$, mentre ogni superficie di genere 1 può essere vista come una cubica liscia in $\mathbb{P}^2$.

Innanzitutto osserviamo che, se S è una superficie di genere g, allora la dimensione degli spazi $H^0(S, \Omega_S^1) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S)$ è esattamente g. Infatti tali spazi sono isomorfi grazie alla dualità di Kodaira-Serre, e per la decomposizione di Hodge si ha che

$$2g = \dim H^1(S, \mathbb{C}) = \dim H^0(S, \Omega_S^1) + \dim H^1(S, \mathcal{O}_S).$$

Proposizione 1.2.1. *Ogni superficie di genere* 0 *è biolomorfa a* $\mathbb{P}^1$.

Dimostrazione. Preso un qualunque punto $p \in S$, e detto $L = [(p)] \in \mathrm{Pic}(S)$, possiamo considerare la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(L) \xrightarrow{r_p} L_p \longrightarrow 0,$$

che in coomologia diventa

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(L)) \longrightarrow L_p \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0.$$

Ma allora esiste una sezione globale di L non nulla in p, da cui esiste una $f \in \mathcal{L}(p)$ meromorfa, olomorfa fuori da p e con un polo semplice in p. Chiaramente f induce una mappa $f : S \to \mathbb{P}^1$ olomorfa e biunivoca, in quanto il valore $\infty \in \mathbb{P}^1$ è preso una e una sola volta, e perciò segue la tesi. $\square$

Proposizione 1.2.2. *Ogni superficie di genere* 1 *è una cubica non singolare in* $\mathbb{P}^2$.

Dimostrazione. Il grado $\deg K_S$ è zero, quindi $3 > \deg K_S + 2$ e per il Kodaira embedding $L = [(3p)]$ immerge S in $\mathbb{P}^N$, con $N = \dim H^0(S, \mathcal{O}(L)) - 1 \geq 2$. Ma visto che $H^0(S, \mathcal{O}(L)) \cong \mathcal{L}(3p)$ è generato da funzioni con parte principale della forma

$$\frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0,$$

necessariamente abbiamo che $\dim H^0(S, \mathcal{O}(L)) \leq 4$. Osservando che, se la dimensione fosse proprio 4, esisterebbe una funzione meromorfa su S con un unico polo semplice in p, che indurrebbe un biolomorfismo di S con $\mathbb{P}^1$, concludiamo che $\dim H^0(S, \mathcal{O}(L)) = 3$. $\square$

Nonostante la precedente proposizione dimostri l'esistenza di un'immersione $S \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ di ogni superficie S di genere 1, può essere istruttivo costruire esplicitamente tale immersione; questo sarà il contenuto della prossima parte della sezione.

Prima di cominciare, ricordiamo che, se φ è una 1-forma meromorfa su S, con divisore polare $a_1 + \ldots + a_d$, allora

$$\sum_i \mathrm{Res}_{a_i}(\varphi) = 0.$$

Infatti, preso $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo e prese delle palle $B_i = B(a_i, \varepsilon)$ intorno ai poli, per Stokes abbiamo

$$0 = -\int_{S \setminus \bigcup_i B_i} d\varphi = \int_{\partial(\bigcup_i B_i)} \varphi = \sum_i \mathrm{Res}_{a_i}(\varphi).$$

In particolare, prendendo $\varphi = \frac{df}{f}$, otteniamo che le funzioni meromorfe su S hanno lo stesso numero di zeri e poli, contati con molteplicità.

Adesso, procedendo come nella dimostrazione della Proposizione 1.2.2, otteniamo che non esistono funzioni meromorfe su S con un unico polo semplice; notando però che $H^1(S, \mathcal{O}(p)) \cong H^0(S, \mathcal{O}(K_S \otimes [(p)]^*)) = 0$ per il vanishing, in quanto $\deg(p) > \deg K_S$, abbiamo che la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(p) \longrightarrow \mathcal{O}(2p) \longrightarrow \mathbb{C}_p \longrightarrow 0$$

produce una mappa in coomologia

$$H^0(S, \mathcal{O}(2p)) \longrightarrow \mathbb{C}_p \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}(p)) = 0.$$

Ma allora esiste una funzione F meromorfa su S con un polo doppio in p e olomorfa fuori da p. Inoltre $H^0(S, \Omega^1_S)$ ha dimensione $1 = g(S)$, perciò, detta ω una qualunque forma olomorfa non zero su S, abbiamo che $H^0(S, \Omega^1_S) = \langle \omega \rangle$, e dunque $\deg(\omega) = \deg K_S = 0$, da cui ω è ovunque diversa da zero. Considerando la 1-forma meromorfa $F \cdot \omega$, che ha come divisore polare p, si ha che $\mathrm{Res}_p(F \cdot \omega) = 0$, e perciò F si può scrivere intorno a p come

$$F(z) = \frac{1}{z^2} + O(1),$$

a meno di moltiplicare per una costante opportuna. Inoltre la funzione $\frac{dF}{\omega}$ è olomorfa fuori da p ed ha un polo triplo in p, dunque a meno di considerare $F' = \lambda \frac{dF}{\omega} + \lambda' F$ per certe costanti λ, λ', possiamo scrivere

$$F'(z) = \frac{1}{z^3} + O(1)$$

in un intorno di p. Ma allora l'embedding $i_L : S \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ dato dal line bundle $L = [(3p)]$ può essere scritta come $z \mapsto [1, F(z), F'(z)]$, in quanto $\{1, F, F'\}$ è una base di $H^0(S, \mathcal{O}(L))$; visto che

$$F'(z)^2 = \frac{1}{z^6} + \frac{c}{z^2} + O(1), \qquad F(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{c'}{z^3} + \frac{c''}{z^2} + O(1),$$

abbiamo che la mappa $F'(z)^2 + c'F'(z) - F(z)^3 + (c'' - c)F(z)$ è olomorfa fuori da p e ha un polo semplice in p, cioè è costante. Dunque l'immagine dell'embedding i_L è semplicemente il luogo di zeri del proiettivizzato di $y^2 + c'y = x^3 + ax + b$, dove denotiamo con $x = \frac{z_1}{z_0}$ e $y = \frac{z_2}{z_0}$ le usuali coordinate, e a meno di cambiare variabili tale immagine può essere identificata col luogo di zeri del proiettivizzato di

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda),$$

per un certo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Tutta questa trattazione esplicita ha il merito di suggerire che l'insieme delle superfici di genere 1 sia parametrizzato da un'unica variabile complessa λ; ricordando che ogni toro complesso di dimensione 1 è una superficie di genere 1, e che l'insieme dei tori complessi di dimensione 1 può essere anch'esso parametrizzato da un'unica variabile complessa, viene naturale chiedersi se i tori complessi esauriscano l'insieme delle superfici di genere 1 a meno di biolomorfismo. La parte restante del capitolo si occupa di mostrare che tale ipotesi è effettivamente vera.

1.3 Il Teorema di Abel

Questa sezione si occupa di descrivere geometricamente le superfici di qualunque genere, usando il noto *Teorema di Abel*.

Per cominciare, indichiamo con C una cubica liscia in $\mathbb{P}^2$, data dall'equazione $y^2 = x^3 + ax + b$ per certi $a, b \in \mathbb{C}$. Come già osservato, il genere di C è 1, perciò C è topologicamente un toro. Se $\omega \in H^0(C, \Omega^1_C)$ è una 1-forma olomorfa non zero su C, essa genera $H^0(C, \Omega^1_C)$, e chiaramente l'integrale

$$\int_q^p \omega$$

non è ben definito, ma lo è solo modulo i periodi di ω, cioè modulo gli integrali di ω lungo i cammini chiusi $\gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$. Se γ_1, γ_2 sono cammini chiusi che generano $H_1(C, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, denotiamo

$$a_1 = \int_{\gamma_1} \omega, \qquad a_2 = \int_{\gamma_2} \omega;$$

ovviamente i periodi dei $\gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$ saranno numeri in $\Lambda = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(a_1, a_2) \subseteq \mathbb{C}$. Non è difficile vedere che Λ è un reticolo massimale in $\mathbb{C}$, in quanto se per assurdo esistesse una relazione di dipendenza lineare $k_1 a_1 + k_2 a_2 = 0$ su $\mathbb{R}$, essa produrrebbe relazioni di dipendenza lineare

$$k_1 \int_{\gamma_1} \omega + k_2 \int_{\gamma_2} \omega = 0, \qquad k_1 \int_{\gamma_1} \overline{\omega} + k_2 \int_{\gamma_2} \overline{\omega} = 0$$

e perciò $k_1[\gamma_1] + k_2[\gamma_2] = 0$ in $H_1(C, \mathbb{R})$, in quanto $\omega, \overline{\omega}$ generano $H^1_{DR}(C) = H^{1,0}(C) \oplus H^{0,1}(C)$, assurdo.
A questo punto, l'integrale $\int_{p_0}^p \omega$ al variare di $p \in C$ definisce una funzione

olomorfa $C \to \mathbb{C}/_\Lambda$, che però è completamente intrattabile; Abel fu il primo ad accorgersi che tale funzione diventa semplice da studiare se si considerano particolari somme:

Teorema 1.3.1 (Abel). *Sia $D = (f) = \sum_i p_i - \sum_i q_i$ il divisore associato a una funzione f meromorfa su C. Allora*

$$\sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega \equiv 0 \pmod{\Lambda},$$

cioè esistono cammini α_i da q_i a p_i tali che

$$\sum_i \int_{\alpha_i} \omega = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo i divisori $D_\lambda = (\lambda_0 f - \lambda_1) = \sum_i p_i(\lambda) - \sum_i q_i(\lambda)$ al variare di $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1] \in \mathbb{P}^1$. Posto

$$\psi(\lambda) = \sum_i \int_{q_i(\lambda)}^{p_i(\lambda)} \omega \pmod{\Lambda},$$

ψ definisce una mappa olomorfa $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}/_\Lambda$. ψ è costante, perchè se non lo fosse, sarebbe surgettiva e si avrebbe che $g(\mathbb{P}^1) \geq g(\mathbb{C}/_\Lambda)$, assurdo. Osservato che ψ è zero per $\lambda_0 \to 0$, in quanto il divisore D_λ è nullo per $\lambda_0 \to 0$, concludiamo che ψ è ovunque zero. □

Vogliamo generalizzare tali idee a superfici di genere arbitrario: siano $\delta_1, \ldots, \delta_{2g}$ 1-cicli in S che formano una base per $H_1(S, \mathbb{Z})$. Come spesso si fa in topologia algebrica, possiamo scegliere i generatori in modo che formino un $4g$-agono formato dalla concatenazione dei cammini $\delta_i \delta_{g+i} \delta_i^{-1} \delta_{g+i}^{-1}$ per $i = 1, \ldots, g$. I primi g elementi della base vengono chiamati *A-cicli*, mentre i secondi *B-cicli*. Siano invece $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base per $H^0(S, \Omega^1_S)$. Definiamo *matrice dei periodi* la matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{\delta_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\delta_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\delta_1} \omega_g & \cdots & \int_{\delta_{2g}} \omega_g \end{pmatrix} \in M_{g \times 2g}(\mathbb{C}).$$

Le colonne $\Pi^i = {}^t\left(\int_{\delta_i} \omega_1 \ \cdots \ \int_{\delta_i} \omega_g\right) \in \mathbb{C}^g$ sono dette *periodi*. In analogia al caso $g = 1$, è facile vedere che tali periodi sono indipendenti su $\mathbb{R}$: allo stesso modo si mostra che una relazione $\sum_i k_i \int_{\delta_i} \omega_j = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, g$ produce una relazione $\sum_i k_i [\delta_i] = 0 \in H_1(S, \mathbb{R})$. Dunque i periodi formano un reticolo massimale $\Lambda = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Pi^1, \dots, \Pi^{2g}) \subseteq \mathbb{C}^g$.

Il toro complesso $\mathscr{J}(S) = \mathbb{C}^g/_\Lambda$ viene detto *Jacobiano* (o *varietà jacobiana*) di S; inoltre, sempre come nel caso $g = 1$, il vettore di integrali

$$\left(\int_q^p \omega_1 \quad \dots \quad \int_q^p \omega_g\right)$$

non è ben definito in $\mathbb{C}^g$, ma lo è in $\mathscr{J}(S)$. Si ha perciò una mappa $\mu : S \to \mathscr{J}(S)$ data da

$$\mu(p) = \left(\int_{p_0}^p \omega_1 \quad \dots \quad \int_{p_0}^p \omega_g\right)$$

che può essere estesa al sottogruppo $\mathrm{Div}^0(S)$ di $\mathrm{Div}(S)$ dei divisori di grado 0 ponendo

$$\mu\left(\sum_i p_i - \sum_i q_i\right) = \left(\sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega_1 \quad \dots \quad \sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega_g\right).$$

Lo studio di questa mappa occuperà gran parte della sezione; prima però abbiamo bisogno di sottolineare alcune proprietà dei periodi, che saranno fondamentali per poter proseguire nella teoria.

Scegliendo 1-cicli $\delta_1, \dots, \delta_{2g}$ come sopra, in modo che abbiano tutti lo stesso punto base s_0, abbiamo che il complementare dei δ_i è una regione Δ semplicemente connessa, tale che $\partial\Delta$ contiene tutti i δ_i esattamente 2 volte, una con segno $+$ e una con segno $-$.

