Il Teorema di Bieberbach

Giacomo Mezzedimi

3 febbraio 2018

Abstract

In questo articolo enunciamo e dimostriamo il *Teorema di Bieberbach*, che mostra che ogni varietà chiusa e piatta è finitamente rivestita da un toro; per farlo, richiamiamo alcuni concetti di base riguardanti i gruppi di Lie, e ne studiamo i sottogruppi discreti usando il *Lemma di Margulis* e alcuni suoi corollari.

1 Gruppi di Lie

Un *gruppo di Lie* G è una varietà liscia di dimensione n che ammette una struttura di gruppo compatibile con la struttura C^∞: le due operazioni

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & gh \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

di moltiplicazione e inversione sono lisce. Si possono fare molti esempi di gruppi di Lie; quelli che ci interesseranno maggiormente sono i gruppi delle matrici ortogonali $\mathrm{O}(n)$, delle matrici unitarie $\mathrm{U}(n)$, e il gruppo delle isometrie $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che i primi due gruppi di Lie sono compatti, mentre l'ultimo non lo è. D'altra parte, ogni isometria $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ si può scrivere come $f(x) = Ax + b$, dove $A \in \mathrm{O}(n)$ è detta *parte rotatoria* e $b \in \mathbb{R}^n$ *parte traslatoria*; la proiezione di una isometria di $\mathbb{R}^n$ sulla sua parte rotatoria produce una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{r} \mathrm{O}(n) \longrightarrow 0.$$

Molto spesso le proprietà di gruppo di un gruppo di Lie G dicono molto della sua struttura; in questa trattazione ricorreranno spesso i gruppo *abeliani* e *nilpotenti*.
Presi due elementi $g, h \in G$, possiamo definire il *commutatore*

$$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Chiaramente il commutatore $[g,h]$ è banale se e solo se i due elementi commutano. Posto $G_0 = G$, possiamo definire iterativamente $G_k = [G_{k-1}, G]$; in altre parole, il sottogruppo $G_k < G$ consiste degli elementi

$$[g_1, [\dots, [g_k, g_{k+1}] \dots],$$

dove $g_1, \dots, g_{k+1} \in G$. Osserviamo che G è abeliano se e solo se $G_1 = e$; inoltre diciamo che G è *nilpotente* se $G_k = e$ per un certo k.

Per definizione, se G è nilpotente esiste un k per cui tutti gli elementi del tipo $[g_1, [\dots, [g_k, g_{k+1}] \dots]$ sono banali; la prossima proposizione mostra che in realtà basta meno:

Proposizione 1.1. *Sia G un gruppo generato da un insieme $S \subseteq G$, e $k \in \mathbb{N}$. Se gli elementi*

$$[g_1, [\dots, [g_k, g_{k+1}] \dots]$$

sono banali per ogni $g_1, \dots, g_{k+1} \in S$, allora $G_k = e$ e quindi G è nilpotente.

Dimostrazione. Un calcolo immediato mostra che

$$[a, bc] = [a, b] \cdot [b, [a, c]] \cdot [a, c]$$

per ogni $a, b, c \in G$, dunque ragionando ricorsivamente si ha che G_k è generato da elementi della forma

$$[g_1, [\dots, [g_m, g_{m+1}] \dots]$$

con $m \geq k$ e $g_1, \dots, g_{m+1} \in S$. La tesi segue immediatamente. $\square$

Passiamo ora a studiare la struttura di varietà di un gruppo di Lie G. Dato che la moltiplicazione a sinistra $L_g : G \to G$ per un elemento $g \in G$ è liscia, deduciamo che l'omomorfismo

$$(L_g)_* : T_e G \longrightarrow T_g G$$

è un isomorfismo, con inversa $(L_{g^{-1}})_*$. Dunque, dare una n-forma invariante a sinistra (cioè L_g-invariante) su G equivale a dare una n-forma sullo spazio vettoriale $T_e G$. In particolare, l'unica n-forma (a meno di riscalamento) positiva su $T_e G$ dà una n-forma di volume su G, detta *misura di Haar*.

Concludiamo la sezione ricordando che un sottogruppo Γ di un gruppo di Lie G è *discreto* se lo è come spazio topologico, cioè se ogni punto è isolato. Usando ancora una volta che L_g è un diffeomorfismo, vediamo che $\Gamma < G$ è discreto se e solo se $e \in \Gamma$ è isolato.

