F. Giannessi: Metodi matematici della programmazione
Problemi lineari e non lineari

ELEMENTI DI ANALISI CONVESSA

1.2. - *Insiemi convessi.*

Gli insiemi convessi, dei quali considereremo alcune proprietà, giocano un ruolo fondamentale nello studio dei problemi di estremo.

DEFINIZIONE 1.3. Un insieme non vuoto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *convesso*, sse risulta:

$$(1-\alpha)x' + \alpha x'' \in K \quad , \quad \forall\ \alpha \in [0,1] \quad , \quad \forall\ x', x'' \in K.$$

Si conviene di considerare $\emptyset$ come insieme convesso.
Un insieme convesso K è detto *corpo convesso*, sse è compatto e $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Un insieme convesso K è detto *strettamente convesso*, sse $\forall x', x'' \in \operatorname{cl} K$ si ha $]x', x''[\subseteq \operatorname{int} K$; è detto *quasi strettamente convesso* sse $[x', x''] \subseteq \operatorname{frt} K \Longrightarrow (1-\alpha)x'+\alpha x'' \in \operatorname{frt} K, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$. Un insieme K è detto *concavo* sse $\sim K$ è convesso.

Esempi di insiemi convessi sono $\mathbb{R}^n$; un suo sottospazio; $\emptyset$; una varietà affine; un semispazio di $\mathbb{R}^n$; una sfera; un ellissoide; l'interno di un insieme convesso; l'insieme di soluzioni di un sistema lineare di equazioni o disequazioni; l'immagine (o controimmagine) di un convesso tramite una trasformazione affine; l'insieme $\alpha K' + \beta K''$, qualunque siano i convessi K', K'' ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; così com'è facile provare, ricorrendo alla def. 1.3.

Il primo studio sistematico degli insiemi convessi si ha verso la fine del secolo scorso ad opera di Minkowski. E' suo ad es. uno dei risultati rimasti fondamentali(*):

(*) H.Minkowski: "Geometrie der Zahlen". Leipzig and Berlin, 1896. Si veda anche J.W.Cassels: "An introduction to the geometry of numbers". Springer, Berlin, 1959. L'importanza sta nel legame che viene stabilito tra proprietà geometriche e quelle aritmetiche degli insiemi convessi.

se K *è un corpo convesso di* $\mathbb{R}^n$, *simmetrico rispetto all'origine* $(x \in K \Rightarrow -x \in K)$, *e se il suo volume è almeno* 2^n, *allora* K *contiene almeno un punto, diverso dall'origine, a coordinate intere.* La teoria degli insiemi e delle funzioni convesse si presenta oggi vastissima. In questo e nei successivi paragrafi considereremo alcune nozioni fondamentali per la teoria ed i metodi dell'ottimizzazione.

TEOREMA 1.3. *L'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{K(\xi), \xi \in \mathcal{X}\}$ un qualsiasi insieme di convessi. La tesi è banale, se card $\bigcap_{\xi \in \mathcal{X}} K(\xi) < 1$. In caso contrario si ha che $x', x'' \in \bigcap_{\xi \in \mathcal{X}} K(\xi) \Rightarrow x', x'' \in K(\xi)$, $\forall\ \xi \in \mathcal{X}$, e poichè $K(\xi)$ è convesso, si ha $(1-\alpha)x' + \alpha x'' \in K(\xi)$, $\forall\ \alpha \in [0,1]$, $\forall\ \xi \in \mathcal{X}$. Questo implica: $(1-\alpha)x' + \alpha x'' \in \bigcap_{\xi \in \mathcal{X}} K(\xi)$. Q.E.D.

La convessità dell'insieme di soluzioni di un sistema di disuguaglianze lineari, visto come intersezione di convessi (i semispazi definiti dalle varie disuguaglianze), è immediata conseguenza del teorema 1.3. Analogamente dicasi, se il sistema contiene anche o solo equazioni.

DEFINIZIONE 1.4. Siano $x, x^1, \dots, x^r \in \mathbb{R}^n$. x è detto *combinazione convessa* di $x^1, \dots, x^r$, sse $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in [0,1]$, con $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, tali che:

$$x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i . \tag{1.5}$$

La combinazione convessa è detta *propria*, sse $\alpha_i > 0$, $i=1,\dots,r$.

DEFINIZIONE 1.5. L'*involucro convesso* di un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'intersezione di tutti i convessi di $\mathbb{R}^n$ che contengono K. La *chiusura convessa* di K è l'intersezione di tutti i convessi chiusi che contengono K.

Ovviamente la chiusura convessa contiene l'involucro convesso, ma essi possono non coincidere. Ad es. ciò avviene, se K è un convesso aperto: l'involucro convesso, coincidente con K, è strettamente contenuto nella chiusura convessa di K, coincidente con la chiusura di K. Un altro esempio è offerto dalla fig. 1.1. ove K

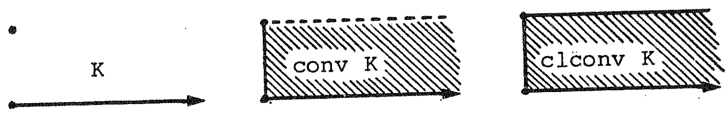


Fig. 1.1

è formato da un punto e da una semiretta di $\mathbb{R}^2$. L'involucro convesso può essere caratterizzato in una forma in un certo senso duale rispetto a quella della def. 1.5 :

TEOREMA 1.4. *L'involucro convesso di un insieme* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *uguaglia l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di* K.

DIMOSTRAZIONE. x sia una combinazione convessa propria di elementi di K, cioè sussista la (1.5) con gli $\alpha_i > 0$. Se $r \leqslant 2$, è immediato osservare che $x \in \mathrm{conv}\, K$. Supponiamo che ciò sia vero per le combinazioni di $r \leqslant s$ e dimostriamo che è vero anche per quelle di $r=s+1$ elementi. In tal caso la (1.5) diviene $x = \sum\limits_{i=1}^{s+1} \alpha_i x^i = (1-\alpha_{s+1})\,\bar{x} + \alpha_{s+1} x^{s+1}$, avendo osservato che, essendo gli $\alpha_i > 0$, è $\alpha_{s+1} < 1$, ed avendo posto $\bar{x} = \sum_{i=1}^{s} x^i \alpha_i/(1-\alpha_{s+1})$. Per la def. 1.5 $x^{s+1} \in \mathrm{conv}\, K$; per l'ipotesi di induzione si ha $\bar{x} \in \mathrm{conv}\, K$, e quindi anche $x \in \mathrm{conv}\, K$. Si è quindi ottenuto che conv K contiene l'insieme delle combinazioni convesse di elementi di K. L'inclusione opposta segue subito dal fatto che l'insieme delle combinazioni convesse, essendo convesso, contiene conv K. Q.E.D.