Proposizione 1.3.2 (Prima legge di reciprocità)**.** *Sia ω una 1-forma olomorfa e η una 1-forma meromorfa su S, con poli $\{s_\lambda\} \in S$. Assumendo che i s_λ non si trovino sui δ_i, denotiamo rispettivamente con Π^i e N^i i periodi di ω e η sui δ_i. Allora*

$$\sum_{i=1}^{g} (\Pi^i N^{g+i} - \Pi^{g+i} N^i) = 2\pi i \sum_\lambda \mathrm{Res}_{s_\lambda}(\eta) \int_{s_0}^{s_\lambda} \omega.$$

Dimostrazione. Essendo Δ semplicemente connessa, possiamo definire la funzione

$$\pi(s) = \int_{s_0}^{s} \omega$$

olomorfa su $\overline{\Delta}$, tale che $\omega = d\pi$. Per ogni coppia di punti $p \in \delta_i$, $p' \in \delta_i^{-1}$ identificati tramite l'identificazione topologica dei δ_i, si ha che

$$\pi(p') - \pi(p) = \int_p^{p'} \omega = \int_p^{\delta_i(1)} \omega + \int_{\delta_{g+i}} \omega + \int_{\delta_i(1)}^{p'} \omega = \Pi^{g+i},$$

e analogamente $\pi(p')-\pi(p) = -\Pi^i$ per ogni coppia di punti $p \in \delta_{g+i}$, $p' \in \delta_{g+i}^{-1}$ identificati. Consideriamo adesso la 1-forma meromorfa $\pi \cdot \eta$ su S; per il teorema dei residui

$$\int_{\partial\Delta} \pi \cdot \eta = 2\pi i \sum_{\lambda} \mathrm{Res}_{s_\lambda}(\pi \cdot \eta) = 2\pi i \sum_{\lambda} \mathrm{Res}_{s_\lambda}(\eta) \int_{s_0}^{s_\lambda} \omega.$$

D'altra parte, sfruttando le uguaglianze ottenute sopra, si ha che

$$\int_{\delta_i+\delta_i^{-1}} \pi \cdot \eta = -\Pi^{g+i} \int_{\delta_i} \eta = -\Pi^{g+i} N^i, \qquad \int_{\delta_{g+i}+\delta_{g+i}^{-1}} \pi \cdot \eta = \Pi^i N^{g+i},$$

da cui la tesi uguagliando le scritture ottenute. □

Se in particolare anche $\eta = \omega'$ è una 1-forma olomorfa su S, con periodi Π'^i su δ_i, sfruttando l'uguaglianza $d(\pi \cdot \overline{\omega'}) = d\pi \wedge \overline{\omega'} = \omega \wedge \overline{\omega'}$, per Stokes si ha che

$$\int_S \omega \wedge \overline{\omega'} = \int_{\partial\Delta} \pi \cdot \overline{\omega'} = \sum_{i=1}^{g} \left(\Pi^i \overline{\Pi'^{g+i}} - \Pi^{g+i} \overline{\Pi'^i} \right).$$

Corollario 1.3.3. *Ogni 1-forma olomorfa con tutti gli A-periodi zero è zero.*

Dimostrazione. Usando l'uguaglianza sopra nel caso $\omega' = \omega$, si ha che $\omega \wedge \overline{\omega}$ è positiva e dunque, se $\omega \not\equiv 0$,

$$0 < i \int_S \omega \wedge \overline{\omega} = i \sum_{i=1}^{g} \left(\Pi^i \overline{\Pi^{g+i}} - \Pi^{g+i} \overline{\Pi^i} \right) = 0,$$

assurdo. □

Di conseguenza, essendo le colonne indipendenti, il minore $g \times g$ a sinistra della matrice dei periodi Ω è invertibile, e quindi si può scegliere una base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ di $H^0(S, \Omega_S^1)$ tale che $\Omega = (I_g|Z)$.

Sempre dalla prima legge di reciprocità possiamo ottenere due corollari particolarmente importanti, conosciuti come *relazioni bilineari di Riemann*:

Corollario 1.3.4 (Prima relazione bilineare di Riemann)**.** *Se $\eta = \omega'$ è una 1-forma olomorfa con periodi Π'^i su δ_i, allora*

$$\sum_{i=1}^{g} \left(\Pi^i \Pi'^{g+i} - \Pi^{g+i} \Pi'^i \right) = 0.$$

Corollario 1.3.5 (Seconda relazione bilineare di Riemann)**.** *Il minore Z di Ω è simmetrico e la sua parte immaginaria $\mathfrak{Im}(Z)$ è definita positiva.*

Dimostrazione. Applicando la prima relazione bilineare di Riemann agli elementi $\omega = \omega_i$, $\omega' = \omega_j$ della base normalizzata introdotta sopra, si ha

$$\int_{\delta_{g+i}} \omega_j - \int_{\delta_{g+j}} \omega_i = 0,$$

cioè Z è simmetrica. Inoltre, visto che il prodotto scalare

$$(\omega_i, \omega_j) = i \int_S \omega_i \wedge \overline{\omega_j} = i \overline{\int_{\delta_{g+i}} \omega_j} - i \int_{\delta_{g+j}} \omega_i = 2\mathfrak{Im} \left(\int_{\delta_{g+i}} \omega_j \right)$$

è definito positivo, segue che anche $\mathfrak{Im}(Z)$ lo è. $\square$

Ritorniamo finalmente allo studio della mappa $\mu : \mathrm{Div}^0(S) \to \mathscr{J}(S)$ che avevamo abbandonato. Ripetendo l'argomento visto nel Teorema di Abel, otteniamo che, se $D = (f)$ è il divisore associato a una funzione meromorfa globale su S, allora $\mu(D) = 0$; il nostro obiettivo adesso è mostrare che vale il viceversa, cioè che $\mu(D) = 0$ se e solo se $D = \sum_i p_i - \sum_i q_i$ è il divisore associato a una funzione meromorfa globale.

Preliminarmente, osserviamo che, se $D = (f)$, allora

$$\eta = \frac{1}{2\pi i} d \log f = \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{f}$$

è una 1-forma meromorfa tale che

$$(\eta)_\infty = -\left(\sum_i p_i + \sum_i q_i \right), \quad \mathrm{Res}_{p_i}(\eta) = \frac{a_i}{2\pi i}, \quad \mathrm{Res}_{q_i}(\eta) = \frac{b_i}{2\pi i},$$

dove $(\eta)_\infty$ indica il divisore polare di η e a_i, b_i sono rispettivamente gli interi per cui $D = \sum_i p_i - \sum_i q_i = \sum_\lambda a_\lambda p_\lambda + \sum_\lambda b_\lambda q_\lambda$ (per evitare confusioni, useremo l'indice λ quando scriviamo la somma senza ripetere i p e i q). Inoltre l'integrale $\int_\gamma \eta \in \mathbb{Z}$ è un intero per ogni cammino chiuso γ contenuto in $S \setminus \bigcup_i p_i \cup q_i$. Viceversa, se η è una 1-forma meromorfa con tali proprietà,

$$f(p) = \exp \left(2\pi i \int_{p_0}^{p} \eta \right)$$

è una ben definita funzione meromorfa tale che $D = (f)$. Perciò, mostrare il viceversa del Teorema di Abel si riduce a trovare una 1-forma meromorfa η con queste proprietà; il prossimo lemma fa un primo passo in questa direzione:

Lemma 1.3.6. *Dato un numero finito di punti p_i su S e numeri complessi a_i a somma 0, esiste una 1-forma meromorfa su S con solo poli semplici, olomorfa fuori dai p_i e con residuo a_i in p_i.*

Dimostrazione. La successione

$$0 \longrightarrow \Omega^1_S \longrightarrow \Omega^1\left(\sum_i p_i\right) \xrightarrow{r} \bigoplus_i \mathbb{C}_{p_i} \longrightarrow 0,$$

dove r indica la mappa che associa a ogni germe di $\Omega^1(\sum_i p_i)$ l'insieme ordinato dei suoi residui nei punti p_i, è esatta, e $H^1(S, \Omega^1_S) = H^0(S, \mathcal{O}_S) \cong \mathbb{C}$, quindi in coomologia si ha che l'immagine di $H^0(S, \Omega^1(\sum_i p_i))$ in $\bigoplus_i \mathbb{C}_{p_i}$ ha codimensione al massimo 1. Ma visto che la somma dei residui di ogni 1-forma meromorfa su S è zero, si ottiene che la precedente immagine coincide con $\{\sum_i a_i = 0\} \subseteq \oplus_i \mathbb{C}_{p_i}$, come voluto. □

Siamo adesso in grado di mostrare:

Teorema 1.3.7 (Abel - Seconda versione)**.** *$\mu(D) = 0$ se e solo se $D = (f)$ per una certa funzione f meromorfa su S.*

Dimostrazione. Scelta una base $\delta_1, \ldots, \delta_{2g}$ di $H_1(S, \mathbb{Z})$ come sopra, sia $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base di $H^0(S, \Omega^1_S)$ normalizzata rispetto ai δ_i. Per il lemma, esiste una 1-forma meromorfa su S con poli semplici e residui $\frac{a_i}{2\pi i}$ e $\frac{b_i}{2\pi i}$ rispettivamente in p_i e q_i; visto che due tali 1-forme differiscono per una 1-forma olomorfa su S, e visto che il minore $g \times g$ a sinistra di Ω è l'identità, possiamo scegliere una 1-forma meromorfa η come sopra tale che

$$N^i = \int_{\delta_i} \eta = 0 \qquad \text{per } i = 1, \ldots, g.$$

Per quanto osservato in precedenza, ci rimane solamente da modificare i B-periodi di η per renderli interi. Dalla legge di reciprocità applicata a ω_j e η, si ha

$$N^{g+j} = \sum_\lambda a_\lambda \int_{p_0}^{p_\lambda} \omega_j + \sum_\lambda b_\lambda \int_{p_0}^{q_\lambda} \omega_j = \sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega_j = \sum_i \int_{\alpha_i} \omega_j,$$

dove abbiamo usato che $\sum_\lambda (a_\lambda - b_\lambda) = 0$ e i cammini α_i congiungono q_i a p_i. Per ipotesi

$$\mu(D) = \left(\sum_i \int_{\alpha_i} \omega_1 \quad \ldots \quad \sum_i \int_{\alpha_i} \omega_g\right) \in \Lambda,$$

quindi esiste un ciclo $\gamma \simeq \sum_{k=1}^{2g} m_k\delta_k$ per certi $m_k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$N^{g+j} = \sum_i \int_{\alpha_i} \omega_j = \int_\gamma \omega_j$$

per ogni $j = 1, \dots, g$. Ma allora, se poniamo

$$\eta' = \eta - \sum_{k=1}^{g} m_{g+k}\omega_k,$$

i periodi di η' sono ovviamente $N'^j = -m_{g+j}$ per $j = 1, \dots, g$, mentre

$$\begin{aligned} N'^{g+j} &= N^{g+j} - \sum_{k=1}^{g} m_{g+k} \int_{\delta_{g+j}} \omega_k = \\ &= \sum_{k=1}^{2g} m_k \int_{\delta_k} \omega_j - \sum_{k=1}^{g} m_{g+k} \int_{\delta_{g+j}} \omega_k = \\ &= m_j + \sum_{k=1}^{g} m_{g+k} \left(\int_{\delta_{g+k}} \omega_j - \int_{\delta_{g+j}} \omega_k \right) = m_j, \end{aligned}$$

per $j = 1, \dots, g$, da cui la tesi. □

Ricordando che $\operatorname{Ker}[\cdot] = \operatorname{Im}(\cdot)$ e che $\operatorname{Pic}^0(S) = \frac{\operatorname{Div}^0(S)}{\operatorname{Im}(\cdot)}$, possiamo riscrivere il teorema di Abel come:

Corollario 1.3.8. *La mappa μ si quozienta a una mappa iniettiva $\widetilde{\mu} : \operatorname{Pic}^0(S) \hookrightarrow \mathscr{J}(S)$.*

1.4 Il Teorema di Inversione di Jacobi

In quest'ultima sezione completiamo lo studio della mappa μ, o meglio della mappa $\widetilde{\mu}$, mostrando che è sempre surgettiva. Questo fatto ci permetterà di ottenere conseguenze notevoli nel caso di superfici di genere 1.

Fissato un $d > 0$, indichiamo con $S^{(d)}$ l'insieme dei divisori effettivi di grado d su S, cioè l'insieme

$$S^{(d)} = \{\{p_1, \dots, p_d\} \mid p_i \in S\}.$$

Chiaramente $S^{(d)}$ è il quoziente di S^d sotto l'azione del d-esimo gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_d$; inoltre la proiezione $\pi : S^d \to S^{(d)}$ induce su $S^{(d)}$ una struttura di varietà complessa: se $D = \sum_i p_i \in S^{(d)}$, e z_i è una coordinata locale in un intorno U_i di p_i (con la convenzione che $U_i \cap U_j = \emptyset$ per $p_i \neq p_j$ e $z_i = z_j$ in $U_i = U_j$ per $p_i = p_j$), allora la mappa

$$\sum_i q_i \longmapsto (\sigma_1(z_1(q_1), \dots, z_d(q_d)), \dots, \sigma_d(z_1(q_1), \dots, z_d(q_d)))$$

è una carta su $\pi(U_1 \times \ldots \times U_d) \subseteq S^{(d)}$, dove $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ indicano le funzioni simmetriche elementari su d elementi, in quanto è chiaramente iniettiva ed è surgettiva per il teorema fondamentale dell'algebra.

