Liceo Scientifico Giovanni Marinelli

Esame di Maturità

Anno Scolastico 2014-2015

Orbite, Stabilizzatori e Simmetrie

Un'applicazione del lemma di Burnside

Giona Micossi

Indice

1 Introduzione

Tra i molti problemi proposti all'edizione 2014 della Gara Nazionale di Matematica a Squadre uno si distingueva per la difficoltà. Malgrado l'impegno dei concorrenti le decine di risposte presentate continuavano a risultare errate. Alla fine una sola squadra, purtroppo non la nostra, rispose correttamente e, anche grazie ai molti punti ottenuti per quel problema, vinse la gara.

Cosa rendeva quel problema particolarmente difficile e con quali conoscenze si sarebbe potuto risolvere? Da queste domande che mi ponevo dopo la gara ho tratto l'ispirazione per questo lavoro, che mi ha portato ad approfondire alcuni fatti matematici che normalmente vengono solo sfiorati dal programma scolastico.

1.1 Perché è difficile?

Il problema, secondo la tradizione delle gare a squadre di matematica, è nascosto tra le pieghe di un breve racconto attinente ad un "tema" assegnato per la gara (in questo caso, l'Odissea; è tradizionale anche storpiare i nomi di luoghi e personaggi):

Problema

> Sebbene Homero non lo dica, i Proci sono molto generosi nei confronti di Penelopell. Un giorno pensano di regalarle ognuno una collana fatta di 17 pietre perfettamente sferiche scelte tra smeraldi e rubini. Ovviamente vogliono evitare di regalare alla regina di Itõca due collane che opportunamente ruotate nello spazio risultino uguali. Quante collane diverse possono far confezionare i Proci? *Gli smeraldi sono tutti uguali fra loro, e così i rubini.*

Se non fosse contemplata la possibilità di ruotare la collana ogni pietra sarebbe distinguibile dalle altre in virtù della posizione occupata; il problema sarebbe allora molto più semplice, in quanto ciascuna delle 17 pietre si potrebbe scegliere in due modi, fornendo 2^{17} possibili collane. Tutte le squadre avrebbero risposto nel giro di un paio di minuti.

Se invece la collana può essere ruotata essa equivale a più configurazioni fisse. Ad esempio, considerando il caso di una collana a sei pietre per semplificare, una collana con un rubino e cinque smeraldi che possa ruotare corrisponde a sei collane "fisse":

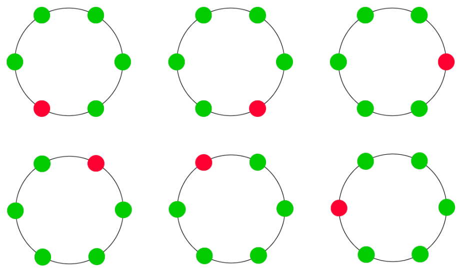

Figura 1: Sei collane uguali a meno di rotazioni.

È immediata l'idea che ad ogni collana mobile corrispondano 6 collane fisse e che la risposta (nel caso di sei pietre) possa essere $\frac{2^6}{6}$. Purtroppo l'idea non funziona: 2^6 non è divisibile per 6 e, nel problema della gara, 2^{17} non lo è per 17. Il motivo della mancata divisibilità è che non tutte le collane corrispondono a sei collane fisse. Ad esempio la collana che alterna tre volte un rubino ed uno smeraldo corrisponde a due sole collane fisse:

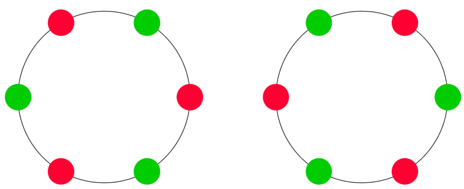

Figura 2: Due collane uguali a meno di rotazioni

Ora è chiaro perché il problema della gara è difficile: c'è un gran numero di configurazioni (2^{17}) ciascuna delle quali, caso per caso, può corrispondere per rotazioni ad un numero variabile di altre configurazioni. Ovviamente non è possibile classificarle, nel tempo della gara, esaminandole una per una. Occorre un metodo.

2 Gruppi, trasformazioni e simmetrie

2.1 Gruppi

Un gruppo è un oggetto comprendente un insieme G (finito o infinito) ed un'operazione binaria $\oplus$ tra elementi di G che verificano le seguenti proprietà:

- Il gruppo è chiuso rispetto all'operazione $\oplus$. Ovvero, presi $a, b \in G$ anche $a \oplus b \in G$.
- L'operazione $\oplus$ è associativa. Ovvero $\forall a, b, c \in G, a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.
- Esiste un unico elemento $e \in G$ (identità) tale che $\forall g \in G, g \oplus e = e \oplus g = g$.
- $\forall g \in G, \exists\, g^{-1} \in G$ tale che $g \oplus g^{-1} = g^{-1} \oplus g = e$.

Un gruppo familiare a molte persone è l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$ con l'operazione di addizione $+$ nel quale il ruolo di e è svolto dal numero 0.

2.2 Trasformazioni

Le trasformazioni di un insieme X sono le funzioni invertibili $X \to X$. Date due trasformazioni T e U di X anche la loro funzione composta $T \circ U$, definita come $[T \circ U]\,(x) \equiv T(U(x))$ è una funzione invertibile $X \to X$ ed è quindi una trasformazione. Inoltre l'operazione di composizione '$\circ$' è associativa ed ha come identità la trasformazione identica I che trasforma ogni elemento di X in sé stesso. È quindi possibile costruire gruppi di trasformazioni con l'operazione di composizione.

D'altra parte ogni gruppo G si può vedere come gruppo di trasformazioni operate su G stesso dall'operazione $\oplus$ del gruppo. Per esempio, nel caso del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ l'elemento $4 \in \mathbb{Z}$ può essere identificato con la trasformazione che ad ogni $z \in \mathbb{Z}$ associa $4 + z$.

È allora evidente che i concetti di gruppo e di trasformazione sono intimamente legati.