Con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto per provare il teo. 1.4 è ora immediato dimostrare che un insieme convesso $K \subseteq \mathbb{R}^n$, se è chiuso rispetto alle combinazioni convesse di s suoi elementi (e ciò è vero per $s=2$ a norma della stessa def. 1.3), allora è chiuso anche rispetto a quelle di $s+1$ suoi elementi. Quindi K contiene l'insieme delle combinazioni convesse di suoi elementi. Dal teo. 1.4 segue ora il

TEOREMA 1.5. *Un insieme* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *è convesso, sse uguaglia il suo involucro convesso.*

I concetti chiave per comprendere la teoria degli insiemi convessi, il cui sviluppo, a distanza di circa un secolo dai primi studi di rilievo, si presenta notevole, sono certamente almeno quelli espressi dai 3 seguenti teoremi, oltre quelli di iperpiano di supporto di un convesso in un punto e di iperpiano di separazione per una coppia di convessi, che verranno analizzati nel § 1.5.

TEOREMA 1.6. (C.Carathéodory, 1907). *Sia* $K \subseteq \mathbb{R}^n$. *Ogni elemento di* conv K *può esprimersi come combinazione convessa di non più di* $n+1$ *elementi di* K.

teorema 1.8 è la seguente. Si dice *grafo di intersezione*, associato ad una famiglia $\mathscr{F}$ di insiemi, il grafo(*) $\mathscr{G}$ i cui vertici sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathscr{F}$ e dove uno spigolo esiste sse è non vuota l'intersezione degli elementi di $\mathscr{F}$ corrispondenti ai vertici che lo definiscono. Allora il teorema 1.8 afferma che, se $\mathscr{F}$ è una famiglia di convessi con card $\mathscr{F} < +\infty$, se ogni sottografo di $\mathscr{G}$ avente $n+1$ vertici è completo (cioè possiede tutti gli spigoli possibili), allora è completo anche $\mathscr{G}$. E' tutt'ora aperto il problema di caratterizzare i grafi di intersezione di una famiglia di convessi di $\mathbb{R}^n$, mentre è risolto in $\mathbb{R}$.

Tutta una serie di proprietà degli insiemi convessi può essere messa in luce introducendo nozioni come quella di interno, interno relativo, chiusura, e così via. Ad es. la più ovvia è la seguente.

TEOREMA 1.9. *Se* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *è convesso, anche* ri K, int K, cl K *sono convessi.*

DIMOSTRAZIONE. E' sufficiente provare la tesi nel caso in cui card $K > 1$; in tal caso è ovviamente ri $K \neq \emptyset$. Se si ha che $x^i \in$ ri K, $i = 1,2$, esiste un intorno S^i di x^i tale che $S^i \cap \text{aff } K \subset K$, e ciò per $i = 1,2$. Consideriamo un qualsiasi $x \in [x^1, x^2]$, e sia S un intorno di x tale che $S \subset \text{conv}\{S^1, S^2\}$.

(*) Un grafo (non orientato) è la coppia costituita da un insieme V, i cui elementi sono detti vertici, e da un insieme di coppie (non ordinate) di elementi di V, dette spigoli.

Causa la convessità di K, $\forall\, y \in S \cap \text{aff } K$, $\exists\; y^i \in S^i \cap \text{aff } K, i = 1,2$, tali che $y \in [y^1, y^2]$ (basta prendere $[y^1, y^2]$ parallelo ad $[x^1, x^2]$), cosicché $S \cap \text{aff } K \subset K$, e quindi $[x^1, x^2] \subset \text{ri } K$; questo fatto prova la convessità di ri K. Quella di int K si ha subito, osservando che, o esso è vuoto, oppure aff $K = \mathbb{R}^n$; nel 2° caso la dimostrazione coincide con la precedente purchè si sostituisca aff K con $\mathbb{R}^n$. Sia $x^i \in \text{cl } K$, $i = 1,2$. Qualunque sia l'intorno S^i di x^i, si ha $S^i \cap K \neq \emptyset$, $i = 1,2$. Sia $y^i \in S^i \cap K$, $i = 1,2$; ovviamente $[y^1, y^2] \subseteq K$. Per assurdo cl K non sia convessa. Allora esiste $x \in]x^1, x^2[$ con $x \notin \text{cl } K$, cioè esiste un intorno, S, di x tale che $S \cap K = \emptyset$. Disponendo dell'arbitrarietà di S^1 ed S^2 si può ottenere $[y^1, y^2] \cap S \neq \emptyset$, dal che segue l'assurdo, e cioè $[y^1, y^2] \not\subseteq K$, e quindi la convessità di cl K. Q.E.D.

E' utile analizzare alcune particolari classi di insiemi convessi. Una delle più interessanti è quella individuata dalla seguente :

DEFINIZIONE 1.10. L'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$ è detta *poliedro*; se in particolare la frontiera di ognuno di questi semispazi contiene l'origine di $\mathbb{R}^n$, è detta(*) *cono poliedrico*.

E' immediato osservare che, per il teorema 1.3, un poliedro è convesso, che un politopo è un poliedro limitato e che un m-simplesso è un particolare politopo. L'insieme di soluzioni di un sistema di disuguaglianze od uguaglianze (ciascuna di queste può essere rimpiazzata equivalentemente da una coppia di disuguaglianze) algebri-

---

(*) Per la definizione di cono di veda la def. 1.17 (§ 1.4).

che lineari è evidentemente un poliedro. Alcune proprietà dei poliedri saranno analizzate nel § 1.3.; a tale scopo è fondamentale la nozione seguente.

DEFINIZIONE 1.11. Un elemento x di un insieme convesso $K \subset \mathbb{R}^n$ è detto *punto estremo*, sse $\nexists\, x', x'' \in K$, tali che $x \in]x', x''[$. I punti estremi di un poliedro sono detti *vertici*. (L'insieme dei punti estremi di X è indicato con vert X anche se X non è un poliedro).