È facile osservare che π è un rivestimento fuori dal luogo di ramificazione, e dunque possiamo prendere coordinate locali $(z_1(p_1), \dots, z_d(p_d))$ su $S^{(d)} \backslash B'$; invece, intorno a un punto $d \cdot p \in S^{(d)}$, possiamo prendere coordinate locali $(z_1 + \ldots + z_d, \dots, z_1 \cdot \ldots \cdot z_d)$. La varietà compatta $S^{(d)}$ prende il nome di *prodotto simmetrico* d-esimo di S.

Nella nostra situazione, il prodotto simmetrico $S^{(d)}$ permette di costruire un'inclusione

$$\begin{array}{ccc} S^{(d)} & \hookrightarrow & \mathrm{Div}^0(S) \\ \sum_i p_i & \longmapsto & \sum_i (p_i - p_0) \end{array}$$

che composta con μ dà un'altra mappa

$$\begin{array}{cccc} \mu^{(d)}: & S^{(d)} & \longrightarrow & \mathscr{J}(S) \\ & \sum_i p_i & \longmapsto & \left(\sum_i \int_{p_0}^{p_i} \omega_1 \quad \ldots \quad \sum_i \int_{p_0}^{p_i} \omega_g\right) \end{array}$$

Teorema 1.4.1 (Inversione di Jacobi). *Per ogni $\lambda \in \mathscr{J}(S)$, esistono $p_1, \dots, p_g \in S$ tali che*

$$\mu\left(\sum_i (p_i - p_0)\right) = \lambda.$$

In altre parole, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}^g$, esistono $p_1, \dots, p_g \in S$ e cammini α_i da p_0 a p_i tali che

$$\sum_i \int_{\alpha_i} \omega_j = \lambda_j \qquad \text{per } j = 1, \dots, g.$$

Inoltre, per il generico $\lambda \in \mathbb{C}^g$, il divisore $\sum_i p_i$ è unico.

Dimostrazione. Per quanto visto sopra, la tesi equivale a mostrare che $\mu^{(g)}$ è surgettiva e genericamente biunivoca. Per la prima parte, sia $D = \sum_i p_i \in S^{(g)}$ un divisore effettivo con tutti i p_i distinti; se z_i è una coordinata locale su S intorno a p_i, $z_1, \dots, z_g$ sono coordinate locali su $S^{(g)}$ intorno a D. Per $D' = \sum_i z_i$ vicino a D, si ha che

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\mu^{(g)}(D')\right) = \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\sum_i \int_{p_0}^{z_i} \omega_1 \quad \ldots \quad \sum_i \int_{p_0}^{z_i} \omega_g\right) = \left(\frac{\omega_1}{dz_j} \quad \ldots \quad \frac{\omega_g}{dz_j}\right),$$

da cui il Jacobiano di $\mu^{(g)}$ intorno a D è

$$J\mu^{(g)}(D) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_1}{dz_1} & \cdots & \frac{\omega_1}{dz_g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_g}{dz_1} & \cdots & \frac{\omega_g}{dz_g} \end{pmatrix}.$$

È immediato osservare che della i-esima coordinata z_i moltiplica la i-esima colonna per un fattore non nullo, e perciò non cambia il rango del Jacobiano. Scegliendo perciò p_1 tale che $\omega_1(p_1) \neq 0$, e sottraendo un opportuno multiplo di ω_1 a $\omega_2, \ldots, \omega_g$, possiamo supporre che $\omega_2(p_1) = \ldots = \omega_g(p_1) = 0$. Procedendo analogamente, possiamo supporre che che $J\mu^{(g)}(D)$ sia triangolare superiore con elementi sulla diagonale non nulli per un certo D; dunque $\mu^{(g)}$ non è ovunque singolare.
Adesso, se ψ è una forma di volume su $\mathscr{J}(S)$, si ha che

$$\int_{S^{(d)}} \left(\mu^{(g)}\right)^* \psi > 0,$$

in quanto $\mu^{(g)}$ preserva l'orientazione e $|J\mu^{(g)}| \not\equiv 0$; ma se per assurdo $\operatorname{Im}\left(\mu^{(g)}\right)$ non contiene un punto q, essendo $H^2(\mathscr{J}(S)\backslash\{q\}, \mathbb{R}) = 0$, si ha che $\psi = d\varphi$ in $\mathscr{J}(S)\backslash\{q\}$, da cui

$$\int_{S^{(d)}} \left(\mu^{(g)}\right)^* \psi = \int_{S^{(d)}} d\left(\left(\mu^{(g)}\right)^* \varphi\right) = 0,$$

assurdo. Rimane da mostrare che $\mu^{(g)}$ è genericamente 1 a 1. Visto che per il teorema di Abel $\left(\mu^{(g)}\right)^{-1}(\lambda)$ è dato dai divisori effettivi $|D|$ linearmente equivalenti a un qualunque $D \in \left(\mu^{(g)}\right)^{-1}(\lambda)$, dalla teoria sappiamo che tale spazio è uno spazio proiettivo, e perciò connesso. Ma visto che la fibra generica ha dimensione 0, necessariamente è un punto. □

Corollario 1.4.2. *La mappa* $\widetilde{\mu} : \operatorname{Pic}^0(S) \to \mathscr{J}(S)$ *è un biolomorfismo.*

Concluso il fondamentale studio della mappa μ, possiamo dedicarci alle conseguenze. Innanzitutto ci soffermiamo su un particolare risultato relativo ai divisori sulle superfici, per poi concludere con la caratterizzazione delle superfici di genere 1 a cui ambivamo fin dall'inizio del capitolo.

Corollario 1.4.3. *Ogni divisore di grado* $\geq g$ *su una superficie di genere* g *è linearmente equivalente a un divisore effettivo.*

Dimostrazione. Se $\deg(D) = d \geq g$, allora $\deg(D - dp_0) = 0$ e perciò esistono $p_1, \ldots, p_g$ tali che

$$\mu(D - dp_0) = \lambda = \mu\left(\sum_i (p_i - p_0)\right).$$

Ma allora per Abel esiste una funzione meromorfa f tale che $D - dp_0 = \sum_i p_i - gp_0 + (f)$, cioè

$$D = \sum_i p_i + (d - g)p_0 + (f).$$

□

Corollario 1.4.4. *Ogni superficie di genere* 1 *è biolomorfa a un toro complesso* $\mathbb{C}/_\Lambda$ *per un certo reticolo* $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$.

Dimostrazione. La mappa $\mu^{(1)} : S \to \mathscr{J}(S)$ è surgettiva per Jacobi; inoltre, se $\mu^{(1)}(p) = \mu^{(1)}(p')$, per Abel esiste una funzione meromorfa f su S tale che $(f) = (p - p_0) - (p' - p_0) = (p - p')$, che deve necessariamente essere olomorfa in quanto ha al massimo un solo polo semplice, quindi $p = p'$. □

Risulta quindi evidente l'importanza che i tori complessi rivestono all'interno della teoria delle varietà complesse: il gruppo di Picard $\mathrm{Pic}^0(S)$ di una superficie di genere g è un toro complesso g-dimensionale. Nel prossimo capitolo ci concentreremo perciò sulla geometria e l'aritmetica dei tori complessi n-dimensionali, che possono essere interpretati sia come varietà complesse che come gruppi di Lie.

2 Tori complessi abeliani

2.1 Varietà abeliane

Nel seguito denoteremo con V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n, e con $\Lambda \subseteq V$ un reticolo massimale.

Definizione 2.1.1. Il toro complesso $M = V/_{\Lambda}$ si dice *varietà abeliana* se è immergibile iniettivamente in uno spazio proiettivo.

M ha un'ovvia struttura di gruppo di Lie, indotta dalla somma su V: per ogni $\mu \in M$ e ogni $x \in V$ sopra μ, la mappa

$$\begin{array}{rccc} \tau_\mu : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & v + x \end{array}$$

induce su M un automorfismo τ_μ, detto *traslazione* per μ. Dunque il tangente olomorfo $T'_\mu(M)$ può essere sempre identificato con V. Inoltre ogni prodotto hermitiano su V induce una metrica di Kähler su M, invariante per le traslazioni τ_μ.

Proposizione 2.1.1. *Le forme armoniche $\mathscr{H}^*(M)$ coincidono con le forme $\mathscr{I}^*(M)$ invarianti sotto traslazioni.*

Dimostrazione. Visto che la traslazione τ_μ preserva la metrica, si ha che $\tau_\mu^* : \mathscr{A}^*(M) \to \mathscr{A}^*(M)$ manda forme armoniche in forme armoniche; dunque, visto che $\tau_\mu \simeq \mathrm{id}$ e per il teorema di Hodge $\mathscr{H}^*(M) \cong H^*(M, \mathbb{C})$, otteniamo che $\tau_\mu^* : \mathscr{H}^*(M) \to \mathscr{H}^*(M)$ è l'identità, cioè le forme armoniche sono invarianti sotto traslazioni.
Viceversa, ogni forma invariante sotto traslazioni è completamente determinata dal suo comportamento su un unico $T_p(M) = T'_p(M) \oplus T''_p(M) = V \oplus \overline{V}$, cioè

$$\mathscr{I}^*(M) = \bigwedge^* T_p(M)^* \cong \bigwedge^* V^* \otimes \bigwedge^* \overline{V}^*.$$

Topologicamente M è omeomorfo a $(\mathbb{S}^1)^{2n}$, quindi la dimensione dello spazio delle k-forme armoniche è $b_k(M) = \binom{2n}{k} = \dim \mathscr{I}^k(M)$, da cui la tesi ricordando che $\mathscr{H}^k(M) \subseteq \mathscr{I}^k(M)$. $\square$

Dunque in particolare, se $z = (z_1, \ldots, z_n)$ sono coordinate euclidee su V, e $dz_1, \ldots, dz_n$ e $d\overline{z_1}, \ldots, d\overline{z_n}$ sono le corrispondenti 1-forme globali, allora

$$\mathscr{H}^*(M) = \mathbb{C}[dz_I \wedge d\overline{z_J}]_{I,J}, \quad \text{cioè} \quad \mathscr{H}^{p,q}(M) = \mathbb{C}[dz_I \wedge d\overline{z_J}]_{|I|=p,|J|=q}.$$

D'altra parte, ogni cammino chiuso $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$ con punto base $[0] \in M$ si solleva a un cammino $\widetilde{\gamma}$ in V che parte da 0 e finisce in $\lambda \in \Lambda$; essendo

V il rivestimento universale di M, possiamo identificare $H_1(M,\mathbb{Z})$ con Λ. Tramite questa identificazione, se $\lambda_1,\dots,\lambda_{2n}$ è una $\mathbb{Z}$-base di Λ (e quindi anche una $\mathbb{R}$-base di V), $x_1,\dots,x_{2n}$ sono le corrispondenti coordinate duali reali e $dx_1,\dots,dx_{2n}$ le 1-forme su M corrispondenti, allora

$$\int_{\lambda_i} dx_j = \delta_{ij},$$

cioè $H^1(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[dx_1,\dots,dx_{2n}]$. Allo stesso modo si può vedere che

$$H^k(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[dx_I]_{|I|=k}.$$

Vedremo che le due basi "canoniche" trovate per $H^k(M)$ sono equamente importanti, e saranno spesso usate nel seguito del capitolo.

Adesso, per il Kodaira embedding, M è abeliana se e solo se esiste una forma di Hodge su M, cioè una $(1,1)$-forma ω chiusa, positiva e tale che $[\omega] \in H^2(M,\mathbb{Q})$. Una tale $\widetilde{\omega}$ è scrivibile come

$$\widetilde{\omega} = \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta} \widetilde{h_{\alpha\beta}}(z) dz_\alpha \wedge d\overline{z_\beta};$$

se $d\mu$ è la metrica euclidea su V invariante per M e tale che $\mu(M) = 1$, possiamo porre $h_{\alpha\beta} = \int_M \widetilde{h_{\alpha\beta}}(z) d\mu(z)$ e ottenere una forma

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}(z) dz_\alpha \wedge d\overline{z_\beta}$$

invariante e ancora di Hodge. Perciò:

Proposizione 2.1.2. *M è abeliana se e solo se esiste su M una forma di Hodge invariante.*

Poniamo $\Pi = (\pi_{i\alpha})_{i,\alpha} \in M_{2n\times n}(\mathbb{C})$ la matrice tale che

$$dx_i = \sum_\alpha \pi_{i\alpha} dz_\alpha + \sum_\alpha \overline{\pi_{i\alpha}} d\overline{z_\alpha},$$

cioè tale che $\widetilde{\Pi} = (\Pi|\overline{\Pi}) \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ è la matrice di cambio di base da $\{dz_\alpha, d\overline{z_\alpha}\}$ a $\{dx_i\}$. L'obiettivo della sezione è trovare delle condizioni necessarie e sufficienti su Π o $\overline{\Pi}$ (o su matrici ad esse collegate) affinchè M sia abeliana. Le prossime condizioni forniscono una prima caratterizzazione dei tori complessi abeliani:

Proposizione 2.1.3 (Condizioni di Riemann I). *M è abeliana se e solo se esiste una matrice $Q \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{Z})$ antisimmetrica tale che*

$$^t\Pi Q \Pi = 0 \qquad e \qquad -i^t\Pi Q\overline{\Pi} > 0.$$

Dimostrazione. Se ω è una 2-forma intera e invariante, possiamo scrivere

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{i,j} q_{ij} dx_i \wedge dx_j$$

per una certa matrice $Q = (q_{ij})_{i,j} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{Z})$ antisimmetrica. In termini della base $\{dz_\alpha, \overline{dz_\alpha}\}$, si ha