2 Il Lemma di Margulis

Sia G un gruppo di Lie. Il teorema principale di questa sezione è il Lemma di Margulis, che spiega la struttura di gruppo di "sufficientemente piccoli" sottogruppi discreti di G.

Teorema 2.1 (Lemma di Margulis)**.** *Esiste un intorno U di $e \in G$ tale che ogni sottogruppo discreto $\Gamma < G$ generato da elementi in U è nilpotente.*

Dimostrazione. Consideriamo la mappa

$$[\cdot, \cdot] : G \times G \longrightarrow G.$$

Dato che è composizione di mappe lisce, è anch'essa liscia; inoltre manda i sottogruppi $G \times \{e\}$ e $\{e\} \times G$ nell'identità e. A meno di scegliere una carta intorno a e, possiamo considerare la restrizione

$$[\cdot, \cdot] : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

che manda a 0 i sottogruppi $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{R}^n$. In particolare il suo differenziale in $(0,0)$ è nullo, e quindi esiste un intorno U di 0 tale che $[\cdot, \cdot]$ è $\frac{1}{2}$-Lipischitz in $U \times U$. Perciò, per ogni $x, y \in U$,

$$\frac{|[x, y] - [x, 0]|}{|(0, y)|} < \frac{1}{2} \implies |[x, y]| < |[x, 0]| + \frac{1}{2}|(0, y)| = \frac{1}{2}|y|,$$

e analogo per x, da cui

$$|[x, y]| < \frac{1}{2} \min\{|x|, |y|\}.$$

Di conseguenza, per ogni intorno $V \subseteq U$ di 0 esiste un k tale che

$$[U,[U,\ldots,[U,U]\ldots]\subseteq V.$$

Sia adesso Γ discreto e generato da elementi in U. Esiste un intorno $V \subseteq U$ tale che $V \cap \Gamma = e$, dunque gli elementi del tipo

$$[g_1,[\ldots,[g_k,g_{k+1}]\ldots]$$

per $g_1,\ldots,g_{k+1} \in U$ sono banali, e la Proposizione 1.1 permette di concludere. □

Nel caso in cui $G = \mathrm{O}(n)$ è il gruppo di Lie delle matrici ortogonali, il Lemma di Margulis può essere migliorato notevolmente; prima però abbiamo bisogno di un lemma tecnico.

Lemma 2.2. *Esiste un intorno U di $I \in \mathrm{O}(n)$ tale che per ogni $A \in \mathrm{O}(n)$ e ogni $B \in U$ si abbia l'implicazione*

$$[A,[A,B]] = I \implies [A,B] = I.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il lemma per $\mathrm{U}(n) \supseteq \mathrm{O}(n)$. Un semplice calcolo mostra che

$$[A,[A,B]] = A[A,BAB^{-1}]A^{-1},$$

dunque i coniugati A e BAB^{-1} commutano. Sia $\mathbb{C}^n = \bigoplus V_i$ la decomposizione in autospazi ortogonali per A; chiaramente la decomposizione per BAB^{-1} è $\mathbb{C}^n = \bigoplus B(V_i)$.
Sia U l'intorno di I dato dalle matrici che muovono ogni vettore di un angolo $< \frac{\pi}{2}$. Se $B \in U$, l'ortogonalità dei V_i mostra che $B(V_i) \cap V_j$ per ogni $i \neq j$. D'altra parte, A e BAB^{-1} commutano, e quindi ammettono una base comune di autovettori; l'unica possibilità è perciò che $B(V_i) = V_i$ per ogni i. La restrizione $A|_{V_i}$ coincide con $\lambda_j I$ per un certo $\lambda_j \in \mathbb{C}$, e perciò commuta con $B|_{V_i}$; dunque A e B commutano dovunque. □

Corollario 2.3. *Esiste un intorno U di $I \in \mathrm{O}(n)$ tale che ogni sottogruppo finito $\Gamma < \mathrm{O}(n)$ generato da elementi in U è abeliano.*

