

ESERCITAZIONE 9

**Problemi differenziali ai valori iniziali**

Per questa esercitazione verrà corretto l'**esercizio 1**. Create un file `.tar` o `.zip` contenente gli script che risolvono l'esercizio e le eventuali function ausiliarie, e caricatelo sulla pagina di e-learning del corso.

Ci proponiamo di risolvere numericamente un problema di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [a, b] \\ x(a) = c \end{cases}$$

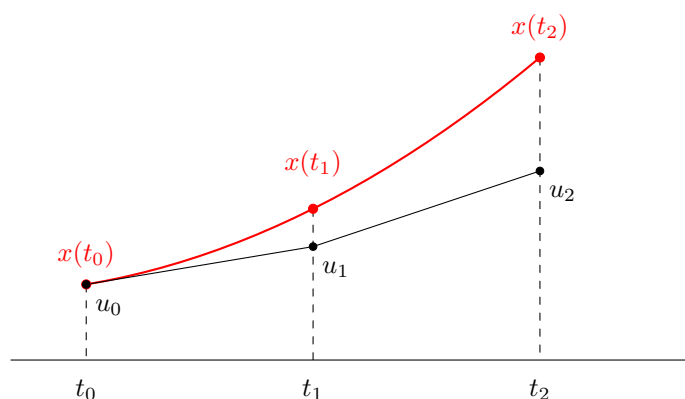
dove  $f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione assegnata e  $c \in \mathbb{R}^m$  è un vettore dato. Supporremo che la soluzione esista e sia unica.

**1. Soluzione numerica in Matlab**

Esistono numerosi metodi numerici per la soluzione di problemi ai valori iniziali, che risultano più o meno efficaci a seconda del tipo di problema, dei parametri usati, del condizionamento... In generale, comunque, i metodi numerici si basano su una discretizzazione dell'intervallo di integrazione e della soluzione, che quindi sono entrambi rappresentati come vettori.

Per esempio, il più semplice di questi metodi, noto come *metodo di Eulero esplicito*, approssima la funzione  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  per mezzo dei suoi valori  $u_i$  nei nodi  $t_i$ , calcolati tramite la formula

$$u_0 = c, \quad u_i = u_{i-1} + hf(t_{i-1}, u_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N.$$



Una buona implementazione di un metodo numerico per integrare problemi differenziali usa un passo adattivo, cioè sceglie i nodi della griglia di discretizzazione in modo variabile a seconda del comportamento della soluzione nel tempo.

In Matlab e Octave esiste una function `ode45` che implementa una versione del metodo di Runge-Kutta ed è spesso (ma non sempre!) valida per risolvere problemi differenziali ai valori iniziali.<sup>1</sup> Nella forma più semplice, `ode45` prende in ingresso una handle della funzione  $f(x, t)$ , l'intervallo di integrazione  $[a, b]$  e il valore iniziale  $c$ . In output restituisce una discretizzazione dell'intervallo di integrazione e i valori della soluzione calcolata sulla discretizzazione.

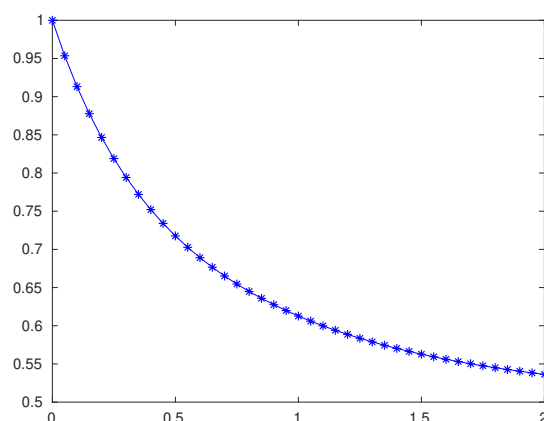
Per capirne meglio il funzionamento, vediamo qualche esempio.