2.3 Simmetrie

Un gruppo di trasformazioni familiare dallo studio della geometria, e che risulta rilevante per il problema delle collane, è quello delle trasformazioni di congruenza (chiamate anche isometrie) che agiscono sull'insieme X dei sottoinsiemi del piano, cioè sulle figure geometriche piane.

Le trasformazioni di congruenza sono le traslazioni, le rotazioni, le riflessioni e tutte le altre trasformazioni che si ottengono componendole.

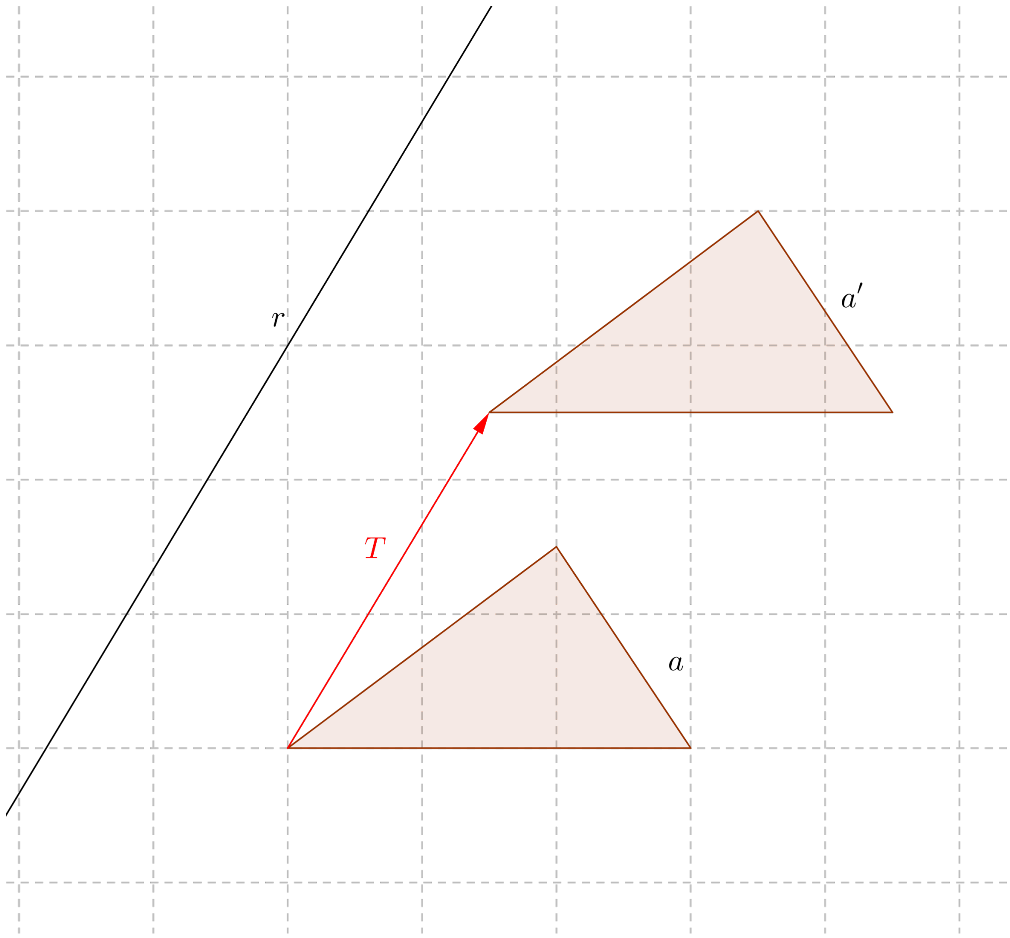

Figura 3: La traslazione T trasforma il triangolo a nel triangolo congruente a'. La retta r parallela alla traslazione è trasformata in sé stessa: T è una simmetria di r.

Se tra tutte le trasformazioni di congruenza considero il sottoinsieme H di quelle che lasciano invariata la figura Y ottengo ancora un gruppo di trasformazioni: infatti le loro inverse e le loro composizioni lasciano anch'esse invariata Y e quindi appartengono ad H, come anche l'identità I. H è il *guppo di simmetria* della figura Y, e i suoi elementi sono le simmetrie di Y.

Per esempio in figura 3 è mostrata una traslazione T che lascia invariata la retta r parallela alla direzione della traslazione. L'insieme di tutte traslazioni parallele a r, ovvero le traslazioni che trasformano r in sé stessa, è un gruppo di trasformazioni: infatti componendo due traslazioni parallele ad r si ottiene ancora una traslazione parallela ad r, e la trasformazione inversa di una traslazione parallela ad r è la traslazione parallela ad r della stessa lunghezza e di verso opposto. Osservo che le traslazioni parallele a r da sole non formano l'intero gruppo di simmetria di r, del quale fanno parte anche le riflessioni rispetto ad assi perpendicolari ad r e la riflessione rispetto a r (le rotazioni di 180° centrate su un punto di r coincidono con le riflessioni rispetto ad un asse perpendicolare ad r nello stesso punto seguite da una riflessione rispetto a r).

