Funzioni non differenziabili in nessun punto

Giacomo Mezzedimi

17 Febbraio 2015

In questo articolo mostreremo l'esistenza di una funzione continua non differenziabile in nessun punto, senza trovarla esplicitamente, ma deducendola dal teorema di Baire.

Nel seguito indicheremo con X uno spazio metrico completo, cioé uno spazio in cui ogni successione di Cauchy converge.

Definizione 1. *Un chiuso $F \subset X$ si dice **magro** se non ha parte interna, cioé se $F^\circ = \emptyset$.*

Lemma. *$F \subset X$ magro $\Rightarrow X \backslash F$ é un aperto denso.*

Proof. Ovvia, in quanto se $x \notin X \backslash F \Rightarrow x \in F \Rightarrow \forall I \in I(x)$ intorno, $I \not\subset F \Rightarrow I \cap (X \backslash F) \neq \emptyset$. □

Teorema (Baire)**.** *X spazio metrico completo non é unione di una famiglia numerabile di chiusi magri, cioé $X \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.*
In altre parole, $X \backslash (\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} X \backslash X_i$ é intersezione di un numero numerabile di aperti densi e $\bigcap_{i=1}^{\infty} X \backslash X_i \neq \emptyset$.

Proof. Sia X_1 il primo chiuso magro; $X_1 \neq X$, in quanto X ha parte interna, dunque $\exists x_1 \in X \backslash X_1$.
Ma $X \backslash \{x_1\}$ é aperto, quindi $\exists B(x_1, \sigma_1) \subset X \backslash \{x_1\}$, diciamo $\sigma_1 < \frac{1}{2}$.
Consideriamo X_2. $B(x_1, \sigma_1) \not\subset X_2$, poiché X_2 é magro $\Rightarrow \exists x_2 \in B(x_1, \sigma_1) \backslash X_2$ e come prima $\exists B(x_2, \sigma_2)$ tale che $B(x_2, \sigma_2) \cap X_2 = \emptyset$ e $\sigma_2 < \frac{\sigma_1}{2}$.
Ripetendo ricorsivamente l'operazione, si ottiene una successione $\{x_n\}$, che é di Cauchy, in quanto:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \leq \frac{\sigma_n}{2} + \ldots + \frac{\sigma_{m-1}}{2} < \frac{1}{2^n}.$$

Dunque $x_n \to x$. Vediamo che $x \notin X_n \ \forall n$:

$$d(x, x_n) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\sigma_i}{2} \leq \sigma_n,$$

da cui $x \in B(x_n, \sigma_n)$, cioé $x \notin X_n$. □

Proposizione 1. *Sia $K = [0,1]$. Allora $(C^0(K), d)$, dove $d(f,g) = \sup_K |f - g|$, é uno spazio metrico completo.*

Proof. d é ben definita perché K é compatto; inoltre si puó verificare che é una distanza.
$C^0(K)$ é completo, infatti $\forall \{f_n\}$ di Cauchy, so che $f_n(x) \to f(x)$, in quanto é una successione di numeri; devo verificare che f é continua.
Sia $n \gg 1$; allora:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

in quanto il primo e l'ultimo addendo sono $< \varepsilon$ perché $f_n \to f$, mentre il secondo é $< \varepsilon$ per continuitá di f_n. □

Definizione 2. *Definiamo $A_{m,n} = \{f \in C^0(K) | \exists x \in K$ per cui $|t - x| < m \Rightarrow \frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|} < n\}$.*

Osservazione: f differenziabile in $x \Rightarrow \exists m, n | f \in A_{m,n}$, poiché f differenziabile $\Rightarrow$ il limite del rapporto incrementale é finito.
Dunque, denotato con $\mathcal{D}$ l'insieme delle funzioni differenziabili in almeno un punto, abbiamo che $\mathcal{D} \subset \bigcup_{m,n} A_{m,n}$.

