

ESERCITAZIONE 4

Grafici in 3D

Per questa esercitazione verranno corretti gli esercizi 6 e 8. Create un file `.tar` o `.zip` contenente gli script che risolvono gli esercizi e le eventuali `function` ausiliarie, e caricatelo sulla pagina di e-learning del corso.

1. Superfici e curve di livello

Impariamo innanzi tutto l'uso del comando `meshgrid`. Se `x` e `y` sono due vettori (riga o colonna) di lunghezza n , il comando

```
[X,Y]=meshgrid(x,y)
```

crea una matrice `X` di dimensioni $n \times n$ le cui righe sono tutte uguali a `x` (eventualmente trasposto), e una matrice `Y`, anch'essa $n \times n$, le cui colonne sono tutte uguali a `y` (eventualmente trasposto).

Provate a dare i comandi seguenti e osservate come sono fatte `X` e `Y`:

```
x=1:5;  
y=6:11;  
[X,Y]=meshgrid(x,y)
```

Ora, supponiamo di avere una funzione reale $f(x, y)$ definita su un rettangolo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Vogliamo scegliere una griglia sul rettangolo e valutare f sui punti della griglia, per dare poi una rappresentazione grafica della superficie di equazione $z = f(x, y)$. Definiamo il vettore `x` come una discretizzazione dell'intervallo $[a, b]$ e il vettore `y` come una discretizzazione dell'intervallo $[c, d]$, poi diamo l'istruzione `[X,Y]=meshgrid(x,y)`. Il generico punto di indici i, j sulla griglia definita dalle due discretizzazioni avrà quindi coordinate `X(i,j)`, `Y(i,j)`. Ora possiamo valutare f sulla griglia senza usare cicli.

Per esempio, consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ definita sul rettangolo $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$. Per valutarla nei punti di una griglia definita sul rettangolo possiamo scrivere

```
x=-0.5:0.02:0.5;  
y=x;  
[X,Y]=meshgrid(x,y)  
A=X.^2+Y.^2;
```

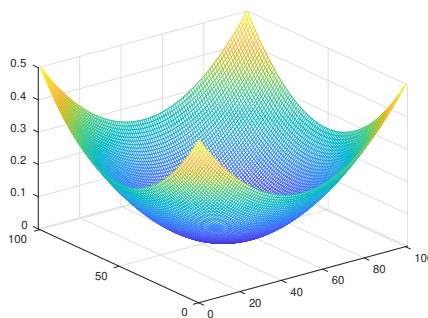
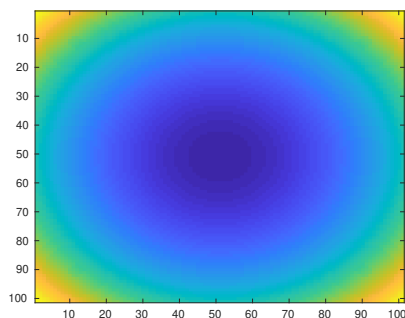
La matrice `A` contiene i valori cercati di $f(x, y)$. Possiamo visualizzarli in due dimensioni con il comando

```
imagesc(A)
```

oppure in \mathbb{R}^3 con il comando

```
mesh(A)
```

Il risultato è riportato qui sotto.



Nel caso 3D potete anche ruotare la figura per vedere meglio com'è fatta la superficie.

Provate a usare il comando `mesh(x,y,A)` oppure `mesh(X,Y,A)` invece di `mesh(A)`. Che cosa cambia?

Che cosa succede se si usa `surf(A)` al posto di `mesh(A)`?

Esercizio 1 Usando le funzioni `meshgrid` e `mesh`, disegnare il grafico delle due funzioni seguenti:

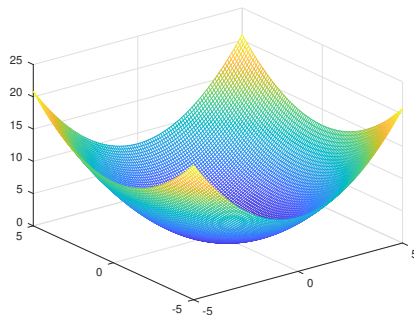
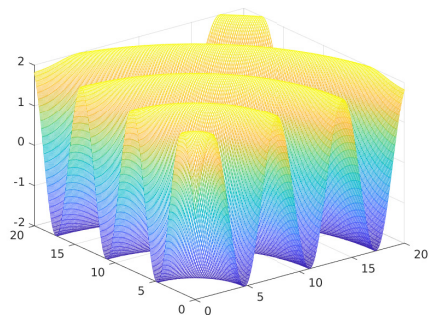
1. $f(x, y) = 2 \sin((x^2 + y^2)^{1/2})$ con $(x, y) \in [0, 20] \times [0, 20]$,

