COMPLEMENTI ED ESERCIZI SU PROBLEMI LINEARI ED ALCUNI PROBLEMI NON LINEARI

A. CAMBINI - L. MARTEIN

Da fog 9 fino a fog 14

inf. a fog 27 e 29

4 - 3 RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DI UN PROGRAMMA LINEARE

Un problema di programmazione lineare, che presenta due sole variabili di decisione, può essere facilmente rappresentato nel piano di tali variabili. Una tale rappresentazione permette di illustrare in modo intuitivo tutte quelle proprietà che sono alla base della teoria della programmazione lineare.

Esempio 1.

Riprendiamo il problema esposto Cap. 12, iniziando a rappresentare l'insieme S di tutte le possibili scelte.(*)

I vincoli del problema sono:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 10 \quad ; \quad 10x_1 + 20x_2 \leqslant 180 \\ 8x_1 + 4x_2 \leqslant 56 \quad ; \quad x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Il primo vincolo rappresenta un semipiano di origine la retta $x_1 + x_2 = 10$; per individuare tale semipiano basta sostituire nella disequazione le coordinate di un qualsiasi punto P non appartenente alla retta (ad esempio l'origine degli assi cartesiani). Se la disuguaglianza è soddisfatta, il semipiano è quello che contiene P, altrimenti è quello opposto (vedi fig. 20).

(*) S è la regione ammissibile, indicata con R nel Cap. 12.

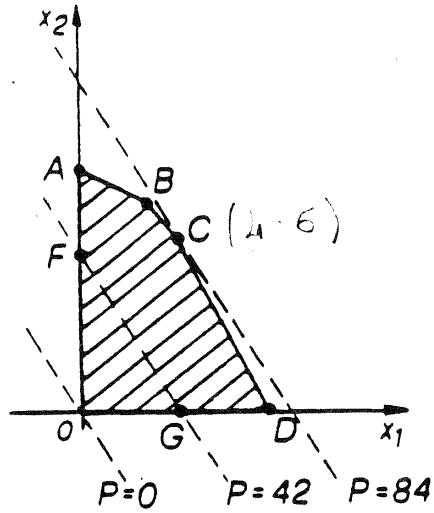


Fig. 22 P= profitto

Tale retta interseca S nel segmento FG; di conseguenza ad ogni punto appartenente a tale segmento corrisponde una decisione che porta ad ottenere un profitto P = 42 milioni di lire. Per tale motivo la retta $9x_1 + 8x_2 = 42$ è detta <u>LINEA DI ISOPROFITTO.</u>

Le linee di isoprofitto sono ovviamente costituite da rette parallele tra di loro; rappresentando tali rette (vedi fig. 22), si può osservare che solo quelle comprese tra P = 0 e P = 84 corrispondono a profitti associati a decisioni compatibili con le risorse. Di conseguenza il profitto massimo è dato da P = 84 realizzabile con la decisione ottima di produrre 4 unità dell'articolo A e 6 unità dell'articolo B.

Esempio 2.

Si considerino i problemi

$$A)\quad \begin{cases} \max(+x_1 + 4x_2) \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad B)\quad \begin{cases} \min(x_1 + 4x_2) \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

la regione S è uguale per entrambi i problemi.

Ad ogni punto esterno ad S, corrisponde una decisione non compatibile con le risorse disponibili; ad esempio al punto P = (7,2) è associata la decisione di produrre 7 unità dell'articolo A e 2 unità dell'articolo B. Ciò implica l'utilizzo di 9 settimane lavorative, di 110 kg. di materia prima, ma anche l'utilizzo di 64 kg. di materiale complementare contro una effettiva disponibilità di 56 kg.

Osserviamo ora il diverso significato che hanno i punti interni, di frontiera ed i vertici rispetto al problema considerato.

Ad ogni punto interno corrisponde una decisione che attiva entrambi i processi produttivi e lascia, di ogni risorsa, una quantità non utilizzata.

Ad ogni punto appartenente ad $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD}$, vertici esclusi, corrisponde una decisione che attiva entrambi i processi ed utilizza completamente una risorsa.

Ad ogni punto appartenente ad $\overline{OA} \cup \overline{OD}$, vertici esclusi, corrisponde una decisione che attiva un solo processo, e lascia, di ogni risorsa, una quantità non utilizzata.

Ai vertici B e C corrispondono decisioni che attivano entrambi i processi e utilizzano completamente due risorse; mentre ai vertici A e D corrispondono decisioni che attivano un solo processo e utilizzano completamente una sola risorsa. Infine al vertice O corrisponde la decisione di non attivare nessun processo.

Resta adesso da rappresentare la funzione obiettivo, ovvero il profitto $f(x_1, x_2) = 9x_1 + 8x_2$.

Domandiamoci se è possibile realizzare, con le risorse a disposizione, un profitto di 42 milioni di lire, ovvero se si può avere $9x_1 + 8x_2 = 42$ con $(x_1, x_2) \in S$.

L'equazione $9x_1 + 8x_2 = 42$ è la retta del piano rappresentata in figura 22.

Le variabili y_1, y_2, y_3 sono chiamate **variabili di scarto**; la loro introduzione come variabili non negative permette di scrivere ogni vincolo sotto forma di uguaglianza.

Le variabili di scarto possono essere rappresentate nel piano delle variabili di decisione, nel modo indicato in figura 25.

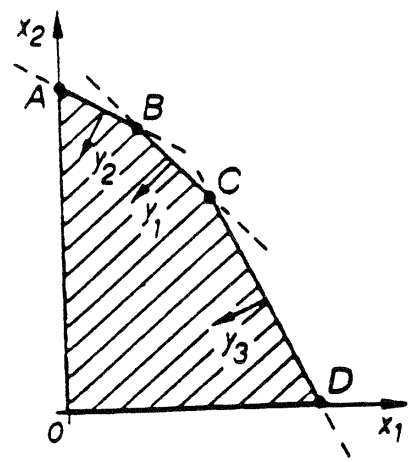
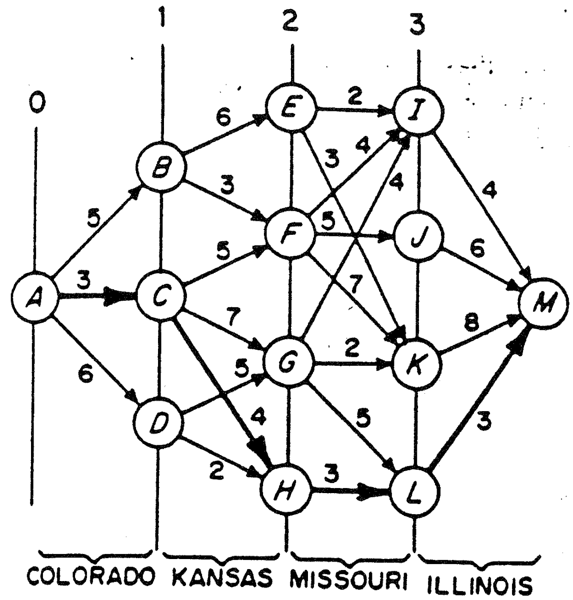


Fig. 25

Da un punto di vista geometrico, una variabile di scarto permette di individuare il semipiano rappresentato dal vincolo ad essa associato; più precisamente vale zero sulla retta origine del semipiano, ed è positiva all'interno del semipiano. Così ogni punto interno alla regione ammissibile è caratterizzato dalla positività di tutte le variabili del problema (di decisione e di scarto); ogni punto di frontiera, con esclusione dei vertici è caratterizzato dall'annullarsi di una variabile (di decisione o di scarto), mentre ogni vertice è caratterizzato dall'annullarsi di due variabili.

Mettiamo infine in evidenza un diverso significato che possono assumere le variabili di scarto in corrispondenza di disuguaglianze espresse nella forma "$\geqslant$". Nel problema della dieta esposto in 4.2, $12x_1 + 12x_2 + 40x_3 + 60x_4$ rappresenta il numero di proteine presenti



No. of Stages	Shortest Route is ACHLM	With a Score of 13
4	ACHL CHLM	
3	ACH CHL HLM	
2	AC CH HL LM	

Figure 3 Alternative interstate highway routes showing construction cost as they pass through various states.

M). Examining the three-stage routes and the two-stage routes, we see that all subpolicies contained in the shortest route are optimal.

Bellman's Principle of Optimality

The phenomena just observed has been developed by Bellman[1] in the form of a theorem or general principle:

A policy is optimal if, at a stated period (stage), whatever the preceding decisions may have been, the decision still to be taken constitutes an optimal policy when the result of the previous decisions is included.

Bellman's statement seems obvious; that is, an optimal policy must contain only optimal subpolicies. Suppose we take away a subpolicy from an optimal policy. If this subpolicy were not optimal, a better one would exist which, if added to the remaining part of the policy being considered, would improve the latter. This deduction is contrary to the hypothesis.

Although this highway construction network is small enough for one to guess with reasonable accuracy the shortest route, let us develop a

[1] Richard Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

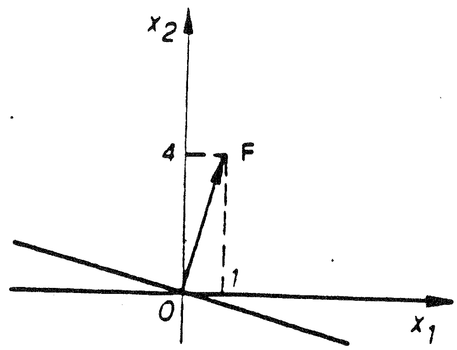


Fig. 24

Conseguentemente, riferendoci ai due problemi trattati, il valore minimo di K si otterrà in corrispondenza della prima retta di livello che, a partire dalla origine, incontra la regione ammissibile.

La soluzione ottima del problema B) è data quindi dal vertice $D = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$, a cui corrisponde il valore minimo $K = \frac{9}{2}$; analogamente il valore massimo di K si otterrà in corrispondenza dell'"ultima" retta di livello che, a partire dall'origine incontra la regione S.

Al crescere di K, le rette di livello intersecano sempre la regione ammissibile S; esprimeremo ciò dicendo che il problema A) non ammette soluzioni ottime.

Se nei problemi A) e B) sostituiamo la funzione obiettivo con $-x_1 - 4x_2$, si ottiene $F = (-1, -4)$; le rette di livello coincidono con le precedenti, ma muovendo adesso le rette dall'origine verso la regione ammissibile, si ottengono valori decrescenti di K. Di conseguenza si ha, in corrispondenza del vertice $D = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$, la soluzione ottima del problema A), mentre il problema B) non ammette soluzioni ottime.

Osserviamo che quando il problema ha soluzioni ottime, una di esse coincide sempre con un vertice. Questa proprietà, come vedremo, è alla base di tutti i metodi proposti per la risoluzione di un problema di programmazione lineare.

4 - 4 LE VARIABILI DI SCARTO

Riprendiamo in esame i vincoli del problema di massimo profitto esposto in 4.1 ovvero il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 10 \quad ; \quad 10x_1 + 20x_2 \leqslant 180 \\ 8x_1 + 4x_2 \leqslant 56 \quad ; \quad x_1 \ , \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

La somma $x_1 + x_2$ rappresenta il numero di settimane lavorative necessarie per produrre x_1 unità dell'articolo A e x_2 unità dell'articolo B; di conseguenza $y_1 = 10 - (x_1 + x_2)$ rappresenta il numero di settimane lavorative ancora disponibili.

L'introduzione della variabile y_1 permette di scrivere il vincolo $x_1 + x_2 \leqslant 10$, nella forma

$$x_1 + x_2 + y_1 = 10 \quad ; \quad y_1 \geqslant 0$$

Analogamente

$$y_2 = 180 - (10x_1 + 20x_2) \quad ; \quad y_3 = 56 - (8x_1 + 4x_2)$$

rappresentano rispettivamente i chilogrammi di materia prima e di materiale complementare ancora disponibili, in corrispondenza della decisione $(x_1, x_2) \in S$.

Il sistema dei vincoli può equivalentemente essere scritto nella forma:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 10 \quad ; \quad 10x_1 + 20x_2 + y_2 = 180 \\ 8x_1 + 4x_2 + y_3 = 56 \quad ; \quad x_1 \ , x_2 \geqslant 0 \ ; \ y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

systematic method for arriving at the shortest route for use with larger networks where the optimal answer is not so obvious. We start by assigning the notation x_0, x_1, x_2, x_3, and x_4 to the decision variables connected with each of the states as shown in Figure 4. These decision variables do not initially have a number assigned but would be defined at each stage by an appropriate vertex on the same vertical line as the decision variable. For example, x_2 can be represented by E, F, G, or H. For our example problem, the decision variables can be the collection of vertices as follows:

x_0: A
x_1: B, C, D
x_2: E, F, G, H
x_3: I, J, K, L
x_4: M

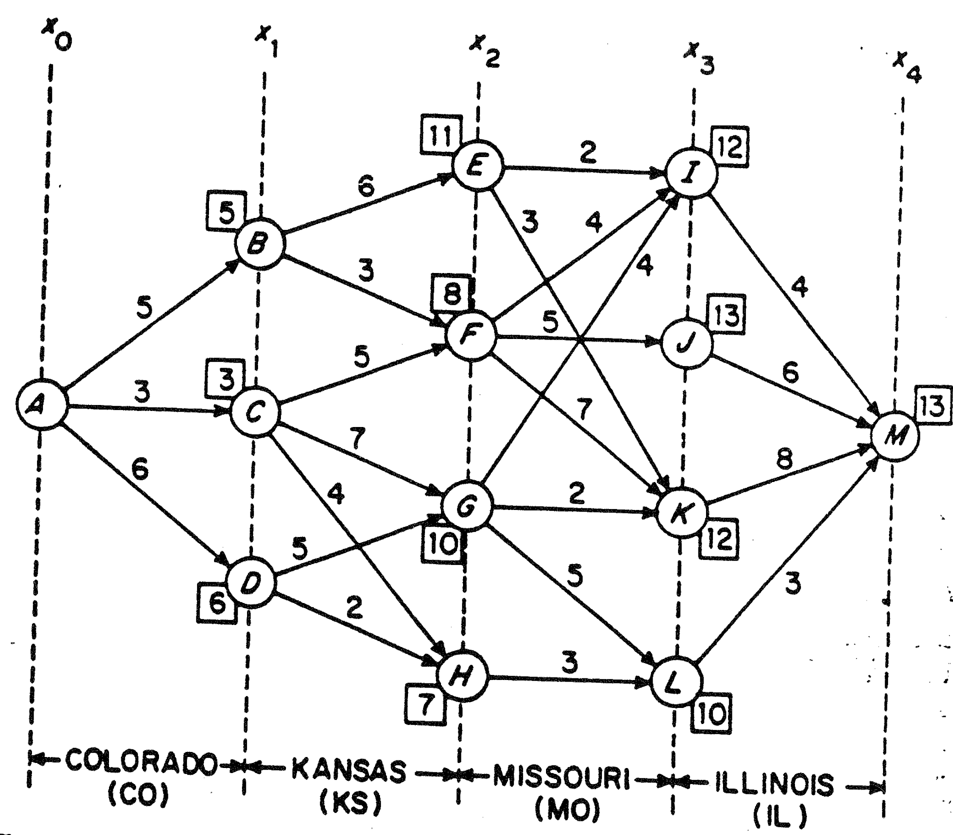


Figure 4. Network represents the alternatives for planning the interstate highway system in the midwest. Numbers associated with each arc represent the cost of construction with the low-order digits dropped.

la cui regione ammissibile è rappresentata in figura 23

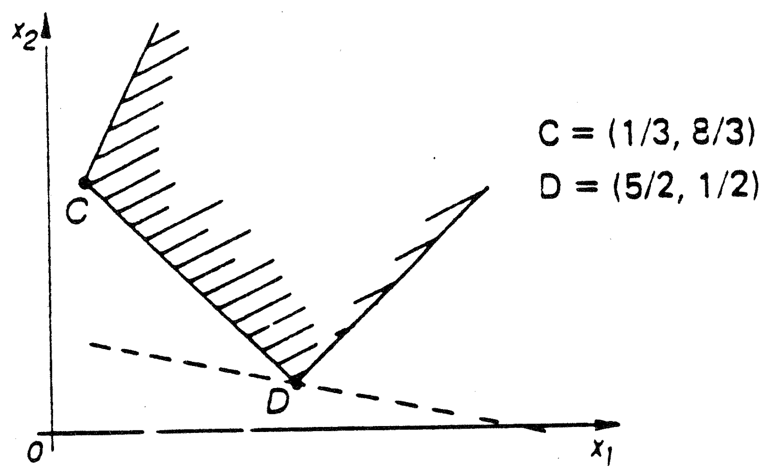


Fig. 23

Nell'esempio precedente avevamo individuato la soluzione ottima del problema attraverso le linee di isoprofitto; tali linee permettono di avere una rappresentazione della funzione obiettivo nel piano delle variabili x_1 e x_2, la quale sostituisce efficacemente il grafico della funzione obiettivo, contenuto nello spazio a tre dimensioni. Volendo procedere in modo analogo, si rappresentano le rette

$$x_1 + 4x_2 = K$$

cercando di individuare il valore massimo o minimo che può assumere K attraverso le intersezioni di tali rette con la regione ammissibile S.

Per rappresentare le rette di livello possiamo operare nel seguente modo: si considera il punto F = (1,4) le cui componenti sono i coefficienti della funzione obiettivo. Le rette di livello risultano perpendicolari al vettore $\vec{OF}$ ed inoltre, muovendo le rette nel verso della freccia (vedi fig. 24) il valore del parametro K aumenta.

b) la richiesta giornaliera può essere superata tranne che per le calorie?

2. Una compagnia internazionale produce televisori in due fabbriche, una in Olanda con una capacità di 100 apparecchi alla settimana, ed una in Inghilterra, con una capacità di 200 apparecchi alla settimana.

La compagnia vende in quattro paesi: Olanda, Inghilterra, Germania e Danimarca, con un massimo di vendita rispettivamente di 75, 100, 100 e 30 apparecchi per settimana. Il profitto per unità, dato nella sottostante tabella, differisce a seconda del luogo di produzione e del paese nel quale i televisori sono venduti, a causa della differenza dei costi, dei trasporti, dei prezzi di vendita e dei costumi del paese.

PROFITTI IN UNITA' DA L. 1000

	OLANDA	INGHILTERRA	GERMANIA	DANIMARCA
OLANDA	80	--	20	20
INGHILTERRA	116	144	76	148

La compagnia può usare interamente, parzialmente o per nulla la capacità di entrambe le fabbriche e può lasciare insoddisfatta, sen- nessuna perdita, la richiesta in ogni paese.

Si cerca di collocare la capacità produttiva delle due fabbriche sopra i quattro mercati in modo da massimizzare il profitto totale.

3. Una piccola fabbrica di mobili produce due diversi tipi di articoli: tavoli e scaffali. Il legno deve essere opportunamente tagliato da macchine ed in totale sono disponibili al giorno 6 ore di funzionamento delle macchine. Ogni tavolo richiede 1 ora di macchina e ogni scaffale ne richiede 2.

La fabbrica, inoltre, ha a disposizione giornalmente 10 ore di nella mistura alimentare; di conseguenza

$y_1 = (12x_1 + 12x_2 + 40x_3 + 60x_4) - 20$ rappresenta l'eccedenza di proteine rispetto al fabbisogno minimo.

Il vincolo $12x_1 + 12x_2 + 40x_3 + 60x_4 \geq 20$ può essere equivalentemente rappresentato da

$$12x_1 + 12x_2 + 40x_3 + 60x_4 - y_1 = 20 \;\; ; \;\; y_1 \geq 0$$

In modo analogo si rappresentano i restanti vincoli del problema.

ESERCIZI

1. La seguente tabella, relativa a sei alimenti, mostra la quantità di calorie, proteine, calcio e vitamina A contenuta in un etto di essi, il relativo costo e la richiesta giornaliera per persona.

	CONTENUTI E COSTO PER ETTO						RICHIESTA GIORNALIERA
	PANE	CARNE	PATATE	CAVOLO	LATTE	GELATINA	
CALORIE	250	291	63	9	61	345	3000
PROTEINE	7	14	1,5	0,5	3	8,5	70 (gr.)
CALCIO	83	8	8,28	8,28	107	--	800 (mg.)
VITAMINA A	—	—	14	170	144	--	500 (I.U.)
COSTO	100	700	10	15	0,45	70	

Determinare in che quantità gli alimenti devono essere acquistati per coprire esattamente la richiesta giornaliera in modo da avere il minimo costo.

Come si può modificare il modello se:

a) la richiesta giornaliera può essere superata?

Il costo di conversione è rispettivamente di L. 60.000 per il processo I e L. 30.000 per il processo II.

Inoltre sono disponibili 40 uomini e 4 t di olio grezzo al giorno.