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta} q_{ij}\left(\pi_{i\alpha}dz_\alpha + \overline{\pi_{i\alpha}}\overline{dz_\alpha}\right)\wedge\left(\pi_{j\beta}dz_\beta + \overline{\pi_{i\beta}}\overline{dz_\beta}\right) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta} q_{ij}\pi_{i\alpha}\pi_{j\beta}dz_\alpha\wedge dz_\beta}_{\in\mathscr{A}^{2,0}(M)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta} q_{ij}\overline{\pi_{i\alpha}\pi_{j\beta}}\overline{dz_\alpha}\wedge\overline{dz_\beta}}_{\in\mathscr{A}^{0,2}(M)} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta} q_{ij}\left(\pi_{i\alpha}\overline{\pi_{j\beta}} - \overline{\pi_{i\beta}}\pi_{j\alpha}\right)dz_\alpha\wedge\overline{dz_\beta}}_{\in\mathscr{A}^{1,1}(M)},\end{aligned}$$

dunque $\omega \in \mathscr{A}^{1,1}(M)$ se e solo se

$$\left(\sum_{i,j} q_{ij}\pi_{i\alpha}\pi_{j\beta}\right)_{\alpha,\beta} = {}^t\Pi Q\Pi = 0$$

e ω è positiva se e solo se

$$\frac{1}{2i}\left(\sum_{i,j}\left(q_{ij}\pi_{i\alpha}\overline{\pi_{j\beta}} - q_{ji}\overline{\pi_{i\beta}}\pi_{j\alpha}\right)\right)_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2i}\left({}^t\Pi Q\overline{\Pi} - {}^t\Pi {}^tQ\overline{\Pi}\right) = -i^t\Pi Q\overline{\Pi} > 0.$$

□

In termini della matrice $\widetilde{\Pi}$, si ha che

$$^t\widetilde{\Pi}Q\overline{\widetilde{\Pi}} = \begin{pmatrix} {}^t\Pi \\ {}^t\overline{\Pi}\end{pmatrix} Q \begin{pmatrix}\overline{\Pi} & \Pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\Pi Q\overline{\Pi} & {}^t\Pi Q\Pi \\ {}^t\overline{\Pi}Q\overline{\Pi} & {}^t\overline{\Pi}Q\Pi\end{pmatrix}$$

e

$$^t\overline{\Pi}Q\Pi = {}^t\left({}^t\Pi {}^tQ\overline{\Pi}\right) = -{}^t\left({}^t\Pi Q\overline{\Pi}\right),$$

perciò M è abeliana se e solo se esiste $Q \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{Z})$ antisimmetrica tale che

$$-i^t\widetilde{\Pi}Q\overline{\widetilde{\Pi}} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -{}^tH \end{pmatrix},$$

con H definita positiva.

A volte risulta più conveniente scrivere queste condizioni usando una matrice leggermente diversa, la cosiddetta *matrice dei periodi*: se $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ è una $\mathbb{Z}$-base di Λ, e $e_1, \dots, e_n$ è una $\mathbb{C}$-base di V, definiamo *matrice dei periodi* la matrice $\Omega = (\omega_{\alpha i})_{\alpha,i} \in M_{n\times 2n}(\mathbb{C})$ tale che

$$\lambda_i = \sum_\alpha \omega_{\alpha i} e_\alpha.$$

Se $x_1, \dots, x_{2n}$ e $z_1, \dots, z_n$ sono le coordinate duali rispettivamente di $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ e $e_1, \dots, e_n$, si ha che

$$dz_\alpha = \sum_i \omega_{\alpha i} dx_i, \qquad d\overline{z_\alpha} = \sum_i \overline{\omega_{\alpha i}} dx_i,$$

dunque la matrice $\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ dà il cambio di base da $\{dx_i\}$ a $\{dz_\alpha, d\overline{z_\alpha}\}$. Ma allora $\widetilde{\Omega}\widetilde{\Pi} = I_{2n}$, cioè $\Omega\Pi = I_n$ e $\Omega\overline{\Pi} = 0$.

Proposizione 2.1.4 (Condizioni di Riemann II)**.** *M è abeliana se e solo se esiste $Q \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{Z})$ antisimmetrica tale che*

$$\Omega Q^{-1t}\Omega = 0 \qquad e \qquad -i\Omega Q^{-1t}\overline{\Omega} > 0.$$

Dimostrazione. Chiaramente $-i^t\widetilde{\Pi}Q\overline{\widetilde{\Pi}} = -i^t\widetilde{\Omega}^{-1}Q\overline{\widetilde{\Omega}}^{-1}$, perciò riscrivendo le condizioni di Riemann in termini di Ω si ottiene che M è abeliana se e solo se esiste una $Q \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{Z})$ antisimmetrica tale che

$$i\overline{\widetilde{\Omega}}Q^{-1t}\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & -{}^tH^{-1} \end{pmatrix},$$

con $H > 0$. Si conclude osservando che $H > 0$ se e solo se $H^{-1} > 0$. $\square$

Concludiamo la sezione con un'ultima riscrittura delle condizioni di Riemann, forse la più importante, che mostra molte analogie con la teoria dei tori complessi 1-dimensionali visti nel primo capitolo. Prima di questa, mostriamo un semplice lemma di algebra lineare che assumerà un'importanza centrale nel seguito della trattazione:

Lemma 2.1.5. *Se Q è una forma quadratica antisimmetrica e intera su $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n}$, esiste una $\mathbb{Z}$-base $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ di Λ tale che Q rispetto a tale base si scrive*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_\delta \\ -\Delta_\delta & 0 \end{pmatrix}, \qquad \textit{con} \qquad \Delta_\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \end{pmatrix}$$

per certi δ_i interi tali che $\delta_1 \mid \ldots \mid \delta_n$ (o meglio, queste relazioni di divisibilità sono valide per i δ_i non nulli, che possiamo supporre siano posti per ultimi).

Dimostrazione. Per ogni $\lambda \in \Lambda$, l'insieme $\{Q(\lambda, \lambda') \mid \lambda' \in \Lambda\}$ è un ideale principale $d_\lambda\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$, per un certo $d_\lambda \geq 0$. A meno di isolare il nilradicale trovandogli una base e ponendola all'inizio della base di Λ cercata, possiamo supporre che $d_\lambda > 0$. Sia perciò $\delta_1 = \min\{d_\lambda \neq 0 \mid \lambda \in \Lambda\}$, e scegliamo $\lambda_1, \lambda_{n+1} \in \Lambda$ tali che $Q(\lambda_1, \lambda_{n+1}) = \delta_1$. Allora, per ogni $\lambda \in \Lambda$, δ_1 divide $Q(\lambda, \lambda_1)$ e $Q(\lambda, \lambda_{n+1})$, e possiamo scrivere

$$\lambda + \frac{Q(\lambda, \lambda_1)}{\delta_1}\lambda_{n+1} - \frac{Q(\lambda, \lambda_{n+1})}{\delta_1}\lambda_1 \in \mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_{n+1}]^\perp,$$

cioè $\Lambda = \mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_{n+1}] \oplus^\perp \mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_{n+1}]^\perp$. Ripetendo lo stesso ragionamento a $\mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_{n+1}]^\perp$ e iterando, si ottiene la base di Λ desiderata.
Inoltre $\delta_1 \mid \delta_2$, in quanto $d'_\lambda\mathbb{Z} \subseteq d_\lambda\mathbb{Z}$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, dove $d'_\lambda\mathbb{Z} = \{Q(\lambda, \lambda') \mid \lambda' \in \mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_{n+1}]^\perp\}$, e perciò iterando $\delta_1 \mid \ldots \mid \delta_n$. □

Gli interi δ_i, spesso chiamati *divisori elementari* della forma quadratica, formano un invariante completo per tali forme quadratiche a meno di similitudine.

Proposizione 2.1.6 (Condizioni di Riemann III). *M è abeliana se e solo se esiste una $\mathbb{Z}$-base $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ di Λ e una $\mathbb{C}$-base $e_1, \ldots, e_n$ di V tale che*

$$\Omega = (\Delta_\delta | Z),$$

con Z simmetrica e tale che $\mathfrak{Im}(Z) > 0$.

Dimostrazione. Dal lemma, se ω è una 2-forma intera, invariante e non degenere (cioè $\omega^n \not\equiv 0$) su M, possiamo trovare una $\mathbb{Z}$-base $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ di Λ tale che, in termini delle coordinate duali $x_1, \ldots, x_{2n}$ su V, si abbia che

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha},$$

per certi $\delta_1 \mid \dots \mid \delta_n$ interi non nulli. Ma allora i vettori $e_i = \delta_i^{-1}\lambda_i$, per $i = 1, \dots, n$ formano una $\mathbb{C}$-base di V; la matrice dei periodi è della forma

$$\Omega = (\Delta_\delta | Z),$$

e una tale matrice dei periodi viene detta *normalizzata*. Come già visto, ω è di tipo $(1,1)$ se e solo se $\Omega Q^{-1} {}^t\Omega = 0$, cioè se e solo se

$$\begin{pmatrix} \Delta_d & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\Delta_{\delta^{-1}} \\ \Delta_{\delta^{-1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_\delta \\ {}^tZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_\delta & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Delta_{\delta^{-1}} {}^tZ \\ I_n \end{pmatrix} = Z - {}^tZ = 0$$

e ω è positiva se e solo se $-i\Omega Q^{-1} {}^t\overline{\Omega} > 0$, cioè se e solo se

$$-i \begin{pmatrix} \Delta_d & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\Delta_{\delta^{-1}} \\ \Delta_{\delta^{-1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_\delta \\ {}^t\overline{Z} \end{pmatrix} = -i(Z - {}^t\overline{Z}) = 2\mathfrak{Im}(Z) > 0.$$

□

Osserviamo che la matrice Π ha una forma particolarmente semplice in termini delle basi $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}\}$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$: visto che $\begin{pmatrix} \Pi & \overline{\Pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix} = I_{2n}$, abbiamo che

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\Delta_\delta^{-1}\overline{Z}(\mathfrak{Im}(Z))^{-1} \\ \frac{1}{2i}(\mathfrak{Im}(Z))^{-1} \end{pmatrix}.$$

La classe $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ su una varietà abeliana M è detta *polarizzazione* di M. Gli interi δ_i trovati sopra sono invarianti completi per $[\omega]$, e sono chiamati *divisori elementari* della polarizzazione. La polarizzazione $[\omega]$ viene detta *principale* se tutti i divisori elementari sono 1.

Adesso, se S è una superficie di genere g, con basi $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ di $H_1(S, \mathbb{Z})$ e $\omega_1, \dots, \omega_g$ di $H^0(S, \Omega_S^1)$ normalizzate in modo che

$$\int_{\gamma_i} \omega_\alpha = \delta_{i\alpha}$$

per ogni $i, \alpha = 1, \dots, g$, si ha che la varietà jacobiana $\mathscr{J}(S) = \frac{\mathbb{C}^g}{\mathbb{Z}[\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}]}$, dove $\lambda_i = {}^t\begin{pmatrix} \int_{\gamma_i} \omega_1 & \dots & \int_{\gamma_i} \omega_g \end{pmatrix}$, ha una matrice dei periodi della forma

$$\Omega = (I_n | Z),$$

con Z simmetrica e tale che $\mathfrak{Im}(Z) > 0$. Ma allora $\mathscr{J}(S)$ è abeliana, e ha una polarizzazione principale data da

$$\omega = \sum_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha},$$

dove $\{dx_i\}$ è la base di $H^1(\mathscr{J}(S), \mathbb{Z})$ duale alla base $\{\lambda_i\}$ di $H_1(\mathscr{J}(S), \mathbb{Z})$.

2.2 La geometria dei line bundle su tori complessi

In questa sezione cercheremo di descrivere nel modo più esplicito possibile i line bundle su M. Ricordiamo che da $\overline{\partial}$-Poincarè $H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = H^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}) = 0$, dunque ogni line bundle su $V \cong \mathbb{C}^n$ è banale. Perciò, se $L \in \mathrm{Pic}(M)$ è un line bundle, il pullback π^*L di L su V è banale, e possiamo trovare una banalizzazione globale $\varphi : \pi^*L \to V \times \mathbb{C}$. Adesso, se $z \in V$ e $\lambda \in \Lambda$, le fibre di π^*L in z e $z + \lambda$ sono identificate con $L_{\pi(z)}$, e guardando la banalizzazione φ si hanno delle mappe

$$\mathbb{C} \xleftarrow{\varphi_z} (\pi^*L)_z = L_{\pi(z)} = (\pi^*L)_{z+\lambda} \xrightarrow{\varphi_{z+\lambda}} \mathbb{C}.$$

Dunque la composizione $\varphi_{z+\lambda} \circ \varphi_z^{-1}$ è un automorfismo di $\mathbb{C}$, cioè un elemento di $\mathbb{C}^*$, che denoteremo $e_\lambda(z)$. Chiaramente $e_\lambda \in H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$, e l'insieme di tali e_λ si dice insieme di *moltiplicatori* per L.