Naturalmente la nozione di punto estremo é utile anche per i convessi non poliedrici; ad es. essa interviene nella seguente proprietà(*): *siano* $K', K'' \subseteq \mathbb{R}^n$, *con* $K' \subseteq K''$ *e* K'' *convesso e compatto; allora si ha* $K'' = \text{cl conv } K'$, *sse* $\text{cl } K' \supseteq \text{vert } K''$. Questa proprietà mette in luce il fatto che(**) vert K'' è il più piccolo (nel senso delle combinazioni convesse) insieme col quale si può approssimare K''.

Ulteriori concetti sono utili, oltre che suggestivi, nello studio di insiemi convessi. Ad es. quello di *ombra* di un insieme convesso $K' \subset \mathbb{R}^n$ rispetto ad un altro insieme convesso $K'' \subset \mathbb{R}^n$ e disgiunto da K', definita da $\bigcap_{y \in K''} \bigcup_{x \in K'} S(x,y)$, ove $S(x,y) = \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\alpha)y + \alpha x;\ \alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \geqslant 1\}$ è la semiretta definita da x ed y, con origine in x e non contenente y. Un altro è quello di *penombra*, definita da $\bigcup_{y \in K''} \bigcup_{x \in K'} S(x,y) - \bigcap_{y \in K''} \bigcup_{x \in K'} S(x,y)$,

---

(*) Si veda K.Fan: "On the Krein-Milman theorem". Proc.Symp.Pure Math., vol.VII, Am.Math.Soc., 1963, pp. 211-9.

(**) Se non si è in $\mathbb{R}^n$ non è più vero che un convesso compatto uguagli la chiusura convessa dell'insieme dei suoi punti estremi; lo è se è bicompatto su uno spazio lineare topologico localmente convesso.

1.3. - *Alcune proprietà dei poliedri.*

Per semplicità e senza tema di confusione ci riferiremo indifferentemente ad un sistema di disuguaglianze lineari ed al poliedro costituito dalle sue soluzioni, cioè capiterà di identificare un poliedro con la sua rappresentazione algebrica, che, per la def. 1.10, è $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geqslant b\}$, ove $A = (a_{ij})$ è una matrice di ordine $m \times n$ e $b = (b_i)$ un m-vettore, entrambi ad elementi reali. Con a_i indichiamo la i-esima riga di A, cioè $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$. Inoltre con $I = \{1, \ldots, m\}$ indichiamo l'insieme degli indici delle righe di A; con $I' \subseteq I$ un suo generico sottoinsieme; con $A_{I'}$ la sottomatrice di A formata con le righe corrispondenti agli elementi di I'; con $b_{I'}$ l'analogo sottovettore di b; si conviene che $A_\emptyset = 0$, $b_\emptyset = 0$; risulta ovviamente $A_I = A$, $b_I = b$.

DEFINIZIONE 1.12. L'insieme $F_{I'} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : A_{I'}x = b_{I'};\ A_{I-I'}x \geqslant b_{I-I'}\}$ è detto *faccia* del poliedro X; $\emptyset$ ed X sono dette facce *improprie*, le altre *proprie*. La *dimensione* di una faccia $F_{I'}$ è quella di aff $F_{I'}$.

In altre parole, una faccia di un poliedro si ottiene intersecando il poliedro stesso con una opportuna varietà lineare. Possiamo anche definire una faccia (ed in questo caso comprendiamo un qualunque insieme convesso X, oltre che un poliedro) come un insieme F per cui, o si ha F = X, oppure esiste un semispazio $S \supseteq X$ tale che $F = X \cap \text{frt } S$ (S viene detto semispazio di supporto per X, così come vedremo nel § 1.5, def. 1.25, se $F \neq \emptyset$).

Se nella def. 1.12 $I' = \emptyset$, la faccia è il poliedro stesso. La faccia è detta *spigolo* o *vertice*, secondo che rispettivamente la sua dimensione è 1 oppure 0; nel secondo caso la def. 1.12 è equivalente alla def. 1.11, com'è facile provare osservando che in tal caso $A_{I'}x = b_{I'}$ possiede una sola soluzione. E' immediato osservare che il numero di facce di un poliedro è finito. E' immediato anche il seguente:

TEOREMA 1.10. *Siano* $F_{I'}$, $F_{I''}$, $F_{I'''}$ *facce qualsiasi di uno stesso poliedro. Si ha:*

(1.8a) $\qquad I' \subseteq I'' \Rightarrow F_{I'} \supseteq F_{I''}$

(1.8b) $\qquad I' \cup I'' = I''' \Rightarrow F_{I'} \cap F_{I''} = F_{I'''}$

Si noti che, rimpiazzando nella (1.8a) $\subseteq$ e $\supseteq$ rispettivamente con $\subset$ e $\supset$, si ottiene un'affermazione falsa; la 2^ delle (1.8a) non sussiste se ad es. le disuguaglianze corrispondenti ad $I'' - I'$ sono ridondanti (nel senso che la loro cancellazione non modifica il poliedro), mentre sussiste se nessuna delle disuguaglianze che definiscono il poliedro è superflua. Le inverse delle implicazioni (1.8) sono false; ad es., per quanto riguarda la (1.8a), una faccia può essere contenuta in 2 facce, distinte e di dimensioni maggiori della prima, caratterizzate dagli insiemi I' ed I'' per i quali non vale alcuna relazione di inclusione.

I primi studi significativi sugli aspetti combinatori dei poliedri risalgono ad Eulero col suo celebre risultato(*) del 1752

(*) Successivamente generalizzato da H. Poincaré e L. Schläfli verso la fine

./.

sui politopi di $\mathbb{R}^3$: $v - e + f = 2$, dove v, e, f sono rispettivamente i numeri di vertici, spigoli, facce (bidimensionali). Data l'enorme importanza dei poliedri gli studi si sono moltiplicati ed oggi è disponibile una teoria approfondita della quale qui sono considerati solo alcuni elementi indispensabili per lo studio dei metodi di ottimizzazione.

DEFINIZIONE 1.13. Una faccia di un poliedro è detta *minimale*, sse non contiene altre facce.

L'attributo minimale per una faccia è da interpretarsi col fatto che essa è minima nel senso dell'inclusione.