Dimostrazione. Dal Lemma di Margulis sappiamo che esiste un intorno U per cui ogni tale Γ è nilpotente. D'altra parte, il lemma precedente mostra che, a meno di restringere U, se $A, B \in \Gamma \cap U$ sono generatori di Γ tali che

$$[A,[A,\ldots,[A,B]\ldots] = I,$$

allora A, B commutano. Combinando le implicazioni, si ottiene la tesi. □

Proposizione 2.4. *Sia G un gruppo di Lie compatto e U un intorno di $e \in G$. Esiste un $N > 0$ tale che, per ogni sottogruppo $\Gamma < G$, il sottogruppo $\Gamma_U < \Gamma$ generato da $\Gamma \cap U$ ha indice al massimo N in Γ.*

Dimostrazione. Sia $W \subseteq U$ un intorno di e tale che $W^{-1} = W$ e $W^2 \subseteq U$, e poniamo $N = \frac{\mathrm{vol}(G)}{\mathrm{vol}(W)}$ usando la misura di Haar di G. Dato che $W \cap \Gamma \subseteq \Gamma_U$, per ogni $g, g' \in \Gamma$ si ha

$$g\Gamma_U \cap g'W \subseteq g\Gamma_U \cap g'\Gamma_U.$$

Dunque ogni traslato gW interseca la classe laterale $g\Gamma_U$ in Γ e nessun'altra. D'altra parte i traslati gW (al variare di $g \in \Gamma/_{\Gamma_U}$) sono disgiunti: se $gW \cap g'W \neq \emptyset$, esistono $w, w' \in W$ tali che $gw = g'w'$, da cui $g^{-1}g' = w(w')^{-1} \in U$, e cioè $g\Gamma_U = g'\Gamma_U$. Di conseguenza, Γ_U ha indice al massimo N in Γ. □

Dai precedenti due risultati otteniamo un interessante corollario:

Corollario 2.5. *Esiste un $N > 0$ (dipendente solo da n) tale che ogni sottogruppo finito di $\mathrm{O}(n)$ contiene un sottogruppo abeliano di indice al massimo N.*

3 Isometrie di $\mathbb{R}^n$

Concentriamoci adesso sulle varietà piatte, cioè che ammettono un ricoprimento di aperti isometrici ad aperti di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che le isometrie di $\mathbb{R}^n$ stanno in una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{r} \mathrm{O}(n) \longrightarrow 0.$$

Sia $f(x) = Ax + b$ un'isometria di $\mathbb{R}^n$, dove $A = r(f)$; il seguente lemma ne studia la struttura algebrica:

Lemma 3.1. *Siano $f(x) = Ax + b$, $g(x) = Cx + d$ isometrie di $\mathbb{R}^n$.*

1. *L'inversa di f è $f^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$.*
2. *Se f agisce liberamente, cioè $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, allora $\mathrm{Fix}(A) \neq 0$.*
3. *Esiste una traslazione di $\mathbb{R}^n$ che coniuga f ad $Ax + b'$, con $b' \in \mathrm{Fix}(A)$.*
4. *Il commutatore di f e g è*

$$[f, g] = [A, C]x + A(I - C)A^{-1}b + AC(I - A^{-1})C^{-1}d.$$

In particolare, se $C = I$, la formula si semplifica a

$$[f, g] = x + (A - I)d.$$

Dimostrazione. 1. Facile calcolo.

2. Se l'equazione $Ax + b = x$ non ammette soluzione, cioè $(A - I)x = -b$ non ammette soluzione, necessariamente la matrice $A - I$ non è surgettiva, e quindi non iniettiva. Concludiamo osservando che $\mathrm{Fix}(A) = \mathrm{Ker}(A - I)$.
3. La traslazione $x \mapsto x + d$ coniuga f a

$$(A(x + d) + b) - d = Ax + (A - I)d + b.$$

Dato che A è ortogonale, si ha che $\mathrm{Im}(A - I) = \mathrm{Ker}(A - I)^{\perp} = \mathrm{Fix}(A)^{\perp}$, dunque decomponendo $\mathbb{R}^n = \mathrm{Fix}(A) \oplus^{\perp} \mathrm{Fix}(A)^{\perp}$ e scrivendo $b = b' - b''$, con $b' \in \mathrm{Fix}(A)$ e $b'' \in \mathrm{Fix}(A)^{\perp}$, esiste $d \in \mathbb{R}^n$ tale che $(A - I)d = b''$, cioè $b' = (A - I)d + b \in \mathrm{Fix}(A)$.