Proposizione 2. *$\forall m, n$, $A_{m,n}$ é un chiuso magro.*

Proof. Vediamo che $A_{m,n}$ é chiuso, cioé che se $\{f_i\} \in A_{m,n}$, $f_i \to f$ e $f \in A_{m,n}$.
$f_i \in A_{m,n} \Rightarrow \forall i \; \exists x_i \in K | \frac{|f_i(t)-f_i(x_i)|}{|t-x_i|} < n$ se $|t - x_i| < m$.
$\{x_i\}$ é una successione in un compatto, quindi $\exists \{x_\eta\} \subset \{x_i\}$ tale che $x_\eta \to x$ e $\frac{|f_\eta(t)-f_\eta(x_\eta)|}{|t-x_\eta|} < n$.
Poiché la convergenza é uniforme, e

$$\frac{|f(t) - f(x)|}{|t - x|} = \lim_{i \to \infty} \frac{|f_i(t) - f_i(x_i)|}{|t - x_i|},$$

si ha che il limite é $< n$ in un intorno di x.
Vediamo ora che $A_{m,n}$ é magro.
$\varepsilon > 0$, $f \in A_{m,n}$, cerchiamo $g \in B(f, \varepsilon) | g \notin A_{m,n}$.
Trasformo f in una spezzata: sia $0 = a_1 < \ldots < a_k = 1$ una partizione di K.
Consideriamo la funzione:

$$y(t) = \frac{a_{i+1} - t}{a_{i+1} - a_i} f(a_i) + \frac{t - a_i}{a_{i+1} - a_i} f(a_{i+1})$$

vediamo che $y(a_i) = f(a_i)$ e $y(a_{i+1}) = f(a_{i+1})$.
Ragionando in modo analogo, possiamo considerare tutte le spezzate di

questo tipo tali che $y(a_i) = f(a_i)\ \forall i$; sia $\mathcal{P}$ l'insieme di queste spezzate.
Per continuitá, sappiamo che $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$; poniamo $|a_{i+1} - a_i| < \delta\ \forall i$.
Sia $p \in \mathcal{P}$; allora, preso i tale che $|a_i - x|$ é minimo, abbiamo che:

$$|p(x)-f(x)| = |p(x)-p(a_i)+f(a_i)-f(x)| \leq |p(x)-p(a_i)|+|f(a_i)-f(x)| \leq$$

$$\leq |p(a_{i+1}) - p(a_i)| + |f(a_i) - f(a_{i+1})| \leq \varepsilon.$$

Dunque ogni $p \in \mathcal{P}$ sta in $B(f, \varepsilon)$; vediamo che esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $\frac{d}{dx}p(x) > n\ \forall x \in K$.
Dividendo l'intervallo $[0, 1]$ in k intervalli regolari, costruiamo la funzione ϕ lineare a tratti che vale 0 in a_{2i} e 1 in a_{2i+1}; notiamo che la derivata di ϕ vale $\pm k$.
Prendiamo $p = p_0 + \theta\phi$, $p_0 \in \mathcal{P}$, tale che $p \in B(f, \varepsilon)$; dividendo l'intervallo $[0, 1]$ in $k \geq \frac{2n}{\theta}$ parti, abbiamo che:

$$\left|\frac{d}{dx}p(x)\right| = \left|\frac{d}{dx}(p(x) + \theta\phi(x))\right| \geq |-n + 2n| = n.$$

□

Corollario. *Esiste almeno una funzione continua non differenziabile in nessun punto.*

Proof. Per Baire abbiamo che $C^0(K) \neq \bigcup_{m,n} A_{m,n}$, ma $\mathcal{D} \subset \bigcup_{m,n} A_{m,n}$, dunque $\exists f \in C^0(K) \backslash (\bigcup_{m,n} A_{m,n})$. □

Osservazione: Una tale funzione puó essere la famosa **funzione di Weierstrass**:

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

dove $0 < a < 1$ e b é un intero dispari tale che $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Osservazione: La nostra costruzione é peró piú potente di qualunque esempio esplicito: infatti in realtá il teorema di Baire afferma non solo che $X \backslash (\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) \neq \emptyset$, ma anche che $X \backslash (\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i)$ é denso in X.
Dunque, in realtá, le funzioni non differenziabili in nessun punto sono dense nello spazio delle funzioni continue (con la metrica tradizionale).