TEOREMA 1.11. *Se la caratteristica di* A *è* n, *allora ogni faccia minimale del poliedro* X *è un vertice, le cui coordinate sono la soluzione di un'equazione del tipo* $A_{I^*}x = b_{I^*}$, *ove* $I^* \subseteq I$, card $I^* = n$, det $A_{I^*} \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. F_{I^*} sia una faccia minimale di X. Supponiamo che essa contenga due punti distinti x' ed x''. F_{I^*} non può contenere la retta (di $\mathbb{R}^n$) passante per x' ed x'', perchè altrimenti essa sarebbe parallela ad ognuno dei piani di equazione $\langle a_i, x\rangle = b_i$ $i=1,\dots,m$, cosicchè A non potrebbe avere caratteristica n. Ne segue che su questa retta $\exists \bar{x} \in F_{I^*}$ ed $\exists p \in I$, tali che una delle 2 semirette di origine $\bar{x}$ non contiene $[x', x'']$ ed il piano di equazione $\langle a_p, x\rangle = b_p$ contiene $\bar{x}$, ma non la retta. Posto:

$^{\prime}$/. dello scorso secolo nel modo seguente: se $\nu_i(X)$ denota il numero di facce i-dimensionali di un politopo $X \subset \mathbb{R}^n$, si ha: $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \nu_i(X) = 1-(-1)^n$ (Grünbaum, 1967).

$I° = I^* \cup \{p\}$, si ha $F_{I°} \neq \emptyset$, perchè $F_{I°}$ contiene almeno $\bar{x}$. Inoltre, per la (1.8a), si ha $F_{I°} \subseteq F_{I^*}$; poichè $F_{I°}$ non contiene entrambi x' ed x'', si ha $F_{I°} \subset F_{I^*}$. Segue l'assurdo che F_{I^*} non è minimale, e quindi è provato che ogni faccia minimale è un vertice di X. F_{I^*} sia ancora una faccia minimale, ed x^* sia il suo unico elemento, cosicchè $F_{I^*} = \{x^*\}$. Posto $I° = \{i \in I: \langle a_i, x^* \rangle = b_i\}$, si ha evidentemente $I^* \subseteq I°$; $F_{I^*} = F_{I°}$; $A_{I-I°}x^* > b_{I-I°}$. Poichè la varietà lineare $A_{I°}x = b_{I°}$ è formata da un solo punto, segue che la caratteristica di $A_{I°}$ è n, e quindi esiste un sottoinsieme di $I°$ che soddisfa la condizione dell'enunciato. Q.E.D.

La proposizione inversa di quella espressa dal teo. 1.11 è banale.

Indichiamo con $J = \{1,\ldots,n\}$ l'insieme degli indici delle colonne di A, con $J' \subseteq J$ un suo qualunque sottoinsieme, e con $A^{J'}$ la sottomatrice di A formata con le colonne di A corrispondenti agli elementi di J'; $x_{J'}$ è l'analogo sottovettore di x; risulta ovviamente $A^J = A$. Introduciamo gli insiemi $N=\{x \in \mathbb{R}^n: Ax=0\}$, $S(J')=\{x \in \mathbb{R}^n: x_{J-J'} = 0\}$, e $T(I',J')=F_{I'} \cap S(J')$ convenendo che $S(J)=\mathbb{R}^n$; i primi due sono di ovvio significato (si noti che dim N è la nullità di A), ed il terzo è la restrizione della faccia $F_{I'}$ al sottospazio $S(J')$.

LEMMA 1.1. $F_{I'}$ *sia una faccia non vuota di* X, *ed* $A^{J'}$ *sia una sottomatrice di* A *avente la stessa caratteristica di* A. *Allora* $T(I',J') \neq \emptyset$, *ed inoltre ogni elemento di* $F_{I'}$ *può esprimersi come somma di un elemento di* $T(I',J')$ *ed uno di* N.

DIMOSTRAZIONE. Ogni colonna di A è combinazione lineare di quelle di $A^{J'}$, cioè esiste una matrice B, tale che $A = A^{J'}B$. Allora, $\forall x \in F_{I'}$, posto $\bar{x}_{J'} = x_{J'} + B^{J-J'}x_{J-J'}$, si ha $\bar{x} \triangleq \begin{pmatrix} \bar{x}_{J'} \\ 0 \end{pmatrix} \in T(I',J')$. Infatti, è ovvio che $\bar{x} \in S(J')$. Inoltre si ha $A_{I'}\bar{x} = A^{J'}_{I'}\bar{x}_{J'} = A^{J'}_{I'}x_{J'} + A^{J'}_{I'}B^{J-J'}x_{J-J'} = A^{J'}_{I'}x_{J'} + A^{J-J'}_{I'}x_{J-J'} = A_{I'}x = b_{I'}$. In modo analogo si prova che $A_{I-I'}\bar{x} \geq b_{I-I'}$; e quindi che $\bar{x} \in F_{I'}$. Ne segue che $T(I',J') \neq \emptyset$, ed inoltre, poichè $\bar{x}+y \in F_{I'}$, $\forall\, y \in N$, si è ottenuta l'ultima parte dell'enunciato. Q.E.D.

TEOREMA 1.12. *Sia* r *la caratteristica di* A. *Ogni faccia minimale del poliedro* X *è una varietà lineare di dimensione* $n-r$, *cioè è l'insieme delle soluzioni di un'equazione del tipo* $A_{I^\circ}x = b_{I^\circ}$, *dove* $I^\circ \subseteq I$ e card $I^\circ = r$, *la caratteristica di* A_{I° *essendo* r.