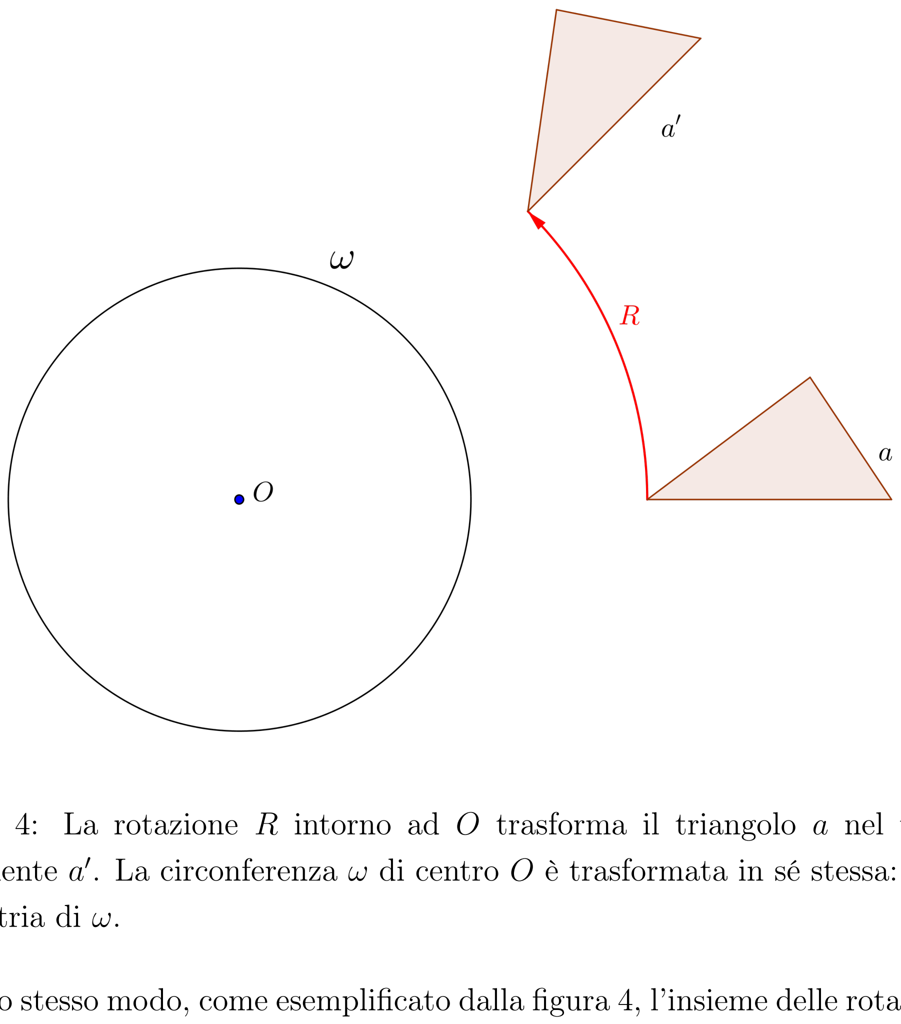

Figura 4: La rotazione R intorno ad O trasforma il triangolo a nel triangolo congruente a'. La circonferenza ω di centro O è trasformata in sé stessa: R è una simmetria di ω.

Allo stesso modo, come esemplificato dalla figura 4, l'insieme delle rotazioni con centro O è un gruppo di trasformazioni che lascia invariata una circonferenza di centro O. Il gruppo di simmetria della circonferenza comprende anche le riflessioni rispetto ad un asse passante per O.

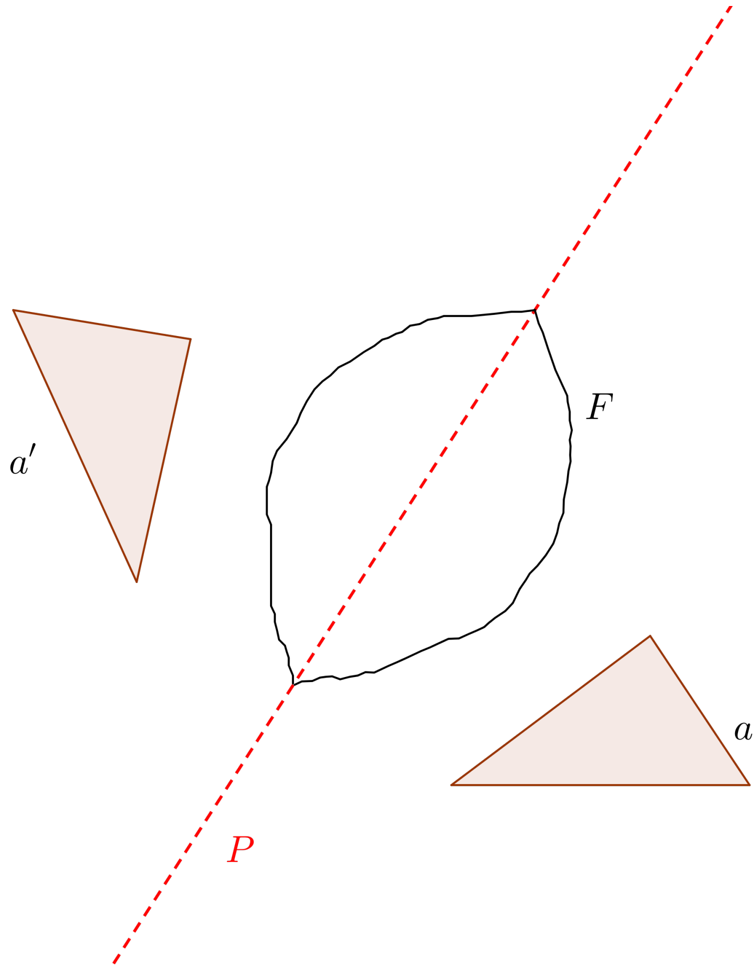

Figura 5: La riflessione rispetto all'asse P trasforma il triangolo a nel triangolo congruente a'. La figura F ha P come asse di simmetria ed è trasformata in sé stessa.

Rette e circonferenze hanno gruppi di simmetria che comprendono infinite trasformazioni. Altre figure hanno gruppi di simmetria finiti. Per esempio la figura geometrica F in fig. 5 ha solo due simmetrie: I, la trasformazione identica e P, la riflessione rispetto al suo asse di simmetria.

Il gruppo di simmetria di un triangolo equilatero comprende sei trasformazioni: I, le rotazioni di 120° e 240° in verso orario intorno al suo circocentro e le loro composizioni con una riflessione (indicata da P) rispetto ad una retta contenente una delle altezze. Questo gruppo è chiamato *gruppo diedrale* D_3.