2. $f(x, y) = x^2/2 + y^2/3$ con $(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]$ e $a, b > 0$ scelti a piacere,

Suggerimento: potete definire la funzione $f(x, y)$ in modo anonimo e poi applicarla alle matrici prodotte da `meshgrid`. Per esempio, per la prima funzione si può scrivere

```
f=@(x,y) 2*sin((x.^2+y.^2).^(1/2));
x=0:0.1:20;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
mesh(x,y,f(X,Y))
```

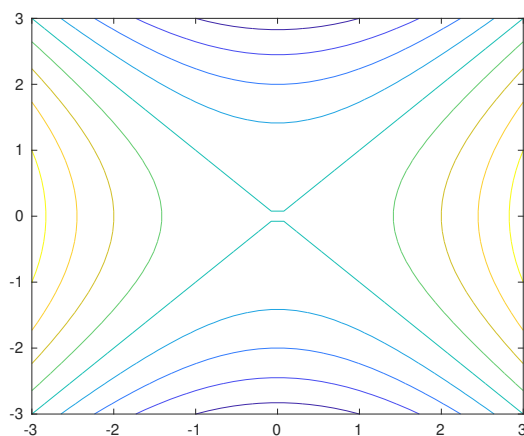
Dovreste ottenere delle figure simili a queste:



Il comando `contour` permette di disegnare le curve di livello. Per esempio, consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ definita su $[-3, 3] \times [-3, 3]$ e diamo i comandi

```
f=@(x,y) x.^2-y.^2;
x=linspace(-3,3,40);
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
contour(X,Y,f(X,Y))
```

Otteniamo la figura seguente, nella quale i livelli sono assegnati automaticamente:



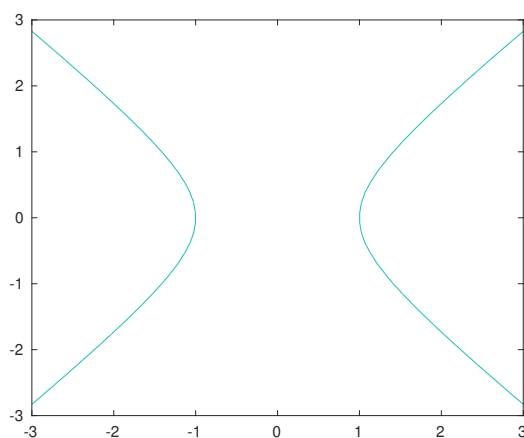
È anche possibile scegliere i livelli delle curve da disegnare. In particolare, possiamo usare `contour` per disegnare curve di cui è data l'equazione implicita. I comandi

```
c=1; % livello della curva
```

```
v=[c;c];
```

```
contour(X,Y,f(X,Y),v)
```

permettono di disegnare la curva di equazione $x^2 - y^2 = 1$, cioè la curva di livello 1 della $f(x, y)$ definita sopra:



Esercizio 2 Usando il comando `contour`, disegnare la curva di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 2x = 3$ con $(x, y) \in [-3, 5] \times [-5, 3]$.

2. Curve parametriche

Una curva parametrica in \mathbb{R}^3 è definita da tre equazioni che descrivono la dipendenza di ciascuna coordinata x, y, z dal parametro t . Consideriamo la curva di equazioni

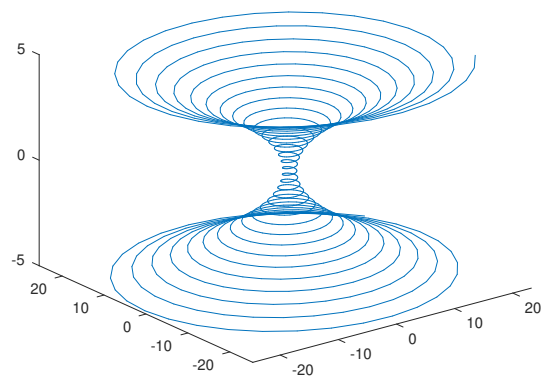
$$x(t) = (1 + t^2) \cos(20t),$$

$$y(t) = (1 + t^2) \sin(20t),$$

$$z(t) = t,$$

con $t \in [-5, 5]$. Per disegnarla possiamo usare il comando `plot3` come segue:

```
t=-5:0.01:5;
x=(1+t.^2).*cos(20*t);
y=(1+t.^2).*sin(20*t);
z=t;
plot3(x,y,z)
e otteniamo il grafico
```