DIMOSTRAZIONE. A norma del lemma 1.1, tra la famiglia $\mathcal{F} \triangleq \{F_{I'} : I' \subseteq I\}$ delle facce di X e la famiglia $\mathcal{F}(J') \triangleq \{T(I',J') : I' \subseteq I\}$ delle loro restrizioni si può stabilire una corrispondenza biunivoca. In altre parole, gli insiemi $T(I',J')$ possono riguardarsi come le facce del poliedro $T(\emptyset,J') = X \cap S(J')$, considerato in $\mathbb{R}^{\text{card } J'}$. Non è restrittivo supporre che le colonne di $A^{J'}$ siano linearmente indipendenti, cosicchè card $J' = r$. A norma del teo. 1.11, se $T(I',J')$ è minimale, allora è un vertice del tipo $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{J'} \\ 0 \end{pmatrix}$, tale da verificare un sistema come $A^{J'}_{I^\circ}x_{J'} = b_{I^\circ}$, dove $I^\circ \subseteq I$, e dove $A^{J'}_{I^\circ}$ ha caratteristica card $I^\circ = r$. Poichè N è ora una varietà lineare di dimensione $n-r$, anche $\{\bar{x}+y : y \in N\}$ è una varietà lineare di dimensione $n-r$, ogni elemento della quale verifica $A_{I^\circ}x = b_{I^\circ}$, cosicchè A_{I° ha caratte ristica r. Quindi $F_{I'}$ uguaglia questa varietà e coincide con l'insieme delle soluzioni dell'equazione $A_{I^o}x = b_{I^o}$. Q.E.D.

Lo studio delle proprietà delle facce dei poliedri porta ad introdurre vari concetti, che consentono di approfondirne la natura combinatoria.

FINO QUI

DEFINIZIONE 1.14. I politopi $X,Y \subset \mathbb{R}^n$ si dicono *isomorfi*, sse, detti $\mathcal{F}_X$ ed $\mathcal{F}_Y$ gli insiemi delle facce rispettivamente di X ed Y, esiste un'applicazione bigettiva $\varphi: \mathcal{F}_X \longrightarrow \mathcal{F}_Y$ tale che $F' \subseteq F'' \iff \varphi(F') \subseteq \varphi(F'')$, $\forall\, F',F'' \in \mathcal{F}_X$. Politopi isomorfi sono detti anche equivalenti in senso combinatorio.

E' immediato provare i seguenti enunciati ove $X,Y, \mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y, \varphi$ sono quelli della def. 1.14. *Se* $X \cong Y$ *allora* $\dim F = \dim \varphi(F)$ *ed* $F \cong \varphi(F)$, $\forall\, F \in \mathcal{F}_X$*; inoltre* X *ed* Y *hanno un ugual numero di facce di una stessa dimensione. Se* $X \cong Y$ *allora*, $\forall\, \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_X$ *, si ha* $\varphi(\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}'} \varphi(F)$ *e* $\varphi(\mathrm{conv} \bigcup_{F \in \mathcal{F}'} F) = \mathrm{conv} \bigcup_{F \in \mathcal{F}'} \varphi(F)$. *Se* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *è affine e non singolare, allora* $X \cong T(X)$. *Due qualunque* m*-simplessi sono isomorfi.*

Le classi di equivalenza indotte dalla def. 1.14 sono di notevole importanza per lo studio della difficoltà (ad es. computazionale) di vari problemi relativi ai politopi. Nel tentativo di spiegare alcune di esse può illuminare il fatto che l'isomorfismo è una relazione di equivalenza nè chiusa, nè aperta, nel senso che il limite di una successsione di politopi isomorfi può non essere isomorfo ad essi, e in ogni intorno di un politopo esistono politopi non isomorfi ad esso. La caratterizzazione di politopi isomorfi è molto importante. In $\mathbb{R}$ è banale, trattandosi di segmenti. In $\mathbb{R}^2$ essa è data dal numero di vertici, poichè ovviamente due poligoni sono isomorfi sse hanno lo stesso numero di vertici. In generale la questione è ben lungi dall'essere risolta.

DEFINIZIONE 1.15. Una famiglia $\mathscr{C}$ di politopi di $\mathbb{R}^n$ è detta *complesso* (poliedrico), sse ogni faccia di un elemento di $\mathscr{C}$ è un elemento di $\mathscr{C}$, e l'intersezione di due qualunque elementi di $\mathscr{C}$ è una faccia di entrambi.

Dato un politopo di $\mathbb{R}^n$, l'insieme delle sue facce di dimensione non superiore ad m, con $m \leqslant n$, è un complesso. La nozione di complesso può estendersi anche ai poliedri.

DEFINIZIONE 1.16. Un poliedro X^* è detto *duale* del poliedro $X \subseteq \mathbb{R}^n$, sse, detti $\mathscr{F}$ ed $\mathscr{F}^*$ gli insiemi delle facce rispettivamente di X ed X^*, esiste un'applicazione bigettiva $\psi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}^*$ tale che $F' \subseteq F'' \Longleftrightarrow \psi(F') \supseteq \psi(F'')$, $\forall\, F', F'' \in \mathscr{F}$.

Da questa def. 1.16 si ha subito che $\psi(\emptyset) = X^*$, $\psi(X) = \emptyset$, e che in generale $\dim F + \dim \psi(F) = n-1$, $\forall\, F \in \mathscr{F}$. Si ha anche che *le facce* $(n-k)$-*dimensionali di* X *sono in corrispondenza biunivoca con quelle* $(k-1)$-*dimensionali di* X^*, *e ciò per ogni* $k=1,\dots,n$. Ne segue che, *se* $X \cong Y$, $X^* \cong Y^*$ *e* $X = (X^*)^*$, *allora* $Y = (Y^*)^*$. Questo fatto permette di definire una famiglia di politopi isomorfi come *duale* di un'altra, sempre di politopi isomorfi, quando nella 1^ esiste un elemento duale di uno della 2^. Un altro fatto ovvio è che, *se* X *ed* Y *sono politopi duali di* Z, allora $X \cong Y$. Esempi di politopi duali in $\mathbb{R}^3$ sono il tetraedro e se stesso, il cubo e l'ottaedro, il dodecaedro e l'icoesaedro, il prisma e la bipiramide ad m lati, la piramide ad n lati e se stessa; in $\mathbb{R}^n$ l'n-simplesso e se stesso (autodualità). Nel § 1.8 vedremo che trova risposta affermativa la domanda se un politopo n-dimensionale possiede un duale ancora n-dimensionale.