- Consideriamo il problema

$$\begin{cases} x'(t) = -e^{-t}x^2, & t \in [0, 2] \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Per risolverlo in Matlab e tracciare il grafico della soluzione procediamo come segue:

```
f=@(t,x) -exp(-t).*x.^2;
[t,x]=ode45(f,[0,2],1);
plot(t,x,'b*-')
```



- Consideriamo il problema

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = -x_1(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

con  $t \in [0, 2\pi]$ . Per risolverlo in Matlab e tracciare le soluzioni e le orbite possiamo scrivere

```
f = @(t,x) [x(2); -x(1)];
c = [1;0];
[t,x] = ode45(f,[0 2*pi],c);
figure(1)
plot(t,x(:,1),t,x(:,2))
```

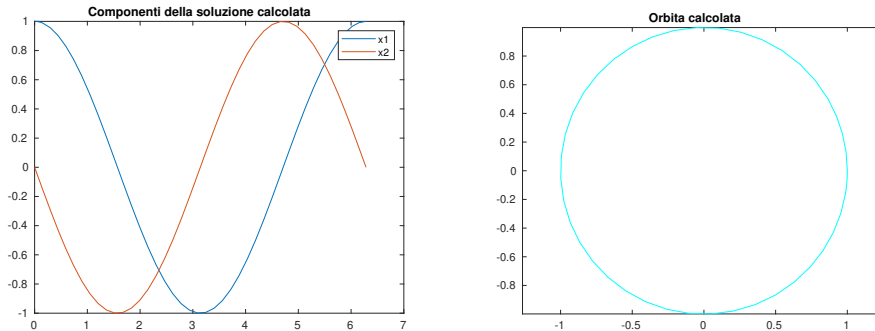
---

<sup>1</sup>In Octave potete anche usare `lsode`; controllare la sintassi nell'help.

```

legend('x1','x2')
title('Componenti della soluzione calcolata')
figure(2)
plot(x(:,1),x(:,2))
title('Orbita calcolata')
axis equal

```



Può essere interessante disegnare anche il campo di velocità:

```

figure(3)
quiver(x(:,1),x(:,2),x(:,2),-x(:,1))
title('Velocità')
axis equal

```

Che cosa ottenete? Leggete nell'help la sintassi del comando `quiver`.

- Consideriamo l'equazione del pendolo semplice

$$x''(t) = -\sin x(t)$$

con condizioni iniziali  $x(0) = 1$  e  $x'(0) = 0$ , e supponiamo di prendere  $t \in [0, 20]$ . Si tratta di un'equazione del secondo ordine, che si può trasformare in un sistema di ordine 1 ponendo  $x_1(t) = x(t)$  e  $x_2(t) = x'(t)$ :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -\sin x_1(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

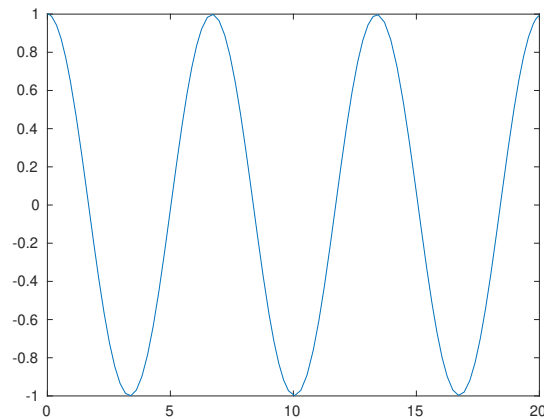
In Matlab possiamo scrivere:

```

f = @(t,x) [x(2); -sin(x(1))];
c = [1;0];
[t,x] = ode45(f,[0 20],c);
plot(t,x(:,1))

```

e otteniamo la figura seguente, che riproduce le oscillazioni del pendolo:



## 2. Oscillatore armonico

Consideriamo il sistema costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  attaccato ad una molla di costante elastica  $h > 0$ .