4. Basta usare il primo punto.

□

Sia adesso $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ un sottogruppo discreto. La mappa $r : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{O}(n)$ induce una successione esatta

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \Gamma \longrightarrow r(\Gamma) \longrightarrow 0,$$

dove $T \triangleleft \Gamma$ è detto *sottogruppo delle traslazioni* di Γ. Osserviamo che il sottogruppo $r(\Gamma) < \mathrm{O}(n)$ non è necessariamente discreto: se Γ è generato da un'isometria $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ che è composizione di una rotazione di un angolo θ e di una traslazione non banale lungo l'asse di rotazione r, è facile vedere che Γ è discreto e agisce liberamente, ma $r(\Gamma)$ non lo è se $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ (in effetti $r(\Gamma)$ è un sottoinsieme denso delle rotazioni intorno a r).

Nel contesto particolare dello spazio euclideo, siamo in grado di migliorare il risultato ottenuto nel Corollario 2.5:

Teorema 3.2. *Esiste un $N > 0$ (dipendente solo da n) tale che ogni sottogruppo discreto di* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *contiene un sottogruppo abeliano di indice al massimo N.*

Dimostrazione. Sia $U \subseteq \mathrm{O}(n)$ un intorno di I tale che: $[U, U] \subseteq \frac{1}{2}U$, U è simmetrico, cioè $U = U^{-1}$, per ogni $A \in U$, $|(A - I)v| < \frac{1}{4}|v|$ per ogni $v \neq 0$, e verifica il Lemma 2.2. Sia $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ un sottogruppo discreto, e indichiamo con $r(\Gamma)_U$ il gruppo generato da $r(\Gamma) \cap U$. La Proposizione 2.4 assicura che l'indice di $r(\Gamma)_U$ in $r(\Gamma)$ è limitato da N, con N che dipende solo da U. Dunque la sua controimmagine

$$\Gamma^* = r^{-1}(r(\Gamma)_U) \cap \Gamma$$

ha indice in Γ limitato da N. Osserviamo che Γ^* è il sottogruppo di Γ formato da tutte le isometrie $Ax + b$ con $A \in r(\Gamma)_U$; vogliamo mostrare che Γ^* è abeliano, e avremmo finito.
Siano $A_1x + b_1$ e $A_2x + b_2$ due isometrie di Γ^*. Definiamo per ogni $i \geq 2$ l'isometria

$$A_{i+1}x + b_{i+1} = [A_1x + b_1, A_ix + b_i] \in \Gamma^*.$$

Un calcolo precedente dice che

$$A_{i+1} = [A_1, A_i], \qquad b_{i+1} = A_1(I - A_i)A_1^{-1}b_1 + A_1A_i(I - A_1^{-1})A_i^{-1}b_i.$$

Supponiamo innanzitutto che $A_1, A_2 \in U$. Dato che la mappa $[\cdot, \cdot]$ contrae i vettori di U e $A_i - I$ contrae i vettori uniformemente, otteniamo che $A_i \to I$ e $b_i \to 0$ quando $i \to \infty$. Ma allora $A_ix + b_i$ tende all'identità, e dato che Γ^* è discreto, la successione si deve stabilizzare, cioè esiste un i_0 tale che $A_{i_0} = I$; perciò usando ricorsivamente il Lemma 2.2 si ottiene che $A_3 = [A_1, A_2] = I$, cioè A_1, A_2 commutano. Dato che $r(\Gamma^*)$ è generato da $r(\Gamma^*) \cap U$, ne deduciamo che $r(\Gamma^*)$ è abeliano.
Di conseguenza possiamo scrivere

$$A_{i+1}x + b_{i+1} = x + (I - A_i)b_1 + (A_1 - I)b_i. \tag{$\star$}$$

Consideriamo ora il caso in cui $A_1 \in U$ e $A_2 = I$. Dall'uguaglianza precedente otteniamo

$$A_{i+1}x + b_{i+1} = x + (A_1 - I)b_i = \ldots = x + (A_1 - I)^{i-1}b_2.$$

Dato che $A_1 \in U$, si ha che $(A_1 - I)^i b_2 \to 0$ quando $i \to \infty$, e perciò come prima $(A_1 - I)^i b_2 = 0$ per qualche i, da cui $(A_1 - I)b_2 = 0$ in quanto A_1 è diagonalizzabile; dunque $b_2 \in \mathrm{Fix}(A_1)$.
Questo argomento mostra che, se Γ^* contiene una traslazione $x + b$, allora $b \in \mathrm{Fix}(A)$ per ogni $A \in r(\Gamma^*) \cap U$. Dato che tali A generano $r(\Gamma^*)$, il vettore b appartiene a $W = \mathrm{Fix}(r(\Gamma^*))$.
Siano finalmente $Ax + b$, $Cx + b$ elementi qualsiasi in Γ^*. Dalla relazione ($\star$) otteniamo