Determinare il miglior piano di produzione dell'industria sapendo che il prezzo di vendita di A è di L. 285.000 e quello di B di L. 105.000.

6. Sia data un'area di 50 acri di terreno che l'Autorità locale deve utilizzare ad uso residenziale e ci siano due diversi tipi di abitazioni costruibili che indicheremo con A e B. La densità del tipo A è di 10 unità per acro, quella del tipo B è invece di 5 per acro.

Ciascuna abitazione costa rispettivamente L. 2.000 per il tipo A e L. 6.000 per il tipo B. I fondi a disposizione dell'Autorità locale sono di L. 1.200.000. Il valore tassabile delle abitazioni di tipo A è di L. 190 per unità, di L. 470 per unità quelle del tipo B.

Determinare la quantità di case di ogni tipo al fine di massimizzare il valore imponibile per l'Autorità locale.

7. Un negozio di elettrodomestici dispone di un servizio assistenza per le riparazioni degli apparecchi venduti ai clienti. In un certo periodo, oltre al normale lavoro, vi è un'eccedenza nelle riparazioni di 16 radio, 7 televisori e 27 giradischi. Il proprietario del negozio non vuole ritardare le consegne per mantenere buone relazioni con i clienti e decide di impiegare temporaneamente due tecnici A e B, i quali devono svolgere almeno il servizio di riparazione in eccedenza. In una giornata lavorativa i due tecnici possono riparare rispettivamente 3 radio, 1 televisore, 3 giradischi e 2 radio, 1 televisore, 5 giradischi e richiedono L. 15.000 e L. 12.000 giornaliere.

Per quanti giorni (o frazioni di giorno) A e B devono essere impiegati dal proprietario in modo che quest'ultimo minimizzi il costo lavoro d'uomo per tingere e lucidare. Ogni tavolo richiede 2 ore di lavoro ed ogni scaffale 3 ore.

Ogni tavolo viene venduto con un profitto di L. 16.000 ed ogni scaffale con un profitto di L. 30.000.

Quanti prodotti di ogni tipo debbono essere fabbricati per ottenere il massimo profitto?

4. Un'officina di riparazioni auto ha bisogno mensilmente di 400 barattoli di vernice e la provvista viene fatta per tre diversi colori.

Il costo di ogni barattolo è il seguente:

	COLORE	COSTO AL BARATTOLO
x_1	BLU	L. 4.000
x_2	GRIGIO	L. 4.500
x_3	NERO	L. 4.250

$$\begin{cases} \min 4000x_1+4500x_2+42\dots \\ x_1+x_2+x_3=400 \\ x_1=80 \\ x_2\leq 160 \\ x_3\geq 40 \end{cases}$$

Il lavoro di riparazione richiede almeno 80 barattoli di tinta grigia, non più di 160 barattoli di quella blu e almeno 40 di quella nera.

Quanti barattoli di ogni colore devono essere acquistati per minimizzare la spesa totale?

5. Una industria è dotata di due processi di raffinamento: il I con una capacità di 2 t di olio grezzo al giorno ed il II con una capacità di 3 t al giorno.

Il processo I richiede 20 uomini per convertire una tonnellata di olio grezzo in $\frac{3}{4}$ t di A e $\frac{1}{4}$ t di B, mentre il processo II richiede 10 uomini per convertire una tonnellata di olio grezzo in $\frac{1}{4}$ t di A e $\frac{3}{4}$ t di B.

9. Una compagnia acquista della merce durante alcuni mesi e la vende negli altri mesi.

Il prezzo di mercato per la vendita o l'acquisto è, per tonnellata, di L. 70.000, L. 90.000, L. 80.000, L. 140.000 rispettivamente nei mesi di Gennaio, Febbraio, Marzo ed Aprile.

Il costo mensile di magazzino è di L. 10.000 per tonnellata e non si possono immagazzinare più di 20 tonnellate per volta. Assumiamo che l'acquisto come pure la vendita sia fatto all'inizio del mese, e che nessun deposito di merce ci sia all'inizio di Gennaio; inoltre non si vuole nessun deposito di merce alla fine di Aprile.

Determinare la miglior politica di compra–vendita.

10. In una città, una rete di autobus arriva alle stazioni A,B,C, queste stazioni sono unite da una rete di metropolitane; più precisamente A è collegata con B e C, B è collegata con C e tutte sono collegate con D. Gli autobus arrivano alle stazioni alle ore 9 e da A parte una metropolitana alle ore 9,05. La capacità di quest'ultima è di 600 passeggeri e tutti quelli che prendono tale mezzo arrivano in tempo al lavoro.

Gli altri lavoratori devono usare dei mezzi alternativi con un costo di L. 500 al giorno, mentre il costo della metropolitana è di L. 100 per i collegamenti con le stazioni adiacenti. Gli arrivi dei passeggeri con gli autobus alle stazioni e le loro destinazioni sono riportati nella seguente tabella:

		DESTINAZIONI		
		B	C	D
ARRIVI	A	500	300	100
	B	---	100	400
	C	---	---	300

$$\begin{cases} \max 20\,000 x_1 + 6000 x_2 \\ 8x_1 + 2x_2 \le 200 \\ 4x_2 + 3x_2 \le 100 \\ 2x_1 \le 50 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

della loro mano d'opera?

8. Un'industria ha cessato la produzione di un certo ramo che non procurava utili e ciò ha portato ad avere un eccesso di capacità. La direzione sta considerando la possibilità di spostare questa capacità eccedente ad uno o due prodotti che indicheremo con 1 e 2. Nella tabella seguente è riassunta la capacità delle macchine che potrebbe limitarne la produzione.

TIPO DI MACCHINA	TEMPO DISPONIBILE (in ore per settimana)
Rettificatrice	200
Tornio	100
Fresa	50

Il numero di ore di macchina richieste per ciascuna attività dei due prodotti è data qui di seguito

PRODUTTIVITA'
(in ore di macchina per unità)

tipo di macchina	Prodotto 1	Prodotto 2
Rettificatrice	8	2
Tornio	4	3
Fresa	2	–
	x_1	x_2

Il profitto unitario sui prodotti 1 e 2 è rispettivamente di L. 20.000 e L. 6.000.

Costruire un modello che determini quanto dei due prodotti la ditta dovrebbe produrre per massimizzare il profitto.

13. Con riferimento all'esercizio 3: a) rappresentare geometricamente la regione ammissibile S;
b) rappresentare in termini del problema i seguenti punti (1,1), (0,3), (3,1), (6,0), (2,4), (5,0);
c) dire se le seguenti curve di livello sono compatibili o no con il problema:

$$16x + 30y = 46 \;;\; 16x + 30y = 82 \;;\; 16x + 30y = 150 \;;\; 16x + 30y = 210;$$

d) risolvere il problema geometricamente, specificando nella s.o. se e quali risorse rimangono disponibili.

14. Con riferimento all'esercizio 5: a) rappresentare geometricamente la regione ammissibile S;
b) interpretare in termini del problema i seguenti punti: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, (0,3), (2,1), (2,3), $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$;
c) dire se le seguenti curve di livello sono compatibili o no con il problema:

$$180x_1 + 120x_2 = 300 \;;\; 180x_1 + 120x_2 = 450 \;;$$
$$180x_1 + 120x_2 = 720 \;;\; 180x_1 + 120x_2 = 360 \;;$$

d) risolvere il problema geometricamente, specificando nella s.o. se e quali risorse rimangono disponibili.

15. Con riferimento all'esercizio 6: a) rappresentare geometricamente la regione ammissibile;
b) interpretare in termini del problema i seguenti punti (100, 100), (0, 200), (0, 250), (300, 100);
c) dire se le seguenti curve di livello sono o no compatibili con il proble-

Come deve essere organizzata la distribuzione dei passeggeri sulla metropolitana in modo da minimizzare il costo totale per tutti i passeggeri?

11. Una ditta che produce fogli di carta di ampiezza 82 cm. ha ricevuto i seguenti ordini:

60 metri di ampiezza 58 cm.
84 metri di ampiezza 26 cm.
72 metri di ampiezza 24 cm.

Gli acquirenti non necessitano di un rotolo unico di carta, l'importante è che la lunghezza totale della carta sia quella desiderata.

Come deve essere tagliata la carta in modo che ci sia il minimo spreco?

12. In una certa struttura (vedi fig. 26) i cavi C_1, C_2 e C_3 possono portare ognuno un peso di 100 kg. ed i cavi C_4, C_5 e C_6 ognuno un peso di 50 kg.

Dei pesi sono appesi nei punti R, S e T; qual'è il massimo carico totale che la struttura può portare?
(Si ignori il peso della struttura stessa).

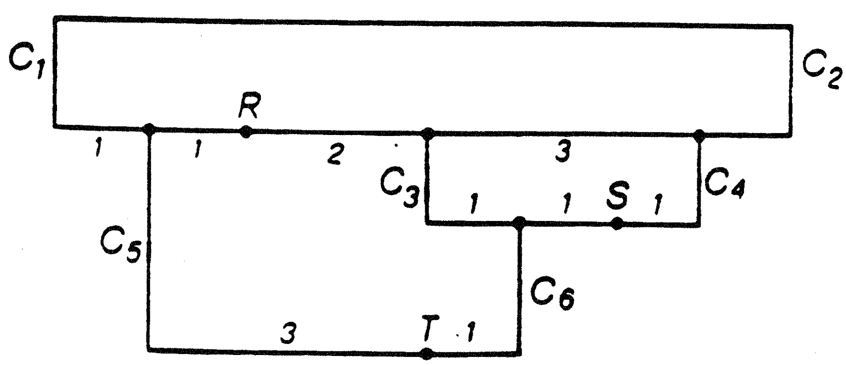


Fig. 26

lvere il problema geometricamente, specificando nella s.o., se e
isorse rimangono inutilizzate.

. Risolvere geometricamente i seguenti problemi specificando
ieme S° delle soluzioni ottime è un punto, un segmento, una semi-
d è vuoto.

$$\begin{cases} \min -5x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \;,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \min \; 5x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 \;,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max 2x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + \frac{3}{2}x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 \;,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \max x_1 - 3x_2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \;,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \max \; x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \;,\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

f) $$\begin{cases} \max 3x_1 - x_2 \\ 4x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 \leq \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \;,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ma:

$$190x_1 + 470x_2 = 40.000 \ ; \ 190x_1 + 470x_2 = 114.000 \ ;$$
$$190x_1 + 470x_2 = 151.000 \ ; \ 190x_1 + 470x_2 = 104.000 \ ;$$

d) risolvere il problema geometricamente, specificando nella s.o. se e quali risorse rimangono inutilizzate.

16. Con riferimento all'esercizio 7: a) rappresentare geometricamente la regione ammissibile;
b) interpretare in termini del problema i seguenti punti (0,7), (1,1), $(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$, (4,3), (8,8) ;
c) dire se le seguenti curve di livello sono o no compatibili con il problema:

$$15x_1 + 12x_2 = 84 \ ; \ 15x_1 + 12x_2 = 90 \ ; \ 15x_1 + 12x_2 = 108 \ ;$$
$$15x_1 + 12x_2 = \frac{636}{5} \ ;$$

d) risolvere il problema geometricamente, specificando nella s.o., se e quali risorse rimangono inutilizzate.

17. Con riferimento all'esercizio 8: a) rappresentare geometricamente la regione ammissibile;
b) interpretare in termini del problema i punti

$$(0, \frac{100}{3}), (20,20), (25,0), (10,15), (20,50);$$

c) dire se le seguenti curve di livello sono o no compatibili con il problema:

$$20x_1 + 6x_2 = 260 \ ; \ 20x_1 + 6x_2 = 200 \ ;$$
$$20x_1 + 6x_2 = 500 \ ; \ 20x_1 + 6x_2 = 700 \ ;$$

Dato il seguente sistema di vincoli

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 0 \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ 4x_1 + x_2 \geqslant 5 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Associare ad esso una f.o. in modo che il problema lineare di così ottenuto

abbia come s.o. il punto $A = (0,5)$

abbia come s.o. il punto $B = (1,1)$

non abbia soluzioni ottime.

19. Risolvere graficamente il seguente problema e successivamente modificare la funzione obiettivo in quattro modi diversi in modo che la soluzione ottima non sia unica.

$$\begin{cases} \min -x_2 \\ \quad x_1 + x_2 \geqslant 1 \;;\; x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ \quad x_1 + x_2 \leqslant 2 \;;\; x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ \quad x_1 \,,\, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

20. Introdurre le variabili di scarto nei problemi 1—12 e per ognuno darne il significato in termini del problema.

21. In fig. 27 a) e 27 b) sono rappresentate le regioni ammissibili di due problemi di P.L. con la relativa curva di livello (il verso della freccia indica la direzione di decrescenza).

a) Scrivere la funzione obiettivo ed i vincoli.

b) Risolvere geometricamente i problemi associati.

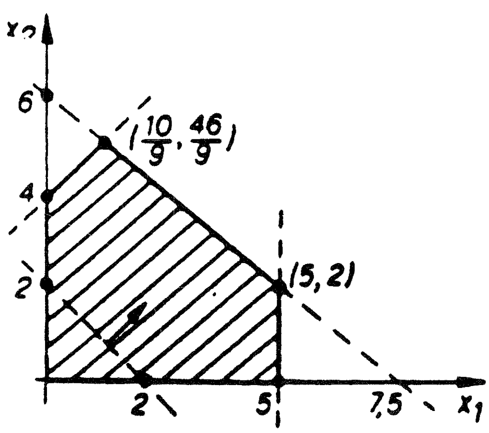


Fig. 27 a

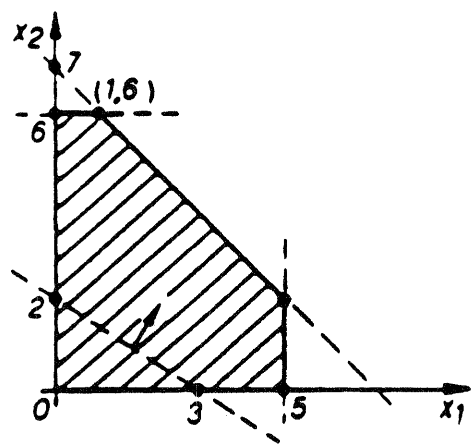


Fig. 27 b

3. Dimostrare che un sistema di m equazioni lineari $Ax = b$ può essere trasformato nel seguente sistema di m + 1 diseguaglianze:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = 1, \ldots\ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right) x_j \geq -\sum_{i=1}^{m} b_i$$

4. Trasformare il problema

$$\begin{cases} \min -4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \quad 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 8 \\ \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ \quad -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 4 \end{cases}$$

nella forma (*) in modo che compaiano solo 4 variabili.

5. Mostrare che i vincoli del problema

$$\begin{cases} \min \; x_1 - 3x_2 \\ \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ \quad x_1 - x_4 = 7 \\ \quad x_2 + x_5 = 17 \\ \quad x_i \geq 0 \text{ per } i = 1, \ldots\ldots, 5 \end{cases}$$

possono essere trasformati in vincoli di disuguaglianza nelle variabili x_1 e x_2. Usare quest'ultima formulazione per risolverlo graficamente.

(*)
$$\begin{cases} \max \langle c, x \rangle \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ESERCIZI

(*) apparire (**)

Convertire i seguenti problemi nella forma standard

$$\begin{cases} \min -x_1 -4x_2 -x_3 \\ 2x_1 -2x_2 +x_3 = 4 \\ x_1 \quad -x_3 = 1 \\ x_2 , x_3 \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \min 8x_1 +4x_2 +6x_3 \\ 5x_1 -3/5x_2 +1/5x_3 = 7 \\ 4x_1 +3x_2 +2x_3 = 5 \\ -x_1 +2x_2 +3x_3 = 8 \\ x_1 , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min -3x_1 +2/5x_2 -2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 -2x_2 + 5x_3 \geq 5 \\ 4x_1 +1/5x_2 +7x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \min (-5x_1 -3x_2 -2x_3) \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 15 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 \leq 0 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min -5x_1 - x_2 -2x_3 -3x_4 \\ 3/5x_1 + 5x_2 + 1/5x_3 + 4x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 8 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Trasformare il seguente problema in un problema lineare in forma standard:

$$\begin{cases} \min |x|+|y|+|z| \\ x + y \leq 1 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max \langle c, x \rangle \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (**) \begin{cases} \min \langle c, x \rangle \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

10. Dato il seguente sistema

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 \leq 28 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Trasformarlo in forma standard e successivamente dire giustificando la risposta quali dei seguenti punti sono soluzioni ammissibili, di base, di base ammissibile:
(−2,0,42,0,−6), (4,0,0,6,0), (2,1,15,3,0), (0,3,31,−12).

11. Dimostrare che in un programma lineare la regione ammissibile S e l'insieme delle soluzioni ottime S° sono insiemi convessi.

12. Dati i seguenti problemi lineari

$$\begin{cases} \min -5x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 5x_1 - x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 7 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) risolverli geometricamente determinando due s.b.o.
b) determinare una s.o. non di base.

13. Dato il poliedro limitato S di vertici A = (0,0), B = (4,0), C = (8,4), D = (6,10), E = (1,8) determinare un punto interno ad S.

Dati i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = 3 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

determinare la soluzione che ha in base le variabili (x_1, x_4).

Determinare tutte le soluzioni di base dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_2 - 2x_4 = -5 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Per ognuno dei seguenti sistemi di disuguaglianza

a) determinare graficamente i vertici

b) indicare quali sono le variabili di base e quelle non di base associate ai vertici

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ x_1 \leqslant 2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ +2x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \leqslant 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 1 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 3 \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 5 \\ 4x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Con riferimento alle regioni ammissibili definite dai sistemi dell'esercizio 8, introdurre le variabili di scarto ed elencare tutte le soluzioni di base, ammissibili e no.

essere adibita alla produzione di n prodotti. Sia d_{ij} il tempo richiesto dalla macchina i per ottenere una unità del prodotto j; x_{ij} il numero delle unità di j prodotte da i in un certo intervallo di tempo (mese, anno...); a_i il tempo disponibile sulla macchina i; b_j il numero di unità del prodotto j che devono essere fabbricate e c_{ij} il costo di produzione di una unità di j prodotta dalla macchina i.
Si determini un'assegnazione delle m macchine agli n prodotti in modo che sia minimo il costo totale di produzione.

Supponiamo di disporre di n alimenti e che per una dieta equilibrata sia necessaria una certa quantità di m sostanze nutritive. Sia a_{ij} il numero di unità della sostanza nutritiva i presente in una unità dell'alimento j; b_i il numero minimo di unità della sostanza nutritiva i necessario giornalmente; c_j il costo di un'unità dell'alimento j.
Determinare una dieta che tenga conto delle esigenze nutritive e che sia di minimo costo totale.

Per produrre un determinato articolo A occorrono k_1 unità del prodotto semidefinito $B_1, \ldots\ldots, k_n$ unità del prodotto semidefinito B_n. Vari centri di lavorazione sono in grado di lavorare i vari prodotti $B_1, \ldots\ldots, B_n$. Per le caratteristiche tecniche i vari centri si distinguono in m tipi $A_1, \ldots\ldots, A_m$.
Sia c_i il numero di centri di tipo A_i e a_{ij} le unità di B_j prodotte da A_i. Per considerazioni di carattere economico, occorre che ogni centro di lavorazione realizzi uno solo dei prodotti semidefiniti.
Determinare un piano di produzione che massimizzi la produzione dell'articolo A, assegnando ad ogni centro la realizzazione di un solo prodotto semidefinito.

ia a_i la quantità di uno stesso prodotto disponibile presso il ıagazzino M_i, $i = 1,.....,m$ e sia b_j la domanda del prodotto a parte della località B_j, $j = 1,.....,n$. Conoscendo il costo uniario di trasporto c_{ij} da M_i a B_j, si determini un piano di dis:ribuzione che soddisfi la domanda delle varie località e che ıinimizzi il costo totale di trasporto.