Dopo il teorema di Eulero un risultato fondamentale nello studio degli aspetti combinatori dei poliedri è il teorema di Steinitz[(*)], che caratterizza il grafo[(**)] di un politopo di $\mathbb{R}^3$ come grafo planare (isomorfo ad un grafo di $\mathbb{R}^3$; nel quale nessuna coppia di spigoli si interseca) e 3-connesso (ogni coppia di vertici è connessa da 3 distinte catene di spigoli). Con la fine degli anni '40 lo studio degli aspetti combinatori dei poliedri riceve un forte impulso dalla formulazione di un metodo[(***)] efficiente per determinare il minimo di una forma lineare su un poliedro. L'interesse è tale che vengono anche trovate proprietà già note. Una delle questioni che ha trovato risposta generale è quella di determinare il minimo ed il massimo numero di vertici di un poliedro di $\mathbb{R}^n$ con k facce $(n-1)$-dimensionali; ciò è avvenuto nel 1970 per il massimo e nel 1971 per il minimo[(****)].

(*) E. Steinitz e H. Rademacher: "Vorlesungen über di Theorie der Polyeder". Springer, Berlin, 1934.

(**) I vertici e gli spigoli sono rispettivamente quelli del politopo.

(***) Che sarà analizzato nel cap. 8.

(****) P.McMullen: "The maximum number of faces of a convex polytope". Matematika, v.17, 1970, pp.179-84. D.W. Barnette: "The minimum number of vertices of a simple polytope". Israel Jou.Math., v.10, 1971, pp. 121-5.

Prima di chiudere questo paragrafo è il caso di osservare che un poliedro può essere caratterizzato in vari modi. Ad es. si dimostra(*) che *le seguenti condizioni sono equivalenti:* (i) X *è un poliedro;* (ii) X *è convesso, chiuso ed ha un numero finito di facce;* (3i) X *è l'involucro convesso di un insieme finito di punti e semirette;* (4i) *esistono un politopo* Y *ed un cono poliedrico* Z, *tali che* $X = \{x : x = y+z; y \in Y; z \in Z\}$; (5i) X *è la chiusura convessa dell'unione di un politopo e della traslazione di un cono poliedrico.*

1.4. - *Coni convessi e non convessi.*

Nello studio dei problemi di estremo i coni, in particolare quelli convessi, emergono in svariati modi, ad es. per approssimare localmente un insieme; in questo senso non sempre il modo di associare un cono ad un insieme è unico, anche perchè non sempre è unico lo scopo perseguito.

DEFINIZIONE 1.17. Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *cono con vertice in* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sse $x \in X$ ed $\alpha \in]0, +\infty[\implies \bar{x}+\alpha(x-\bar{x}) \in X$. Se inoltre X è convesso è detto *cono convesso* . Nel caso particolare in cui è $\bar{x}=0$ il cono è detto con vertice nell'origine o semplicemente *cono*.

(*) V.Klee: "Some characterizations of convex polyhedra". Acta Math.,v.102,1959, pp.79-107.

Il vertice di un cono non necessariamente è unico o sta in esso.

Il cono poliedrico introdotto con la def. 1.10 è ovviamente un particolare cono con vertice nell'origine; è immediata la definizione di cono poliedrico con vertice in un generico punto $\bar{x}$. Nel seguito, se nulla è detto, s'intende che il cono è con vertice nell'origine.

Dalla def. 1.17 discende subito che un cono può non avere un solo vertice; se ne ha uno solo è detto *proprio* ; ciò accade sse $x \in X$ ed $x \neq 0 \Rightarrow -x \notin X$; esso è necessariamente l'origine di $\mathbb{R}^n$ e, se appartiene al cono, è un punto estremo (altrimenti lo è della chiusura del cono).

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare algebrico $A\,x \geqslant b$ è un cono poliedrico, se $b = 0$; ciò non è necessario, nel senso che $A\,x \geqslant b$ può definire un cono poliedrico anche con $b \neq 0$ (ad es. se $A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$). Un altro esempio di cono poliedrico è offerto da $\mathbb{R}^n_+$. Un cono poliedrico, rappresentato come insieme delle soluzioni di $A\,x \geqslant b$, è detto *non degenere* sse la caratteristica di A uguaglia il numero delle sue colonne; è detto *degenere* in caso contrario. Ovviamente la degenerazione non è una caratteristica intrinseca del cono poliedrico, ma della sua rappresentazione algebrica. E' immediato anche osservare che un cono poliedrico é proprio , sse é non degenere.

E' utile considerare un cono come generato da un insieme. Più precisamente si dice che un cono X è generato da un insieme S, quando ogni suo elemento è esprimibile come combinazione a coef ficienti non negativi di elementi di S, e si scrive X=con S. In questo ordine di idee è utile anche osservare che le definizioni di alcuni insiemi già incontrati possono considerarsi come casi particolari di una più generale. A tale scopo siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^k$, con k intero positivo, ed $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Introduciamo l'insieme $L(S, A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i ;\ x^i \in S,\ i = 1, \ldots, k;\ \alpha \in A;\ k \geq 1\}$. E' subito visto che $L(S, A)$ è un sottospazio (lineare), se $A = \mathbb{R}^k$; una varietà affine, se $A = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}$; un insieme convesso, se $A = \{\alpha \in \mathbb{R}^k_+ : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}$, ed in particolare un politopo, se card $S < +\infty$, ed un m-simplesso , quando card $S = m < n+1$ e gli elementi di S sono linearmente indipendenti; un cono convesso, se $A = \mathbb{R}^k_+$, ed in particolare un cono poliedrico, se card $S < +\infty$ oppure S è l'unione di un numero finito di punti e di semirette dall'origine. In tutti i casi S è detto l'*insieme generatore*.

TEOREMA 1.13. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un cono* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *sia convesso è che*

$$(1.9) \qquad x', x'' \in X \text{ ed } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+ - \{0\} \implies \alpha x' + \beta x'' \in X$$

DIMOSTRAZIONE. *Suff.* $\forall\, \gamma \in [0, 1]$ e $\forall\, x', x'' \in X$, poichè $(\gamma, 1-\gamma) \in \mathbb{R}^2_+ - \{0\}$, dalla (1.9) segue $\gamma x' + (1-\gamma) x'' \in X$, e quindi X è convesso. *Nec.* Segue subito dalla def. 1.3. Q.E.D.

Questo teorema caratterizza un cono convesso come un insieme chiuso rispetto all'addizione e moltiplicazione per uno scala-

1.6. - *Funzioni convesse.*

Un altro concetto fondamentale nella teoria dell'ottimizzazione è quello di funzione convessa, del quale analizziamo qui i principali aspetti.