Le funzioni e_λ verificano le relazioni di compatibilità

$$e_{\lambda'}(z + \lambda)e_\lambda(z) = e_\lambda(z + \lambda')e_{\lambda'}(z) = e_{\lambda+\lambda'}(z), \tag{4}$$

dato che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[drr, bend left=40, "e_\lambda(z)"] \arrow[dd, bend right=40, "e_{\lambda+\lambda'}(z)"'] & (\pi^*L)_z = \arrow[l, "\varphi_z"'] & \\
& = (\pi^*L)_{z+\lambda} = \arrow[r, "\varphi_{z+\lambda}"] & \mathbb{C} \arrow[dll, bend left=40, "e_{\lambda'}(z+\lambda)"] \\
\mathbb{C} & = (\pi^*L)_{z+\lambda+\lambda'} \arrow[l, "\varphi_{z+\lambda+\lambda'}"'] &
\end{tikzcd}$$

commuta. Viceversa, data una famiglia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$ di funzioni olomorfe intere mai zero che verificano le relazioni di compatibilità (4), costruiamo un line bundle $L \in \mathrm{Pic}(M)$ che abbia questi come moltiplicatori: basta prendere L come lo spazio quoziente di $V \times \mathbb{C}$ per le identificazioni

$$(z, \xi) \sim (z + \lambda, e_\lambda(z)\xi)$$

al variare di $z \in V$, $\lambda \in \Lambda$ e $\xi \in \mathbb{C}$.

Il primo passo per capire la struttura geometrica dei line bundle su M è scrivere esplicitamente i moltiplicatori dei line bundle più importanti; per cominciare, osserviamo che, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ è una $\mathbb{Z}$-base di Λ tale che $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ è una $\mathbb{C}$-base di V, si ha un omeomorfismo

$$\frac{V}{\mathbb{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]} \cong (\mathbb{C}^*)^n,$$

e la proiezione $\pi : V \to M$ può essere fattorizzata come

$$V \longrightarrow \frac{V}{\mathbb{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]} \xrightarrow{\pi_1} M.$$

Proposizione 2.2.1. *Ogni line bundle su* $\frac{V}{\mathbb{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]}$ *è completamente determinato dalla sua classe di Chern.*

Dimostrazione. Sempre per $\overline{\partial}$-Poincarè, $H^1((\mathbb{C}^*)^n, \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^n}) = H^2((\mathbb{C}^*)^n, \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^n}) = 0$, dunque passando in coomologia la successione esponenziale si ottiene un isomorfismo

$$H^1((\mathbb{C}^*)^n, \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^n}) \underset{c_1}{\xrightarrow{\sim}} H^2((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{Z}).$$

$\square$

Adesso, se $L \in \mathrm{Pic}(M)$, possiamo scegliere una base $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ come sopra tale che, in termini delle coordinate duali $x_1, \ldots, x_{2n}$ su V, valga l'uguaglianza

$$c_1(L) = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}.$$

Ma $x_{n+\alpha}$ è ben definito su $\frac{V}{\mathbb{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]}$, quindi $[dx_{n+\alpha}] = [0] \in H^1_{DR}\left(\frac{V}{\mathbb{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]}\right)$ per ogni α, e perciò $c_1(\pi_1^* L)) = \pi_1^*(c_1(L)) = 0$, cioè $\pi_1^* L$ è banale per la proposizione precedente. Se prendiamo una banalizzazione $\widetilde{\varphi} : \pi_1^* L \to (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}$ ed estendiamo $\widetilde{\varphi}$ a una banalizzazione φ di $\pi^* L$, dalle relazioni di compatibilità (4) si ha che

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1 \qquad \text{per ogni } \alpha = 1, \ldots, n.$$

Dunque, a meno di scegliere una base opportuna per Λ, si può sempre supporre che i moltiplicatori relativi ai primi n elementi della base siano identicamente 1. Inoltre, sempre per le relazioni di compatibilità, per determinare l'intero insieme dei moltiplicatori basta definire e_λ solo per i λ in una base di Λ.

Concentriamoci adesso sulle varietà abeliane; sia perciò ω una $(1,1)$-forma intera, invariante e positiva. A meno di cambiare base di Λ, si ha che

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha},$$

con i δ_α come al solito interi e non nulli. Poniamo $e_\alpha = \delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha$ per $\alpha = 1, \ldots, n$, e siano $z_1, \ldots, z_n$ le rispettive coordinate duali; allora

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \Omega, \qquad \begin{pmatrix} dz_1 \\ \vdots \\ dz_n \end{pmatrix} = {}^t\Omega \begin{pmatrix} dx_1 & \ldots & dx_{2n} \end{pmatrix},$$

con $\Omega = (\Delta_\delta | Z)$, $Z = (Z_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ simmetrica e con parte immaginaria definita positiva (per le condizioni di Riemann III). I nostri ragionamenti si fonderanno sul seguente lemma:

Lemma 2.2.2. $L \in \mathrm{Pic}(M)$ *dato dai moltiplicatori*

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi i z_\alpha}, \qquad \alpha = 1, \ldots, n$$

ha come classe di Chern $c_1(L) = [\omega]$.

Dimostrazione. Innanzitutto vediamo che tali moltiplicatori verificano le relazioni di compatibilità. L'unica non verifica non banale è

$$\begin{aligned} e_{\lambda_{n+\beta}}(z + \lambda_{n+\alpha}) e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) &= e^{-2\pi i (z_\beta + Z_{\beta\alpha} + z_\alpha)} = \\ &= e^{-2\pi i (z_\beta + Z_{\alpha\beta} + z_\alpha)} = \\ &= e_{\lambda_{n+\alpha}}(z + \lambda_{n+\beta}) e_{\lambda_{n+\beta}}(z). \end{aligned}$$

Adesso sia $\varphi : \pi^*L \to V \times \mathbb{C}$ la banalizzazione data dai moltiplicatori sopra. Per ogni sezione $\widetilde{\theta}$ di L su un aperto $U \subseteq M$, $\theta = \varphi^*(\pi^*\widetilde{\theta})$ è una funzione analitica $\pi^{-1}(U) \to \mathbb{C}$, cioè il diagramma (in cui tutte le funzioni sono opportunamente ristrette)

$$\begin{tikzcd}
V \times \mathbb{C} & \pi^*L \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r] \arrow[d, shift right] & L \arrow[d, shift left] \\
& V \arrow[u, bend left, "\pi^*\widetilde{\theta}"] \arrow[ul, bend left, "\theta"] \arrow[r, "\pi"'] & M \arrow[u, bend right, "\widetilde{\theta}"']
\end{tikzcd}$$

commuta. La funzione θ soddisfa le relazioni

$$\theta(z + \lambda_\alpha) = \theta(z), \qquad \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) = e^{-2\pi i z_\alpha}\theta(z)$$

per ogni $\alpha = 1, \dots, n$, e viceversa ogni tale funzione definisce una sezione di L. Adesso, se $\|\cdot\|$ è una qualunque metrica su L, esiste una funzione positiva $h(z)$ tale che $\|\widetilde{\theta}(z)\|^2 = h(z)|\theta(z)|^2$ per ogni sezione $\widetilde{\theta}$ di L. Dunque

$$h(z + \lambda_\alpha) = h(z), \qquad h(z + \lambda_{n+\alpha}) = |e^{-2\pi i z_\alpha}|^2 h(z)$$

per ogni $\alpha = 1, \dots, n$, e viceversa ogni tale funzione h definisce una metrica su L. Scrivendo $Z = X + iY$, $Y = (Y_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ è invertibile in quanto positiva, e dunque possiamo considerare $W = (W_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta} = Y^{-1}$. Diciamo che la funzione

$$h(z) = \exp\left(\frac{\pi}{2}\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(z_\alpha - \overline{z_\alpha})(z_\beta - \overline{z_\beta} - 2iY_{\beta\beta})\right)$$

soddisfa le condizioni precedenti. Dato che i $\lambda_\alpha = \delta_\alpha e_\alpha$ hanno coefficienti reali, si ha facilmente che $h(z + \lambda_\alpha) = h(z)$ per $\alpha = 1, \dots, n$. D'altra parte, usando che W è l'inversa di Y e che dunque è simmetrica, abbiamo

$$\begin{aligned}
\log h(z + \lambda_{n+\gamma}) &= \frac{\pi}{2}\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(z_\alpha - \overline{z_\alpha} + 2iY_{\alpha\gamma})(z_\beta - \overline{z_\beta} + 2i(Y_{\beta\gamma} - Y_{\beta\beta})) = \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(z_\alpha - \overline{z_\alpha})(z_\beta - \overline{z_\beta} - 2iY_{\beta\beta}) + \\
&\quad + \frac{\pi}{2}\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(z_\alpha - \overline{z_\alpha})(2iY_{\beta\gamma}) + \\
&\quad + \frac{\pi}{2}\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(2iY_{\alpha\gamma})(z_\beta - \overline{z_\beta} + 2i(Y_{\beta\gamma} - Y_{\beta\beta})) = \\
&= \log h(z) + \frac{\pi}{2}\sum_{\alpha} \delta_{\alpha\gamma}(2i(z_\alpha - \overline{z_\alpha})) + \\
&\quad + \frac{\pi}{2}\sum_{\beta} \delta_{\beta\gamma}(2i(z_\beta - \overline{z_\beta} + 2i(Y_{\beta\gamma} - Y_{\beta\beta}))) = \\
&= \log h(z) + \pi i(z_\gamma - \overline{z_\gamma}) + \pi i(z_\gamma - \overline{z_\gamma}) = \log h(z) - 4\pi\mathfrak{Im}(z_\gamma),
\end{aligned}$$

da cui $h(z + \lambda_{n+\gamma}) = |e^{-2\pi i z_\gamma}|^2 h(z)$, come voluto.
Finalmente siamo in grado di calcolare la forma di curvatura Θ_L associata alla metrica in L data da h:

$$\begin{aligned}
\Theta_L = \partial\overline{\partial}\log\frac{1}{h} &= -\frac{\pi}{2}\partial\overline{\partial}\left(\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(z_\alpha - \overline{z_\alpha})(z_\beta - \overline{z_\beta} - 2iY_{\beta\beta})\right) = \\
&= \frac{\pi}{2}\partial\left(\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}((z_\alpha - \overline{z_\alpha})d\overline{z_\beta} + (z_\beta - \overline{z_\beta} - 2iY_{\beta\beta})d\overline{z_\alpha}\right) = \\
&= \pi\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta} dz_\alpha \wedge d\overline{z_\beta}.
\end{aligned}$$

Volendo esprimere la forma di curvatura Θ_L in termini della base $\{dx_\alpha, dx_{n+\alpha}\}$, si usano le uguaglianze

$$dz_\alpha = \delta_\alpha dx_\alpha + \sum_\beta Z_{\alpha\beta} dx_{n+\beta}, \qquad d\overline{z_\alpha} = \delta_\alpha dx_\alpha + \sum_\beta \overline{Z_{\alpha\beta}} dx_{n+\beta}$$

per ottenere

$$\begin{aligned}\Theta_L &= \pi \sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta} dz_\alpha \wedge d\overline{z_\beta} = \\ &= \pi \sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}\delta_\alpha\delta_\beta dx_\alpha \wedge dx_\beta + \pi \sum_{\alpha,\beta,\gamma} W_{\alpha\beta}\delta_\alpha(\overline{Z_{\beta\gamma}} - Z_{\beta\gamma}) dx_\alpha \wedge dx_{n+\gamma} + \\ &\quad + \pi \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon} W_{\alpha\beta} Z_{\alpha\gamma}\overline{Z_{\beta\varepsilon}} dx_{n+\gamma} \wedge dx_{n+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Visto che W e Z sono simmetriche, il primo e il terzo addendo sono nulli, e perciò

$$\Theta_L = -2\pi i \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \delta_\alpha W_{\alpha\beta} Y_{\beta\gamma} dx_\alpha \wedge dx_{n+\gamma} = -2\pi i \sum_\alpha \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha} = -2\pi i\omega,$$

da cui $c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi}\Theta_L\right] = [\omega]$. □

Grazie a questo calcolo, siamo in grado di stabilire quando due line bundle su M hanno la stessa classe di Chern. Innanzitutto, se $\mu \in M$, la mappa $\tau_\mu : M \to M$ è omotopa all'identità, quindi $c_1(\tau_\mu^* L) = c_1(L)$ per ogni line bundle L su M; inoltre, se L è dato dai moltiplicatori

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i z_\alpha},$$

allora $\tau_\mu^* L$ è dato dai moltiplicatori

$$e'_{\lambda_\alpha}(z) = e_{\lambda_\alpha}(z+\mu) \equiv 1, \qquad e'_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e_{\lambda_{n+\alpha}}(z+\mu) = e^{-2\pi i(z_\alpha+\mu_\alpha)},$$

cioè i moltiplicatori di $\tau_\mu^* L$ differiscono da quelli di L per una costante $e^{-2\pi i\mu_\alpha}$. Viceversa, se L' è un line bundle con moltiplicatori

$$e'_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e'_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = c_\alpha e_{\lambda_{n+\alpha}},$$

per certi $c_\alpha \in \mathbb{C}^*$, allora, ponendo $\mu = \sum_\alpha \frac{i}{2\pi} \log c_\alpha \cdot e_\alpha \in V$, abbiamo che $L' = \tau_\mu^* L$.