Esercizio 3 *Disegnare un'elica con raggio e passo costante.*

Esercizio 4 *Disegnare le curve definite dalle equazioni parametriche seguenti:*

(a)

$$\begin{aligned} x(t) &= (2 + \cos(1.5t)) \cos(t), \\ y(t) &= (2 + \cos(1.5t)) \sin(t), \\ z(t) &= 2 \sin(1.5t), \quad t \in [0, 4\pi] \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x(t) &= (4 + \sin(20t)) \cos(t), \\ y(t) &= (4 + \sin(20t)) \sin(t), \\ z(t) &= \cos(20t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y(t) &= t^2, \\ z(t) &= t^3, \quad t \in [-2, 2]. \end{aligned}$$

3. Superfici parametriche

Una superficie parametrica in \mathbb{R}^3 è definita da tre equazioni che descrivono la dipendenza di ciascuna coordinata x , y , z da due parametri r , t .

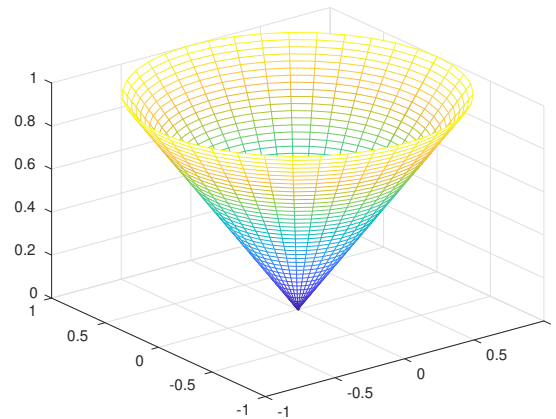
Vogliamo disegnare la superficie in \mathbb{R}^3 definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned}x(r, t) &= r \cos(t), \\y(r, t) &= r \sin(t), \\z(r, t) &= r,\end{aligned}$$

con $r \in [0, 1]$ e $t \in [0, 2\pi]$. Per farlo usiamo i comandi:

```
r=linspace(0,1,40);
t=linspace(0,2*pi,40);
[R,T]=meshgrid(r,t);
x=R.*cos(T);
y=R.*sin(T);
z=R;
mesh(x,y,z)
```

Come potete osservare, otteniamo un cono (perché?).



Provate a usare il comando `surf` invece di `mesh`, seguito da `shading interp` e `axis off`.

Esercizio 5 Disegnare una sfera. Sarà utile dare il comando `axis equal` per avere le stesse proporzioni sui tre assi coordinati.

Esercizio 6 Disegnare la superficie definita dalle equazioni parametriche:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= 2(1 - e^{\frac{u}{6\pi}}) \cos(u) \cos^2(v/2), \\y(u, v) &= 2(-1 + e^{\frac{u}{6\pi}}) \sin(u) \cos^2(v/2), \\z(u, v) &= 1 - e^{\frac{u}{3\pi}} - \sin(v) + e^{\frac{u}{6\pi}} \sin(v),\end{aligned}$$

dove $u \in [0, 6\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$. Che cosa ottenete?

Esercizio 7 Ecco una lista di superfici famose. Cercate sul web le loro equazioni parametriche e provate a disegnarle.

- bottiglia di Klein,
- superficie di Enneper,

- ombrello di Whitney,
- superficie di Steiner.

Disegnate anche degli esempi di superfici di Lissajous, che hanno equazioni

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \sin(u), \\y(u, v) &= \sin(v), \\z(u, v) &= \sin(d - au - bv)/c,\end{aligned}$$

dove $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$ e a, b, c, d sono parametri reali da scegliere a piacere (provate all'inizio con $a = b = c = 1$, $d = 0$ e poi sperimentate con altri valori).

4. Superfici definite da equazioni implicite

Come abbiamo visto nella sezione 1, il comando `contour` permette di tracciare curve di cui si conosce l'equazione implicita. Per realizzare invece un grafico 3D della superficie definita da un'equazione implicita si può usare il comando `isosurface`.