$$[Ax + b, Cx + d] = x + (I - C)b + (A - I)d.$$

Da quanto detto sopra, il vettore $(I - C)b + (A - I)d$ sta in W. D'altra parte $\mathrm{Im}(I - C) = \mathrm{Ker}(I - C)^\perp = \mathrm{Fix}(C)^\perp \subseteq W^\perp$, e analogamente $\mathrm{Im}(A - I) \subseteq W^\perp$, da cui $(I - C)b + (A - I)d \in W \cap W^\perp = \{0\}$ e quindi le due isometrie commutano. $\square$

4 Gruppi cristallografici

Un sottogruppo discreto $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ si dice *gruppo cristallografico* se il quoziente $\mathbb{R}^n/_\Gamma$ è compatto. La prossima proposizione sottolinea una fondamentale proprietà di tali gruppi:

Proposizione 4.1. *L'immagine $r(\Gamma)$ di un gruppo cristallografico è finita.*

Dimostrazione. Grazie al Teorema 3.2, possiamo supporre che Γ sia abeliano. Vogliamo mostrare che, nell'ipotesi in cui Γ è abeliano, l'immagine $r(\Gamma)$ è banale, cioè tutti gli elementi di Γ sono traslazioni. Supponiamo per assurdo che Γ contenga un'isometria $Ax + b$ con $A \neq I$. A meno di coniugare Γ per una traslazione, possiamo supporre $b \in \mathrm{Fix}(A)$; sia inoltre $Cx + d$ un'altra isometria di Γ. Il commutatore

$$[Ax + b, Cx + d] = x + (A - I)d - (C - I)b$$

è banale; visto che A e C commutano e $b \in \mathrm{Fix}(A)$, si ha che $(A - I)d = (C - I)b \in \mathrm{Fix}(A)$, cioè $(A - I)^2 d = 0$ e perciò $(A - I)d = 0$ in quanto $A - I$ è diagonalizzabile. Perciò abbiamo mostrato che $d \in \mathrm{Fix}(A) \subsetneq \mathbb{R}^n$ per ogni isometria $Cx + d$ in Γ. Di conseguenza, l'orbita di $0 \in \mathbb{R}^n$ tramite Γ è interamente contenuta in $\mathrm{Fix}(A)$. Ma la compattezza di $\mathbb{R}^n/_\Gamma$ implica che esiste un dominio fondamentale compatto, e quindi un $R > 0$ tale che ogni punto di $\mathbb{R}^n$ dista al massimo R da ogni orbita; questa è una contraddizione in quanto $\mathrm{Fix}(A)$ è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^n$. $\square$

Corollario 4.2. *Ogni gruppo cristallografico ammette un sottogruppo delle traslazioni T di indice finito e isomorfo a $\mathbb{Z}^n$.*

Dimostrazione. Sicuramente T è libero su $\mathbb{Z}$, in quanto è finitamente generato e non ammette torsione. La proposizione precedente dice che T ha indice finito in Γ, dunque $\operatorname{rk} T = \operatorname{rk} \Gamma = n$ in quanto il quoziente $\mathbb{R}^n/_\Gamma$ è compatto. $\square$

Questo risultato ci permette finalmente di dimostrare il teorema centrale della trattazione:

Teorema 4.3 (Teorema di Bieberbach). *Ogni varietà chiusa e piatta è finitamente rivestita da un toro piatto.*

Dimostrazione. La caratterizzazione delle varietà chiuse assicura che la varietà X è un quoziente $\mathbb{R}^n/_\Gamma$ per un certo gruppo cristallografico Γ. Il corollario precedente dice che esiste un sottogruppo $T \lhd \Gamma$ isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ e di indice finito, dunque la mappa $\mathbb{R}^n/_T \to X$ è un rivestimento finito, e si conclude osservando che T è un reticolo in $\mathbb{R}^n$ (in quanto è discreto e $\langle T \rangle_\mathbb{R} = \langle \Gamma \rangle_\mathbb{R} = \mathbb{R}^n$). $\square$