Proposizione 2.2.3. *Due line bundle L, L' su M hanno la stessa classe di Chern se e solo se $L' = \tau_\mu^* L$ per un certo $\mu \in M$.*

Dimostrazione. Per l'osservazione precedente, basta mostrare che un line bundle L ha classe di Chern nulla se e solo se è dato da moltiplicatori costanti; chiaramente una implicazione è ovvia, quindi mostriamo l'altra. Consideriamo le successioni esatte:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathcal{O}_M \arrow[r] & \mathcal{O}_M^* \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[u, hook, "i_1"] & \mathbb{C}^* \arrow[r] \arrow[u, hook, "i_2"] & 0 \end{tikzcd}$$

che in coomologia danno

$$\begin{tikzcd} H^1(M, \mathcal{O}_M) \arrow[r] & H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \arrow[r, "c_1"] & H^2(M, \mathbb{Z}) \\ H^1(M, \mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[u, "i_1^*"] & H^1(M, \mathbb{C}^*) \arrow[r] \arrow[u, "i_2^*"] & H^2(M, \mathbb{Z}) \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

i_1^* non è altro che la proiezione di $H^1(M, \mathbb{C}) = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$ sul secondo fattore, e quindi è surgettiva. Perciò ogni $\gamma \in H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \cap \mathrm{Ker}(c_1)$ è del tipo $i_2^* \gamma'$, con $\gamma' \in H^1(M, \mathbb{C}^*)$, cioè γ' induce un line bundle con funzioni di transizione costanti.
Adesso, se L è un line bundle con classe di Chern nulla, possiamo ricoprire M con una famiglia di aperti $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ tali che $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_j U_{\alpha j}$ per ogni α, con gli $U_{\alpha j}$ omeomorfi a U_α via π, e possiamo trovare una famiglia di banalizzazioni $\{\varphi_\alpha : L_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}\}$ con funzioni di transizioni $\{g_{\alpha\gamma}\} \in \mathbb{C}^*$. Definite delle costanti $h_{\alpha j}$ tali che $h_{\alpha j} = h_{\alpha' j'} g_{\alpha\alpha'}$ per ogni α, α', j, j' tali che $U_{\alpha j} \cap U_{\alpha' j'} \neq \emptyset$, con la convenzione che una prefissata $h_{\alpha_0 j_0}$ sia 1 (si possono imporre tali relazioni grazie alla formula che lega gli 1-cocicli), si vede facilmente che le banalizzazioni

$$\varphi_{\alpha j} = h_{\alpha j} \cdot \pi^* \varphi_\alpha : \pi^* L_{U_{\alpha j}} \to U_{\alpha j} \times \mathbb{C}$$

si rincollano a una banalizzazione di $\pi^* L$ con moltiplicatori costanti. □

Caratterizzato completamente il gruppo $\mathrm{Pic}^0(M)$ dei line bundle su M con classe di Chern nulla, passiamo a descriverlo geometricamente. La successione esponenziale dà in coomologia una successione esatta

$$H^1(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z}),$$

dunque $\mathrm{Pic}^0(M) = \frac{H^1(M, \mathcal{O}_M)}{\mathrm{Im}(H^1(M, \mathbb{Z}))}$. Ora $H^1(M, \mathcal{O}_M) = \mathscr{H}^{0,1}(M)$ è lo spazio delle $(0,1)$-forme invarianti su M, cioè lo spazio $\overline{V}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{V}, \mathbb{C})$. Invece

$H^1(M,\mathbb{Z})$ è lo spazio delle 1-forme invarianti su M che hanno periodo intero, cioè lo spazio dei funzionali lineari su V a valori interi su Λ. Con tali identificazioni, la mappa $H^1(M,\mathbb{Z}) \to H^1(M,\mathcal{O}_M)$ precedente è semplicemente data da

$$\omega \longmapsto \omega^{0,1};$$

inoltre, se ω è reale,

$$\int_\lambda \omega = \int_\lambda \omega^{1,0} + \int_\lambda \omega^{0,1} = \overline{\int_\lambda \omega^{0,1}} + \int_\lambda \omega^{0,1} \in \mathbb{Z}$$

per ogni $\lambda \in \Lambda$ se e solo se

$$2\mathfrak{Re}\int_\lambda \omega^{0,1} \in \mathbb{Z}$$

per ogni $\lambda \in \Lambda$. Dunque l'immagine $\overline{\Lambda}^*$ di $H^1(M,\mathbb{Z})$ in $H^1(M,\mathcal{O}_M) = \overline{V}^*$ coincide con i funzionali lineari coniugati su V con parte reale *mezzo-intera*, cioè in $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Perciò:

Proposizione 2.2.4. $\mathrm{Pic}^0(M)$ *è un toro complesso, chiamato varietà abeliana duale di M e indicato $\hat{M}$.*

Più esplicitamente, se $x_1,\dots,x_{2n}$ sono coordinate su V duali alla base $\lambda_1,\dots,\lambda_{2n}$ di Λ, e denotiamo con x_i^* la parte coniugata di x_i, chiaramente gli x_i^* formano una base per $\overline{\Lambda}^*$. Scrivendo

$$x_i = \sum_\alpha \pi_{i\alpha} z_\alpha + \sum_\alpha \overline{\pi_{i\alpha} z_\alpha},$$

si ha

$$x_i^* = \sum_\alpha \overline{\pi_{i\alpha} z_\alpha},$$

dove come già visto

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\Delta_\delta^{-1}\overline{Z}Y^{-1} \\ \frac{1}{2i}Y^{-1} \end{pmatrix}.$$

Riordinando la base $\{x_i^*\}$ ponendo $y_\alpha^* = -x_{n+\alpha}^*$ e $y_{n+\alpha}^* = x_\alpha^*$ per ogni $\alpha = 1,\dots,n$, si ha che

$$\begin{pmatrix} y_{n+1}^* & \dots & y_{2n}^* \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\Delta_\delta^{-1}\overline{Z}Y^{-1}\begin{pmatrix} \overline{z_1} & \dots & \overline{z_n} \end{pmatrix} = \Delta_\delta^{-1}Z\begin{pmatrix} y_1^* & \dots & y_n^* \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, ordinando i divisori elementari δ_α come usuale, possiamo porre $e_\alpha^* = \frac{\delta_\alpha}{\delta_n} y_\alpha^*$ per $\alpha = 1,\dots,n$ e ottenere

$$\begin{pmatrix} y_1^* & \dots & y_n^* \end{pmatrix} = \delta_n\Delta_\delta^{-1}\begin{pmatrix} e_1^* & \dots & e_n^* \end{pmatrix},$$

$$\left(y^*_{n+1} \quad \dots \quad y^*_{2n}\right) = \delta_n \Delta_\delta^{-1} Z \Delta_\delta^{-1} \left(e^*_1 \quad \dots \quad e^*_n\right).$$

La matrice dei periodi di $\hat{M}$, in termini della base $\{y^*_\alpha\}$ di $\overline{\Lambda}^*$ e $\{e^*_\alpha\}$ di $\overline{V}^*$, è dunque

$$\Omega^* = (\delta_n \Delta_\delta^{-1} | \delta_n \Delta_\delta^{-1} Z \Delta_\delta^{-1}).$$

Visto che la matrice $\delta_n \Delta_\delta^{-1}$ è diagonale e intera, e visto che $\delta_n \Delta_\delta^{-1} Z \Delta_\delta^{-1}$ è simmetrica con parte immaginaria positiva, deduciamo che:

Proposizione 2.2.5. *La varietà $\hat{M}$ è abeliana, e la polarizzazione su M data dai divisori elementari $\{\delta_\alpha\}$ induce una polarizzazione su $\hat{M}$ data dai divisori elementari $\left\{\frac{\delta_n}{\delta_\alpha}\right\}$.*

Per concludere la sezione, spostiamo la nostra attenzione sui line bundle su M positivi, che possiedono proprietà aggiuntive rispetto a quelle viste finora. In particolare, fissato un line bundle $L \in \mathrm{Pic}(M)$ positivo, ci concentreremo sullo studio della mappa

$$\begin{array}{rccc} \varphi_L : & M & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(M) \\ & \mu & \longmapsto & L^{-1} \otimes \tau^*_\mu L \end{array}$$

Vogliamo descrivere esplicitamente φ_L in termini delle basi $\{\lambda_\alpha\}$ di Λ, $\{e_\alpha\}$ di V normalizzata rispetto a L, $\{y^*_\alpha\}$ di $\overline{\Lambda}^*$ e $\{e^*_\alpha\}$ di $\overline{V}^*$. Innanzitutto, consideriamo la composizione

$$H^{0,1}(M) \xrightarrow{\delta} H^1(M, \mathcal{O}_M) \xrightarrow{\exp} H^1(M, \mathcal{O}^*_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(M),$$

dove δ è l'isomorfismo di Dolbeault. Se $\sigma = \sum_\alpha \sigma_\alpha d\overline{z_\alpha}$, per certi $\sigma_\alpha \in \mathbb{C}$, è una $(0,1)$-forma costante su M, allora in ogni aperto U_i di un ricoprimento sufficientemente fine $\mathcal{U}$ di M, possiamo scrivere $\sigma = \overline{\partial} f_i(z)$, con $f_i(z) = \sum_\alpha \sigma_\alpha \overline{z_\alpha}$ per opportune determinazioni z_α di dz_α. Il line bundle associato a σ (per la precisione a $\exp(\sigma)$) ha perciò funzioni di transizione $g_{ij}(z) = e^{2\pi i (f_i(z) - f_j(z))}$ e, in termini di un'opportuna banalizzazione, moltiplicatori

$$e_{\lambda_\alpha}(z) = e^{-2\pi i \delta_\alpha \sigma_\alpha}, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i \sum_\beta \sigma_\beta \overline{Z_{\alpha\beta}}}.$$

Moltiplicando le banalizzazioni per $f(z) = e^{2\pi i \sum_\alpha \sigma_\alpha z_\alpha}$, si ottengono i moltiplicatori normalizzati

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi i \sum_\beta \sigma_\beta (\overline{Z_{\alpha\beta}} - Z_{\alpha\beta})} = e^{-4\pi \sum_\beta \sigma_\beta Y_{\alpha\beta}}.$$

In termini delle coordinate $\{x^*_\alpha\}$ su $\overline{V}^*$, osserviamo che il line bundle associato a

$$\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha x^*_\alpha = \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \delta_\alpha^{-1} c_\alpha Z_{\alpha\beta} Y^{-1}_{\beta\gamma} d\overline{z_\gamma}$$

ha moltiplicatori normalizzati

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\beta}}(z) = e^{-2\pi i \sum_\alpha \delta_\alpha^{-1} c_\alpha Z_{\alpha\beta}},$$

e analogamente il line bundle associato a

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_{n+\alpha}^* = \frac{1}{2i} \sum_{\alpha,\beta} c_\alpha Y_{\alpha\beta}^{-1} d\overline{z_\beta}$$

ha moltiplicatori normalizzati

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{2\pi i c_\alpha}.$$

D'altra parte, visto che il line bundle L è dato dai moltiplicatori

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i z_\alpha},$$

e visto che per ogni $\mu = \sum_\alpha \mu_\alpha e_\alpha \in V$, $\tau_\mu^* L$ è dato dai moltiplicatori

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i (z_\alpha + \mu_\alpha)},$$

allora $\varphi_L(\mu)$ è dato dai moltiplicatori

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i \mu_\alpha}.$$

In particolare, se $\mu = \sum_\alpha c_\alpha \lambda_\alpha = \sum_\alpha c_\alpha \delta_\alpha e_\alpha$, si ha che $\varphi_L(\mu)$ è dato dai moltiplicatori

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i \delta_\alpha c_\alpha},$$

cioè

$$\varphi_L\left(\sum_\alpha c_\alpha \lambda_\alpha\right) = -\sum_\alpha c_\alpha \delta_\alpha x_{n+\alpha}^* = \sum_\alpha c_\alpha \delta_\alpha y_\alpha^*.$$

Allo stesso modo si vede che, se $\mu = \sum_\alpha c_\alpha \lambda_{n+\alpha} = \sum_{\alpha,\beta} c_\alpha Z_{\alpha\beta} e_\beta$, $\varphi_L(\mu)$ è dato dai moltiplicatori

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\beta}} = e^{-2\pi i \sum_\alpha c_\alpha Z_{\alpha\beta}},$$

cioè

$$\varphi_L\left(\sum_\alpha c_\alpha \lambda_{n+\alpha}\right) = \sum_\alpha c_\alpha \delta_\alpha x_\alpha^* = \sum_\alpha c_\alpha \delta_\alpha y_{n+\alpha}^*.$$

Da questo si ottiene subito che $\sum_\alpha c_\alpha \lambda_\alpha \in \mathrm{Ker}(\varphi_L)$ se e solo se $c_\alpha \delta_\alpha \in \mathbb{Z}$, e $\sum_\alpha c_\alpha \lambda_{n+\alpha} \in \mathrm{Ker}(\varphi_L)$ se e solo se $c_\alpha \delta_\alpha \in \mathbb{Z}$; perciò:

Proposizione 2.2.6. *Il sottogruppo* $\mathrm{Ker}(\varphi_L)$ *di* M*, cioè il sottogruppo delle traslazioni di* M *che fissano* L*, coincide col sottogruppo*

$$\langle \delta_\alpha^{-1} \lambda_\alpha, \delta_\alpha^{-1} \lambda_{n+\alpha} \mid \alpha = 1, \ldots, n \rangle_{\mathbb{Z}},$$

che ha cardinalità esattamente $\prod_\alpha \delta_\alpha^2$.

2.3 Funzioni theta e sezioni di line bundle positivi

L'ultimo passo per completare lo studio dei line bundle positivi su M è capire la struttura delle sezioni olomorfe di tali line bundle: ne forniremo una scrittura generale sotto forma di serie di Fourier, e ne ricaveremo informazioni essenziali per comprendere quando un line bundle positivo immerge iniettivamente M in uno spazio proiettivo.