Ina compagnia aerea dispone di N_1 automezzi del tipo M_1, $_2$ automezzi del tipo $M_2,.....,N_k$ automezzi del tipo M_k, che ev^ ^distribuire su n percorsi $P_j (j = 1,.....,n)$. Essendo noti:

- a_{ij} capacità mensile di carico dell'automezzo di tipo M_i sul percorso P_j;
- c_{ij} costo operativo per unità di carico dell'automezzo di tipo M_i sul percorso P_j;
- c_j Il carico totale minimo relativo al percorso P_j ,

eterminare una distribuzione dei vari automezzi sui percor· in modo da minimizzare il costo operativo totale.

na società dispone di m fabbriche situate in varie località. prodotto finito viene trasportato in n punti di vendita. Sia la ^apacità produttiva annua della fabbrica i; b_j la domanda ınua del punto di vendita j; c_{ij} il costo di trasporto di una ıità del prodotto della fabbrica i al punto di vendita j e k_i costo di produzione di una unità del prodotto nella fabbrica

a società vuole assegnare la produzione alle varie fabbriche modo da minimizzare il costo totale consistente sia nel coo totale di produzione che del costo totale di trasporto.

na fabbrica dispone di m macchine ciascuna delle quali può

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ -1/2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} ;$$

e)
$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 1/2x_2 \leqslant 15 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \max\ 4x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} ;$$

g)
$$\begin{cases} \min -3x_1 - 6x_2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 3 \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 9 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \leqslant 2 \\ 6x_1 - x_2 - 6x_3 \leqslant 2 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases} ;$$

i)
$$\begin{cases} \max\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 40 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \min -6x_1 - 2x_2 - 10x_3 - 8x_4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leqslant 25 \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 \leqslant 20 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leqslant 10 \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1,\ldots,4 \end{cases} ;$$

m)
$$\begin{cases} \max\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_3 + x_4 \leqslant 5 \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1,\ldots,4 \end{cases} ;$$

/

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} ;$$

o)
$$\begin{cases} \max -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 5 \leqslant 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 20 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ -x_1 - x_2 - x_4 \leqslant 5 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

ESERCIZI cap VI

vi sono le soluzioni.

1) Seguendo la linea esposta in (CAP. 12), risolvere i seguenti problemi:

a) $\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \leqslant 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 1 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 2 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \max\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 4 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \max\ 6x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

2) Risolvere i precedenti problemi usando tabelle del Simplesso.

3) Risolvere con l'algoritmo del simplesso i seguenti problemi:

a) $\begin{cases} \max\ x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 3x_1 + 4x_2 \leqslant 15 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \max\ 5/2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \max\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ -1/2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	−7	0	0	0	0	−1	−2
x_1	2	1	0	0	−2	2	0
x_2	4	0	1	0	−3	5	−2
x_3	1	0	0	1	−5	1	−3

s. ammissibile

determinare una s.a. che faccia assumere alla f.o. valore $z = -63$;

determinare una s.o. che abbia $x_4 = 72$.

Data la tabella relativa ad un problema di massimo

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	−6	0	0	0	0	−2	−3
x_1	3	1	0	0	−1	1	−1
x_2	2	0	1	0	−2	2	0
x_3	1	0	0	1	−6	5	−5

determinare una s.a. che faccia assumere alla f.o. valore $z = -54$;

determinare una s.o. che abbia $x_4 = 64$.

Date le seguenti tabelle relative ad un problema di massimo, fornire la rappresentazione del problema nello spazio delle variabili non di base:

a)

	0	−2	3	−3	0	0	0
x_4	1	3	1	0	1	0	0
x_5	2	−2	2	1	0	1	0
x_6	3	0	−1	2	0	0	1

; b)

	3	0	0	0	−1	0
x_2	3/2	−2	1	0	1/2	0
x_3	0	7	0	1	−2	0
x_5	14	7	0	0	1	1

)
$$\begin{cases} \min -4x_1 - 7x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 10 \\ x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \ge 0 \end{cases}$$
;

q)
$$\begin{cases} \max 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 6x_5 \le 100 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 \le 50 \\ 0 \le x_i \le 6 \qquad i = 1, \ldots\ldots, 5 \end{cases}$$

)
$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 - x_3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \le 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \le 1 \\ x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \ge 0 \end{cases}$$
;

s)
$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_2 \le 6 \\ x_2 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \\ x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 \le 20 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \le 12 \\ x_i \ge 0 \qquad i = 1, \ldots\ldots, 4 \end{cases}$$

Dati i problemi

$$\begin{cases} \max -2x_1 - 5x_2 \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 30 \\ -24x_1 + 14x_2 \ge 33 \\ x_1 \;,\; x_2 \ge 0 \end{cases}$$
;
$$\begin{cases} \max -5x_1 - 2x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \ge 30 \\ 14x_1 - 24x_2 \ge 33 \\ x_1 \;,\; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

le cui s.o. sono rispettivamente (5/4,9/2) e (9/2,5/4), costruire per essi le tabelle finali del simplesso.

Data la tabella relativa ad un problema di massimo:

	−46/13	0	0	0	−10/13	−4/13
x_3	34/13	0	0	1	4/13	−1/13
x_1	64/13	1	0	0	6/13	5/13
x_2	28/13	0	1	0	1/13	3/13

determini una soluzione di base (non ottima) che sia miglio-
: di ogni altra soluzione di base (non ottima).

i consideri il problema: max $3x_1 - x_2$, con i vincoli

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geqslant 3 \\ 10x_1 - 9x_2 \leqslant 1 \\ 18x_1 - 6x_2 \leqslant 29 \\ 6x_1 - 3x_2 \leqslant 7 \; ; \; x_1 \, , \, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

lo si risolva geometricamente.
opo aver introdotto le variabili di scarto x_3, x_4, x_5, x_6:

ostruire la tabella del simplesso, relativa al vettore di variabili
ion di base $x_N = (x_4, x_6)$;

lire, utilizzando la tabella, se il vettore ($x_1 = 5/2$, $x_2 = 8/3$)
s.o. del problema dato. Controllare la risposta anche per via
jeometrica;

leterminare una s.o. avente $x_1 = 4$. Risolvere anche per via
jeometrica;

ıttraverso la tabella del simplesso relativa al vettore di variabi-

8) Risolvere con l'algoritmo del Simplesso, a partire dalla s.b.a. che ha come variabili di base (x_5, x_6, x_7), il seguente problema

$$\begin{cases} \max -x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - 4x_5 - 2x_6 - 7x_7 + 5x_8 \\ x_1 + x_2 - 2x_5 + 3x_7 - 3x_8 = 7 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 + 3x_6 - 3x_7 = -5 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_7 - 4x_8 = 9 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, 8 \end{cases}$$

9) Data la seguente tabella relativa ad un problema di massimo

	−3	0	0	0	4	2	−3
x_1	8	1	0	0	8	2	4
x_2	2	0	1	0	3	−1	2
x_3	12	0	0	1	9	3	1

si proceda ad un'iterazione del simplesso in modo da ottenere il massimo incremento possibile nel valore della f.o. Giustificare la risposta.

10) Dato il problema di P.L. e la sua tabella ottima

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 - 4x_2 - x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

dire se esistono s.o. alternative.

Si consideri il problema

$$\begin{cases} \max\ (x_1 - cx_2) \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad = 17 \ ; \quad -x_1 + 2x_2 - x_5 = 5 \\ -2x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 1 \ ; \quad x_i \geq 0,\ i = 1,\dots,5 \end{cases}$$

determinare la tabella del simplesso relativa al vettore di variabili basiche $x_B = (x_1, x_2, x_4)$;

dire se, per $c = 2$, esistono s.o. alternative alla soluzione $x = (x_B, x_N = 0)$; in caso affermativo determinarne una. Giustificare la risposta anche geometricamente;

dire per quali valori di c, $\bar{x} = (4, 9/2, 0, 0, 0)$ è s.o.;

determinare, per $c = 1$, una s.o. non di base per il problema.

Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min\ c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ -3x_1 + 8x_2 + x_3 \qquad = 16 \ ; \quad 3x_1 - 4x_2 + x_5 = 9 \\ 4x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 23 \ ; \quad x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,5 \end{cases}$$

si determini la tabella del simplesso relativa al vettore di variabili di base $\bar{x}_B = (x_1, x_2, x_3)$;

si determini il vettore dei coefficienti ridotti in modo che la soluzione di base $(\bar{x}_B, x_N = 0)$ sia una s.o. ma non unica del problema.

li non di base $x_N = (x_4, x_5)$, si dimostri che l'ultimo vincolo del problema è superfluo.

12) Si consideri la seguente tabella finale del simplesso, relativa ad un problema di massimo:

	−3	0	0	0	−1	0
x_2	3/2	−2	1	0	1/2	0
x_3	0	7	0	1	−2	0
x_5	14	7	0	0	1	1

max

a) dire se esistono s.o. alternative;

b) determinare, se esiste, una soluzione di base ottima rispetto alla quale i coefficienti ridotti risultano strettamente negativi;

c) scrivere il problema di massimo nello spazio delle variabili x_1, x_2 e lo si risolva geometricamente;

d) dare una spiegazione geometrica dei punti a) e b).

13) Data la seguente tabella ottima relativa ad un problema di massimo:

	0	0	0	0	0	−2
x_1	2	1	0	0	−1	1
x_2	0	0	1	0	2	2
x_3	3	0	0	1	0	3

A quale punto della rappresentazione corrisponde la soluzione indicata in (A) ?

Se la soluzione corrente non è ottima, descrivere sulla figura un'iterazione dell'algoritmo del simplesso.

17

Si consideri la seguente tabella relativa ad un problema di massimo:

$-z$	0	b	−3	d	0	0	0
x_4	e	a	1	0	1	0	0
x_5	2	−2	2	c	0	1	0
x_6	3	0	−1	2	0	0	1

Dire per quali valori di a,b,c,d, e :

il problema è impossibile;

$\bar{x} = (0,0,0, e, 2,3)$ è ammissibile ed il problema è illimitato ;

$\bar{x}$ è ammissibile ma non ottima, la variabile x_3 è condizionata ad entrare in base in sostituzione della x_5 ;

$\bar{x}$ è ammissibile ma non ottima, la variabile x_1 è candidata ad entrare in base, ma il suo ingresso in base mantiene inalterata sia la soluzione che il valore della f.o.;

inserendo x_3 in base si ottiene una soluzione di base degenere;

si ponga a = 3, e = 1, b = 2, c = 1, d = 3 e si risolva con il metodo del simplesso.

18

Si consideri la seguente tabella relativa ad un problema di massimo:

Verificare che esistono, a meno di una costante moltiplicativa, due alternative e si dia di ciò una giustificazione geometrica nel piano;

c) Posto $c_1 = -2$ e $c_2 = -1$, si risolva il problema ottenuto dal precedente con l'aggiunta del vincolo $x_1 \leqslant 4$.

16) Data la seguente tabella relativa ad una iterazione qualunque dell'algoritmo del simplesso (sia z da massimizzare)

(A) $-z$	z_0	0	0	0	d	e
x_1	2	1	0	0	a	−3
x_2	3	0	1	0	b	−2
x_3	3	0	0	1	c	0

a) Per quali valori di a,b,c,d,e la soluzione (2,3,3,0,0) è ottima ed unica?

Per quali valori di a,b,c,d,e la soluzione (2,3,3,0,0) è ottima ma non unica?

c) Per quali valori di a,b,c,d,e la f.o. non è superiormente limitata sulla regione ammissibile?

d) Supposto $d > 0$, per quali valori di a,b,c nella tabella successiva, ottenuta applicando il simplesso corrisponde una soluzione di base degenere?

e) Sia $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 1$, $e = -1$. Si rappresenti geometricamente il problema nello spazio delle variabili non di base.

$$x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 2 \quad ; \quad b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\ x_1 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$
$$x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2$$

$$2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4$$
$$x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \quad ; \quad d) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ 6x_1 + x_2 \geqslant 4 \\ -5x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$
$$3x_2 + x_3 + 3x_4 = 1$$

$$x_2 \geqslant 2$$
$$x_2 \geqslant 2$$
$$x_2 \leqslant 1 \quad ; \quad f) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geqslant -1 \\ x_1 \ , x_2 \ , x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$
$$x_2 \geqslant 0$$

$$2x_2 + x_3 \geqslant 1$$
$$+ 2x_3 \geqslant 2$$
$$2x_2 + 3x_3 \geqslant 4 \quad ; \quad h) \begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant -2 \\ x_1 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$
$$x_2 \ , x_3 \geqslant 0$$

$$2x_2 + x_3 \geqslant 4$$
$$x_2 + x_3 \geqslant 5$$
$$3x_2 + 2x_3 \geqslant 6 \quad ; \quad l) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots\ldots, 4 \end{cases}$$
$$0 \quad i = 1,2,3$$

r quali valori di k i seguenti sistemi

ımettono soluzioni,

almeno una soluzione. In questo caso determinare tut-

luzioni dei sistemi:

	z_o	0	0	0	-2	c
x_1	b_1	1	0	0	2	a_1
x_2	b_2	0	1	0	1	a_2
x_3	b_3	0	0	1	-1	a_3

Per quali condizioni sui coefficienti a_i, b_i, c

la soluzione $\bar{x} = (b_1, b_2, b_3, 0, 0)$ risulta ottima e unica;
$\bar{x}$ risulta ottima e non unica;
$\bar{x}$ risulta ottima, non unica e non esistono soluzioni di base ottime alternative;
la f.o. risulta superiormente non limitata;
la soluzione ottenuta con un'iterazione dell'algoritmo del simplesso è degenere.

Si consideri il problema 19

$$\begin{cases} \min c^T x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad\ x \geq 0 \end{cases}$$

dove c è un vettore non nullo. Sia x° una soluzione ammissibile, con $x^\circ > 0$, $Ax^\circ < b$. Dimostrare che x° non può essere una soluzione ottima.

Determinare, utilizzando l'algoritmo del simplesso, una soluzione di base dei seguenti sistemi:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
−13	1	−3	0	−8	1	1	0
−4	0	0	−2	−2	0	1	3
−19	−1	4	0	−10	0	0	2
6	0	0	3	3	0	1	0

$$x_i \geqslant 0 \qquad i = 1,\ldots\ldots,7$$

il vettore $(1,2,1,1,0,0,0)^T$.

to il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_6 \leqslant 7 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + 2x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 \leqslant 12 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 \leqslant 11 \\ x_i \geqslant 0 \qquad i = 1,\ldots\ldots, 6 \end{cases}$$

e se 0, $(1,2,3,0,0,0)^T$ e $(1,2,3,1,0,0)^T$ sono s.b.a.

to il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - 3x_4 + 3x_5 + x_6 = 4 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 5x_4 + 5x_5 + 3x_6 = 7 \\ - x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 + x_6 = -3 \\ x_i \geqslant 0 \qquad i = 1,\ldots,6 \end{cases}$$

4,9,0,3,0,0$)^T$ un vertice? Perché? Se no, è su uno spigo-
Se si, è su uno spigolo limitato o no?

$$\begin{cases} kx_1 + 7x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ kx_1 + 2x_2 + 4x_3 = k \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = k \end{cases}$$

22) Per il sistema

$$\begin{cases} -x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots\ldots, 4 \end{cases}$$

determinare la s.b. che ha come variabili di base (x_1, x_3, x_4).

23) Dato il sistema

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
9	1	1	−2	0	3	1	0	0	0
−6	0	−1	0	−1	−1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	−1	0	0	1	0
1	1	−1	2	2	−3	0	0	0	1
5	2	−1	1	2	−2	1	1	1	1

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots\ldots, 9$$

dire se $(3,2,1,2,2,0,0,0,0)^T$ è una s.b.a.; se no costruirne una a partire da essa.

4) Come l'ex. precedente per il sistema

g) $$\begin{cases} \max\ 2x_1+3x_2+5x_3 \\ 3x_1+10x_2+5x_3 \leqslant 15 \\ 33x_1-10x_2+9x_3 \leqslant 33 \\ x_1+2x_2+x_3 \geqslant 4 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$;

h) $$\begin{cases} \max\ 3x_1-x_2-3x_3+x_4 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1-2x_2+3x_3+3x_4=9 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=6 \\ x_i \geqslant 0 \quad i=1,\ldots\ldots,4 \end{cases}$$;

i) $$\begin{cases} \min\ x_1+6x_2-7x_3+x_4+5x_5 \\ 5x_1-4x_2+13x_3-2x_4+x_5=20 \\ x_1-x_2+5x_3-x_4+x_5=8 \\ x_i \geqslant 0 \quad i=1,\ldots\ldots,5 \end{cases}$$

l) $$\begin{cases} \min\ -3x_1-11x_2-9x_3+x_4+29x_5 \\ x_2+x_3+x_4-2x_5 \leqslant 4 \\ x_1-x_2+x_3+2x_4+x_5 \geqslant 0 \\ x_1+x_2+x_3-3x_5 \leqslant 1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \quad x_i \geqslant 0 \quad i=2,\ldots.,5 \end{cases}$$;

m) $$\begin{cases} \min\ x_6 \\ 2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+2x_4 \leqslant 15 \\ x_1+x_3 \leqslant 5 \\ -9x_1+8x_2+x_3-2x_4-x_6=0 \\ x_i \geqslant 0 \quad i=1,\ldots\ldots,5,\ x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$;

n) $$\begin{cases} \min\ 34x_1+5x_2+19x_3+9x_4 \\ -2x_1-x_2-x_3-x_4 \leqslant -9 \\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4 \leqslant 8 \\ -4x_1+x_2-3x_3-x_4 \leqslant -5 \\ x_i \geqslant 0 \quad i=1,\ldots\ldots,4 \end{cases}$$

27. Dato il problema

$$\begin{cases} \min x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5+2x_6 \\ x_1+x_2+2x_4+x_5+x_7=16 \\ x_2+x_3+x_4+2x_5+5x_7=19 \\ x_1+x_3+x_4+x_5+2x_6+2x_7=13 \\ x_i \geqslant 0 \quad i=1,\dots\dots,7 \end{cases}$$

una cui s.o. è (1,2,3,4,5,0,0), ottenere un s.o. di base da essa.

28. Risolvere con il metodo del simplesso (I e II fase), i seguenti problemi:

a) $\begin{cases} \max -12x_1-8x_2 \\ 6x_1+4x_2 \geqslant 10 \\ 8x_1+3x_2 \geqslant 10 \\ -2x_1+5x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \, , \, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \max 2x_1-3x_2+5x_3 \\ 2x_1-x_2+3x_3 \geqslant 4 \\ x_1+2x_2 \geqslant 6 \\ 3x_1-x_2+2x_3 \leqslant 7 \\ x_i \geqslant 0 \quad i=1,2,3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \min 8x_1+6x_2-11x_3 \\ x_1-x_2-2x_3 \geqslant 6 \\ 2x_1+x_2-3x_3 \geqslant 5 \\ x_i \geqslant 0 \quad i=1,2,3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \max 8x_1+15x_2 \\ 2x_1+x_2 \geqslant 16 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 6 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 10 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \min 6x_1+4x_2 \\ 5x_1+x_2 \geqslant 10 \\ x_1+x_2 \geqslant 6 \\ x_1+4x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \, , \, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} \min 2x_1+3x_2 \\ x_1+x_2 \leqslant 6 \\ 3x_1+5x_2 \geqslant 15 \\ 4x_1+x_2 \geqslant 8 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 4; 0 \leqslant x_2 \leqslant 3 \end{cases}$;

Per ogni unità di lunghezza è ottenuto il seguente profitto:

DA	A	B	C	D
PROFITTO	3	5	4	1

Come deve essere usato il materiale per massimizzare il profitto totale?

Formulare e risolvere i seguenti problemi:

Una ditta fabbrica due prodotti A e B, utilizzando tre tipi di materiale grezzo I,II,III. Per produrre un'unità del prodotto A, la ditta utilizza 2 unità del I materiale grezzo, 1 unità del II e 0 unità del III, per produrre invece un'unità del prodotto B utilizza 1 unità del I materiale grezzo, 2 unità del II ed 1 unità del III.

Inoltre sappiamo che per ogni unità del prodotto A o B la ditta guadagna L. 1.000.000 e che la tecnologia di produzione è lineare.

Sono disponibili per la produzione rispettivamente 8,7,3 unità del I,II,III materiale grezzo.

Determinare un piano di produzione compatibile con le risorse e che dia il massimo guadagno possibile.

Una fabbrica produce automobili e autocarri in 4 reparti:

A stampa del modello, B reparto di montaggio del motore, C reparto montaggio auto, D reparto montaggio autocarri.

Il guadagno netto (prezzo di vendita—costo di produzione) è di L. 300.000 per un'auto e di L. 250.000 per un autocarro.

I dati sono quelli riportati nella tabella. Trovare il programma di produzione ottimo.

29. Risolvere i seguenti problemi, determinando in ogni caso l'insieme delle s.o. alternative.

a)
$$\begin{cases} \max\ 12x_1+x_2+2x_3+5x_4+4x_5-6x_6 \\ 8x_1+x_2+3x_3+2x_4+3x_5-3x_6 = 17 \\ -5x_1-x_2-x_3-x_4-2x_5+2x_6 = -12 \\ -5x_1-x_3-2x_4-x_5+4x_6 \leqslant -8 \\ x_i \geqslant 0 \quad i=1,\ldots\ldots,6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \min\ -2x_1+x_2+18x_3+6x_4-2x_8 \\ x_1+x_3-x_4-2x_6+x_7-x_8 = 6 \\ x_2-x_3+x_4-2x_5+x_6+2x_7+x_8 = 3 \\ x_3+2x_4-3x_5+x_6-2x_7+x_8 = 3 \\ x_i \geqslant 0 \quad i=1,\ldots\ldots,8 \end{cases}$$

30. Risolvere con il metodo del simplesso gli esercizi da 1 a 12 delle pagine 1-15.

Risolvere con il metodo del simplesso i problemi c),d),e),f) di p. 13.