Se si sposta  $P$  dalla posizione di equilibrio, su  $P$  agisce la forza elastica della molla, che per la legge di Hooke è proporzionale all'allungamento della molla stessa. Si lascia poi andare  $P$ . Per la seconda legge della dinamica, la posizione  $x(t)$  di  $P$  al tempo  $t$  soddisfa l'equazione

$$mx''(t) = -hx(t).$$

Si possono elaborare modelli più complessi che tengono conto anche di altre forze. Per esempio, se  $P$  si muove in un mezzo viscoso, su di esso agisce una forza smorzante proporzionale alla velocità. Oppure possiamo supporre che  $P$  sia soggetto all'azione di una forza esterna  $f(t)$ , dipendente o meno dal tempo. Nella sua forma più completa, il modello è

$$mx''(t) = -hx(t) - kx'(t) + f(t), \quad h, k > 0.$$

**Esercizio 1 (A)** Si consideri l'equazione dell'oscillatore armonico con i parametri fissati come segue:

- oscillatore libero non smorzato:  $m = 1$ ,  $h = 10$ ,  $k = 0$ ,  $f = 0$ ; come condizioni iniziali si scelga  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ ; il tempo di osservazione sia  $[0, 60]$ ;
- oscillatore libero sottosmorzato:  $m = 1$ ,  $h = 10$ ,  $k = 0.5$ ,  $f = 0$ ; condizioni iniziali e tempo di osservazione come nel caso precedente;
- oscillatore libero sovrasmorzato: stessi parametri del caso precedente, tranne il valore di  $k$  che diventa  $k = 10$ ;
- oscillatore forzato smorzato:  $m = 2$ ,  $h = 10$ ,  $k = 0.75$ ,  $f = 25$ ; come condizioni iniziali si scelga  $x(0) = 2$ ,  $x'(0) = 0$ ; tempo di osservazione come nei casi precedenti.

Scrivere un file di tipo script che, per mezzo del comando `input` (oppure di soluzioni grafiche quali `menu` o `dialog`), permetta all'utente di scegliere il caso test, i cui parametri sono definiti in un ciclo `switch`. Determinare la soluzione numerica mediante la routine `ode45`. Creare

dei grafici ponendo il tempo sull'asse delle ascisse, e posizione e velocità della massa  $m$  sull'asse delle ordinate. Si usi l'istruzione **legend** per distinguere le due curve tracciate.

**(B)** Consideriamo il caso in cui  $f(t) = \alpha \cos(\omega t)$ , con  $\alpha, \omega > 0$  e supponiamo che non vi sia attrito, cioè  $k = 0$ . Supponiamo  $m = 1$ ,  $h = 4$  e  $\alpha = 1$  e prendiamo come condizioni iniziali  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 1$ .

L'obiettivo di questa parte dell'esercizio è simulare il fenomeno dei battimenti e della risonanza. Scrivere uno script che, per ciascuno dei tre casi seguenti, risolva l'equazione dell'oscillatore armonico e tracci in un'unica figura la soluzione calcolata (in blu) e il grafico di  $f(t)$  (in rosso):

$$\omega = 1.5, \quad \omega = 1.8, \quad \omega = \sqrt{h} = 2.$$

Che cosa osservate?

### 3. Attrattore di Lorenz

Nello studio dei sistemi caotici rivestono un ruolo di primo piano i modelli che descrivono le traiettorie dei punti di un fluido sotto determinate sollecitazioni (calore, differenze di pressione, ecc.), come ad esempio nei vortici che si formano per i moti convettivi nell'atmosfera. Queste traiettorie evolvono talvolta verso insiemi di tipo particolare, detti attrattori.

Un caso molto studiato è l'*attrattore di Lorenz*, descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1'(t) = \sigma(x_2(t) - x_1(t)) \\ x_2'(t) = rx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t) \end{cases}$$

dove  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$  sono parametri opportuni.

**Esercizio 2** Calcolare la soluzione numerica del modello di Lorenz nel caso  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$  a partire dalle seguenti condizioni iniziali:

$$(a) \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1,$$

$$(b) \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 + 10^{-5},$$

per un tempo  $t_{\max}$  adeguato. Realizzare separatamente i grafici delle componenti  $(t, x_1)$ ,  $(t, x_2)$ ,  $(t, x_3)$  e delle traiettorie nello spazio  $(x_1, x_2, x_3)$ . In ciascun grafico si tratteranno in blu i dati relativi al caso (a) e in rosso i dati relativi al caso (b). I dati iniziali sono vicini; che cosa si osserva riguardo al comportamento della soluzione per tempi grandi?