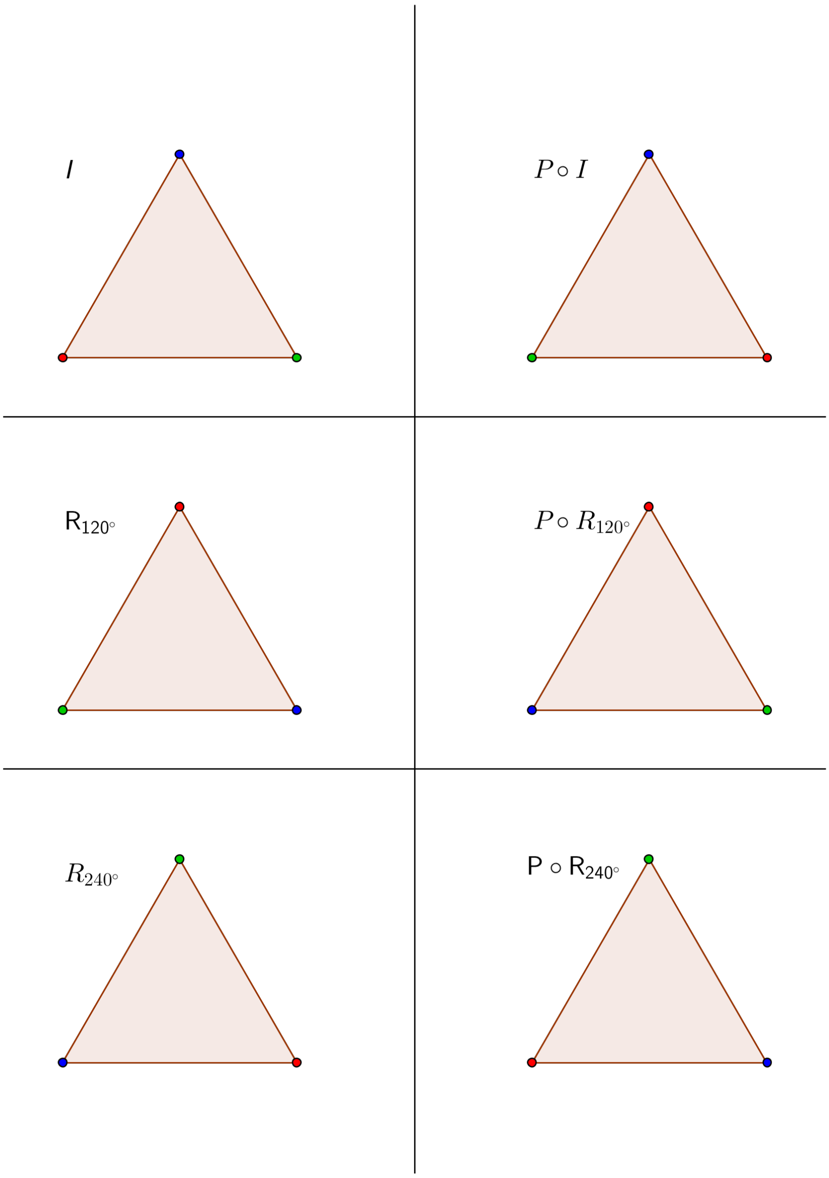

Figura 6: Le sei trasformazioni del gruppo diedrale D_3

In figura i vertici sono colorati per far apprezzare l'effetto delle trasformazioni ma ai fini delle simmetrie essi si considerano indistinguibili. Le tre trasformazioni nella colonna di destra si possono descrivere anche come le riflessioni $P_1 \equiv P$, P_2 e P_3 rispetto ai tre assi del triangolo.

Analogamente al triangolo equilatero, ogni poligono regolare con n lati ha un gruppo di simmetria finito con $2n$ elementi chiamato *gruppo diedrale* D_n. Due collane con n pietre risultano allora uguali ai fini del problema se una delle trasformazioni del gruppo diedrale D_n trasforma l'una nell'altra. Nella figura sono illustrate le trasformazioni di D_6 applicate ad una collana con 6 pietre di cui una è un rubino e le altre sono smeraldi: nella prima riga vi sono le rotazioni di angoli multipli di 60° mentre nella seconda riga alla trasformazione immediatamente sopra è stata fatta seguire una riflessione P rispetto all'asse orizzontale.

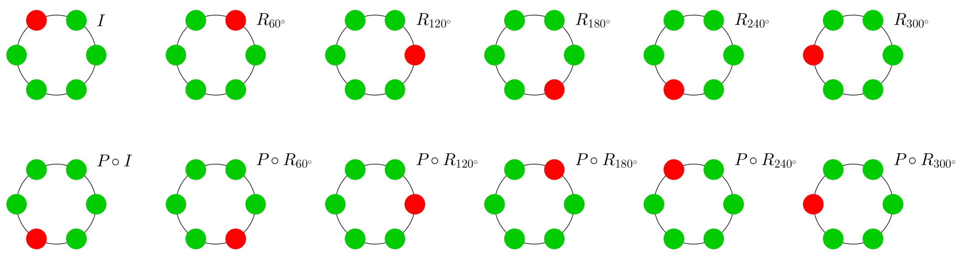

Figura 7: Le dodici trasformazioni del gruppo diedrale D_6 applicate ad una collana con cinque smeraldi ed un rubino: risultano solo sei configurazioni distinte.

Se invece che rispetto a tale asse le riflessioni fossero state rispetto ad un altro asse formante un angolo multiplo di 30° con l'orizzontale, nella seconda riga ci sarebbero le stesse sei trasformazioni in ordine diverso.

È importante notare (sarà usato nella soluzione del problema) che le sei trasformazioni della seconda riga si possono descrivere anche come riflessioni rispetto ai sei assi di simmetria dell'esagono regolare con i vertici al centro delle pietre; tre di questi assi passano per coppie di vertici opposti e tre per coppie di punti medi di lati opposti.