31. Impostare e risolvere con il metodo del simplesso il seguente problema:

Un'industria produce 4 tipi di abiti.
Per un'unità di lunghezza vengono usate delle lane colorate nelle quantità riportate in tabella

Lana	Tipo di abito A	B	C	D	Quantità di lana disponibile
Verde	1	2	1	1	10
Rosso	2	1	2	1	6
Bleu	3	1	0	0	10
Giallo	1	4	0	0	18
Marrone	0	0	1	3	8
Porpora	0	0	3	3	12

effettuare le lavorazioni per una unità di ciascun bene da produrre. Sapendo che i sei beni hanno un profitto unitario (in milioni di lire) di 10,12,14,11,10,10, quante unità dei vari beni conviene produrre entro il mese per massimizzare il profitto totale?

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
M_1	7	6	3	5	4	2
M_2	6	4	2	3	8	5
M_3	5	4	6	8	5	7
M_4	2	7	4	5	6	8

Sono disponibili tre prodotti di costo L. 1.000, L. 3.600 e L. 2.400 per unità. Essi contengono, rispettivamente, 1.000, 4.000 e 2.000 calorie per unità e 200, 900 e 500 proteine per unità. Formulare una dieta di minimo costo contenente almeno 20.000 calorie e 3.000 proteine.

La produzione di una ditta è limitata dalla capacità dei suoi tre reparti: reparto di lavorazione; reparto di immagazzinaggio; reparto per le rifiniture. La capacità di produzione per settimana è rispettivamente di 2.600, 500 e 1600 ore.
Sono fabbricati sei prodotti. I dati sono elencati nella sottostante tabella.

	1	2	3	4	5	6
prezzo di vendita L./unità	150	120	150	180	430	610/2
costo di produzione L./unità	60	40	50	60	340	470/2
reparto di lavorazione h/unità	6	4	2	2	2	3/2
reparto di immagazzinaggio h/unità	0	0	3/2	2	1	1
reparto di rifinitura h/unità	0	0	0	0	3	2

Reparti	capacità h/anno	richieste per auto h/unità	richieste per autocarri h/unità
A	100.000	4	20/7
B	64.000	2	3
C	60.000	3	–
D	37.500	–	5/2

c) Una compagnia tessile produce quattro prodotti: due tipi di filo (filo A, filo B) e due tipi di tessuto (tessuto A e tessuto B). Supponiamo che questi prodotti possano essere venduti, ad un prezzo fissato, in quantità non limitate e che siano disponibili 18.000 ore di filatura alla settimana e 3.000 ore di tessitura alla settimana. La seguente tabella fornisce i dati relativi.

	Filo A	Filo B	Tessuto A	Tessuto B
prezzo di vendita (L./unità	120	100	750	290
costi variabili (L./unità)	30	20	250	100
tempo di filatura (h/unità)	3	2	10	4
tempo di tessitura (h/unità)	––	––	2	1/2

Trovare il programma di produzione ottimo, ovvero quello che fornisce il massimo profitto.

d) Un'azienda produce i beni $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ utilizzando le macchine M_1, M_2, M_3, M_4 e desidera, per pianificare la sua produzione mensile, di utilizzarle al 100% del tempo per cui esse saranno disponibili durante il mese; da precedenti indagini statistiche si ritiene che, detratti i tempi morti per guasti e manutenzioni, le macchine lavoreranno, in un mese, rispettivamente per 135, 140, 175, 160 ore.

La tabella indica i tempi, in ore, necessari alle macchine per variabile che entra in base quella che, dopo l'operazione di cardine, produce il maggiore aumento della f.o. Individuare il coefficiente su cui fare cardine.

Dimostrare che, in assenza di degenerazione, un problema lineare viene risolto tramite un numero finito di operazioni di cardine.

Consideriamo il sistema di disuguaglianze $Ax \geqslant b$, $x \geqslant 0$ con $b \geqslant 0$, che in forma standard diviene $Ax - y = b$, $x, y \geqslant 0$. Posto $b_k = \max b_i$, consideriamo il nuovo sistema in forma standard ottenuto aggiungendo la k-esima riga all'opposto di ogni altra riga. Mostrare che il nuovo sistema richiede l'aggiunta di una sola variabile artificiale per ottenere una base iniziale.

Risolvere i seguenti problemi usando solo una variabile artificiale:

a)
$$
\begin{cases}
\min \; (-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6) \\
-x_1 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 3 \\
x_2 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 = -6 \\
x_3 + x_4 - 2x_5 - 2x_6 = -12 \\
x_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, 6
\end{cases}
$$

b)
$$
\begin{cases}
\max \; x_8 \\
-x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = -2 \\
x_1 - 2x_3 - 3x_4 + x_6 - x_8 = 4 \\
x_1 - 2x_4 + x_7 = 3 \\
2x_1 + x_2 - 5x_4 - x_8 = 6 \\
x_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, 8
\end{cases}
$$

15

$\min \sum_{j=1}^{m} y_j$

47

(*) $\begin{cases} Ax + y = b \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$

1) Trovare il programma di produzione ottimo settimanale.

2) Supponiamo che sia fabbricato un nuovo prodotto, con un prezzo di vendita di L. 450 per unità, e costo di produzione L. 200 per unità e assorbente 3,2 e 2 ore di capacità nei 3 reparti.
Indicare se questo prodotto può essere introdotto nel programma di produzione.

g) Una azienda ha 3.000 acri di terra, che vuol coltivare a grano o a pascolo. Tre persone lavorano nella fattoria, partecipando ai suoi profitti, insieme essi possono lavorare 6.000 ore per anno ed hanno un capitale di L. 9.000.000. Supponiamo che sia coltivare a grano che a pascolo non richieda nessun capitale fisso, ma un capitale di lavoro di L. 400 per acro di grano e L. 25.000 per capo di bestiame. Un capo di bestiame richiede 10 acri di pascolo. Il numero medio annuale di ore lavorative per acro di grano è 10/3 ore e per capo di bestiame è 40/3 ore. Il guadagno netto medio per il grano è di L. 1.500 per acro e L. 12.500 per capo di bestiame.

1) Qual'è il piano di produzione ottimo?

2) Quali sono le conseguenze di un uomo che lascia la ditta e che riduce il lavoro di 2.000 ore e il capitale di L. 45.000 ?

3) Qual'è il massimo prezzo che la fattoria può pagare per altri 1.000 acri di terra?

33. Dimostrare che l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ è vuoto se e solo se la s.o. di (*) è a componenti positive.

34. Nell'applicazione dell'algoritmo del simplesso si scelga come

Controllare se l'ottimo precedentemente trovato, rimane tale, in caso negativo risolvere il nuovo problema.

42. Con riferimento all'esercizio n. 32 e), formulare una dieta di minimo costo con al più 1.500 grassi, sapendo che i tre prodotti contengono rispettivamente 500, 1.000, 800 grassi per unutà.

43. Con riferimento all'esercizio n. 3 cap. IV, dire come cambia il profitto se:

a) non possono essere fabbricati più di 4 tavoli e più di 5 scaffali.

b) devono essere fabbricati almeno 3 tavoli e non più di 6 scaffali.

44. Risolvere con l'algoritmo duale i seguenti problemi:

a) $\begin{cases} \max -x_1 - 30x_2 - 12x_3 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 \leq -2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \max -4x_1 - 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -3x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \max -x_1 - 2x_2 \\ - x_1 - x_2 \leq -2 \\ -5x_1 + x_2 \leq -4 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \max -12x_1 - 18x_2 \\ -6x_1 - 4x_2 \leq -10 \\ -8x_1 - 3x_2 \leq -10 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq -5 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$

38. Consideriamo il problema $\min_{x \in S} c^T x$ dove $S = \{ x : Ax = b$ $x \geq 0 \}$. Se c_j è diminuito, tenendo tutti gli altri coefficient inalterati, dimostrare che il valore di x_j nella s.o. non diminuisce.

39. Trasformare in un programma lineare il problema:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j |x_j|$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \ldots\ldots, m$$

con $c_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots\ldots, n$.

40. Consideriamo un problema lineare in cui la variabile x_1 non è ristretta in segno. Supponiamo che, per porlo in forma standard, si ponga $x_1 = x_1^+ - x_1^-$ con $x_1^+, x_1^- \geq 0$.
Dimostrare che

1) Risolvendo il problema in forma standard con il metodo del simplesso, almeno una delle variabili della coppia (x_1^+, x_1^-) rimane uguale a zero.

2) Se tale problema ha s.o., ha anche una s.o. che soddisfa $x_1^+ \cdot x_1^- = 0$ e il metodo del simplesso trova soltanto le s. o. che soddisfano tale proprietà.

41. Con riferimento all'esercizio n. 32 a) supponiamo che la ditta decida di utilizzare un IV materiale grezzo per fabbricare i due prodotti A e B. Ogni unità di A e B richiede l'uso di 1 unità del IV materiale grezzo, che è disponibile nella quantità di 4 unità.

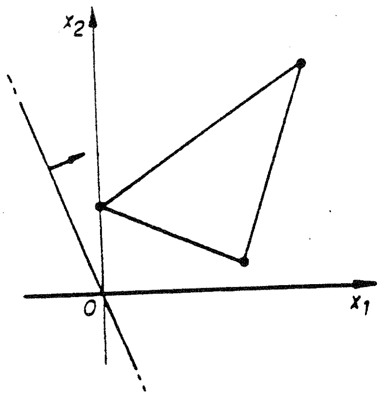


Fig. 39 a

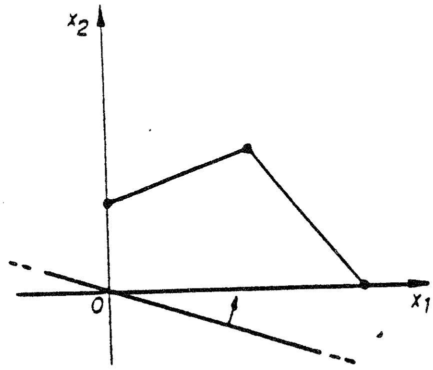


Fig. 39 b

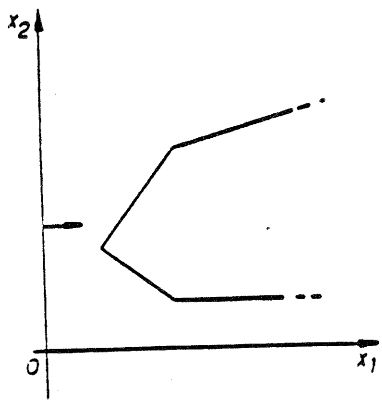


Fig. 39 c

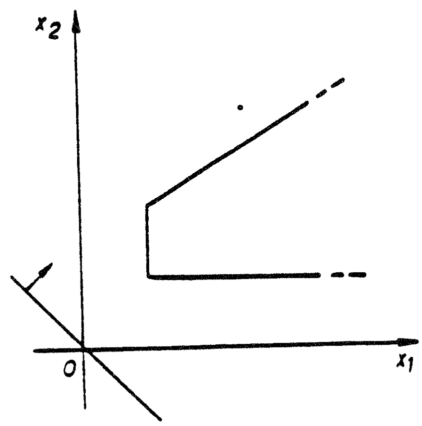


Fig. 39 d

1. Determinare geometricamente, per ciascun caso, tutte le soluzioni duali ammissibili.

2. Determinare una possibile successione di vertici, l'ultimo dei quali ottimo, seguendo la logica dell'algoritmo duale.

e) $\begin{cases} \max -3x_1-2x_2-x_3-4x_4 \\ 2x_1+4x_2+5x_3+x_4 \geq 10 \\ 3x_1-x_2+7x_3-2x_4 \geq 2 \\ 5x_1+2x_2+x_3+6x_4 \geq 15 \\ x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,4 \end{cases}$; f) $\begin{cases} \max -3x_1-x_2 \\ 2x_1+3x_2 \geq 11 \\ 2x_1+x_2 \geq 5 \\ -x_1+x_2 \geq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \max -x_1-x_2 \\ x_1+x_2 \leq 3 \\ 6x_1-5x_2 \leq -15 \\ -3x_1+x_2 \leq -9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$; h) $\begin{cases} \min 3x_1+4x_2 \\ 2x_1+3x_2 \leq 10 \\ x_1+3x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \max -4x_1-2x_2-3x_3 \\ x_1-2x_2+x_3 \leq 5 \\ 2x_1+3x_2-x_3 = 2 \\ x_1-5x_2+6x_3 \geq 3 \\ x_i \geq 0 \quad i=1,2,3 \end{cases}$; l) $\begin{cases} \min 3x_1+x_2+2x_3 \\ x_1+x_2-2x_3 \geq 1 \\ x_1-2x_2+x_3 \geq -1 \\ x_i \geq 0 \quad i=1,2,3 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \max -3x_1-4x_2-2x_3-x_4-5x_5 \\ x_1-2x_2-x_3+x_4+x_5 \leq -3 \\ -x_1-x_2-x_3+x_4+x_5 \leq -2 \\ x_1+x_2-2x_3+2x_4-3x_5 \leq 4 \\ x_i \geq 0 \quad i=1,\dots\dots,5 \end{cases}$

45. Con riferimento all'esercizio n. 3, utilizzare, per ciascun caso, la tabella finale del simplesso per determinare almeno due soluzioni duali ammissibili del problema.

46. Si considerino i problemi lineari (di minimo) illustrati in figura 39, nella quale è indicata per ciascun caso la direzione di crescenza della f.o.

LA DUALITA' NELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

8 - 1 ESEMPI INTRODUTTIVI

A] Un problema di produzione

Una compagnia produce due tipi di macchine per ufficio, macchine calcolatrici e macchine da scrivere, con un profitto rispettivamendi L. 20.000 e di L. 30.000.

Le macchine devono passare attraverso due diversi reparti di montaggio A_1 e A_2.

La produzione di una macchina calcolatrice richiede 3h in A_1 e 1h in A_2, mentre ogni macchina da scrivere richiede 2h in A_1 e 2h in A_2.

Sono disponibili mensilmente 200h in A_1 e 100h in A_2.

Trovare il piano di produzione ottimale.

Se indichiamo rispettivamente con x_1 e x_2 il numero di macchine calcolatrici e da scrivere che si decidono di produrre, si perviene al seguente problema, dove il profitto è stato espresso in unità da L.10.000:

$$(8.1) \qquad \begin{cases} \max 2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ x_1 + 2x_2 \leq 100 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

x_1 macchina calcola . 3h in A1 e 1h in A_2
x_2 macch scrivere . 2h in A1 e 2h in A_2

47. Con riferimento alla tabella (6.6) si esegua una operazione di cardine sull'elemento $a_{ik} < 0$, individuato dalla (6.7), e si dimostri che la f.o. diminuisce di $\frac{c_{N_k}}{a_{ik}} \cdot b_i$.

48. Dimostrare che, in assenza di degenerazione, l'algoritmo duale del simplesso converge in un numero finito di iterazioni.

tura del problema è evidente che deve risultare

$$200y_1 + 100y_2 \geqslant 20.000x_1 + 30.000x_2$$

ovvero l'offerta dell'operatore non deve essere inferiore al profitto della compagnia; come vedremo una tale proprietà è caratteristica tra un problema ed il suo duale.

B] **Il problema della dieta.**

Riprendiamo in considerazione il problema della dieta, trattato in 4.2, la cui formulazione è la seguente:

$$(8.3)\qquad \begin{cases} \min 24x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 50x_4 \\ 12x_1 + 12x_2 + 40x_3 + 60x_4 \geqslant 20 \\ 2x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 2x_4 \geqslant 5 \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots\ldots, 4 \end{cases}$$

Immaginiamo adesso un'industria farmaceutica che produce in pillole ciascuna delle sostanze nutritive presenti nei quattro alimenti. L'industria ha interesse a mettere sul mercato le pillole a prezzi competitivi.

prot grassi

Più precisamente, indicati con y_1 e y_2 i prezzi unitari delle proteine e dei grassi, si ha che una unità di orzo costa L. 24 e contiene 12 unità di proteine e 2 unità di grassi; di conseguenza il prezzo di tali unità in pillole è dato da $12y_1 + 2y_2$ e per essere competitivo sul mercato deve risultare

$$12y_1 + 2y_2 \leqslant 24$$

y_1 - prezzo offerto per utilizzare
y_2 A1 e A2

Supponiamo che un operatore economico chieda di disporre dei reparti A_1 e A_2; a tal fine offre un certo prezzo y_1 per ogni ora lavorativa utilizzata in A_1 ed un certo prezzo y_2 per ogni ora lavorativa utilizzata in A_2. Una macchina calcolatrice richiede:

- 3h di lavoro in A_1 per le quali l'operatore offre L. $3 \cdot y_1$.
- 1h di lavoro in A_2 per la quale l'operatore offre L. $1 \cdot y_2$.

La somma totale, $3y_1 + y_2$, offerta dall'operatore non deve essere inferiore al profitto di L. 20.000 che la compagnia realizzerebbe dalla vendita di una macchina calcolatrice (altrimenti la compagnia non sarebbe ovviamente interessata a cedere l'uso dei reparti). Si ha quindi la condizione $3y_1 + y_2 \geqslant 20.000$.

In modo analogo l'offerta dell'operatore per le ore necessarie alla costruzione di una macchina da scrivere è di L. $(2y_1 + 2y_2)$; tale offerta, per essere presa in considerazione dalla compagnia, non deve essere inferiore al profitto di L. 30.000 relativo alla vendita di una macchina da scrivere. Si ha quindi la condizione $2y_1 + 2y_2 \geqslant 30.000$.

Il costo subito dall'operatore per la sua offerta, tenuto conto del massimo numero di ore disponibili nei due reparti, è di L. $(200y_1 + 100y_2)$.

L'operatore è interessato a minimizzare la sua offerta, in modo tale che essa possa essere presa in considerazione dalla compagnia; l'operatore deve quindi risolvere il problema:

$$(8.2) \qquad \begin{cases} \min\ 200y_1 + 100y_2 \\ 3y_1 + y_2 \geqslant 20.000 \\ 2y_1 + 2y_2 \geqslant 30.000 \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Il problema (8.2) è detto duale del problema (8.1). Dalla na-standard di esso, non avendo senso dare una definizione per ogni possibile formulazione; si dovrà trasformare un problema nella forma standard per poter trovare il suo duale.

Dato il problema di programmazione lineare

$$(8.5)\qquad \begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax \geqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

dicesi **problema duale** di (8.5) il programma

$$(8.6)\qquad \begin{cases} \max\ b^T y \\ A^T y \leqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Malgrado i problemi (8.5) e (8.6) siano apparentemente del tutto diversi, vedremo che in realtà esiste, fra loro, una stretta relazione che permette, nota una s.o. di uno di essi, di determinare una s.o. dell'altro.

Osserviamo che il duale di (8.6) coincide con il problema (8.5); infatti il problema

$$\begin{cases} \max\ b^T y \\ A^T y \leqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases} \text{, posto in forma standard diviene } \begin{cases} -\min\ (-b^T y) \\ -A^T y \geqslant -c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Applicando la definizione si ha che il suo duale è:

$$\begin{cases} -\max\ (-c^T)x \\ -Ax \leqslant -b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ragionando in modo analogo, su una unità di avena, su una unità di semi di sesamo, su una unità di farina di arachidi, si ottengono i vincoli:

$$\begin{aligned} 12y_1 + \ \ 6y_2 &\leq 30 \\ 40y_1 + 12y_2 &\leq 40 \\ 60y_1 + \ \ 2y_2 &\leq 50 \end{aligned}$$

L'industria farmaceutica stabilirà allora i prezzi y_1 e y_2 in modo da massimizzare il profitto sulla vendita delle proteine e dei grassi, tenendo conto dei precedenti vincoli.

Si perviene così al problema:

$$(8.4) \qquad \begin{cases} \max\ 20y_1 + 5y_2 \\ 12y_1 + \ \ 2y_2 \leq 24 \\ 12y_1 + \ \ 6y_2 \leq 30 \\ 40y_1 + 12y_2 \leq 40 \\ 60y_1 + \ \ 2y_2 \leq 50 \\ \quad y_1\ ,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il problema (8.4) è detto duale del problema (8.3).

8 - 2 DEFINIZIONE FORMALE DELLA DUALITA'.