DEFINIZIONE 1.28. L'insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sia convesso. Una funzione(*) $f:K \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta *convessa*, sse risulta

(1.21) $\quad (1-\alpha)f(x')+\alpha f(x'') \geq f((1-\alpha)x'+\alpha x'') \quad , \forall\alpha \in [0,1] \quad , \forall x',x'' \in K.$

Se in (1.21) la disuguaglianza è verificata in senso forte, $\forall\alpha \in]0,1[$ e quando $x' \neq x''$, allora f è detta *strettamente convessa*.

Se in (1.21) il verificarsi l'uguaglianza $\forall\alpha \in [0,1]$, quando $x' \neq x''$, implica l'uguaglianza $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, allora f é detta *quasi strettamente convessa*. f è detta (*quasi*) (*strettamente*) *concava*, sse $-f$ è (quasi) (strettamente) convessa. Naturalmente una funzione vettoriale appartiene ad una delle precedenti classi, sse ciò avviene per ciascuna sua componente. Una funzione (quasi) strettamente convessa (concava) è anche convessa (concava), ma non viceversa. Una funzione affine é, sia convessa, sia concava; anzi ciò può essere preso come definizione. Una funzione f è quasi ~~strettamente~~ convessa, sse epi f è quasi strettamente convesso.

(*) La cui immagine comprende anche $\pm\infty$.

TEOREMA 1.21. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *sia convesso e sia* $f:K\to\mathbb{R}$. (i) f *è convessa, sse* epi f *è convesso;* (ii) *se* $\forall \bar{x} \in$ ri K *si ha:*

(1.22) $$f(x)-f(\bar{x}) \geq \langle t, x-\bar{x}\rangle \ , \ \forall x \in K,$$

allora f *è convessa su* ri K; *se* f *è convessa su* K, $\forall \bar{x} \in$ ri K, *sussiste la* (1.22); *in* (1.22) *risulta* $t=f'(\bar{x})$, *se* f *è differenziabile in* $\bar{x}$; (3i) f *è convessa, sse si ha:*

(1.23) $$\rho(f) \triangleq \sup \left[f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i\right) - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(x^i)\right] = 0 \ ,$$

ove il sup *è fatto rispetto a tutte le possibili* r-*uple di* α_i, *con* $\alpha_i \in [0,1]$ *e* $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, *ed a tutti i possibili insiemi di* r n-*uple* $x^i \in K$, *e qualunque sia l'intero positivo* r.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $y'=f(x')$, $y''=f(x'')$, $x(\alpha)=(1-\alpha)x'+\alpha x''$, $y(\alpha)=(1-\alpha)y'+\alpha y''$, $z(\alpha)=(1-\alpha)z'+\alpha z''$ (Fig. 1.18). (i) La (1.21) sussiste, sse

(1.24) $$z(\alpha) \geq f(x(\alpha)), \forall\alpha\in[0,1], \ \forall x',x''\in K, \ \forall z'\geq f(x'), \ \forall z''\geq f(x''),$$

cioè sse $[(x',z'),(x'',z'')]\subset$ epi f. Ciò porge la tesi osservando che (x',z') e (x'',z'') sono 2 generici elementi di epi f. (ii) Se sussiste la (1.22), si ottiene subito la (1.24) con ri K in luogo di K, e quindi, $\forall\alpha\in[0,1]$, $z(\alpha)$ sta nello epigrafo della restrizione di f a ri K. Segue la convessità di tale epigrafo e quindi, per la (i), la tesi. Ora f sia convessa su K. Per la (i) f convessa $\Longrightarrow$ epi f convesso. $\forall \hat{x} \in K$ identifichiamo

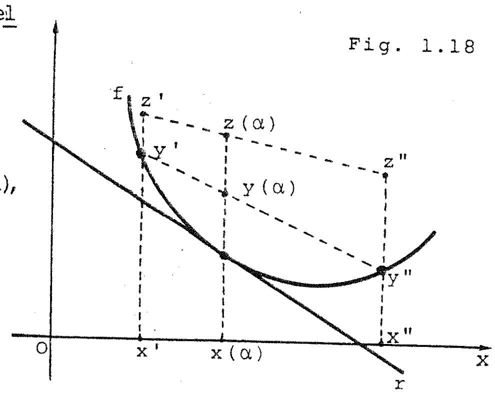


Fig. 1.18

epi f e l'insieme il cui elemento è $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ rispettivamente con K_1 e K_2 del teo. 1.15. Ne segue l'esistenza di un iperpiano di separazione (propria) che, essendo $(\hat{x}, f(\hat{x})) \in \text{epi } f$, è anche di supporto per epi f. L'equazione di esso è $y = f(\hat{x}) + \langle t, x-\hat{x} \rangle$, ove $t \in \mathbb{R}^n$ è opportuno. Ne segue la (1.22). Dalla stessa definizione di differenziabilità segue $t = f'(\hat{x})$, quando f è differenziabile. (3i) Basta osservare che la (1.21) è vera sse, per ogni intero positivo r, per ogni r-upla di $\alpha_i \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, e per ogni r-upla di $x^i \in X$, risulta(*)

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i\right) \leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(x^i) \quad . \qquad \text{Q.E.D.} \tag{1.25}$$

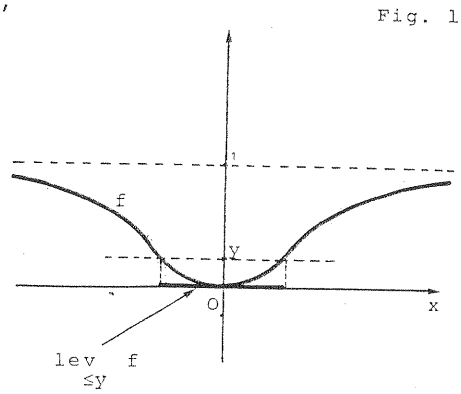
Il seguente esempio mostra che la 2^ parte della (ii) del teo. 1.21 non è invertibile.

ESEMPIO. $n=2$; $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_i \leq 1,\ i=1,2\}$; $f(x)=0$ se $0 \leq x_1 \leq 1$ e $0 < x_2 \leq 1$, $f(x) = 1-x_1^2$ se $0 \leq x_1 \leq 1$ e $x_2 = 0$. $\forall \bar{x} \in \text{ri } K$ la (1.22) è soddisfatta con $t=0$, ma f non è evidentemente convessa.