Dalla figura 7 risulta evidente che, nel caso con un solo rubino, le dodici trasformazioni producono solo sei collane "fisse" distinte. Ad esempio la trasformazione R_{60° produce la stessa collana fissa prodotta dalla trasformazione $P \circ R_{180^\circ}$.

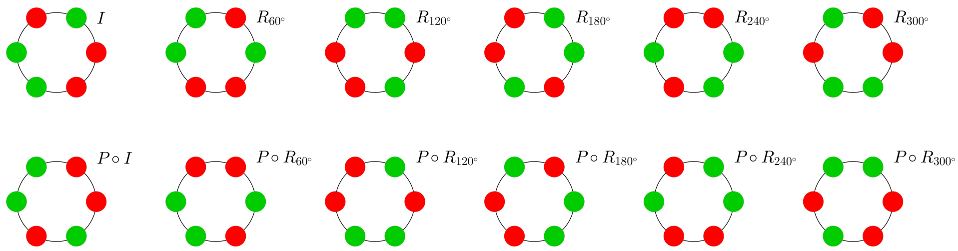

Figura 8: Le dodici trasformazioni del gruppo diedrale D_6 applicate ad una collana diversa: tutte le configurazioni ottenute sono distinte.

Con una diversa disposizione delle pietre invece può succedere che ogni trasformazione di D_6 produca una collana fissa distinta (figura 8).

Se infine tutte le pietre sono dello stesso tipo la collana equivale ad un esagono con vertici indistinguibili e quindi tutte le trasformazioni di D_6 sono simmetrie della collana e la lasciano invariata (figura 9)

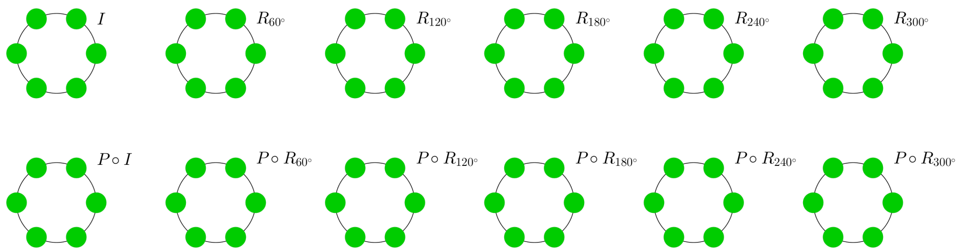

Figura 9: Massima simmetria: le dodici trasformazioni del gruppo diedrale D_6 applicate ad una collana di soli smeraldi

3 Il teorema orbita-stabilizzatore

3.1 Contare le simmetrie di un cubo

Si vuole ora rispondere alla domanda, "Quante sono le simmetrie rotazionali di un cubo?". Ovvero ci si chiede quante sono le rotazioni (nello spazio) che trasformano un cubo in sé stesso.

A questa domanda si può rispondere in molti modi. Uno è: una trasformazione che trasforma un cubo in se stesso trasforma un certo vertice V in uno degli 8 vertici del cubo, V'. Una volta deciso quale è V' ci sono tre modi di scegliere dove la trasformazione manderà un certo vertice adiacente a V, corrispondenti ai tre vertici adiacenti a V'. Fatte queste due scelte, la particolare rotazione che le realizza entrambe è completamente determinata. Pertanto il numero totale di simmetrie rotazionali del cubo è $8 \cdot 3 = 24$.

Un'altra risposta è: Una certa faccia F potrà essere trasformata in una delle sei facce del cubo, F'; una volta deciso quale è F', ci sono quattro modi di far corrispondere un certo vertice di F ad uno dei quattro vertici di F'. Fatte le due scelte la rotazione è determinata. Il numero totale di simmetrie rotazionali è allora $6 \cdot 4 = 24$.

Un'altra risposta ancora è: Il punto medio di un certo spigolo, M potrà essere trasformato in uno dei punti medi dei dodici spigoli del cubo, M'. Scelto M', ci sono due modi di trasformare un certo vertice dello spigolo di M in un vertice dello spigolo di M'. Fatte le scelte la rotazione è completamente determinata. Le simmetrie sono pertanto $12 \cdot 2 = 24$.

Dopo aver tirato un sospiro di sollievo perché i tre metodi danno lo stesso risultato, osserviamo che essi hanno una struttura comune. In tutti e tre i casi il numero delle simmetrie risulta dal prodotto di due quantità: il numero di immagini in cui le trasformazioni del gruppo possono trasformare un certo oggetto ed il numero di trasformazioni del gruppo che lasciano quello stesso oggetto invariato.

Per esempio, facendo riferimento alla seconda risposta, una certa faccia del cubo può essere trasformata dalle simmetrie rotazionali del cubo in una delle sei facce del cubo; fissata la faccia, i quattro modi in cui può essere posizionato un certo suo vertice corrispondono alle quattro rotazioni che lasciano la faccia invariata.

3.2 Orbita e Stabilizzatore

Per dare una veste più generale al metodo usato per contare le simmetrie rotazionali di un cubo si introducono ora i concetti di *orbita* e *stabilizzatore*. Se il gruppo $(G, \oplus)$, che da ora in poi sarà chiamato semplicemente G, agisce sugli elementi di un insieme X ed $x \in X$ allora lo stabilizzatore di x, notato $\text{Stab}(x)$, è l'insieme

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

ovvero è un sottoinsieme di G composto da tutti gli elementi di G che trasformano x in sé stesso.

Nel caso particolare del gruppo delle simmetrie rotazionali del cubo considerate come agenti sulle facce del cubo, lo stabilizzatore della faccia F comprende le quattro rotazioni di angoli multipli di un angolo retto attorno ad un asse passante perpendicolarmente per il centro della faccia che trasformano la faccia in sé stessa.