Osserviamo che, nei problemi trattati in 8.1, siamo passati da un problema di massimo ad un problema di minimo e viceversa effettuando uno "scambio" tra il vettore dei termini noti ed il vettore dei coefficienti della f.o. e trasponendo la matrice dei vincoli. Importante

Per una definizione formale del duale di un problema di programmazione lineare, occorrerà, evidentemente, riferirsi ad una forma

La formula è unica

Duale

Primale

$\max b^T y$

$A^T y \le c$

$y \ge 0$

Primale

Duale

$\min c^T x$

$Ax \ge b$

$x \ge 0$

Esempio 2. Scrivere il duale del seguente problema:

$$\begin{cases} \max \quad x_1+2x_2-x_3+3x_4 \\ -x_1-2x_2 \qquad +x_4 \le 3 \\ 3x_1 \qquad +x_3-2x_4 \ge 1 \\ \qquad 5x_2 \qquad -4x_4 \ge -7 \\ x_i \ge 0, \quad i=1,\dots\dots,4 \end{cases}$$

Poniamo il problema nella forma (8.6):

$$\begin{cases} \max x_1+2x_2-x_3+3x_4 \\ -x_1-2x_2 \qquad +x_4 \le 3 \\ -3x_1 \qquad -x_3+2x_4 \le -1 \\ \qquad -5x_2 \qquad +4x_4 \le 7 \\ x_i \ge 0, \quad i=1,\dots\dots,4 \end{cases}$$

Poiché il duale di (8.6) è il problema (8.5), si ottiene:

$$\begin{cases} \min \quad 3y_1-y_2+7y_3 \\ -y_1-3y_2 \qquad \ge 1 \\ -2y_1 \qquad -5y_3 \ge 2 \\ \qquad -y_2 \qquad \ge -1 \\ y_1+2y_2+4y_3 \ge 3 \\ y_i \ge 0, \quad i=1,2,3 \end{cases}$$

Esempio 3. Scrivere il duale del seguente problema:

$$\begin{cases} \min x_1+3x_2-x_3 \\ 2x_1+x_2-x_3 \ge 4 \\ x_1-x_2+x_3 = 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Osserviamo che il secondo vincolo è scritto sotto forma di uguaglianza e quindi equivalente a:

$$x_1-x_2+x_3 \geqslant 5 \quad , \quad x_1-x_2+x_3 \leqslant 5 \quad .$$

Il problema, in forma standard, è dunque:

$$\begin{cases} \min x_1+3x_2-x_3 \\ 2x_1+x_2-x_3 \geqslant 4 \\ x_1-x_2+x_3 \geqslant 5 \\ -x_1+x_2-x_3 \geqslant -5 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ne consegue che il suo duale è:

$$\begin{cases} \max 4y_1+5y_2-5y_3 \\ 2y_1+y_2-y_3 \leqslant 1 \\ y_1-y_2+y_3 \leqslant 3 \\ -y_1+y_2-y_3 \leqslant -1 \\ y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 . \end{cases}$$

Notiamo che i coefficienti delle variabili y_2 e y_3, sia nella f.o. che nei vincoli, sono opposti tra loro; ponendo $y_2' = y_2 - y_3$ si perviene al problema

$$\begin{cases} \max 4y_1 + 5y_2' \\ 2y_1+y_2' \leqslant 1 \\ y_1-y_2' \leqslant 3 \\ -y_1+y_2' \leqslant -1 \\ y_1 \geqslant 0, \quad y_2' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ove y'_2 appare come variabile libera in quanto differenza di due variabili non negative.

Di conseguenza al secondo vincolo di uguaglianza del problema primale, corrisponde nel problema duale la variabile y'_2 non ristretta in segno.

Esempio 4. Scrivere il duale del seguente problema:

$$\min 2x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -2x_1 - 3x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Per ridurre il problema in forma standard dobbiamo esprimere la variabile libera come differenza di due variabili non negative; posto $x_2 = x'_2 - x''_2$, si perviene al problema:

$$\min 2x_1 - x_2 + x''_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x'_2 - x''_2 \geq 2 \\ -2x_1 - 3x'_2 + 3x''_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 5 \\ x_1, x'_2, x''_2 \geq 0 \end{cases}$$

il cui duale è:

$$\max 2y_1 + y_2 + 5y_3$$
$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 - 3y_2 \leq -1 \\ -y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Notiamo che il secondo ed il terzo vincolo equivalgono a $y_1-3y_2 = -1$; per cui possiamo scrivere il duale nella forma:

$$\begin{cases} \max 2y_1+y_2+5y_3 \\ y_1-2y_2+y_3 \leq 2 \\ y_1-3y_2 \qquad = -1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Possiamo dunque concludere che alla variabile libera x_2 del primale corrisponde il secondo vincolo del problema duale in forma di uguaglianza.

I casi trattati negli esempi 3 e 4 hanno validità generale; valgono infatti le seguenti proprietà:

I] ad ogni vincolo i-mo in forma di uguaglianza nel problema primale, corrisponde nel problema duale la variabile y_i non ristretta in segno;

II] ad ogni variabile x_j non ristretta in segno nel problema primale, corrisponde nel problema duale il vincolo j-mo in forma di uguaglianza.

Esempio 5. Scrivere il duale del seguente problema:

$$\begin{cases} \min 2x_1+4x_2-3x_3-x_4+x_5 \\ x_1 \qquad +2x_3-x_4+x_5 = 5 \\ x_1+x_2-3x_3+x_4-2x_5 \geq 1 \\ x_1+x_2 \qquad\qquad + x_5 = 3 \\ x_1, x_3, x_5 \geq 0, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Y_1 devono essere libere

Y_3

Poiché il primo ed il terzo vincolo sono in forma di uguaglian-

Le variab y_1 e y_3 devono essere libere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \max 5y_1+y_2+3y_2 \\ y_1+y_2+y_3 \leq 2 \\ 2y_1+y_2+y_3 = 4 \end{cases}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ved pg seguente

za, dalla proprietà I] si ha che le variabili duali y_1 e y_3 devono essere libere; poiché le variabili x_2 e x_4 sono libere, dalla proprietà II] si ha che nel problema duale il secondo ed il quarto vincolo sono in forma di uguaglianza. Il problema duale è quindi:

$$\begin{cases} \max 5y_1 + y_2 + 3y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_2 + y_3 = 4 \\ 2y_1 - 3y_2 \leq -3 \\ -y_1 + y_2 = -1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_1, y_3 \in \mathbb{R}, \; y_2 \geq 0 \end{cases}$$

~~4~~.3 TEOREMI SULLA DUALITA'

Per meglio comprendere le relazioni esistenti tra un problema ed il suo duale, risolviamo in parallelo i seguenti problemi duali tra loro.

$$\begin{cases} \min -4x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \max -2y_1 - 14y_2 - 10y_3 \\ y_1 - 2y_2 - 2y_3 \leq -4 \\ -y_1 - y_2 + y_3 \leq -1 \\ y_i \geq 0, \; i = 1,2,3 \end{cases}$$

Con l'introduzione delle variabili di scarto, i problemi divengono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ -2 & +1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\max b^T y$$
$$A^T y \leq c$$
$$y \geq 0$$

Forma standard

$$\begin{cases} \min -4x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ -2x_1 - x_2 \geq -14 \\ -2x_1 + x_2 \geq -10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Duale

$$\begin{cases} \max -2y_1 - 14y_2 - 10y_3 \\ y_1 - 2y_2 - 2y_3 \leq -4 \\ -y_1 - y_2 + y_3 \leq -1 \\ y_i \geq 0 \; i = 1,2,3 \end{cases}$$

Risolvo il Duale con il simplesso mett le variabili di scarto

$$(A)\begin{cases}\min -4x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 14 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 10 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,5\end{cases} \quad ; \quad (B)\begin{cases}\max -2y_1 - 14y_2 - 10y_3 \\ y_1 - 2y_2 - 2y_3 + y_4 = -4 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_5 = -1 \\ y_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,5\end{cases}$$

Risolvendo (A) con l'algoritmo del simplesso e (B) con l'algoritmo duale del simplesso, (tenuto conto che $\min -b^T y = -\max b^T y$) si ottengono le seguenti tabelle:

(A_1)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	−4	−1	0	0	0
x_3	2	−1	1	1	0	0
x_4	14	2	1	0	1	0
x_5	10	<u>2</u>	−1	0	0	1

(B_1)

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	0	2	14	10	0	0
y_4	−4	1	<u>−2</u>	−2	1	0
y_5	−1	−1	−1	1	0	1

Alla 1ª di scarto corrisp la 1ª di base

Alla 1ª di base corrisp la 1ª di scarto

(A_2)

	−20	0	−3	0	0	2
x_3	7	0	1/2	1	0	1/2
x_4	4	0	<u>2</u>	0	1	−1
x_1	5	1	−1/2	0	0	1/2

(B_2)

	−20	7	4	0	5	0
y_3	2	−1/2	1	1	−1/2	0
y_5	−3	−1/2	<u>−2</u>	0	1/2	1

(A_3)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	−26	0	0	0	−3/2	−1/2
x_3	6	0	0	1	−1/4	3/4
x_2	2	0	1	0	1/2	−1/2
x_1	6	1	0	0	1/4	1/4

x_3, x_4, x_5 variab scarto

Variab non di scarto

(B_3)

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	−26	6	0	0	6	2
y_3	1/2	−3/4	0	1	−1/4	1/2
y_2	3/2	1/4	1	0	−1/4	−1/2

y_1 y_2 y_3 variab non di scarto

y_4 y_5 variab scarto

Dalle tabelle A_1 e B_1 possiamo rilevare che i valori delle variabili di scarto x_3, x_4, x_5 nel primale uguagliano i coefficienti della f.o. relativi alle variabili y_1, y_2, y_3 nel duale, mentre, i coefficienti della f.o. re-

I valori variabili di scarto primale uguagliano i coefficienti f.o. del duale non delle variabili di scarto

I coeff f.o. relativi alle variabili di base x_1 x_2 del primale uguagliano i valori variab di scarto del duale.

~ o ~

Le colonne delle variab non di base del primale sono le trasposte cambiate di segno delle lativi alle variabili x_1, x_2 del primale uguagliano i valori delle variabili di scarto y_4, y_5 nel duale.

Possiamo allora stabilire la seguente corrispondenza biunivoca tra le variabili del primale e del duale:

$$x_3 \longleftrightarrow y_1 \quad , \quad x_4 \longleftrightarrow y_2 \quad , \quad x_5 \longleftrightarrow y_3$$

$$x_1 \longleftrightarrow y_4 \quad , \quad x_2 \longleftrightarrow y_5 \quad ,$$

e, più in generale, se indichiamo con x_i, $i = 1,\ldots,n$ le variabili del primale, con x_{n+j} $j = 1,\ldots,m$ le variabili di scarto del primale, con y_j, $j = 1,\ldots,m$ le variabili del duale e con y_{m+i}, $i = 1,\ldots,n$ le variabili di scarto del duale, vale la corrispondenza :

(8.7.a) $x_{n+j} \longleftrightarrow y_j$, $j = 1,\ldots,m$ ovvero alla j-ma variabile di scarto del primale corrisponde la j-ma variabile del duale e viceversa ;

(8.7.b) $x_i \longleftrightarrow y_{m+i}$, $i = 1,\ldots,n$ ovvero alla i-ma variabile del primale corrisponde la i-ma variabile di scarto del duale e viceversa.

L'analogia tra le tabelle A_1 e B_1 non si esaurisce solo nella corrispondenza tra le variabili; non considerando le matrici identiche nelle due tabelle, si può osservare che, relativamente alla matrice dei coefficienti del sistema dei vincoli, la colonna associata ad x_1 è la trasposta, cambiata di segno, della riga corrispondente ad y_4, mentre la colonna associata ad x_2 è la trasposta, cambiata di segno, della riga corrispondente ad y_5.

Un'analoga sistuazione si verifica anche nelle coppie di tabelle A_2–B_2 e A_3–B_3; le colonne delle variabili non di base del primale sono le trasposte, cambiate di segno, delle righe delle variabili del duale, ad esse associate tramite la relazione (8.7).

Ne viene di conseguenza che il problema duale può essere risolto tramite il primale e viceversa.

In particolare dalla tabella ottima del primale si ricava la s.o. del duale che è data dal vettore dei coefficienti della f.o., opportunamente ordinati secondo la (8.7). Ad esempio dalla tabella A_3 si ha $\bar{c} = (0,0,0,3/2,1/2)$ a cui corrisponde, per la (8.7), $\bar{y} = (0,3/2,1/2,0,0)$.

Inoltre il valore della f.o. del primale, calcolato nella s.o. $\bar{x}$, uguaglia il valore della f.o. del duale, calcolato nella s.o. $\bar{y}$.

Infine, se in corrispondenza della coppia di s.o. $\bar{x}$, $\bar{y}$, risulta $\bar{x}_{n+i} > 0$ cioè, la variabile x_{n+i} è di base, allora la variabile y_i ad essa associata tramite la (8.7) è non di base e dunque $\bar{y}_i = 0$.

Una tale considerazione può essere ripetuta per ogni coppia di variabili corrispondenti tramite la (8.7).

I risultati che abbiamo rilevato dall'analisi delle tabelle A_3 e B_3, non sono casuali. Valgono in generale i seguenti teoremi sulla dualità, nei quali abbiamo indicati con S la regione ammissibile del problema (8.5) e con S* quella del problema (8.6).

Teorema 1. Se $\bar{x} \in S$ e $\bar{y} \in S^*$, si ha $c^T\bar{x} \geq b^T\bar{y}$.

L'importanza del teorema 1 sta nel fatto che la conoscenza di una soluzione ammissibile del primale (duale) permette di avere un confine superiore (inferiore) del duale (primale); la differenza $c^T\bar{x} - b^T\bar{y}$ ci permette di stabilire, per eccesso, di quanto siamo discosti dalla s.o.

Teorema 2. Siano $\bar{x} \in S$ e $\bar{y} \in S^*$ tali che $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$. Allora $\bar{x}$ è s.o. di (8.5) e $\bar{y}$ è s.o. di (8.6).

Teorema 3. Se $S \neq \phi$ e $S^* \neq \phi$, allora i problemi (8.5) e (8.6) ammettono s.o.

Il teorema 3 fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza di s.o.

Teorema fondamentale della dualità.

Se uno dei due problemi (8.5), (8.6) ammette s.o., così è anche per l'altro e risulta $\min_{x\in S} c^T x = \max_{y\in S^*} b^T y$.

In particolare in corrispondenza della s.o. del primale $\bar{x} = (A_B^{-1} b, 0)$ si ha la s.o. di (8.6) $\bar{y} = c_B^T A_B^{-1}$. Se il problema (8.5) [(8.6)] ha f.o. inferiormente (superiormente) non limitata, allora il problema (8.6.) [(8.5)] ha regione ammissibile vuota.

Teorema degli scarti complementari.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\bar{x}\in S$ e $\bar{y}\in S^*$ siano, rispettivamente, s.o. di (8.5) e (8.6) è che risulti

(8.8a) $$\bar{y}^T (A\bar{x} - b) = 0$$

(8.8b) $$\bar{x}^T (c - A^T \bar{y}) = 0.$$

La relazione (8.8) può essere scritta in una forma di più facile interpretazione; risulta infatti

$$\bar{y}^T (A\bar{x} - b) = \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j (A\bar{x} - b)_j = \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j \bar{x}_{n+j} = 0$$

$$\bar{x}^T (c - A^T \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i (c - A^T \bar{y})_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \bar{y}_{m+i} = 0$$

e poiché ogni componente dei vettori $\bar{x}$, $\bar{y}$, $(A\bar{x} - b)$, $(c - A^T\bar{y})$ è non negativa, si deve avere :

$$\bar{y}_j \bar{x}_{n+j} = 0 \quad , \quad j = 1,\dots\dots,m \quad e \quad \bar{x}_i \cdot \bar{y}_{m+i} = 0 \ , \quad i = 1,\dots.n \ .$$

Queste ultime condizioni sono a loro volta equivalenti a :

(8.9a) $\bar{x}_{n+j} > 0 \Rightarrow \bar{y}_j = 0 \ ; \ \bar{y}_j > 0 \Rightarrow \bar{x}_{n+j} = 0 \ , \ j = 1,\dots\dots,m$

(8.9b) $\bar{x}_i > 0 \Rightarrow \bar{y}_{m+i} = 0 \ ; \ \bar{y}_{m+i} > 0 \Rightarrow \bar{x}_i = 0 \ , \ i = 1,\dots.,n \ .$

Della relazione (8.9) possiamo dare la seguente interpretazione geometrica: consideriamo un problema lineare la cui regione ammissibile è rappresentata in figura 48 .

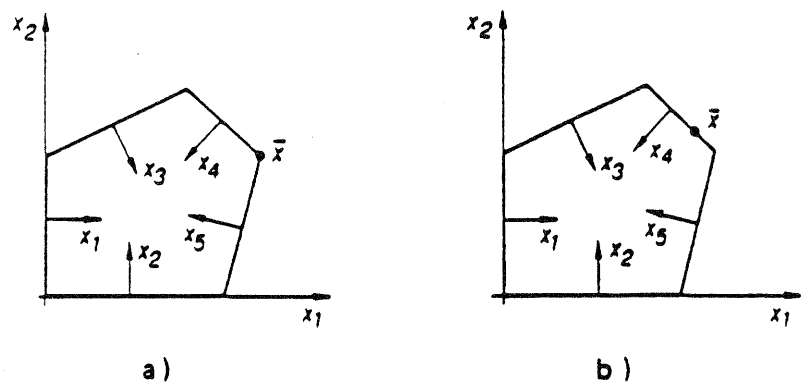


Fig. 48

Supponiamo che, nel caso a), $\bar{x}$ sia s.o. del problema. La condizione (8.9) implica che le variabili duali associate ai vincoli non aderenti a $\bar{x}$ sono nulle; poiché $\bar{x}_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ sono positive, risulta $\bar{y}_1 = \bar{y}_4 = \bar{y}_5 = 0$.

Supponiamo adesso che, nel caso b), la s.o. $\bar{x}$ non sia un vertice della regione ammissibile (rilevare il fatto che il teorema degli scarti complementari non si riferisce necessariamente ad un vertice). Poiché in corrispondenza di $\bar{x}$ le variabili x_1, x_2, x_3, x_5 sono positive, si ha $\bar{y}_4 = \bar{y}_5 = \bar{y}_1 = \bar{y}_3 = 0$. Del teorema degli scarti complementari possiamo dare la seguente interpretazione economica: riferendoci al problema di produzione esposto in 8.1; la variabile di scarto y_3 rappresenta la differenza tra il prezzo offerto (costo per l'operatore) per l'utilizzo dei macchinari necessari alla costruzione di una macchina calcolatrice ed il profitto derivante dalla vendita della stessa.

Quando il costo supera il profitto ($\bar{y}_3 > 0$), l'operatore economico non ha più interesse a produrre le macchine da scrivere per cui il livello di produzione $\bar{x}_1$ diviene nullo; le risorse saranno impiegate per altre attività.

Esempio 6. Sia $\bar{x} = (6,2)^T$ la s.o. del seguente problema:

$$\begin{cases} \min -4x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ -2x_1 - x_2 \geqslant -14 \\ -2x_1 + x_2 \geqslant -10 \\ x_1 \, , x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Determinare la s.o. del problema duale utilizzando il teorema degli scarti complementari .

Risulta:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = A\bar{x} - b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \bar{y}_4 \\ \bar{y}_5 \end{pmatrix} = c - A^T\bar{y} = \begin{pmatrix} -4 - \bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 + 2\bar{y}_3 \\ -1 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 \end{pmatrix}$$

Dalla (8.9) si ha $\bar{x}_1\bar{y}_4 = 0$ ovvero $6\bar{y}_4 = 0$ da cui $\bar{y}_4 = 0$; $\bar{x}_2\bar{y}_5 = 0$ ovvero $2\cdot\bar{y}_5 = 0$ da cui $\bar{y}_5 = 0$; $\bar{x}_3\bar{y}_1 = 0$ ovvero $6\cdot\bar{y}_1 = 0$ da cui $\bar{y}_1 = 0$; sostituendo i valori trovati nelle relazioni $\bar{y}_4 = -4-\bar{y}_1+2\bar{y}_2+2\bar{y}_3$, $\bar{y}_5 = -1+\bar{y}_1+\bar{y}_2-\bar{y}_3$, si ottiene $\bar{y}_2 = 3/2$, $\bar{y}_3 = 1/2$. La s.o. del problema duale è dunque $\bar{y} = (0,3/2,1/2,0,0)$ in accordo con la tabella B_3.