Nella sezione precedente abbiamo visto che ogni line bundle positivo può essere descritto come un quoziente di $V \times \mathbb{C}$, e quindi possiamo realizzare le sezioni olomorfe globali come funzioni olomorfe intere su V che soddisfano certe equazioni funzionali.

Innanzitutto, il fibrato canonico K_M è banale, perchè se $z_1, \ldots, z_n$ sono coordinate olomorfe su M, la n-forma olomorfa $\omega = dz_1 \wedge \ldots dz_n$ non è mai nulla, e perciò $K_M = [(\omega)] = 0$. Dunque, se $L \in \mathrm{Pic}(M)$ è positivo, per il Kodaira vanishing

$$H^p(M, \mathcal{O}(L)) = H^p(M, \mathcal{O}(L \otimes K_M)) = H^p(M, \Omega^n(L)) = 0$$

per ogni $p > 0$, da cui

$$\chi(L) := \sum_{p \geq 0} \dim H^p(M, \mathcal{O}(L)) = \dim H^0(M, \mathcal{O}(L)).$$

D'altra parte, possiamo trovare una $\mathbb{Z}$-base $dx_1, \ldots, dx_{2n}$ di $H^1(M, \mathbb{Z})$ tale che

$$c_1(L) = \sum_\alpha \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha},$$

da cui

$$c_1(L)^n = n! \prod_\alpha \delta_\alpha \in H^{2n}(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Teorema 2.3.1. *Sia $L \in \mathrm{Pic}(M)$ positivo, e indichiamo con $\delta_1, \ldots, \delta_n$ i divisori elementari della polarizzazione $c_1(L)$ di M. Allora*

$$\chi(L) = \dim H^0(M, \mathcal{O}(L)) = \prod_\alpha \delta_\alpha.$$

Dimostrazione. Sia $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ una $\mathbb{Z}$-base di Λ tale che, in termini delle coordinate duali $x_1, \ldots, x_{2n}$, si abbia

$$c_1(L) = \sum_\alpha \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}.$$

Poniamo come al solito $e_\alpha = \delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha$ per $\alpha = 1, \ldots, n$ e siano $z_1, \ldots, z_n$ le coordinate complesse corrispondenti su V, tali che la matrice dei periodi Ω è della forma $\Omega = (\Delta_\delta|Z)$, con $Z = X + iY$ simmetrica e Y definita positiva. Grazie al Lemma 2.2.2 e alla Proposizione 2.2.3, si ha che L è un traslato del line bundle L_0 dato dai moltiplicatori

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi i z_\alpha}.$$

Visto che τ_μ è un automorfismo di M, $H^0(M, \mathcal{O}(L))$ è invariante a meno di isomorfismo per traslazioni di L, quindi possiamo dimostrare la tesi per il line bundle $L = \tau_\mu^* L_0$, dove $\mu = \sum_\alpha Z_{\alpha\alpha} e_\alpha$.
I moltiplicatori per L sono

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi i z_\alpha - \pi i Z_{\alpha\alpha}},$$

e dunque le sezioni globali $\widetilde{\theta}$ di L sono date da funzioni olomorfe intere θ su V che soddisfano

$$\theta(z + \lambda_\alpha) = \theta(z), \qquad \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) = e^{-2\pi i z_\alpha - \pi i Z_{\alpha\alpha}} \theta(z)$$

per ogni $\alpha = 1, \ldots, n$. Le prime condizioni dicono che θ si scrive in serie di Fourier nelle variabili $z_\alpha^* = e^{2\pi i \delta_\alpha^{-1} z_\alpha}$:

$$\theta(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l z_1^{*l_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{*l_n} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l e^{2\pi i \sum_\alpha l_\alpha \delta_\alpha^{-1} z_\alpha} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} z \rangle}.$$

Da questo si ricava facilmente

$$\theta(z + \lambda_{n+\alpha}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1}(z + \lambda_{n+\alpha}) \rangle} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} \lambda_{n+\alpha} \rangle} e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} z \rangle};$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) &= e^{-2\pi i z_\alpha - \pi i Z_{\alpha\alpha}} \theta(z) = \\ &= e^{-2\pi i z_\alpha - \pi i Z_{\alpha\alpha}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} z \rangle} = \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_{l + \delta_\alpha e_\alpha} e^{-\pi i Z_{\alpha\alpha}} e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} z \rangle}, \end{aligned}$$

quindi confrontando le due espansioni si ottiene

$$a_{l + \delta_\alpha e_\alpha} = e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} \lambda_{n+\alpha} \rangle + \pi i Z_{\alpha\alpha}} a_l.$$

Perciò θ è completamente determinata dalle scelte dei coefficienti $\{a_l\}$ per $0 \leq l_\alpha < \delta_\alpha$, cioè

$$\dim H^0(M, \mathcal{O}(L)) \leq \prod_\alpha \delta_\alpha.$$

Per vedere che effettivamente vale l'uguaglianza, dobbiamo mostrare che ogni serie di questo tipo, con coefficienti $\{a_l\}_{0 \leq l_\alpha < \delta_\alpha}$ qualunque, converge. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\theta(z) &= \sum_{0 \leq l_{0\alpha} < \delta_\alpha} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_{l_0 + \Delta_\delta l} e^{2\pi i \langle l_0 + \Delta_\delta l, \Delta_\delta^{-1} z\rangle} = \\ &= \sum_{0 \leq l_{0\alpha} < \delta_\alpha} e^{2\pi i \langle l_0, \Delta_\delta^{-1} z\rangle} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_{l_0 + \Delta_\delta l} e^{2\pi i \langle l, z\rangle}.\end{aligned}$$

Se poniamo

$$\theta_{l_0}(z) = e^{2\pi i \langle l_0, \Delta_\delta^{-1} z\rangle} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_{l_0 + \Delta_\delta l} e^{2\pi i \langle l, z\rangle}$$

la serie con $a_{l_0} = 1$ e con le relazioni ricorsive di sopra, abbiamo che la θ generica è della forma

$$\theta = \sum_{0 \leq l_{0\alpha} < \delta_\alpha} a_{l_0} \theta_{l_0}(z),$$

e perciò basta verificare che θ_{l_0} converge. Poniamo $b_l = a_{l_0 + \Delta_\delta l}$. Le relazioni ricorsive si leggono

$$\begin{aligned}b_{l+e_\alpha} = a_{l_0 + \Delta_\delta l + \Delta_\delta e_\alpha} &= e^{2\pi i \langle l_0 + \Delta_\delta l, \Delta_\delta^{-1} \lambda_{n+\alpha}\rangle + \pi i Z_{\alpha\alpha}} a_{l_0 + \Delta_\delta l} = \\ &= e^{2\pi i \langle l, \lambda_{n+\alpha}\rangle + 2\pi i \langle l_0, \Delta_\delta^{-1} \lambda_{n+\alpha}\rangle + \pi i Z_{\alpha\alpha}} b_l.\end{aligned}$$

Diciamo che i coefficienti

$$b_l = e^{\pi i \langle l, Zl\rangle + 2\pi i \langle \Delta_\delta^{-1} l_0, Zl\rangle}$$

risolvono tali relazioni ricorsive; effettivamente $b_0 = 1$ e

$$\begin{aligned}b_{l+e_\alpha} &= e^{\pi i \langle l+e_\alpha, Z(l+e_\alpha)\rangle + 2\pi i \langle \Delta_\delta^{-1} l_0, Z(l+e_\alpha)\rangle} = \\ &= e^{\pi i \langle l, Zl\rangle + 2\pi i \langle l, Ze_\alpha\rangle + \pi i \langle e_\alpha, Ze_\alpha\rangle + 2\pi i \langle \Delta_\delta^{-1} l_0, Zl\rangle + 2\pi i \langle \Delta_\delta^{-1} l_0, Ze_\alpha\rangle} = \\ &= e^{2\pi i \langle l, \lambda_{n+\alpha}\rangle + \pi i Z_{\alpha\alpha} + 2\pi i \langle \Delta_\delta^{-1} l_0, \lambda_{n+\alpha}\rangle} b_l,\end{aligned}$$

in quanto Z è simmetrica. Ma

$$|b_l| = e^{-\pi \langle l, Yl\rangle - 2\pi \langle \Delta_\delta^{-1} l_0, Yl\rangle}$$

e Y è definita positiva, quindi $\langle l, Yl\rangle > c'\|l\|^2$ per un certo $c' > 0$; inoltre per Cauchy-Schwartz $|\langle \Delta_\delta^1 l_0, Yl\rangle| < c''\|l\|$ per un altro $c'' > 0$, dunque

$$|b_l| < e^{-c\|l\|^2}$$

per un certo $c > 0$ e per l sufficientemente grande. Dunque la serie di θ_{l_0} converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C}^n$, e perciò converge. $\square$

Una prima osservazione che scaturisce da questo teorema è la seguente: se $c_1(L)$ è una polarizzazione principale di M, lo spazio $H^0(M, \mathcal{O}(L))$ ha dimensione 1 e dunque è generato dalla sezione $\widetilde{\theta}$ corrispondente a

$$\theta(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\langle l, Zl\rangle} e^{2\pi i\langle l, z\rangle},$$

che soddisfa le equazioni funzionali

$$\theta(z + e_\alpha) = \theta(z), \qquad \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) = e^{-2\pi i(z_\alpha + \frac{1}{2}Z_{\alpha\alpha})}\theta(z), \qquad \theta(z) = \theta(-z).$$

Tale funzione intera è detta *funzione theta di Riemann* della varietà abeliana principalmente polarizzata $(M, [\omega])$. Inoltre, sempre perchè lo spazio $H^0(M, \mathcal{O}(L))$ ha dimensione 1, si ha che il divisore $\Theta = (\widetilde{\theta})$ è univocamente determinato da L e perciò determinato a meno di traslazioni della classe $[\omega]$; Θ è detto *divisore theta di Riemann* della varietà abeliana principalmente polarizzata $(M, [\omega])$.

Infine, mantenendo le notazioni del teorema e ponendo $\lambda'_\alpha = \delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha$, $\lambda'_{n+\alpha} = \lambda_{n+\alpha}$ per $\alpha = 1, \ldots, n$, possiamo considerare il reticolo

$$\Lambda' = \mathbb{Z}[\lambda'_\alpha, \lambda'_{n+\alpha}].$$

$\Lambda \subseteq \Lambda'$ è un sottoreticolo di indice $\mathcal{D} = \prod_\alpha \delta_\alpha$, quindi la proiezione

$$\pi' : M \longrightarrow M' = V/_{\Lambda'}$$

è un rivestimento di grado $\mathcal{D}$, i cui automorfismi sono le traslazioni $\left\{\tau_\mu \mid \mu \in \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right\}$. Chiaramente la matrice dei periodi per Λ' in termini delle basi $\{\lambda'_\alpha\}$ e $\{e_\alpha\}$ è

$$\Omega' = (I_n|Z),$$

perciò, se $x'_1, \ldots, x'_{2n}$ sono le coordinate duali a $\{\lambda'_\alpha\}$, la classe

$$[\omega] = \left[\sum_\alpha dx'_\alpha \wedge dx'_{n+\alpha}\right] = \left[\sum_\alpha \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}\right]$$

è una polarizzazione principale per M'. Visto che L è determinato a meno di traslazioni per la sua classe di Chern $c_1(L) = [\omega]$, segue che possiamo trovare $L' \in \mathrm{Pic}(M')$ tale che $(\pi')^*L' = L$. Abbiamo perciò mostrato:

Proposizione 2.3.2. *Se $L \in \mathrm{Pic}(M)$ è positivo su una varietà abeliana M, esiste una varietà abeliana M', un line bundle $L' \in \mathrm{Pic}(M')$ che induce una polarizzazione principale su M' e una mappa $\pi' : M \to M'$ tale che $(\pi')^* L' = L$.*

È chiaro che le $\mathcal{D}$ sezioni $\widetilde{\theta_{l_0}}$ corrispondenti a θ_{l_0} definite sopra sono, a meno di moltiplicazione, traslate una dell'altra tramite gli automorfismi del rivestimento $\pi' : M \to M'$, e che il generatore $\widetilde{\theta}$ di $H^0(M', \mathcal{O}(L'))$ è dato da

$$(\pi')^* \widetilde{\theta_{l_0}} = \sum_{\lambda \in \frac{\Lambda'}{\Lambda}} \tau_\lambda^* \widetilde{\theta_{l_0}}$$

per un qualunque $\widetilde{\theta_{l_0}}$.