L'insieme di tutti i possibili trasformati di $x \in X$ che si possono ottenere applicandogli le trasformazioni di G è invece detto *orbita* di x e notato $\mathrm{Orb}(x)$. Più formalmente:

$$\mathrm{Orb}(x) = \{g(x) \mid g \in G\}\,.$$

Nel caso delle rotazioni del cubo, data una faccia F, si possono trovare rotazioni che la trasformano in qualsiasi faccia F'. Per contro nessuna rotazione la trasformerà in un vertice, uno spigolo, una diagonale o qualsiasi altro ente geometrico che non sia una faccia del cubo. Pertanto l'orbita della faccia comprende tutte e sole le sei facce del cubo.

Infine risulta utile definire per ogni trasformazione $g \in G$ l'insieme degli elementi di X fissati (cioè trasformati in sé stessi) da g, chiamato $\mathrm{Fix}(g)$:

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g(x) = x\}\,.$$

Il *Teorema Orbita-Stabilizzatore* afferma che se un gruppo finito G agisce sull'insieme X, per ogni elemento x di X vale la relazione:

$$|G| = |\mathrm{Stab}(x)| \cdot |\mathrm{Orb}(x)|$$

ove, se U è un insieme finito, $|U|$ indica il numero di elementi dell'insieme.

Scelto allora un elemento x il numero delle trasformazioni del gruppo G è uguale al prodotto del numero di elementi dell'orbita di x per il numero di trasformazioni dello stabilizzatore di x. Nei tre metodi di calcolo proposti sopra per le simmetrie rotazionali del cubo si ha che G è il gruppo delle rotazioni che trasformano il cubo in sé stesso e rispettivamente:

- x è un vertice del cubo, la sua orbita è formata dagli otto vertici in cui può essere trasformato dalle rotazioni di G e il suo stabilizzatore è formato dalle tre rotazioni in G che lasciano fisso il vertice x (sono rotazioni di multipli di $120°$ attorno ad una diagonale del cubo passante per x)

- x è una faccia del cubo, la sua orbita è data dalle sei facce ed il suo stabilizzatore dalle quattro rotazioni che lasciano la faccia x invariata
- x è il punto medio di uno dei dodici spigoli del cubo, la sua orbita è data dai dodici punti medi ed il suo stabilizzatore dalle due rotazioni di G che lasciano il punto medio x invariato (I e la rotazione di $180°$ intorno ad un asse per x e per il punto medio dello spigolo opposto).

La dimostrazione del teorema nel caso generale presenta una certa difficoltà tecnica e la sua presentazione esula dagli scopi di questo lavoro. Per contro, come si vede dagli esempi portati, la sua validità in semplici casi concreti si verifica immediatamente.

3.3 Orbite e collane

È il momento di mostrare che il discorso lievemente astratto che si sta portando avanti è rilevante per arrivare alla soluzione del problema delle collane.

Consideriamo il caso in cui G è il gruppo diedrale D_{17} delle simmetrie di un poligono regolare con 17 lati e X l'insieme delle 2^{17} collane "fisse" formate dalle possibili scelte in 17 posizioni fissate tra rubini e smeraldi. Detta x una di queste collane, applicando ad essa le trasformazioni di D_{17} si ottengono tutte le collane che risultano uguali ad x con opportune rotazioni nello spazio, come richiesto dal problema; il ribaltamento della collana nello spazio tridimensionale equivale alla riflessione P nel piano. Ma è anche vero che applicando a x le trasformazioni di $G \equiv D_{17}$ si ottiene l'orbita di x.

In lingua matematica pertanto il problema chiede: In quante orbite distinte viene ripartito X dal gruppo D_{17}?

3.4 Contare le orbite: il lemma di Burnside

Per contare le orbite in cui un gruppo ripartisce l'insieme su cui agiscono le sue trasformazioni può risultare utile il *Lemma di Burnside.*

Lemma di Burnside

Se G è un gruppo finito che agisce su un insieme finito X, ed N è il numero di orbite in cui G suddivide X vale la relazione

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

Commento

Burnside ci dice: "Prendi ognuna delle trasformazioni di G e vedi quanti sono gli elementi di X che lascia invariati. Somma tutti questi numeri e dividi il risultato per il numero delle trasformazioni del gruppo: otterrai il numero di orbite."

Nel caso del problema delle collane è evidente il vantaggio rispetto alla classificazione una per una delle 2^{17} collane prospettata nell'introduzione: ora è sufficiente esaminare una per una le trasformazioni g del gruppo D_{17}, che sono soltanto 34, per determinare i loro $|\mathrm{Fix}(g)|$. Un po' laborioso, ma fattibile nel tempo di gara, tanto più che, come si vedrà nella soluzione, molte delle trasformazioni si somigliano ed hanno lo stesso $|\mathrm{Fix}|$.

Dimostrazione

Consideriamo la quantità $\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$. Essa è uguale al numero di elementi dell'insieme $S := \{(x, g) \in X \times G \mid g(x) = x\}$ ovvero al numero di coppie di elementi uno di X ed uno di G tali che la trasformazione $\in G$ manda l'oggetto $\in X$ in sé stesso. Ma questo numero si può calcolare anche in un altro modo:

$$|S| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)|$$

Scegliamo ora N elementi di X, x_1,x_2, ..., x_N, ciascuno appartenete ad una diversa delle N orbite in cui G ripartisce X. Osservo che se $x' \in \mathrm{Orb}(x)$ allora $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(x')$ e, per il teorema orbita-stabilizzatore, anche $\mathrm{Stab}(x) = \mathrm{Stab}(x')$. Si può allora scrivere

$$\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{i=1}^{N} \sum_{x \in \mathrm{Orb}(x_i)} |\mathrm{Stab}(x)| = \sum_{i=1}^{N} |\mathrm{Orb}(x_i)| \cdot |\mathrm{Stab}(x_i)|$$

Per il teorema orbita-stabilizzatore ciascuno degli N addendi dell'ultima somma è uguale a $|G|$. Quindi

$$\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = N \cdot |G| \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