Osservazione. **(Un'interpretazione economica del vettore $\lambda^T = c_B^T A_B^{-1}$).**

Sia $\bar{x} = (A_B^{-1} b)$ una s.b.a. non degenere del problema di minimo costo: $\min c^T x$, $Ax = b$, $x \geqslant 0$. Il valore della f.o. calcolata in $\bar{x}$ è data da $z_o = c_B^T A_B^{-1} b$. Se la disponibilità della risorsa i-ma diviene $b_i+\theta$ con θ tale che $\bar{x}$ resti stabile rispetto alla variazione di b_i, il valore della f.o. in $\bar{x}$ cambia nel seguente modo :

$z = c_B^T A_B^{-1}(b+\theta e^i) = c_B^T A_B^{-1} b + \theta c_B^T A_B^{-1} e^i = z_o + \theta\lambda_i$, dove con λ_i abbiamo indicato la i-ma componente del vettore $\lambda^T = c_B^T A_B^{-1}$. In particolare se si ha stabilità per $\theta = 1$, risulta $z = z_o + \lambda_i$; ne consegue che λ_i rappresenta il costo addizionale che si subisce quando la risorsa i-ma aumenta di 1 unità.

Più in generale si ha $\dfrac{z-z_o}{\theta} = \dfrac{\Delta z}{\theta} = \lambda_i$ e quindi, essendo Δz lineare in θ nell'intervallo di stabilità, λ_i rappresenta il suo coefficiente angolare ossia quello che, in economia, viene chiamato **costo marginale.**

ESERCIZI

1. Determinare per ciascuno dei seguenti problemi il relativo problema duale :

a)
$$
\begin{cases}
\min\ 5x_1-6x_2+7x_3+x_4 \\
x_1+2x_2-x_3-x_4=-7 \\
6x_1-3x_2+x_3-7x_4 \geq 14 \\
-2x_1-17x_2+4x_3+2x_4 \leq -3 \\
x_1,\ x_2 \geq 0,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

b)
$$
\begin{cases}
\max\ 3x_1-2x_2-5x_3+7x_4+8x_5 \\
x_2-x_3+3x_4-4x_5=-6 \\
2x_1+3x_2-3x_3-x_4 \geq 2 \\
-x_1+2x_3-2x_4 \leq -5 \\
-2 \leq x_1 \leq 10,\ 5 \leq x_2 \leq 25 \\
x_3,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

c)
$$
\begin{cases}
\max\ 7x_1+19x_2+21x_3 \\
x_1 \leq 3 \\
x_2 \leq -4 \\
x_3 \leq -8 \\
-x_1+x_2+2x_3 \leq 16 \\
2x_1-2x_2+3x_3 \leq -17 \\
4x_1+6x_2-7x_3 \leq 19 \\
x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

d)
$$
\begin{cases}
\min\ 5x_1-3x_2 \\
2x_1-x_2+4x_3 \leq 4 \\
x_1+x_2+2x_3 = 3 \\
2x_1-x_2+x_3 \geq 1 \\
2x_1-x_2+3x_3 = 5 \\
x_1,x_3 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

2. Scrivere i duali dei seguenti problemi. Verificare che il duale del duale è il problema originario, e inoltre trasformare ogni problema nella forma standard e verificare che il duale del problema in forma standard è equivalente al duale del problema originario.

a)
$$
\begin{cases}
\max\ 4x_1-3x_2+8x_3 \\
-2 \leq x_1 \leq 6,\ 4 \leq x_2 \leq 14,\ -12 \leq x_3 \leq -8;
\end{cases}
$$

b) $$\begin{cases} \max -17x_2+83x_4-8x_5 \\ -x_1-13x_2+45x_3 \qquad +16x_5-7x_6 \geq 107 \\ \qquad 3x_3-18x_4 \qquad +30x_7 \leq 81 \\ 4x_1 \quad -5x_3 \qquad + x_6 = -13 \\ -10 \leq x_1 \leq -2,\ -3 \leq x_2 \leq 17,\ x_3 \geq 16, \\ x_4 \leq 0,\ x_5 \in \mathrm{IR},\ x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \min 3x_1-7x_2+6x_4+5x_5-x_6 \\ 5x_1+8x_2+3x_3+3x_4+2x_5+11x_6 = 200 \\ 5 \leq x_i \leq 20,\ i = 1,\dots\dots,6 \end{cases}$$

3. Scrivere i duali dei seguenti problemi:

a) $$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$;

b) $$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ Ex \geq d,\ x \geq 0 \end{cases}$$;

c) $$\begin{cases} \min c^T x+d^T y \\ Ax+By = b \\ Ex+Fy \geq g \\ x \geq 0,\ y \text{ non ristretta in segno} \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \geq b_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j \leq b_3 \\ \ell_j \leq x_j \leq k_j,\ \forall j \end{cases}$$;

e) $$\begin{cases} \min 3y_1+4y_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_{i1}y_1+b_{i2}y_2,\ i = 1,\dots,r \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_{i1}y_1+b_{i2}y_2,\ i = r+1,\dots,m \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 4,\ x_j \geq 0\ \forall j \\ y_1, y_2 \in \mathrm{IR} \end{cases}$$

4. Scrivere il duale del problema dei trasporti posto nella seguente forma:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1,\ldots\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \, , \; j = 1,\ldots\ldots,n \\ x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \; \forall j \end{cases}$$

5. Scrivere il duale del problema di assegnamento posto nella seguente forma :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\ldots\ldots,m \\ x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \, , \; \forall j \end{cases}$$

6. Dato il problema

$$\text{A)} \qquad \begin{cases} \min 10y_1 + 4y_2 + 6y_3 \\ 2y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 + y_3 \geq 5 \, , \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

si scrive il suo duale, lo si risolva con l'algoritmo del simplesso e tramite le (8.7) si determini la tabella del simplesso ottima per A); in particolare trovare una s.o. di A).

7. Come il precedente rispetto ai problemi

a) $\begin{cases} \min 7y_1 + 12y_2 + 4y_3 \\ y_1 + 2y_2 \geq -2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \min 7y_1 + 8y_2 + 4y_3 \\ y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \min 3y_1 + y_2 + 5y_3 \\ -2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq -4 \\ y_1 - y_2 - y_3 \geq 1 \\ y_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \min 3y_1 + y_2 + 9y_3 \\ -2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ y_1 - y_2 - y_3 \leq 2 \\ y_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$

8. Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots\ldots, 4 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema duale

b) Utilizzare la soluzione del duale per risolvere il primale.

9. Dati i seguenti problemi :

a) $\begin{cases} \max 3x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \min -3x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \min x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \max 2x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$;

i) scrivere il duale di ciascun problema;

ii) risolvere geometricamente ogni problema duale ed indicare cosa da esso si può dedurre sul problema primale.

10. Applicare il teorema degli scarti complementari per trovare la s.o. del duale del problema

$$\begin{cases} \max x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{, la cui s.o. è } \bar{x} = (0,4).$$

11. Dato il problema

$$\begin{cases} \max 3x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \geq -3 , \ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

si verifichi, utilizzando il teorema degli scarti complementari, se $\bar{x} = (11/3, 7/3)^T$ è s.o.

12. Come nell'esercizio n. 11 per il problema:

$$\begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 , \ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

con $\bar{x} = (7/2, 5/2)^T$.

13. Come nell'esercizio n. 11 per il problema :

$$
\begin{array}{l}
\min\ -2x_1 + 13x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 5x_6 + 10x_7 \\
\left\{
\begin{array}{l}
x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 + x_6 - 4x_7 = 5 \\
x_1 + 7x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 3x_7 \geq -1 \\
5x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 - 2x_7 \leq 5 \\
3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 = 2
\end{array}
\right. \\
x_i \geq 0 , \quad i = 1, \ldots\ldots, 7
\end{array}
$$

con $\bar{x} = (6,0,1,0,1,0,0)^T$.

14. Come nell'esercizio n. 11 per il problema :

$$
\begin{array}{l}
\max\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + x_6 - x_7 \\
\left\{
\begin{array}{l}
x_1 + x_2 - x_4 + 2x_6 - 2x_7 \leq 6 \\
x_2 - x_4 + x_5 - 2x_6 + 2x_7 \leq 4 \\
x_2 + x_3 + x_6 - x_7 \leq 2 \\
x_2 - x_4 - x_6 + x_7 \leq 1
\end{array}
\right. \\
x_i \geq 0 , \quad i = 1, \ldots\ldots, 7
\end{array}
$$

con $\bar{x} = (7,0,5/2,0,3,0,1/2)^T$.

15. Si consideri il problema :

$$
\begin{array}{l}
\min\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + 13x_6 + 2x_7 \\
\left\{
\begin{array}{l}
x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 + 5x_6 + x_7 = 11 \\
-2x_2 + 2x_4 - x_5 - x_6 = -4 \\
x_1 + x_2 - x_4 + x_5 - 3x_6 + 2x_7 = 4 \\
x_i \geq 0 , \quad i = 1, \ldots\ldots, 7
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Calcolare la soluzione del primale e del duale in corrispondenza del vettore delle variabili di base (x_3, x_5, x_1). E' una base ottima? Caratterizza l'insieme delle s.o. di questo problema utilizzando il teorema degli scarti complementari.

16. Come l'esercizio precedente per il problema:

$$\begin{cases} \min 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 5x_5 + 4x_6 - 2x_7 - 3x_8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_5 + x_6 + x_7 \qquad = 9 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 + x_6 \qquad\qquad = 5 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 \qquad\qquad\qquad = 2 \\ x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots\dots, 8 \end{cases}$$

dove adesso il vettore delle variabili di base è (x_5, x_2, x_3, x_8).

17. Dato il problema dei trasporti :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,3 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j \quad j = 1,\dots,4 \ ; \ x_{ij} \geq 0 \ \forall i, \forall j \end{cases}$$

dove $C = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 & 8 \\ 19 & 5 & -2 & 12 \\ 5 & 36/5 & -9 & 3 \end{bmatrix}$, $a = (3,3,4), b = (2,3,2,3)$

trovare una s.o. usando il teorema degli scarti complementari, sapendo che $\bar{u} = (0,3,-4)$, $\bar{v} = (7,2,-5,7)$ è una s.o. del duale.

18. Dato il seguente problema :

$$
\begin{cases}
\min -x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_5 \\
x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 2x_6 = 3 \\
x_1 + x_2 - x_4 - 3x_5 + 3x_6 + x_7 = 7 \\
-x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 5x_5 - 2x_6 \leq -4 \\
x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \ldots\ldots, 7
\end{cases}
$$

a) verificare se $\bar{x} = (3,4,0,0,0,0,0)^T$ è s.o., usando il teorema degli scarti complementari ;

b) tramite i risultati del punto precedente caratterizzare l'insieme delle s.o. ;

c) come influisce su tale insieme il fatto che la 5a. colonna è combinazione lineare della 1a. e della 2a. ?

19. Dato il problema :

$$
\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{5} c_i x_i \\
2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\
-x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\
x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \ldots\ldots, 5
\end{cases}
$$

la tabella

	5	3	1	0	0	3
x_4	7	0	7	0	1	2
x_3	2	−1	3	1	0	1

ed il vettore $\bar{y} = (-1,-1)$, si determini per quali valori dei c_i, $i = 1,\dots\dots,5$, la tabella data risulta ottima per il problema ed $\bar{y}$ è s.o. del duale.

20. Come l'esercizio precedente per il problema

$$\min \sum_{i=1}^{5} c_i x_i$$

$$\begin{cases} x_1 \quad -2x_3+5x_4+\ x_5 = 4 \\ \quad x_2+3x_3-\ x_4-2x_5 = 3 \\ x_i \geq 0 \ , \quad i = 1,\dots\dots, 5 \end{cases}$$

dove ora la tabella è

	19	0	10/3	0	44/3	1/3
x_1	6	1	2/3	0	13/3	−1/3
x_3	1	0	1/3	1	−1/3	−2/3

ed $\bar{y} = (-3,-7/3)$.

21. Dato il seguente problema :

$$\min \sum_{j=1}^{5} c_j x_j$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad +2x_4+\ x_5 = b_1 \\ \qquad x_2 \qquad +\ x_4-\ x_5 = b_2 \\ -2x_1+3x_2+x_3-\ x_4+2x_5 = b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,\dots\dots, 5 \end{cases}$$

determinare c_j, b_i, $j = 1,\ldots\ldots,5$, $i = 1,2,3$, in modo che siano verificate contemporaneamente le seguenti condizioni :

$\bar{x}^T = (1,1,1,0,0)$; $\hat{x}^T = (1/2,5/6,2/3,1/6,\ 0)$ siano s.o. ;
$\bar{y}^T = (1,1,1)$ sia s.o. del duale .

22. In figura 49 sono indicate la regione ammissibile, il gradiente, le variabili di scarto e le variabili duali di un problema di programmazione lineare del tipo :

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

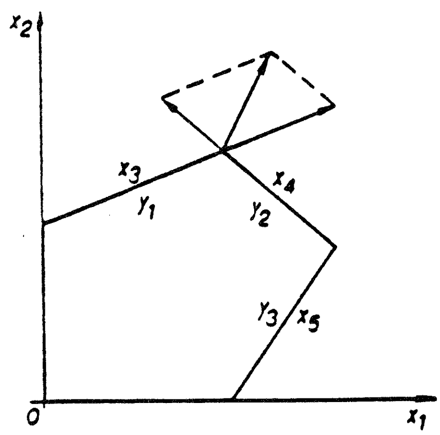


Fig. 49

a) Nella s.o. del primale è $\bar{c}_3 > \bar{c}_4$? Dare tutte le possibili indicazioni sul valore assunto dalle variabili duali nella s.o. Come si modifica la s.o. duale nel caso in cui il gradiente sia normale al vincolo $x_4 = 0$?

b) Discutere il caso in cui la s.o. sia $y_1 = y_2 = y_3 = 0$; indicare la s.o. del primale ed un possibile gradiente per la f.o.

23. Si consideri il problema min $c^T x$ soggetto ai vincoli $\ell_i \leq A_i x \leq k_i$, $i = 1,\dots\dots,m$, dove A_i è la i–ma riga di una matrice A mxn ed $\ell = (\ell_1,\dots\dots,\ell_m)^T$ e $k = (k_1,\dots\dots,k_m)^T$ sono vettori assegnati. Scrivere il duale di tale problema e, tramite il teorema degli scarti complementari, le condizioni di ottimalità per il primale ed il duale. Quali condizioni su A garantiscono che il duale è ammissibile ?

24. Si consideri il problema: min $z(x) = c^T x$ con i vincoli $Ax = b$. Scrivere il suo duale e dimostrare che se il problema è ammissibile, allora il minimo valore di z(x) in questo problema è finito se e solo se c può essere espresso come combinazione lineare delle righe di A. Usare tale risultato per dimostrare che o z(x) è costante o non è limitata inferiormente sull'insieme delle soluzioni di questo problema.

25. Siano A,b,c matrici date di ordine mxn, mx1 e 1xn. Dimostrare che il problema :

$$\begin{cases} \min c^T x - b^T y \\ Ax \geq b \\ -A^T y \geq -c \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

o non è ammissibile o la f.o. ha valore ottimo uguale a zero.

26. Sia dato il problema :

$$\begin{cases} \min \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\ x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ i = 1,\ldots\ldots,m \\ x_j \geq 0 \ , \ j = 1,\ldots\ldots,n \end{cases}$$

con $b_i > 0 \ \forall \ i$ e $c_j \geq 0$ per $j = m + 1,\ldots\ldots,n$. Scrivere il duale di tale problema e dimostrare che esso ha un'unica s.o. e determinarla.

27. Si consideri il problema :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \ , \ x \geq 0 \end{cases}$$

dove A, matrice mxn, ha rango m. Sapendo che tale problema ha una base ottima non degenere, dimostrare, usando i risultati dell'esercizio n. 26 che il suo duale ha un'unica s.o.

28. Si consideri il problema min $c^T x$ con i vincoli $Ax = b$, $x \geq 0$. Supponiamo che tale problema ed il suo duale siano ammissibili e sia $\bar{y}$ la s.o. del duale.

a) Se la k-ma equazione del primale è moltiplicata per $\mu \neq 0$, determinare una s.o. w del duale di questo nuovo problema.

b) Supponiamo, nel problema originario, di aggiungere alla r-ma equazione la k-ma moltiplicata per μ; qual'è la s.o. w del corrispondente problema duale ?

c) Supponiamo, nel problema originario, di aggiungere al vettore c la k-ma riga di A moltiplicata per μ; qual'è una soluzione del corrispondente problema duale ?

29. Sia dato il problema :

$$\begin{cases} \min x_1+x_2+x_3 \\ \quad -x_2+x_3 \geq -1 \\ x_1 \quad -x_3 \geq -1 \\ -x_1+x_2 \quad \geq -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dimostrare che esso è equivalente al suo duale.
Tali tipi di problemi sono chiamati **auto-duali.**
Supponendo che A sia una matrice quadrata, ottenere delle condizioni sufficienti su c,A,b affinché il problema

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \quad , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

sia **auto-duale.**

30. Fornire un esempio in cui :

a) $S = \phi$, $S^* \neq \phi$;

b) $S \neq \phi$, $S^* = \phi$;

c) $S = \phi$, $S^* = \phi$.

31. Dimostrare che se il primale ha s.o. alternative, il duale ha una s.b. ottima degenere.

ESERCIZI

Formulare come problemi di programmazione matematica i seguenti esercizi :

1. Due isole sono identificate con i seguenti insiemi di $\mathbb{R}^2$:

   $$A = \left\{ (x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \leq 0 \right\},$$

   $$B = \left\{ (x_1, x_2) : \ (x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 3)^2 - 4 \leq 0 \right\}$$

   Si vuole costruire un ponte fra le due isole che sia di minima lunghezza. Formalizzare il problema .

2. Tra tutti i rettangoli aventi i vertici sulla curva Γ di equazione $x_1^2 + 3x_2^2 = 9$, determinare quelli di area massima.

3. Tra tutti i cilindri di assegnato volume, determinare quello di minima superficie totale.

4. Tra tutti i rettangoli di area assegnata, determinare quello avente minimo perimetro.

5. Al tempo $t = 0$ la nave A si trova a 54 km a nord rispetto alla nave B e sta navigando uniformemente verso est alla velocità di 18 km/h, mentre la nave B sta navigando verso nord uniformemente alla velocità di 12 km/h. Supponendo piana la superficie del mare, in quale istante le due navi si troveranno alla minima distanza ?

6. Un'industria possiede tre zone di consumo, che si suppone

identificabili con i punti (x_i, y_i), $i = 1,2,3$. Il suo prodotto è richiesto annualmente dai tre punti rispettivamente nelle quantità d_i, $i = 1,2,3$.
L'industria intende costruire una filiale, che identifica col punto (x,y). Il costo annuale di trasporto dalla filiale alla zona i—ma è

$$c_i d_i[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2], \quad i = 1,2,3 .$$

Determinare la localizzazione della filiale, in modo che sia minimo il costo totale. Formalizzare il problema.

7. Un'industria fabbrica due prodotti P_1 e P_2, e li vende in regime di monopolio. Il costo di produzione è rispettivamente 100 e 150 al kg. Le quantità di P_1 e P_2 richieste sono rispettivamente

$$d_1 = 5(p_2 - p_1)\,; \; d_2 = 32 + 5p_1 - 10p_2 ,$$

dove p_i è il prezzo di 1 kg. di P_i. Dire come il monopolista deve fissare i prezzi p_1 e p_2, se vuole rendere massimo il ricavo complessivo .

8. Un imprenditore vuole massimizzare il proprio profitto combinando le m risorse a sua disposizione nella produzione di n beni di consumo. La disponibilità della risorsa i-esima ($i = 1,\ldots,m$) è b_i, mentre la quantità della risorsa i-esima ($i=1,\ldots\ldots,m$) impiegata nella produzione di una unità del bene j-esimo ($j = 1,\ldots\ldots,n$) è a_{ij}. Indichiamo con la variabile x_j ($j = 1,\ldots\ldots,n$) la quantità del bene j-esimo prodotto. Supposto che il prodotto unitario p_j, relativo al j-esimo bene prodotto, decresca al crescere

di x_j secondo la legge

$$p_j = c_j - d_j x_j\,, \quad c_j,\ d_j > 0, \quad j = 1,\ldots\ldots,n\ ;$$

si vuole conoscere un piano di produzione che massimizzi il profitto totale.

9. Un finanziere ha a disposizione una certa somma di denaro M che decide di investire su n diversi tipi di titoli. L'interesse annuo, dato dall'investimento di x_j lire sul j-esimo titolo, è dato da $f_j(x_j)$. Determinare l'investimento sugli n titoli che porta al massimo interesse annuo.

Risolvere geometricamente i seguenti problemi:

10.
$$\begin{cases} \max\,(x_1 + 2x_2^2) \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} \max\,(x_1 + 2x_2^2) \\ e^{x_1+x_2} \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} \max\,(3x_1 + 5x_2) \\ x_1 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 10 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

13. **Risolvere geometricamente l'esercizio n. 4 .**

14. $$\min\,[4(x_1-6)^2+6(x_2-2)^2]$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

15. $$\max\,[3(x_1-3/2)^2+6(x_2-3/2)^2]$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

16. $$\max\,(8x_1^2+2x_2^2)$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \geq 1 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} \max\,(x_1\, x_2) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

18. Risolvere geometricamente l'esercizio n. 2

19. Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, determinare quello di area massima. Formalizzare e risolvere geometricamente il problema.