Teorema 2.3.3. *Sia $L \in \mathrm{Pic}(M)$ un line bundle positivo. Allora $H^0(M, \mathcal{O}(L^k))$ non ha punti base per $k \geq 2$ e dà un embedding di M per $k \geq 3$.*

Dimostrazione. Nell'ottica della precedente proposizione, mostriamo il teorema prima per i line bundle $L \in \mathrm{Pic}(M)$ tali che $c_1(L)$ è una polarizzazione principale di M. Normalizzando tutto come nel Teorema 2.3.1, si ha che $H^0(M, \mathcal{O}(L^k))$ coincide con l'insieme delle $\theta \in \mathcal{O}(V)$ tali che

$$\theta(z + e_\alpha) = \theta(z), \qquad \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) = e^{-2\pi k i (z_\alpha + \frac{1}{2} Z_{\alpha\alpha})} \theta(z).$$

Se θ è la funzione theta di Riemann per $(M, [c_1(L)])$, allora, per ogni $\mu \in M$, la funzione

$$\theta_\mu(z) = \theta(z + \mu)\theta(z - \mu)$$

è una sezione globale olomorfa del line bundle L^2. Adesso, se z^* è un punto di M, esiste un μ tale che $\theta(z^* + \mu) \neq 0$ e $\theta(z^* - \mu) \neq 0$, e perciò $\theta_\mu(z) \neq 0$. Dunque il sistema lineare $|L^2|$ non ha punti base, e perciò induce

$$i_{L^2} : M \longrightarrow \mathbb{P}^N.$$

Per vedere che $i_{L^3} : M \to \mathbb{P}^N$ è un embedding, sia innanzitutto $\theta_0, \dots, \theta_N$ una base per $H^0(M, \mathcal{O}(L^3))$ e poniamo

$$J(z) = \begin{pmatrix} \theta_0(z) & \dots & \theta_N(z) \\ \frac{\partial \theta_0}{\partial z_1}(z) & \dots & \frac{\partial \theta_N}{\partial z_n}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \theta_0}{\partial z_1}(z) & \dots & \frac{\partial \theta_N}{\partial z_n}(z) \end{pmatrix}.$$

Per vedere che i_{L^3} è un'immersione, dobbiamo mostrare che $\operatorname{rk} J(z) = n+1$. Poniamo

$$\Theta(z,\mu,\nu) = \theta(z+\mu)\theta(z+\nu)\theta(z-\mu-\nu);$$

Θ è olomorfa nelle tre variabili e, per μ,ν fissati, $\Theta_{\mu,\nu}(z) = \Theta(z,\mu,\nu)$ è una sezione globale olomorfa di L^3. Perciò possiamo scrivere

$$\Theta(z,\mu,\nu) = c_0(\mu,\nu)\theta_0(z) + \ldots + c_N(\mu,\nu)\theta_N(z)$$

per certe funzioni c_i olomorfe nelle due variabili. Adesso supponiamo per assurdo che $J(z^*)$ non abbiam rango massimo per un certo $z^* \in M$; allora si hanno delle relazioni lineari

$$a_0\theta_i(z^*) = a_1\frac{\partial\theta_i}{\partial z_1}(z^*) + \ldots + a_n\frac{\partial\theta_i}{\partial z_n}(z^*)$$

per ogni $0 \leq i \leq N$. Allora, per ogni μ,ν,

$$a_0\Theta(z^*,\mu,\nu) = a_1\frac{\partial\Theta}{\partial z_1}(z^*,\mu,\nu) + \ldots + a_n\frac{\partial\Theta}{\partial z_n}(z^*,\mu,\nu).$$

Se definiamo la funzione meromorfa

$$\varphi(z) = a_1\frac{\partial\log\theta}{\partial z_1}(z) + \ldots + a_n\frac{\partial\log\theta}{\partial z_n}(z),$$

allora

$$\begin{aligned}\varphi(z^*+\mu) + \varphi(z^*+\nu) + \varphi(z^*-\mu-\nu) &= \sum_{j=1}^n a_j\frac{\partial\log\Theta}{\partial z_j}(z^*,\mu,\nu) = \\ &= \frac{1}{\Theta(z^*,\mu,\nu)}\sum_{j=1}^n a_j\frac{\partial\Theta}{\partial z_j}(z^*,\mu,\nu) = a_0\end{aligned}$$

per ogni μ,ν. Adesso, per ogni μ, esiste un ν tale che $\varphi(z^*+\nu) \neq \infty$ e $\varphi(z^*-\mu-\nu) \neq \infty$; dato che la somma precedente è costante, si ha che $\varphi(z^*+\mu)$ è una funzione olomorfa intera di μ. Dalla facile uguaglianza

$$\log\theta(z+\lambda_{n+\alpha}) = -2\pi i\left(z_\alpha + \frac{1}{2}Z_{\alpha\alpha}\right) + \log\theta(z),$$

si hanno le relazioni

$$\varphi(z+e_\alpha) = \varphi(z), \qquad \varphi(z+\lambda_{n+\alpha}) = \varphi(z) - 2\pi i a_\alpha$$

per ogni $\alpha = 1, \ldots, n$. Perciò ogni derivata parziale $\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}$ è periodica per il reticolo Λ, quindi è limitata in V e dunque costante. Di conseguenza φ è lineare, cioè

$$\varphi(z) = \sum_{\alpha} b_\alpha z_\alpha + c.$$

Ma $\varphi(z + e_\alpha) = \varphi(z)$ per ogni $\alpha = 1, \ldots, n$, da cui φ è costante e perciò

$$2\pi i a_\alpha = \varphi(z + \lambda_{n+\alpha}) - \varphi(z) = 0,$$

per ogni $\alpha = 1, \ldots, n$, cioè i coefficienti a_α sono tutti nulli.
Rimane da mostrare che i_{L^3} è iniettiva. Se $z_1, z_2 \in V$ sono tali che $\theta_i(z_1) = \rho\theta_i(z_2)$ per un certo $\rho \neq 0$ per ogni i, vediamo che $z_1 = z_2$ su M. Dalla relazione

$$\Theta(z, \mu, \nu) = c_0(\mu, \nu)\theta_0(z) + \ldots + c_N(\mu, \nu)\theta_N(z),$$

segue che

$$\frac{\Theta(z_1, \mu, \nu)}{\Theta(z_2, \mu, \nu)} = \frac{\theta(z_1 + \mu)\theta(z_1 + \nu)\theta(z_1 - \mu - \nu)}{\theta(z_2 + \mu)\theta(z_2 + \nu)\theta(z_2 - \mu - \nu)} \equiv \rho$$

al variare di μ, ν. Ora, visto che, per ogni μ esiste un ν tale che i quattro termini $\theta(z_1 + \nu)$, $\theta(z_1 - \mu - \nu)$, $\theta(z_2 + \nu)$, $\theta(z_2 - \mu - \nu)$ sono non nulli, segue che $\frac{\theta(z_1+\mu)}{\theta(z_2+\mu)}$ è una funzione intera mai zero, e possiamo definire

$$\psi(z) = \log \frac{\theta(z_1 + z)}{\theta(z_2 + z)},$$

che è olomorfa e intera. Dalle equazioni funzionali della funzione θ, si ha che

$$\psi(z + e_\alpha) = \psi(z) + 2\pi i b_\alpha, \qquad \psi(z + \lambda_{n+\alpha}) = \psi(z) - 2\pi i(z_1 - z_2)_\alpha + 2\pi i c_\alpha$$

per certi $b_\alpha, c_\alpha \in \mathbb{Z}$ (che dipendono dalla determinazione del logaritmo scelta). Esattamente come sopra si ha che le derivate parziali $\frac{\partial \psi}{\partial z_i}$ sono costanti, da cui

$$\psi(z) = 2\pi i \sum_{\beta} a_\beta z_\beta + d.$$

Visto che $\psi(z + e_\beta) - \psi(z) = 2\pi i b_\beta$, si ha che $a_\beta = b_\beta \in \mathbb{Z}$ per ogni $\beta = 1, \ldots, n$; perciò, essendo $\psi(z + \lambda_{n+\alpha}) - \psi(z) = 2\pi i \sum_\beta a_\beta Z_{\alpha\beta}$, segue che

$$2\pi i(z_1 - z_2)_\alpha = -2\pi i c_\alpha + 2\pi i \sum_{\beta} a_\beta Z_{\alpha\beta},$$

cioè

$$z_1 - z_2 = -\sum_{\alpha} c_\alpha e_\alpha + \sum_{\beta} a_\beta \lambda_{n+\beta} \in \Lambda.$$

Per il caso generale, sia $L \in \mathrm{Pic}(M)$ positivo. Per la proposizione precedente esiste una varietà abeliana M' con polarizzazione principale data da $L' \in \mathrm{Pic}(M')$ e una mappa finita $\pi' : M \to M'$ tale che $(\pi')^* L' = L$. Visto che π' non ha punti singolari, lo stesso argomento di sopra dice che $i_{(L')^3}$ è un'immersione (e quindi anche i_{L^3} lo è) e che $i_{L^3}(p) \neq i_{L^3}(q)$ per ogni $\pi'(p) \neq \pi'(q)$. Infine, che i_{L^3} separi i punti di $(\pi')^{-1}(p)$ è chiaro dalla descrizione esplicita della funzione theta di Riemann. □

2.4 I tori complessi come gruppi di Lie

Per concludere la trattazione, deduciamo alcune considerazioni aritmetiche dalla teoria che abbiamo appena studiato. Innanzitutto mostriamo che i tori complessi esauriscono l'intero insieme dei gruppi di Lie complessi compatti e connessi; ricordiamo che un gruppo di Lie complesso è una varietà complessa dotata di un'operazione di gruppo olomorfa.

Proposizione 2.4.1. *Ogni gruppo di Lie complesso M compatto e connesso è un toro complesso.*

Dimostrazione. Come prima cosa mostriamo che M è necessariamente commutativo. Per ogni $g \in M$, denotiamo con ϕ_g l'automorfismo di M tale che $\phi_g(h) = ghg^{-1}$; l'identità $e \in M$ è chiaramente fissata da ogni automorfismo ϕ_g. Siano $z_1, \ldots, z_n$ coordinate olomorfe di M intorno a e, e per ogni $g \in M$ scriviamo

$$\phi_g^* z_i = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_{i_1,\ldots,i_n}(g) z_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{i_n}.$$

Per ogni indice $i \in \mathbb{N}^n$, la funzione $a_{i_1,\ldots,i_n}$ è olomorfa, ma M è compatto e connesso, perciò $a_{i_1,\ldots,i_n}$ è costante. Dunque $\phi_g^* z_i = \phi_e^* z_i = z_i$, cioè $\phi_g^* = \mathrm{id}$ e M è commutativo.

Adesso, per ogni $v \in T_e'(M)$, sia $\widetilde{v}$ il campo vettoriale olomorfo tale che

$$\widetilde{v}(g) = (t_g)_*(v),$$

dove $t_g : M \to M$ è la moltiplicazione per g. Se $\varphi_{t,v} : M \to M$ è l'endomorfismo di M ottenuto integrando $\widetilde{v}$ fino al tempo t, possiamo denotare con

$$\begin{array}{rccc} \pi : & T_e'(M) & \longrightarrow & M \\ & v & \longmapsto & \varphi_{1,v}(e) \end{array}$$

Essendo M commutativo, π è un omomorfismo di gruppi surgettivo, e perciò M è quoziente di $T_e'(M) \cong \mathbb{C}^n$ per un sottogruppo discreto Λ; essendo M compatto, Λ deve avere rango $2n$ su $\mathbb{Z}$, e quindi $M = T_e'(M)/_{\Lambda}$ è un toro complesso. □

Osserviamo che, se $M = \mathbb{C}^n/_\Lambda$ e $M' = \mathbb{C}^m/_{\Lambda'}$ sono tori complessi e $f : M \to M'$ è olomorfa, allora f si solleva a $\widetilde{f} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. In termini delle coordinate usuali $z = (z_1, \ldots, z_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_m)$ rispettivamente su $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$, la matrice

$$Jf = \left(\frac{\partial w_i}{\partial z_j}\right)_{i,j}$$

è una funzione olomorfa globale su M, dunque costante. Perciò $\widetilde{f}$ è una mappa affine, e dunque:

Proposizione 2.4.2. *Ogni mappa olomorfa fra tori complessi è un omomorfismo di gruppi composto con una traslazione.*

Corollario 2.4.3. *Il gruppo dei biolomorfismi è isomorfo al gruppo*

$$\mathrm{BiHol}(M) \cong \langle \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[i]), M \rangle.$$

Otteniamo dunque che ogni varietà abeliana è una varietà algebrica omogenea, cioè ammette un gruppo di automorfismi biolomorfi che agisce transitivamente su se stessa. Però, a differenza ad esempio delle quadriche (anch'esse omogenee, ma che, se immerse in $\mathbb{P}^N$, hanno il gruppo degli automorfismi coincidente con l'insieme delle proiettività di $\mathbb{P}^N$ che mantengono la quadrica fissata), vale:

Teorema 2.4.4. *Se $M \subseteq \mathbb{P}^N$ è abeliana, gli automorfismi di M indotti da proiettività di $\mathbb{P}^N$ sono in numero finito.*

Dimostrazione. Sia $L = [H] \in \mathrm{Pic}(M)$, con H un iperpiano di $\mathbb{P}^N$. Se $\varphi : M \to M$ è un automorfismo di M indotto da una proiettività di $\mathbb{P}^N$, chiaramente $\varphi^* L = L$, in quanto φ manda iperpiani in iperpiani. Ma L è positivo, quindi è preservato da un numero finito di traslazioni di M; perciò basta mostrare che gli automorfismi di gruppo φ di M che fissano L e il punto $p = \pi(0) \in M$ è finito. Ogni tale automorfismo si solleva a una mappa lineare $\widetilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ che preserva il reticolo Λ; ma visto che φ fissa L, $\widetilde{\varphi}$ deve essere unitario rispetto al prodotto interno dato da $c_1(L) \in H^{1,1}(M) = V \otimes \overline{V}$. In particolare, $\widetilde{\varphi}$ deve portare ogni vettore λ_i di una $\mathbb{Z}$-base di Λ in un vettore di Λ della stessa lunghezza. Ma di tali vettori ce n'è solo un numero finito, da cui la tesi. $\square$