4 Applicazioni

4.1 Problema 3
Finale Nazionale Gara a Squadre di Matematica 2014

> Sebbene Homero non lo dica, i Proci sono molto generosi nei confronti di Penelopell. Un giorno pensano di regalarle ognuno una collana fatta di 17 pietre perfettamente sferiche scelte tra smeraldi e rubini. Ovviamente vogliono evitare di regalare alla regina di Itõca due collane che opportunamente ruotate nello spazio risultino uguali. Quante collane diverse possono far confezionare i Proci? *Gli smeraldi sono tutti uguali fra loro, e così i rubini.*

Occorre considerare l'azione delle 34 trasformazioni del gruppo diedrale D_{17} sull'insieme X delle collane di 17 pietre "fisse". Poiché in ciascuna delle diciassette posizioni si può avere o un rubino o uno smeraldo X ha 2^{17} elementi. Per ciascuna trasformazione $g \in D_{17}$ si deve determinare $|\mathrm{Fix}(g)|$ ossia quante collane vengono trasformate in sé stesse da g. Conviene classificare le trasformazioni del gruppo in tre sottoinsiemi: uno che comprende la sola trasformazione identica I, il secondo che comprende le riflessioni ed il terzo che comprende le rotazioni di angoli multipli di $\frac{360°}{17}$ (esclusa I); poiché queste ultime sono le uniche rotazioni che si trovano in D_{17}, saranno nel seguito chiamate semplicemente "rotazioni".

4.1.1 La trasformazione identica I

Per definizione I trasforma in sé stessa ogni collana di X. Pertanto $|\mathrm{Fix}(I)| = 2^{17}$.

4.1.2 Riflessioni rispetto ad un asse di simmetria del poligono a 17 lati

Il poligono a 17 lati ha 17 assi di simmetria; questo sottoinsieme ha quindi 17 elementi. Ciascun asse di simmetria passa per un vertice e per il punto medio del lato opposto. Questo tipo di trasformazione, come illustrato in figura 10 con una collana a sette pietre, lascia ferma la pietra per la quale passa l'asse di simmetria e scambia tra loro due a due le restanti pietre. Se la collana deve restare uguale le due pietre di una coppia scambiata devono essere dello stesso tipo. Per costruire una collana di 17 pietre che resta uguale sotto una certa riflessione si può scegliere in due modi la pietra sull'asse, e in due modi le pietre di ciascuna delle otto coppie scambiate. In totale le possibili collane fissate dalla riflessione sono allora $2 \cdot 2^8 = 2^9$. Quindi, per ciascuna delle 17 riflessioni, $|\mathrm{Fix}(\text{riflessione})| = 2^9$.

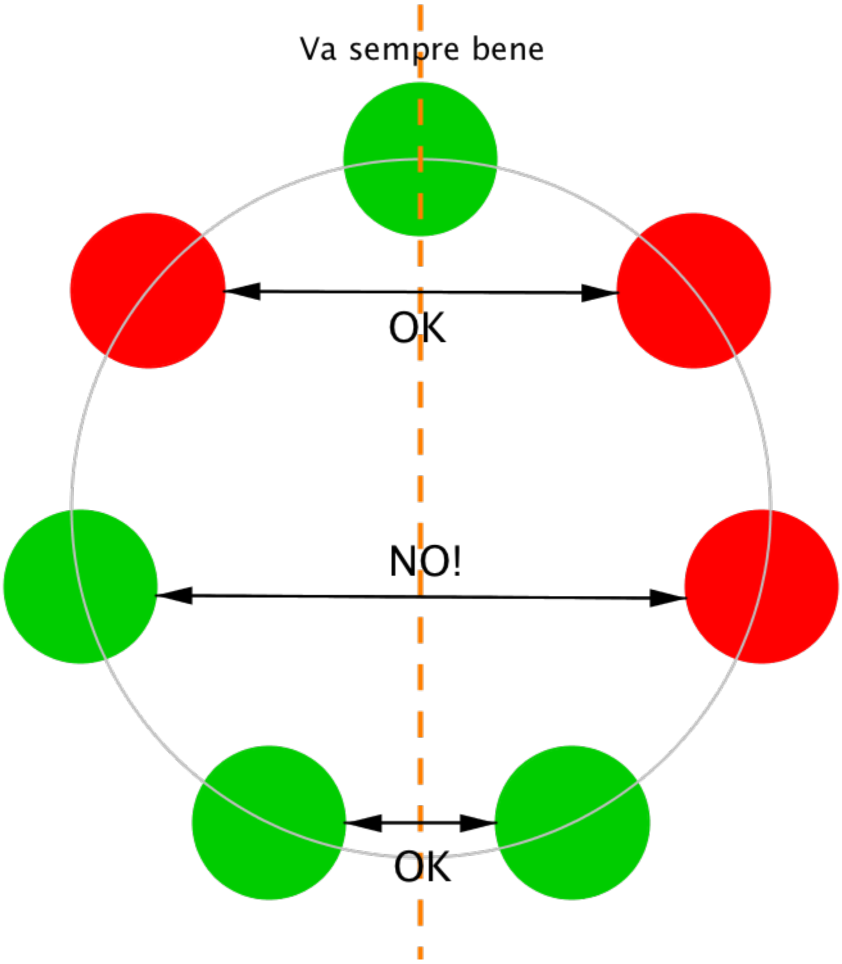

Figura 10: Effetto di una riflessione su una collana a 7 pietre. Affinché la collana resti invariata le due pietre di ciascuna coppia scambiata devono essere dello stesso tipo.

Vale la pena di osservare che per una collana con un numero pari di pietre esistono due tipi diversi di riflessione: quelle con asse per due vertici opposti e quelle con asse per due punti medi di lati opposti; i due tipi di riflessione forniscono due valori diversi di $|\mathrm{Fix}|$.

4.1.3 Rotazioni

Le sedici rotazioni insieme a I formano un gruppo R di 17 elementi. Chiamiamo R_n la rotazione che sposta ogni pietra di n posizioni in senso orario, con n intero compreso tra 0 e 16; vale allora $R_0 = I$.