La 2^ parte della (ii) del teo. 1.21 è invertibile, cioè f è convessa sse sussiste la (1.22) $\forall \bar{x} \in \text{ri } K$, se $K = \mathbb{R}^n$.

Se f è convessa, $\text{lev}_{\leq \alpha} f$ è convesso $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; non è vero il viceversa, così come mostra l'esempio della fig. 1.19, ove $f(x) = x^2/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Sussiste infatti il

Fig. 1.19



(*) La (1.25) è nota come disuguaglianza di Jensen.

TEOREMA 1.22. *f sia definita su un insieme convesso $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché f sia convessa in K è che $\mathrm{lev}_{\leq y} f$ sia convesso, $\forall y \in \mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE. $\forall x', x'' \in \mathrm{lev}_{\leq y} f$, posto $x(\alpha)=(1-\alpha)x'+\alpha x''$, la convessità di f implica $f(x(\alpha)) \leq (1-\alpha) f(x')+\alpha f(x'') \leq y$, e quindi $x(\alpha) \in \mathrm{lev}_{\leq y} f$, $\forall \alpha \in [0,1]$. Q.E.D.

Le precedenti considerazioni conducono ad una prima naturale generalizzazione del concetto di funzione convessa.

DEFINIZIONE 1.29. La funzione f è *quasi convessa* in $K \subseteq \mathbb{R}^n$, sse $\mathrm{lev}_{\leq y} f$ è convesso, $\forall y \in \mathbb{R}$. f è detta *quasi concava*, sse è quasi convessa -f.

L'utilità di questa generalizzazione sta nel fatto che le funzioni quasi convesse su un convesso, nella cui classe rientrano, a norma del teo. 1.22, quelle convesse, assicurano che un punto di minimo locale isolato è anche di minimo globale, com'è facile provare.

TEOREMA 1.23. *f sia definita su un insieme convesso $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché f sia convessa in K è che risulti:*

$$(1.26) \qquad (1-\alpha)f(x')+\alpha f(x'') \geq \inf_{x \in K \cap S_\alpha} f(x) \ , \quad \forall \alpha \in [0,1] \ , \ \forall x', x'' \in K,$$

dove $x(\alpha) \triangleq (1-\alpha)x'+\alpha x''$ *e dove* S_α *è un intorno di* $x(\alpha)$.

DIMOSTRAZIONE. La (1.21), essendo ovviamente $f(x(\alpha)) \geq \inf_{x \in K \cap S_\alpha} f(x)$, implica la (1.26). Questa non è sufficiente, così come mostra l'esem pio di $f(x)=x^2$, se $x \neq 0$; $f(x)=1$, se $x=0$ $(x \in \mathbb{R})$. Q.E.D.

Anche il teo. 1.23 si presta ad una generalizzazione; vedremo che esso consente di dare una definizione di funzione convessa su un insieme finito. Una classe di funzioni convesse di particolare interesse è quella delle funzioni differenziabili, per la quale valgono i seguenti classici risultati.

TEOREMA 1.24. *Una funzione* $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, *differenziabile (almeno) 2 volte sull'aperto* $K \subseteq \mathbb{R}^n$, *è convessa, sse la sua matrice hessiana* $f''(x)$ *è semidefinita positiva su* K.

DIMOSTRAZIONE. *Nec.* Siano $x,y \in K$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$; poniamo $z = x+\alpha y$. La doppia differenziabilità implica

$$f(z) = f(x) + \alpha < f'(x), y > + \frac{1}{2}\alpha^2 < y , f''(x)y > + \alpha^2 \varepsilon(\alpha) ,$$

ove $\varepsilon(\alpha) \longrightarrow 0$ se $\alpha \longrightarrow 0$. La convessità implica, per la (1.22),

$$f(z) - f(x) - \alpha < f'(x), y > \geqslant 0 .$$

Il confronto delle precedenti 2 relazioni porge la disuguaglianza

$$\frac{1}{2}\alpha^2 < y, f''(x)y > + \alpha^2 \varepsilon(\alpha) \geqslant 0$$

che, divisi ambo i membri per $\alpha^2/2$ e fatto tendere α a zero, porge $<y, f''(x)y> \geqslant 0$ e quindi, per la genericità di y, che $f''(x)$ è semidefinita positiva. *Suff.* Per il teo. di Taylor si ha,

$\forall\ x,y \in K,$

$$f(y)=f(x)+<f'(x),y-x> + \frac{1}{2} <y-x,f''(z(\alpha))(y-x)> ,$$

ove $z(\alpha) \triangleq (1-\alpha)\,x+\alpha y$ ed $\alpha \in\ ]0,1[$ è opportuno. Da questa, essendo f'' semidefinita positiva su tutto K, segue

$$f(y) \geqslant f(x) + <f'(x),y-x> ,$$

e quindi, per la (ii) del teo. 1.21, la convessità di f. Q.E.D.

TEOREMA 1.25. *Una funzione* $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, *differenziabile (almeno) 1 volta sull'aperto* $K \subseteq \mathbb{R}^n$, *è convessa, sse risulta:*

$$(1.27) \qquad < f'(y) - f'(x) , y-x > \geqslant 0 \quad , \quad \forall\ x,y \in K.$$

DIMOSTRAZIONE. *Nec.* Nella (1.22) poniamo una volta $\bar{x} = y$ ed un'altra $x = y$, $\bar{x} = x$; poi sommiamo membro a membro le disuguaglianze che risultano, ottenendo infine la (1.27). *Suff.* Per il teorema del valor medio si ha:

$$(1.28) \qquad f(y) - f(x) = < f'(z(\alpha)),y-x > \quad , \quad \forall\ x,y \in K,$$

ove $z(\alpha) \triangleq (1-\alpha)\,x+\alpha y$ ed $\alpha \in]0,1[$ è opportuno. Dalla (1.27) si ha $<f'(z(\alpha))-f'(x),z(\alpha)-x > \geqslant 0$ e quindi $< f'(z(\alpha)),y-x > \geqslant < f'(x),y-x >$. Da questa e dalla (1.28) segue $f(y) \geq f(x)+<f'(x),y-x>$. e quindi, essendo K aperto, la (ii) del teo.1.21 porge la convessità di f. Q.E.D.
Si noti che la (1.27) esprime la monotonia di f'.