Facciamo un esempio: supponiamo di voler rappresentare la superficie definita dall'equazione

$$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = 3.$$

Dovremo definire una griglia 3D sulla quale valutare la funzione $(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2$. Per farlo, usiamo di nuovo il comando `meshgrid`. È anche possibile usare `ndgrid`, che generalizza `meshgrid` ad un numero arbitrario di dimensioni (mentre `meshgrid` si usa solo in due o tre dimensioni). In questo esempio consideriamo x, y e z comprese tra -3 e 3 .

```
r=linspace(-3,3,100);
[X,Y,Z]=meshgrid(r);
```

Ora calcoliamo la funzione che ci interessa sui punti della griglia e disegniamo la superficie.

```
F=(Y-Z).^2 + (Z-X).^2 + (X-Y).^2;
isosurface(X,Y,Z,F,3)
```

Potete verificare nell'help di MATLAB la sintassi del comando `isosurface` e le opzioni previste. In particolare, è possibile specificare i colori da usare per mezzo di un array 3D delle stesse dimensioni di F . Per esempio, provate a disegnare nuovamente la superficie nel modo seguente:

```
isosurface(X,Y,Z,F,3,rand(size(F)))
```

oppure così:

```
colormap spring
isosurface(X,Y,Z,F,3,X)
```

Il comando `help graph3d` fornisce, tra le altre cose, una lista delle colormap predefinite.

Esercizio 8 Scrivere uno script in MATLAB che visualizzi le due superfici seguenti:

- la superficie chiusa di genere 2 definita dall'equazione implicita

$$(x(x-1)^2(x-2) + y^2)^2 + z^2 = 0.03,$$

con $x \in [-0.1, 2.1]$, $y \in [-0.75, 0.75]$ e $z \in [-0.2, 0.2]$;

- la superficie di Kummer, definita dall'equazione implicita

$$f_\mu^2 = \lambda p q r s, \quad \text{dove} \quad \begin{cases} f_\mu = x^2 + y^2 + z^2 - \mu \\ p = z - 1 + \sqrt{2}x \\ q = z - 1 - \sqrt{2}x \\ r = z + 1 + \sqrt{2}y \\ s = z + 1 - \sqrt{2}y \\ \lambda = \frac{3\mu-1}{3-\mu} \end{cases}$$

e μ è un parametro. Per questo esercizio sceglieremo $\mu = 2$: dovrete constatare la presenza di 16 punti singolari. Naturalmente potete provare anche con altri valori, per esempio $\mu = 1$, e vedere come cambia la superficie. Sta a voi scegliere il range per x , y , z in modo da vedere bene il comportamento della superficie.

Non dimenticate di usare l'istruzione **axis equal**.

Facoltativo: provate a disegnare anche la superficie di Barth, definita dall'equazione implicita

$$f^2 = k p q r, \quad \text{dove} \quad \begin{cases} f = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ p = (\varphi x - y)(\varphi x + y) \\ q = (\varphi y - z)(\varphi y + z) \\ r = (\varphi z - x)(\varphi z + x) \end{cases}$$

e $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è la sezione aurea, mentre la costante k vale $4\sqrt{5} - 8$.

5. Altri esercizi

Esercizio 9 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x, y) = \left| \frac{1}{1 - (x + iy)^{10}} \right|,$$

dove i è l'unità immaginaria e $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$. Si presume naturalmente che le singolarità della funzione non si trovino sulla griglia di discretizzazione del dominio.

Esercizio 10 Disegnare la curva nota come folium di Cartesio, che ha equazione

$$x^3 + y^3 = 3xy,$$

con $(x, y) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$. Attenzione: la curva ha un punto di autointersezione. Se nel vostro disegno la curva non si autointerseca ma ha due componenti connesse, raffinate la discretizzazione.

Esercizio 11 Disegnare la curva in \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(t), \\ y(t) &= \sin(2t), \\ z(t) &= \sin(3t), \end{aligned}$$

con $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 12 *Disegnare la striscia di Möbius, che è descritta dalle equazioni parametriche seguenti:*

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \cos(u) + v \cos(u/2) \cos(u), \\y(u, v) &= \sin(u) + v \cos(u/2) \sin(u), \\z(u, v) &= v \sin(u/2),\end{aligned}$$

con $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-0.4, 0.4]$.