Automi

G. Turco

1 DFA

1.1 Definizione

Un DFA (*automa a stati finiti deterministico*) è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, dove:
- Q è un *insieme finito di stati*,
- Σ è un *alfabeto finito*,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ è la *funzione di transizione*,
- $q_0 \in Q$ è lo *stato iniziale*,
- $F \subset Q$ è l'*insieme degli stati finali*.

1.2 Funzione di transizione estesa

Funzione di transizione estesa: $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$$

$$\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

Il linguaggio accettato da un automa deterministico A è

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

2 NFA

Un NFA (*automa a stati finiti non deterministico*) è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ come un DFA, con la differenza che:
• $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ è la *funzione di transizione*

2.1 Funzione di transizione estesa

Funzione di transizione estesa: $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}$$

$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)$$

Il linguaggio accettato da un automa non deterministico A è

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

2.2 Equivalenza tra DFA e NFA

Sia M un NFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Sia M' un DFA $(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$, dove
• $Q' = \mathcal{P}(Q)$,
• $q'_0 = \{q_0\}$,
• $F' = \{S \in \mathcal{P}(Q) | S \cap F \neq \emptyset\}$,
• $\delta' : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ per cui

$$\delta'(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta(p, a)$$

Mostriamo che $\forall w \in \Sigma^*$, $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}'(q'_0, w)$, e quindi che $L(M) = L(M')$.
Per induzione sulla lunghezza di w:
BASE) $w = \epsilon$. $\hat{\delta}'(q'_0, \epsilon) = q'_0 = \{q_0\} = \hat{\delta}(q_0, \epsilon)$
INDUZIONE) Supponiamo la tesi vera per ogni $z \in \Sigma^*$ t.c. $|z| < n$. Sia $w = xa$ una stringa di lunghezza n. Allora

$$\hat{\delta}'(q'_0, xa) = \delta'(\hat{\delta}'(q'_0, x), a) = \delta'(\hat{\delta}(q_0, x), a) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0,x)} \delta(p, a) = \hat{\delta}(q_0, xa)$$

Viceversa, dato un DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, basta prendere l'NFA $(Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$, con $\delta'(q, a) = \{\delta(q, a)\}$.

3 NFA con ϵ-transizioni

Un ϵ-NFA è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ come un NFA, con la differenza che:
• $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathcal{P}(Q)$ è la *funzione di transizione*

3.1 ϵ-chiusura

Per ogni stato q si definisce induttivamente la ϵ-chiusura:

$$q \in eclose(q)$$

$$p \in eclose(q), r \in \delta(p, \epsilon) \Rightarrow r \in eclose(q)$$

Se S è un insieme di stati, allora

$$eclose(S) = \bigcup_{p \in S} eclose(p)$$

3.2 Funzione di transizione estesa

Funzione di transizione estesa: $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = eclose(q)$$

$$\hat{\delta}(q, xa) = eclose\left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)\right)$$

3.3 Da ϵ-NFA a DFA

Sia M un ϵ-NFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Sia M' un DFA $(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$, dove
• $Q' = \mathcal{P}(Q)$,
• $q'_0 = eclose(q_0)$,
• $F' = \{S \in \mathcal{P}(Q) | S \cap F \neq \emptyset\}$,
• $\delta' : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ per cui

$$\delta'(S, a) = eclose\left(\bigcup_{p \in S} \delta(p, a)\right)$$

Mostriamo che $\forall w \in \Sigma^*$, $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}'(q'_0, w)$, e quindi che $L(M) = L(M')$.
Per induzione sulla lunghezza di w:
BASE) $w = \epsilon$. $\hat{\delta}'(q'_0, \epsilon) = q'_0 = eclose(q_0) = \hat{\delta}(q_0, \epsilon)$
INDUZIONE) Supponiamo la tesi vera per ogni $z \in \Sigma^*$ t.c. $|z| < n$. Sia $w = xa$ una stringa di lunghezza n. Allora

$$\hat{\delta}'(q'_0, xa) = \delta'(\hat{\delta}'(q'_0, x), a) = \delta'(\hat{\delta}(q_0, x), a) = eclose\left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0,x)} \delta(p, a)\right) = \hat{\delta}(q_0, xa)$$