20.
$$\max \frac{x_1 + 2x_2}{4x_1 + 3x_2 + 3}$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

21.
$$\begin{cases} \max \dfrac{3x_1 + 2x_2 - 1}{-2x_1 - 5x_2 + 6} \\ 10x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} \max \dfrac{2}{x_1 + 2x_2 + 4} \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

23.
$$\max \frac{2x_1 + 4x_2 - 5}{x_1 + 2x_2 + 4}$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

24. Risolvere geometricamente i seguenti problemi.

a) $\max\limits_{x \in S} \dfrac{x_1 - 2x_2 - 4}{x_1 + 3x_2 + 1}$ b) $\max\limits_{x \in S} \dfrac{-\frac{1}{3}x_1 - x_2 + 1}{2x_1 + x_2 + 4}$

c) $\max\limits_{x \in S} \dfrac{4x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 2}{x_1 - 3x_2 + 10}$ d) $\max\limits_{x \in S} \dfrac{2x_1 + x_2 - 3}{x_1 - x_2 + 6}$

dove S è definito da:

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Risolvere geometricamente i seguenti problemi.

25.
$$\begin{cases} \min \dfrac{2x_1 + x_2 + 4}{-x_1 + 2x_2 + 1} \\ -x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

26.
$$\begin{cases} \min \dfrac{5x_1 + 2x_2}{x_1 + 8x_2 + 1} \\ 3x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

27.
$$\min (3x_1^2 + 2x_2^2 - 20x_1 + 10x_2)$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

28.
$$\begin{cases} \min (x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2) \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ESERCIZI

29. Si consideri il problema

$$\begin{cases} \max f(x) \\ h_i(x) = 0 \quad i = 1,\ldots\ldots,m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dimostrare che un vincolo di uguaglianza può essere equivalentemente espresso con due vincoli di disuguaglianza dello stesso tipo.

30. Si consideri il problema

$$\begin{cases} \max f(x) \\ g_i(x) \geq 0 \quad i = 1,\ldots\ldots,m \end{cases}$$

a) Dimostrare che un vincolo di disuguaglianza può essere espresso equivalentemente con un vincolo di uguaglianza.

b) Determinare sotto quali condizioni il vincolo $g_i(x) \geq 0$, $(g_i(x) \leq 0)$ è equivalente a $g_i(x) - y = 0$ $(g_i(x) + y = 0)$.

c) Dimostrare che il problema dato è equivalente ad un problema del tipo :

$$\begin{cases} \max f(x) \\ g_j(x) = 0 \quad j \in I_1 \\ g_j(x) = 0 \quad j \in I_2 \end{cases} \qquad \text{con } I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots\ldots, m\}$$

d) Dimostrare che il problema dato è equivalente ad un problema del tipo

$$\begin{cases} \max f(x) \\ g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \ldots\ldots, m \end{cases}$$

31. Dimostrare in base alle definizioni che:

a) $x^\circ = (0,0)$ è punto di minimo assoluto per la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3\,;$$

b) $x^\circ = (1,3)$ è punto di minimo assoluto per la funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + 1\,;$$

c) $x^\circ = (0,-2)$ è punto di minimo assoluto per la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 + 6\,;$$

d) $x^\circ = (1,-3)$ è punto di massimo assoluto per la funzione

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1 - 3 - x_2^2 + 6x_2 - 10\,.$$

32. Verificare che $x^\circ = (0,0)$ non è né punto di minimo né punto di massimo per le seguenti funzioni definite in un intorno dell'origine:

a) $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$;

b) $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$;

c) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1}{x_2 + 1}$.

33. Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni:

a) $f(x_1,x_2) = 3x_1 + 4x_2 - 1$;

b) $f(x_1,x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 - 1$;

c) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$;

d) $f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;

e) $f(x_1,x_2) = e^{x_1^2 + x_2}$;

f) $f(x_1,x_2) = \log(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2)$

g) $f(x_1,x_2) = (x_1 - 1)^2 (x_2^2 + x_2) + x_1^2$;

h) $f(x_1,x_2) = (x_1 - 1)^2 e^{x_2} + x_1$.

34. **Calcolare il gradiente delle funzioni di cui all'esercizio 33 nel punto x° essendo:**

$x^\circ = (1,2)$; $x^\circ = (0,-2)$; $x^\circ = (3,0)$.

Rappresentare geometricamente il gradiente.

35. Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni:

a) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$;

b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_1x_3 + x_2x_3^3$;

c) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_3^2 - 3x_1x_2^2x_3 - 2x_2$.

36. Calcolare il gradiente delle funzioni di cui all'esercizio 35 nel punto x°, essendo:

$$x^\circ = (1,-1,1)\ ; \qquad x^\circ = (0,0,0)\ ; \qquad x^\circ = (2,0,-3)$$

37. Si consideri la funzione $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$; determinare la restrizione di f sulla retta r di equazione:

a) $x_1 + x_2 = 1$; b) $x_1 - 2x_2 = 0$; c) $-3x_1 + 2x_2 = 1$;

d) sulla retta r passante per (2,1) e parallela all'asse x_1 ;

e) sulla retta r passante per (−3,3) e parallela all'asse x_2 .

38. Data la funzione $f(x_1,x_2) = (2x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$ e la retta r di equazione $x = x^\circ + tu$, $t \in \mathbb{R}$, con $x^\circ = (-1,3)$, $u = (2,-2)$, calcolare:

a) la restrizione $\varphi(t)$ di f su r ;

b) $f(x^\circ + tu)$;

c) Verificare che, detta $\varphi(t) := f(x^\circ + tu)$ la restrizione della funzione f sulla retta di eq. $x = x^\circ + tu$, con $t \in \mathbb{R}$, risulta

$$\varphi'(t) = \nabla f(x^\circ + tu) \cdot u$$

$$\varphi'(0) = \nabla f(x^\circ) \cdot u$$

39. Data la funzione $f(x_1,x_2) = x_1^3 x_2 + 2x_2^2$ e la retta r di equazione $x = x^\circ + tu$, $t \in \mathbb{R}$, essendo $x^\circ = (1,0)$, $u = (4,-1)$, si consideri il punto di r corrispondente a $t = 2$. Calcolare $\varphi'(2)$ tramite la 9.5 a).

40. Calcolare le derivate seconde pure e miste delle funzioni di cui all'esercizio 33.

41. Calcolare le derivate seconde pure e miste delle funzioni di cui all'esercizio 35.

42. Calcolare le derivate seconde pure e miste delle seguenti funzioni:

a) $f(x_1,x_2) = \dfrac{2x_1 - x_2}{x_1}$;

b) $f(x_1,x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$;

c) $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 x_2 + 4x_2 - 5x_1 x_3^2 - 2x_3 x_2$;

d) $f(x_1,x_2,x_3) = -x_1 x_2 - \dfrac{1}{x_1 x_3} + 2x_2$.

43. Calcolare la matrice hessiana delle seguenti funzioni:

a) $f(x_1,x_2) = -2x_1 x_2$;

b) $f(x_1 x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$;

c) $f(x_1,x_2) = x_1 x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$;

d) $f(x_1,x_2) = x_1^3 - 2x_1 x_2^2$

— 97 —

44. Data la funzione $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^3$, calcolare $H(x^\circ)$ nei seguenti casi:

a) $x^\circ = (1,0)$; b) $x^\circ = (0,0)$; c) $x^\circ = (-2,3)$

ESERCIZI SUL GRADIENTE

45. Si consideri la funzione $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$, la retta di livello $2x_1 + x_2 = 8$ ed il punto $x^\circ = (3,2)$ appartenente a tale retta. Calcolare $\nabla f(x^\circ)$ e verificare geometricamente che esso è ortogonale alla retta di livello.

46. Come l'esercizio n. 45 nei seguenti casi:

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$, curva di livello $x_1^2 - x_2 = 0$, $x^\circ = (-2,4)$;

b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, curva di livello $x_1^2 + x_2^2 = 25$, $x^\circ = (3,4)$;

c) $f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$, retta di livello $-x_1 + x_2 = 1$, $x^\circ = (1,2)$.

47. Trovare l'equazione della retta tangente alle seguenti curve nei punti indicati:

a) $x_1^3 - x_1 x_2 = 0$, $x^\circ = (0,-1)$;

b) $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1$, $x^\circ = (1,1)$.

48. Trovare l'equazione del piano tangente alle seguenti superfici nei punti indicati:

a) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, $x^\circ = (1,0,-1)$;

b) $x_1 x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_2 x_3 = 2$, $x^\circ = (2,-1,0)$.

49. Trovare la retta tangente alla curva $x_1^2 - x_1 x_2 + 4x_2^2 = 4$, parallela alla retta $x_1 + 7x_2 = 3$.

50. Come l'esercizio n. 49 dove la curva è $-4x_1^2 + x_2 = -2$, e la retta è $-8x_1 + x_2 = 0$.

51. Trovare il piano tangente alla superficie $x_1^3 + 3x_1x_3 - x_2^2 = 7$ e parallelo al piano $9x_1 + 3x_3 = 0$.

52. Come nell'esercizio n. 51 dove la superficie è $x_1^2 - 2x_2 + x_3 = -2$ ed il piano è $-4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$.

53. Trovare la retta tangente alla curva $(x_1 - 2x_2)^2 = 16$ e perpendicolare alla retta $x = x^\circ + tu$, $t \in \mathbb{R}$, essendo $x^\circ = (-2,3)$, $u = (2,-4)$.

54. Come l'esercizio n. 53 essendo la curva $2x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2 = 0$ e la retta $x = x^\circ + tu$, $t \in \mathbb{R}$, dove $x^\circ = (3,-4)$, $u = (0,1)$.

55. Trovare il piano tangente alla superficie $x_1 x_3 - x_1 x_2 + 2x_2 = 0$ e perpendicolare alla retta $x = x^\circ + tu$, $t \in \mathbb{R}$, essendo $x^\circ = (1,0,1)$, $u = (-2,2,1)$.

ESERCIZI

56. Trovare i punti critici delle seguenti funzioni definite in $\mathbb{R}^2$:

a) $f(x_1,x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$; b) $f(x_1,x_2) = -x_1^2 + 2x_2^2$

c) $f(x_1,x_2) = -2x_1x_2$; d) $f(x_1,x_2) = x_1^2 - 4x_2^2$.

Dire inoltre ricorrendo alla sola definizione, quali dei punti trovati sono anche punti di massimo o di minimo locale.

57. Trovare i punti di massimo e di minimo locali delle seguenti funzioni :

a) $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 2x_2 + 1$;

b) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$;

c) $f(x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2)\,e^{-x_1-x_2}$;

d) $f(x_1,x_2)=(x_1-1)^2-2x_2^2$;

e) $f(x_1,x_2)=x_1^3\,x_2^2\,(6-x_1-x_2)$;

f) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1\,x_2+x_2^2-2x_1-x_2$;

g) $f(x_1,x_2)=e^{x_1^2+x_2^2}$.

58. Determinare i punti di massimo e minimo globali delle seguenti funzioni :

a) $f(x_1,x_2)=x_1+2x_2$; b) $f(x_1,x_2)=3x_1-x_2$;

c) $f(x_1,x_2)=-x_1+x_2+3$; d) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$,

definite sul quadrato :

$$Q=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq x_1\leq 1\,;-1\leq x_2\leq 1\right\}.$$

59. Come l'esercizio n. 58 dove si sostituisca il quadrato Q con il triangolo di vertici $A=(0,0)$, $B=(2,0)$, $C=(0,4)$.

60. Come l'esercizio n. 58 rispetto alle funzioni :

a) $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^3$;

b) $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1\,x_2+2x_1+2x_2$

e al quadrato

$$Q = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq 6 \} .$$

61. Risolvere, utilizzando il calcolo differenziale a più variabili, i problemi risolti geometricamente in 9.1 .

ESERCIZI

62. Risolvere, utilizzando le condizioni di Kuhn–Tucker, i seguenti problemi:

a) $\begin{cases} \max \dfrac{x_1 - 2x_2 - 12}{2x_1 + x_2 + 1} \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \, , \, x_2 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 - 14x_1 - 24x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ x_1 \, , \, x_2 \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \max -x_1^2 - x_2^2 + 12x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ x_1 \, , \, x_2 \geq 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \max x_1^2 - x_2 \\ 4x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \min x_1^2 + 2x_2^2 \\ x_1 + 3x_2 \geq 11 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$

63. Dato il problema

$$\begin{cases} \max x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \leq 3, \; x_1 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolverlo geometricamente con le curve di livello ;

b) risolverlo con il metodo delle restrizioni ;

c) verificare i risultati ottenuti tramite le condizioni di Kuhn– Tucker .

64. Come l'esercizio precedente per il problema

$$\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 + 1 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

65. Determinare i punti di massimo e minimo locali e globali della funzione $f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt[3]{-3x_1^2 + x_2^2 + x_3}$, definita sul segmento di estremi: $A = (0,-1,0)$, $B = (3,5,6)$.

66. Si consideri la funzione $f(x_1,x_2) = x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_1 + 8x_2$ definita su

$$S = \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 \geq x_1^2, \; x_2 \leq 4 \right\} .$$

a) verificare che f ha un solo punto critico $\bar{x}$;
b) verificare, con opportune restrizioni, che $\bar{x}$ non è né punto di massimo né punto di minimo locale;
c) determinare i punto di minimo e di massimo assoluto di f su S;
d) verificare che i punti trovati in c) soddisfano le condizioni di Kuhn–Tucker.

67. Rappresentare nel piano l'insieme

$$S = \left\{ (x_1,x_2) : g_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 \leq 20; \; g_2(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2 \leq 0 \right\}$$

e successivamente:

a) dire se i vettori $\nabla f(P)$, $\nabla g_1(P)$, $\nabla g_2(P)$ sono linearmente indipendenti, essendo $P = (2,4)$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 8x_2$;

b) dire se $\nabla f(P)$ è combinazione lineare non negativa di $\nabla g_1(P)$ e $\nabla g_2(P)$;

c) dire se P soddisfa le condizioni di Kuhn–Tucker;

d) determinare il massimo ed il minimo assoluto di f su S per via geometrica e per via analitica.

68. a) Calcolare il gradiente della funzione

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 e^{-x_2^2 - x_3^2} + x_1 x_3$$

nel punto $x^\circ = (1,0,0)$;

b) verificare che la restrizione $g(x_2)$ della funzione f sulla retta r è data da $g(x_2) = x_2 e^{-2x_2}$, essendo r l'intersezione del piano $x_1 = 0$ con il piano passante per x° e ortogonale a $\nabla f(x^\circ)$.

69. Determinare i punti di massimo e di minimo globale della funzione

$$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 3}$$

definita sul triangolo T di vertici $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,6)$ mediante:

a) le curve di livello della funzione;

b) il metodo delle restrizioni;

c) le condizioni di Kuhn–Tucker.

Verificare successivamente che $\nabla f(1,3)$ è ortogonale alla curva di livello della funzione $f(x_1, x_2)$ passante per $(1,3)$.

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

1. Risolvere con il metodo di Jordan i seguenti sistemi :

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_2 - 2x_4 = -5 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$

2. Determinare con il metodo di Jordan l'inversa delle seguenti matrici :

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -8 & 4 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \\ -1 & 7 & 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Trovare l'inversa delle seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Determinare, se esiste, l'inversa delle seguenti matrici :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Risolvere i sistemi lineari aventi come matrice dei coefficienti delle incognite quelle di cui all'Ex. 4, e per termini noti rispettivamente

$(2,4,-2)$, $(17,10,1)$, $(0,-3,0)$
$(6,-1,3,1)$, $(3,2,0,-4)$.

6. Una azienda agraria intende coltivare orzo, frumento ed avena su una estensione di 30 ettari che debbono essere messi tutti a coltura.
Però mettere a coltura un ettaro richiede una spesa di Lire 200.000 se di orzo, L. 300.000 se di frumento, L. 100.000 se di avena su una disponibilità di L. 7.000.000.

Inoltre le operazioni di semina e concimazione per un ettaro di terreno richiedono 10 ore di lavoro per l'orzo, 40 per il frumento, 20 per l'avena su una disponibilità totale di 700 ore. Sapendo che un ettaro frutta 3 milioni se ad orzo, 4 se a frumento, 2 se ad avena, determinare come debbano essere ripartite le colture per ottenere il massimo ricavo.

7. Una piccola fabbrica produce due tipi di armadi uno grande ed uno piccolo la cui fabbricazione richiede prima un lavoro di taglio del legno poi un lavoro di montaggio e lucidatura. Gli armadi grandi richiedono 3 ore per il taglio, quelli piccoli 1 ora, e la fabbrica dispone di macchine per un totale di ore 6 al giorno.
Gli armadi grandi richiedono 4 ore di lavoro per il montaggio e la lucidatura, quelli piccoli 2 ore su un totale di 10 ore di mano d'opera giornaliera disponibili.
Poiché gli armadi grandi vengono venduti a L. 250.000 e quelli piccoli a L. 120.000 ciascuno, quale quantità di ciascun tipo deve essere prodotta giornalmente per ottenere il maggior ricavo ?

8. Da 2 magazzini si deve trasportare della merce a 3 punti di vendita. La disponibilità dei magazzini è rispettivamente 10, 20. La richiesta nei punti di vendita è rispettivamente 8, 7, 15. Il costo unitario di trasporto dal magazzino i al punto di vendita j è indicato nella seguente tabella

i \ j	1	2	3
1	5	3	8
2	2	4	5

i \ j	1	2	3
1	8	4	2
2	3	5	5

?

Formulare e risolvere il relativo problema dei trasporti.

9. Risolvere i seguenti problemi :

a)
$$\begin{cases} \max 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots\ldots, 4 \end{cases}$$
;

b)
$$\begin{cases} \min 3x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \max 2x_1 + x_2 \\ 20x_1 - 10x_2 \leq 45 \\ -14x_1 + 20x_2 \leq 53 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
;

d)
$$\begin{cases} \max x_1 + 2x_2 \\ -10x_1 + 20x_2 \leq 45 \\ 20x_1 - 14x_2 \leq 53 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \min -2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 9x_2 \geq 14 \\ x_1 - x_2 \leq 3/2 \\ 4x_1 - 2x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
;

f)
$$\begin{cases} \min -2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 9x_2 \geq 27 \\ x_1 - x_2 \leq 5/2 \\ 4x_1 - 2x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

10. Si consideri il problema :

$$\begin{cases} \min - x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere geometricamente il problema .

b) Utilizzando a) costruire una possibile tabella ottima del problema.

11. Trasformare i seguenti problemi in problemi di programmazione lineare equivalenti. Si risolvano quindi con il metodo del simplesso.

a) $\min\ [z = \max(x_1 - 2x_2, -x_1 + 3x_2)]$;
$x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1, x_2 \geq 0$

b) $\min\ [z = \max(2x_1 + x_2, -3x_1 + x_2)]$
$3x_1 + 2x_2 \geq 4$, $x_1, x_2 \geq 0$.

12. Risolvere con l'algoritmo duale del simplesso i seguenti problemi:

a) $$\begin{cases} \min 4x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$;

b) $$\begin{cases} \min 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \leq 4 \\ x_i \geq 0 , \quad i = 1,\dots\dots,5 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \min 2x_1 + 5x_2 \\ 6x_1 + 5x_2 \geq 30 \\ -24x_1 + 14x_2 \geq 33 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$;

d) $$\begin{cases} \min 5x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \geq 30 \\ 14x_1 - 24x_2 \geq 33 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} \min 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \leq 3 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,5 \end{cases}$$;

f) $$\begin{cases} \min -2x_1 - x_2 - 8x_4 + 2x_5 - 3x_7 \\ 3x_1 \qquad + x_3 + 16x_4 - 2x_5 + 5x_6 + 4x_7 = 18 \\ 2x_1 \qquad + x_3 + 11x_4 - x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 6 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,\dots\dots,7 \end{cases}$$;

usare (x_1, x_2, x_3) come base iniziale .

g) $$\begin{cases} \min -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + 9x_5 + 8x_6 - 9x_7 + 5x_8 \\ x_1 \qquad + x_4 - 2x_5 + x_6 + x_7 - 2x_8 = -3 \\ \quad x_2 \quad - x_4 + x_5 + x_6 - 3x_7 - x_8 = -14 \\ \qquad x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 - x_7 + x_8 = -5 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,\dots\dots,8 \end{cases}$$;

usare (x_1, x_2, x_3) come base iniziale .

h) $$\begin{cases} \min -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 - 10x_6 \\ \qquad 5x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 - 9x_6 - 4x_7 = -8 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 + 8x_6 \qquad = 7 \\ -2x_1 \qquad - x_3 + x_4 \qquad - 5x_6 + 6x_7 = -3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,\dots\dots,7 \end{cases}$$

usare (x_1, x_3, x_4) come base iniziale .