Se si applica ripetutamente la stessa rotazione necessariamente dopo un certo numero di ripetizioni si torna alla situazione iniziale, visto che le possibili rotazioni sono in numero finito. Il più piccolo numero k tale che ripetendo R_n k volte si torna alla situazione iniziale è chiamato *ordine* della rotazione R_n. Se k è l'ordine di R_n si può allora scrivere:

$$(R_n)^k = I$$

ove la potenza sta a significare l'applicazione ripetuta della trasformazione R_n. Le k rotazioni distinte ottenibili come potenze di R_n sono un sottogruppo di R.

Un importante risultato dovuto a Lagrange che, fra molte altre cose, fu uno dei fondatori della Teoria dei Gruppi, afferma:

Teorema di Lagrange

Se G è un gruppo finito e U ne è sottogruppo allora $|U|$ è divisore di $|G|$.

Una conseguenza immediata del teorema di Lagrange è che l'ordine di ognuna delle rotazioni R_n deve dividere 17, numero di elementi del gruppo delle rotazioni: è un numero primo, quindi i soli possibili valori per l'ordine delle rotazioni sono 1 e 17. L'unica delle R_n ad avere ordine 1 è $R_0 = I$; le altre sedici pertanto devono avere ordine 17.

Consideriamo una collana che resta invariata sotto l'azione della rotazione R_n. Essa sarà invariata anche rispetto alle rotazioni ottenute ripetendo R_n più volte. Seguiamo una delle pietre durante le rotazioni: poiché la collana rimane invariata, dopo ogni rotazione essa dovrà cadere in una posizione che era precedentemente occupata da una pietra dello stesso colore. Poiché l'ordine di R_n è 17 la pietra tornerà al suo posto solo dopo che la rotazione sia stata ripetuta 17 volte e quindi nel frattempo visiterà tutte e sedici le altre posizioni che, se la collana è fissata da R_n, devono essere tutte originalmente state occupate da pietre dello stesso tipo: le sole collane fissate da una rotazione sono quella di soli rubini e quella di soli smeraldi: $|\text{Fix(rotazione)}| = 2$.

4.1.4 Soluzione

Nella tabella seguente sono riassunti i valori di $|\text{Fix}(g)|$ determinati per le tre classi di trasformazioni in cui è stato ripartito D_{17}:

Classe	Numero s di elementi nella classe	$\lvert\text{Fix}(g)\rvert$	$s \cdot \lvert\text{Fix}(g)\rvert$
I	1	2^{17}	2^{17}
Riflessioni	17	2^9	$17 \cdot 2^9$
Rotazioni	16	2	32

Seguendo Burnside non resta che sommare l'ultima colonna e dividere per $|D_{17}| = 34$:

$$N = \frac{2^{17} + 17 \cdot 2^9 + 32}{34} = 4112.$$

Le collane diverse possibili sono 4112.

4.2 Problema 7, AIME 1996

> Due caselle di una scacchiera 11×11 sono dipinte di rosso e le rimanenti 119 di blu. Due colorazioni si considerano equivalenti se sono l'una ottenibile dall'altra ruotando la scacchiera. Quante colorazioni non equivalenti sono possibili?

In questo caso il gruppo G delle quattro rotazioni multiple di $90°$ agisce su X, l'insieme delle colorazioni distinte (senza tener conto delle varie simmetrie). Il numero di elementi di X corrisponde alle possibili scelte di due oggetti tra 121 e quindi è

$$|X| = \binom{121}{2} = \frac{121 \cdot 120}{2} = 7260.$$

Anche in questo caso determiniamo $|\text{Fix}(g)|$ per ciascun elemento del gruppo G. Osservo che, affinché una colorazione sia fissata da una rotazione le due caselle rosse devono essere trasformate ciascuna in sé stessa o essere trasformate l'una nell'altra; la prima eventualità può verificarsi soltanto per la trasformazione identica, la seconda soltanto per una rotazione di $180°$.

- La rotazione di 0°, o identità, fissa tutti i 7260 elementi di X.
- La rotazione di 90° non fissa alcun elemento di X.
- La rotazione di 180 ° fissa 60 elementi di X. Infatti, per una rotazione di 180°, la sola casella centrale viene trasformata in sé stessa. Le restanti 120 caselle si dividono in sessanta coppie di caselle che si scambiano di posto. Ho una colorazione fissata per ciascuna delle 60 coppie ottenuta colorando di rosso le due caselle della coppia e di blu tutte le altre.
- La rotazione di 270° non fissa nessun elemento di X.

Si ottiene in questo modo la tabella:

Classe	Numero s di elementi nella classe	$\lvert\mathrm{Fix}(g)\rvert$	$s \cdot \lvert\mathrm{Fix}(g)\rvert$
I	1	7260	7260
Rotazione di 90°	1	0	0
Rotazione di 180°	1	60	60
Rotazione di 270°	1	0	0

Si ha così

$$N = \frac{\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|}{|G|} = \frac{7260 + 0 + 60 + 0}{4} = 1830.$$

Riferimenti bibliografici

[Gowers] Timothy Gowers
Group actions II: the orbit-stabilizer theorem.
http://gowers.wordpress.com/2011/11/09/group-actions-ii-the-orbit-stabilizer-theorem/

[Stillwell] John Stillwell
Elements of Algebra. Springer, 2001
7.4 Dihedral Groups, pag. 112 (per i gruppi diedrali).
7.7 Subgroups and Cosets, pag. 119 (per il Teorema di Lagrange).

[Gara a squadre 2014] Unione Matematica Italiana
XV Gara Nazionale a Squadre
http://www.fairmath.it/public/2014/cesenatico/Risultati_Cesenatico_2014.pdf

[Gobbino] Massimo Gobbino
Schede Olimpiche. UMI.

[AoPS] Art of Problem Solving
Discussione sulla soluzione di un problema di colorazione con uso del lemma di Burnside
http://artofproblemsolving.com/community/c4h14125p99946