4 Pumping lemma per i linguaggi regolari

Teorema 4.1. *Sia L un linguaggio regolare.*
Allora $\exists n$ t.c. se $w \in L$ e $|w| \geq n$, $w = xyz$ con

1. $|xy| \leq n$
2. $y \neq \epsilon$
3. $\forall k \geq 0 \; xy^k z \in L$

Dimostrazione. Supponiamo che L sia riconosciuto da un DFA con n stati: $Q = \{q_0, ..., q_{n-1}\}$.
Sia $w = a_1 a_2 ... a_m \in L$, con $m \geq n$.
Sia $p_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 ... a_i) \; \forall 0 \leq i \leq m$, ponendo $p_0 = q_0$.
Dato che ci sono n stati distinti, tra gli $n+1$ stati $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ ce ne sono due uguali: $\exists i < j \leq n$ t.c. $p_i = p_j$.
Ora $w = xyz$, con
- $x = a_1 ... a_i$ e $\hat{\delta}(q_0, x) = p_i$
- $y = a_{i+1} ... a_j$ e $\hat{\delta}(p_i, y) = p_j = p_i$
- $z = a_{j+1} ... a_m$ e $\hat{\delta}(p_j, z) = p_m$

La stringa y non è vuota, essendo j strettamente maggiore di i. È chiaro che l'automa accetta ogni stringa della forma $xy^k z$, con $k \geq 0$. $\square$

5 Minimizzazione di un DFA

Sia $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, e $p, q \in Q$.
Sia $\equiv$ la relazione di equivalenza sugli stati di A tale che

$$p \equiv q \Longleftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F$$

Se $p \equiv q$ diciamo che p è *equivalente* a q.
Diciamo che p è *distinguibile* da q se $\exists w \in \Sigma^*$ t.c. $\hat{\delta}(p, w) \in F$ e $\hat{\delta}(q, w) \notin F$, o viceversa.

5.1 Algoritmo induttivo di riempimento-tabella

Possiamo calcolare *tutte e sole* le coppie di stati distinguibili con il seguente procedimento.
Formalmente, calcoliamo la relazione $R_A \subseteq Q \times Q$ tale che:
BASE) Se $p \in F$ e $q \notin F$, allora $(p, q) \in R_A$ e $(q, p) \in R_A$
INDUZIONE) Se $\exists a \in \Sigma$ t.c. $(\delta(p, a), \delta(q, a)) \in R_A$, allora $(p, q) \in R_A$

Notiamo che per ogni coppia $(p, q) \in R_A$ si ha $p \not\equiv q$:
- nel caso base si prendono solo coppie di stati distinguibili;
- supponiamo che le coppie raccolte in R_A siano tutte di stati distinguibili. Se per un simbolo a, $(\delta(p, a), \delta(q, a)) \in R_A$, vuol dire che esiste una certa stringa w che distingue $\delta(p, a)$ e $\delta(q, a)$. Perciò aw distingue p e q, e $p \not\equiv q$.

Teorema 5.1. *Siano $p, q \in Q$ degli stati distinguibili. Allora $(p, q) \in R_A$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $w = a_1 ... a_n$ sia la stringa di lunghezza minima che distingue due stati p e q per cui (p, q) non appartiene ad R_A.
Consideriamo il caso in cui $\hat{\delta}(p, w) \in F$ e $\hat{\delta}(q, w) \notin F$. (L'altro caso è analogo)
Sicuramente $w \neq \epsilon$, altrimenti (p, q) verrebbe trovata dall'algoritmo nel caso base. Perciò $|w| > 0$.
Consideriamo gli stati $r = \delta(p, a_1)$ e $s = \delta(q, a_1)$.
Visto che $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\delta}(r, a_2 ... a_n) \in F$ e $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\delta}(r, a_2 ... a_n) \notin F$, $(r, s) \in R_A$, altrimenti w non sarebbe la stringa minima che distingue una coppia di stati che non appartiene ad R_A.
Ma allora (p, q) viene trovata dall'algoritmo nella fase induttiva, in quanto $(r, s) = (\delta(p, a_1), \delta(q, a_1)) \in R_A$, e quindi appartiene a R_A contro l'ipotesi iniziale.
Questo significa che una tale stringa w non esiste, e che ogni coppia di stati distinguibili appartiene ad R_A. $\square$

5.2 L'automa minimo

Possiamo usare l'algoritmo di prima per minimizzare un DFA, mettendo insieme tutti gli stati equivalenti.

Teorema 5.2. *La relazione $\equiv$ è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. Verifichiamo le proprietà $\forall p, q, r \in Q$.
RIFLESSIVA) Chiaramente $\forall w \in \Sigma^*$ $\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(p, w) \in F$. Perciò $p \equiv p$.
SIMMETRICA) Se $p \equiv q$, allora $\forall w \in \Sigma^*$ $\hat{\delta}(q, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(p, w) \in F$, ovvero $q \equiv p$.
TRANSITIVA) Supponiamo che $p \equiv q$ e $q \equiv r$.
Allora $\forall w \in \Sigma^*$: $\Big(\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F\Big) \wedge \Big(\hat{\delta}(q, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r, w) \in F\Big)$.
Questo implica che $\forall w \in \Sigma^*$ $\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r, w) \in F$, ovvero che $p \equiv r$. □

Con $[q]$ sarà indicata la classe di equivalenza dello stato q per la relazione $\equiv$.

Teorema 5.3. *Sia $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA da minimizzare.*
Allora $M' = (Q', \Sigma, \delta', [q_0], F')$ è il DFA minimo equivalente a M, dove:

$$Q' = \{[q] | q \in Q, q \text{ è accessibile da } q_0\}$$
$$F' = \{[q] | q \in F\}$$
$$\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$$

Dimostrazione.
BUONA DEFINIZIONE DI δ') Mostriamo che se $p \equiv q$ allora $\delta(p, a) \equiv \delta(q, a)$. Questo è chiaro dalla contronominale, in quanto $\delta(p, a) \not\equiv \delta(q, a) \Rightarrow p \not\equiv q$.
EQUIVALENZA DI M e M') Si mostra per induzione su $|w|$ che $\hat{\delta}'([q_0], w) = [\hat{\delta}(q_0, w)]$.
Si ha poi $[p] \in F' \Leftrightarrow p \in F$. Infatti:
$\Leftarrow$) per la definizione di F', $p \in F \Rightarrow [p] \in F'$;
$\Rightarrow$) se $[p] \in F'$, allora $p \equiv f$, per qualche $f \in F$: se p non fosse uno stato di accettazione, sarebbe distinto da f dalla stringa vuota; perciò $p \in F$.
Infine $\forall w \in \Sigma^*$ $\hat{\delta}'([q_0], w) = [\hat{\delta}(q_0, w)] \in F' \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in F$, cioè $L(M') = L(M)$.
M' È MINIMO) Supponiamo che esista un DFA $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0^A, F_A)$ equivalente a M e con meno stati di M'. Diciamo che uno stato $p \in Q'$ è *equivalente* ad uno stato $q \in Q_A$ se $\forall w \in \Sigma^*$ $\hat{\delta}'(p, w) \in F' \Leftrightarrow \hat{\delta}_A(q, w) \in F_A$. In caso contrario, p è *distinguibile* da q.
Dato che $L(A) = L(M')$, si ha che q_0' è *equivalente* a q_0^A.
Si può vedere che $\forall w \in \Sigma^*$ $\hat{\delta}'(q_0', w)$ è *equivalente* a $\hat{\delta}_A(q_0^A, w)$. Infatti, se una stringa y distinguesse gli stati $\hat{\delta}'(q_0', x)$ e $\hat{\delta}_A(q_0^A, x)$, per un certo $x \in \Sigma^*$, la stringa xy distinguerebbe q_0' da q_0^A, che è assurdo.
Ora, ogni stato di M' è accessibile, per cui se $p \in Q'$, allora $\exists w \in \Sigma^*$ t.c. $\hat{\delta}'(q_0', w) = p$. Inoltre lo stato p è *equivalente* a $\hat{\delta}_A(q_0^A, w)$. Perciò ogni stato di M' è *equivalente* ad almeno uno stato di A.
Dal momento che A contiene meno stati di M', devono esserci due stati distinti $p_1, p_2 \in Q'$ *equivalenti* allo stesso stato $q \in Q_A$. Ma allora $p_1 \equiv p_2$.
Questo è assurdo, in quanto gli stati di M', per come è stato costruito, sono tutti distinguibili a coppie.
Non può esserci così un DFA equivalente a M e con meno stati di M'. □