13. Si consideri il problema lineare

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \ , \quad b > 0 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots\dots,n \ . \end{cases}$$

Dire, giustificando la risposta, per quali valori dei coefficienti

a) la regione ammissibile del problema è vuota;

b) la regione ammissibile del problema è non limitata ;

c) il problema non ammette s.o. ;

d) il problema ammette s.o.. Fornire in tal caso una soluzione esplicita del problema.

14. Risolvere col metodo del simplesso (I e II fase) il seguente programma lineare.

$$\begin{cases} \min -x_1 + x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_4 = 17 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_5 = 7 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_6 = 23 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,6 \end{cases}$$

a) Dire se il problema dato ammette o no soluzioni ottime alternative; in caso affermativo determinarne 3.

b) Determinare l'inversa della matrice di base associata alla soluzione ottima trovata in a).

c) Scrivere il problema duale del problema dato e se ne determini, senza risolverlo, una soluzione ottima.

d) Si facciano variare i coefficienti della f.o. nella forma $(-1+2\theta,\ 1+3\theta)$. Dire sotto quali condizioni su θ la s.o. trovata in a) resta ancora ottima. Specificare i casi in cui tale soluzione risulta unica o degenere.

e) Rappresentare geometricamente il problema e se ne determinino, per via geometrica, tutte le soluzioni dualmente ammissibili.

15. Dato il problema:

$$\begin{cases} \min 6x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 \\ a_1 x_1 + x_2 + a_2 x_3 + a_3 x_4 + 2x_5 = b_1 \\ a_4 x_1 - x_2 + a_5 x_3 + a_6 x_4 + 3x_5 = b_2 \\ x_i \geq 0 \; , \quad i = 1,\ldots\ldots,5 \end{cases}$$

e la tabella

	−4/5	3/5	0	3	6/5	0
x_2	14/5	12/5	1	−1	14/5	0
x_5	8/5	−1/5	0	0	3/5	1

a) Determinare i valori di $a_1, \ldots\ldots, a_6, b_1, b_2$ per cui la tabella è ottima per il problema.

b) Si consideri per il problema il caso $a_1 = -3$, $a_4 = 5$, per quali valori di b_1 e b_2 la soluzione associata alla matrice di base formata con le colonne di x_1 e x_2 è degenere e ammissibile?

16. Si consideri il problema lineare :

$$\min x_1 - 3x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \geqslant 3 \\ -9x_1 + 10x_2 \leqslant 1 \\ -6x_1 + 18x_2 \leqslant 29 \\ -3x_1 + 6x_2 \leqslant 7 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

e lo si risolva geometricamente.
Successivamente, dopo aver introdotto le variabili di scarto x_3, x_4, x_5, x_6 rispettivamente al 1°, al 2°, al 3° e al 4° vincolo, si risponda ai seguenti quesiti :

a) Costruire la tabella del simplesso relativa al vettore di variabili non basiche $x_N = (x_4, x_6)$.

b) Dire, utilizzando la tabella, se il vettore $(x_1 = 8/3, x_2 = = 5/2)$ è s.o. del P.L. dato. Giustificare la risposta anche per via geometrica.

c) Determinare una s.o. del P.L. avente $x_2 = 3$.
Risolvere anche per via geometrica.

d) Determinare due s.o. del problema duale.

e) Attraverso la tabella del simplesso relativa al vettore di variabili non basiche $x_N = (x_4, x_5)$ si dimostri che l'ultimo vincolo del P.L. è superfluo e lo si elimini da ora in poi dal problema.

f) Si facciano variare i coefficienti della f.o. nella forma $(1,-3) + \theta(1,1)$. Determinare i valori di θ per i quali si ha stabilità della s.o. e per i quali la s.o. del problema duale è data da $y = (0, 2/17, 5/34)$.

17. Dato il seguente problema:

$$\begin{cases} \min -x_1 -4x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Trovare la soluzione basica corrispondente al vertice (4,5) specificando le variabili basiche e non basiche.

b) Trovare i costi ridotti in funzione delle variabili non basiche di cui al punto a).

c) Risolvere il problema dato con l'algoritmo del simplesso.

d) Scrivere il problema duale del problema dato e se ne determini una soluzione ottima.

e) Si faccia variare il vettore dei termini noti nella forma:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trovare le condizioni su θ affinché la s.o. del problema parametrico coincida con quella trovata in c).

f) Come e) nel caso in cui siano i coefficienti della f.o. a variare nella forma :

$$(-1,-4) + \theta(2,1) .$$

18. Dato il problema :

$$\begin{cases} \min -5 - x_1 + x_4 \\ x_1 - 3x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots\ldots,5 \end{cases}$$

a) rappresentare il problema nello spazio delle variabili x_1, x_2.

b) dire se il problema duale ammette o no soluzioni ottime alternative. In caso affermativo determinare una s.o. alternativa non di base.

c) Si facciano variare i termini noti nella forma (con riferimento ad a))

$$b^T + \theta\,(0,1,0)$$

e si studi, al variare di θ, il minimo della f.o. tracciando il relativo grafico.

d) Interpretare geometricamente i risultati di cui in c).

19. Si consideri il problema lineare

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

dove

$$c^T = (c_1, c_2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$b^T = (25,31).$$

a) Determinare per quali valori di c_1, c_2 il vertice

$$V = (9/2, 11/4)$$

è s.o. unica del problema .

b) Posto $c = (-11,2)$ si tracci il grafico della funzione $z(\theta)$ definita da

$$\begin{cases} z(\theta) = \min c^T x \\ Ax \leqslant b' \\ x \geqslant 0 \end{cases} \qquad b' = b + \theta u \qquad u = (1,0).$$

Determinare successivamente per quali valori di θ il problema duale non ammette s.o.

20. Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \min 3x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4 \\ -x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 , x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Si faccia variare il vettore dei termini noti nella forma $(4,2,5)+\theta\,(2,-1,3)$, si studi la stabilità della s.o. precedentemente trovata e successivamente la funzione $z(\theta)$, $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$.

b) Supponiamo di dover aggiungere al problema iniziale una nuova variabile $y \geq 0$ la cui colonna dei coefficienti è $(2,-3,1)^T$ ed il suo costo nella f.o. è -2. Verificare se la s.o. trovata rimane tale; in caso contrario determinare una nuova s.o.

21. Risolvere il problema :

$$\begin{cases} \min -x_1 - 2x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

e successivamente :

a) Si studi la stabilità della s.o. trovata al variare

i) dei costi nel seguente modo
$(-1,-2)+\theta\,(2,1)$

ii) dei termini noti nel seguente modo
$(6,2,4)+\theta\,(-2,0,1)$;

b) partendo dalla s.o. trovata, determinare una s.b. non ammissibile che sia duale ammissibile ;

c) si scriva il duale del problema e se ne determini la s.o.

21. Si considerino i seguenti problemi di P.L.:

$$\begin{cases} \min -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \\ ax_1 + x_3 - x_4 \leq 1 \\ x_2 - x_4 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 + x_3 + ax_4 \leq 1 \\ x_2 - x_4 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,4 \end{cases}$$

a) Dire per quali valori interi di a i problemi ammettono s. o. finite .

b) Dire per quali valori interi di a si hanno s.o. intere.

23. Si consideri la seguente tabella del simplesso, relativa ad un problema di massimo :

	2	a	0	c	0	0
x_2	1	−1	1	1	0	0
x_4	4	2	0	−1	1	0
x_5	b	7	0	−4	0	1

Determinare a,b,c in modo che

a) la soluzione $\bar{x} = (0,1,0,4,b)$ sia ammissibile ma non duale ammissibile.

b) $\bar{x}$ è s.o., un costo ridotto è nullo e non esistono s.o. alternative.

c) $\bar{x}$ è ammissibile, x_1 è candidata ad entrare in base e la relativa soluzione di base adiacente è degenere.

d) la regione ammissibile sia vuota.

Si assegnino ivalori $a = 3$, $b = 14$, $c = -2$ e si risolva il problema lineare associato alla Tabella del Simplesso.
Successivamente :

e) rappresentare il problema nello spazio delle variabili x_1, x_2.

f) dire se il problema duale ammette o no soluzioni ottime alternative. In caso affermativo determinare una s.o. alternativa non di base.

g) si facciano variare i termini noti nella forma (con riferimento ad e)

$$(1,5,18) + \theta(0,1,0)$$

e si studi, al variare di θ, il massimo della f.o. tracciando il relativo grafico.

h) interpretare geometricamente i risultati di cui in g).

24. Si consideri la seguente tabella ottima di un problema di massimo, con vincoli di tipo $\leq$:

					V. ausiliarie			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
1	0	0	−1	0	1/2	1/5	−1	3
0	1	0	2	1	−1	0	1/2	1
0	0	1	−1	−2	5	−3/10	2	7
0	0	0	−2	0	−2	−1/10	−2	−17

a) indicare il valore ottimo delle variabili ausiliarie del problema duale, giustificando la risposta .

b) se nel problema si inserisce la nuova v. x_q con coefficienti $(2,0,3)^T$ nei vincoli e costo 5, come varia la soluzione ottima.

c) di quanto può essere incrementato al più b_1 (termine noto del 1° vincolo) senza rendere non ammissibile la base indicata.

d) si inserisca il vincolo $x_1-x_2+2x_3 \leq 10$ nel problema. La soluzione indicata è ancora ottima? Se no, riottimizzare.

25. Risolvere i seguenti problemi parametrici per ogni valore reale del parametro :

a) $$\begin{cases} \min 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 \\ 2x_1- x_2+ x_3+ x_4 \leq 2-\lambda \\ x_1+2x_2+ x_3- x_4 \leq 10-2\lambda \\ x_1+ x_2-2x_3- x_4 \leq 3+\lambda \\ x_j \geq 0, \ j=1,\dots\dots,4 \end{cases} ;$$

b) $$\begin{cases} \min (-4+4\lambda)x_4+(3+2\lambda)x_5+(1-2\lambda)x_6 \\ x_1 \qquad -2x_4+x_5+ x_6 = 5 \\ \quad x_2 \quad -2x_4+x_5+2x_6 = 4 \\ \qquad x_3 \qquad +x_5- x_6 = 6 \\ x_j \geq 0 \text{ per ogni } j \end{cases} ;$$

c) $\begin{cases} \min z(\theta) = (2+\theta)x_1 + (3-2\theta)x_2 + (1-\theta)x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \leqslant 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \min z(\theta) = (3+2\theta)x_1 + (1+\theta)x_2 + (2-\theta)x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 3 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \min -x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1-2\theta \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 6+\theta \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 10+3\theta \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \max (1+4\theta)x_1 + (4+2\theta)x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} \min x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \geqslant 17 \\ 2x_1 - 2x_2 \geqslant 1+\theta \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$;

h) $$\begin{cases} \min -2x_1+2x_2-3x_3 \\ 3x_1+\ x_2 \leqslant 1+\theta \\ -2x_1+2x_2+\ x_3 \leqslant 2 \\ -\ x_2+2x_3 \leqslant 3-2\theta \\ x_i \geqslant 0 \quad i=1,2,3. \end{cases}$$;

i) $$\begin{cases} \min \lambda x_1+x_2+x_3+(9\lambda-41)x_4+(15-\lambda)x_5+(20-4\lambda)x_6+(9-\lambda)x_7+(\lambda+2)x_8 \\ x_1+2x_2-3x_4+3x_5+3x_6+5x_7+3x_8 = 22 \\ x_2+x_3-\ x_4+3x_5+3x_6+\ x_7+2x_8 = 12 \\ 2x_2+x_3-2x_4+4x_5+5x_6+3x_7+3x_8 = 21 \\ x_j \geqslant 0 \quad \text{per ogni } j \end{cases}$$;

l) $$\begin{cases} \min \lambda x_1+2\lambda x_2+x_3+(\lambda-9)x_4+(5\lambda+6)x_5+(9-4\lambda)x_6+(4\lambda-3)x_7 \\ x_1+x_3+x_4+2x_5-2x_6+3x_7 = 5 \\ x_3-x_4+\ x_5-\ x_6+2x_7 = 3 \\ x_1+x_2+x_4+3x_5-2x_6+2x_7 = 3 \\ x_j \geqslant 0 \quad \text{per ogni } j \end{cases}$$;

m) $$\begin{cases} \min (1-\lambda)(x_1+x_2+x_3)+(6-4\lambda)x_4+(5-3\lambda)x_5+(4+\lambda)x_6+(2+5\lambda)x_7 \\ x_1+x_2+x_3+4x_4+2x_5-3x_7 = 15 \\ -x_1-x_2-3x_4-\ x_5-2x_6+2x_7 = -12 \\ x_2+x_3+2x_4+3x_5-\ x_6-2x_7 = 13 \\ x_j \geqslant 0 \quad \text{per ogni } j \end{cases}$$;

n) $$\begin{cases} \min x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+\lambda x_8+\mu x_9 \\ x_1-\ x_4-2x_6+4x_7+2x_8+\ x_9 = 4 \\ x_2+2x_4-2x_5+\ x_6+2x_7+4x_8 = 2 \\ x_3+\ x_5+\ x_6+\ x_7+2x_9 = 1 \\ x_j \geqslant 0 \quad \text{per ogni } j \end{cases}$$

26. Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} \min -2x_1 -4x_2 -x_3 -x_4 \\ x_1 + 3x_2 \qquad\quad + x_4 \leq 8 = \text{quantità disponibile del materiale grezzo 1} \\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad \leq 6 = \text{quantità disponibile del materiale grezzo 2} \\ \qquad x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 6 = \text{quantità disponibile del materiale grezzo 3} \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots\ldots, 4 \end{cases}$$

La base A_{B_1} corrispondente al vettore di base (x_1, x_3, x_2) è ottima per il problema.

a) Se la disponibilità di un solo materiale grezzo può essere aumentata, quale deve essere scelto? Perché?

b) Per quale variazione di b_1 (quantità disponibile del materiale grezzo 1) la base A_{B_1} rimane ottima?
Qual'è la s.o. quando $b_1 = 20$?

c) Supponiamo di avere ancora a disposizione 9 unità del materiale grezzo 1 (oltre alle 8 presenti); qual'è il massimo che si può pagare per esse? Perché?

27. Consideriamo il seguente problema della dieta:

	Contenuto nutritivo nei cibi disponibili (unità/kg) VERDURE	PATATE	GRANO	minima richiesta giornaliera
Vitamina A	10	1	9	5
C	10	10	10	50
D	10	11	11	10
Costo (L./kg)	50	100	51	

Siano $x_1 x_2, x_3$ rispettivamente le quantità di verdure, patate e grano incluse nella dieta ed x_4, x_5, x_6 le variabili di scarto rappresentanti rispettivamente l'eccesso di vitamina A, C e D nella dieta. La base A_{B_1} associata al vettore delle variabili di base (x_4, x_1, x_6) è ottima.

a) Trovare le s.o. del primale e del duale associate alla base A_{B_1}.

b) Un nuovo alimento (il latte) diventa disponibile; un litro di latte contiene 0, 10, e 20 unità delle vitamine A, C e D e costa L. 40. Può essere incluso nella dieta? Perché? Qual'è il più alto prezzo del latte che è possibile prendere in considerazione per includerlo nella dieta?

c) Consideriamo di nuovo il problema originario. Un dietologo afferma che la richiesta minima di vitamina A,C e D è in realtà 5, $50+10\,\theta$ e $10+15\,\theta$, dove θ è un parametro non negativo. Trovare $\overline{\theta}$ = massimo valore di θ per il quale A_{B_1} è ancora una base ottima. Qual'è la s.o. se $\theta = \overline{\theta}+1$?

SOLUZIONI DI ALCUNI DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

CAPITOLO I

19. a) Si hanno ∞^1 soluzioni per $k = 0$ date da $x_1 = 3-2x_2$, $x_2 \in \mathbb{R}$.
    b) " " ∞^1 " " $k = 2$ " " $x_1 = 4+x_2$, $x_2 \in \mathbb{R}$.
    c) " " ∞^1 " " $k = -3$ " " $x_1 = 4-x_3$, $x_2 = 1+x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$.
    d) " " ∞^2 " " $k = \pm 2$ " " $x_1 = \dfrac{3-x_3+x_4}{2}$,
    $x_2 = 2+x_3-2x_4$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_4 \in \mathbb{R}$.
    e) Non si hanno soluzioni per $k = 2$; si ha un'unica soluzione per $k \neq 2$ data da $x_1 = \dfrac{10-6k}{k-2}$, $x_2 = \dfrac{k}{k-2}$.
    f) Non si hanno soluzioni per $k = -1$; si hanno ∞^1 soluzioni per $k = 1$; si ha un'unica soluzione per $k \neq \pm 1$.

21. a) Non ha soluzioni.
    b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.
    c) $x_1 = -\dfrac{11}{7}x_3$, $x_2 = -\dfrac{1}{7}x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$.
    d) Non ha soluzioni.
    e) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \dfrac{5}{3}$, $x_4 = -\dfrac{4}{3}$.
    f) $x_1 = -8$, $x_2 = 3+x_4$, $x_3 = 6+2x_4$, $x_4 \in \mathbb{R}$.

g) $x_1 = \dfrac{3x_3 - 13x_4}{17}$, $x_2 = \dfrac{19x_3 - 20x_4}{17}$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_4 \in \mathbb{R}$.

h) Non ha soluzioni .

i) $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5$, $x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$, $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

l) $x_1 = -x_3 + \frac{7}{6}x_5$, $x_2 = x_3 + \frac{5}{6}x_5$, $x_4 = \frac{1}{3}x_5$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_5 \in \mathbb{R}$.

m) Non ha soluzioni.

n) $x_1 = \dfrac{-4x_4 + 3x_5}{8}$, $x_2 = \dfrac{-4x_4 + 5x_5}{8}$, $x_3 = \dfrac{4x_4 - 5x_5}{8}$, $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

o) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5$, $x_5 \in \mathbb{R}$.

p) $x_1 = \dfrac{1 + x_5}{3}$, $x_2 = \dfrac{1 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5}{3}$, $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

q) Non ha soluzioni.

22. a) $x_1 = 3x_3 - 5x_4$, $x_2 = 3x_3 - 2x_4 - 1$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

b) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$.

c) Non ha soluzioni.

d) Non ha soluzioni.

e) $x_1 = \frac{-2}{23} + \frac{11}{23}x_4$, $x_2 = \frac{20}{23} - \frac{5}{23}x_4$, $x_3 = -\frac{5}{23} + \frac{30}{23}x_4$, $x_4 \in \mathbb{R}$.

f) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

g) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

23. a) $k = 5$; b) $k = 6$; c) $k \neq 0$.

CAPITOLO IV

1. Indicando con x_i $i = 1,\ldots\ldots,6$ rispettivamente la quantità dei sei alimenti, si perviene al seguente problema di minimo

$$\min\ 100x_1 + 700x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 0{,}45x_5 + 70x_6$$

$$\begin{cases} 250x_1 + 291x_2 + 63x_3 + 9x_4 + 61x_5 + 345x_6 = 3000 \\ 7x_1 + 14x_2 + 1{,}5x_3 + 0{,}5x_4 + 3x_5 + 8{,}5x_6 = 70 \\ 83x_1 + 8x_2 + 8{,}28x_3 + 8{,}28x_4 + 107x_5 = 800 \\ 14x_3 + 170x_4 + 144x_5 = 500 \end{cases}$$

$$x_i \geqslant 0 \quad i = 1,\ldots\ldots,6$$

2. Siano x_{1j} ed x_{2j} il numero di televisori, fabbricati rispettivamente in Olanda ed in Inghilterra, venduti nel j–esimo paese ($j = 1,\ldots\ldots,4$). Si ha:

$$\begin{cases} \max\ 80x_{11} + 20x_{13} + 20x_{14} + 116x_{21} + 144x_{22} + 76x_{23} + 148x_{24} \\ x_{11} + x_{13} + x_{14} \leqslant 100;\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leqslant 200\ ; \\ x_{11} + x_{21} \leqslant 75;\ x_{22} \leqslant 100;\ x_{13} + x_{23} \leqslant 100;\ x_{14} + x_{24} \leqslant 30 \\ x_{ij} \geqslant 0, \text{ per } i = 1,2 \text{ e } j = 1,\ldots\ldots,4\,. \end{cases}$$

3. Indicando con x ed y rispettivamente la quantità di tavoli e scaffali fabbricati, si perviene al problema:

$$\begin{cases} \max\ 16.000x + 30.000y \\ x + 2y \leqslant 6\ ;\quad 2x + 3y \leqslant 10 \\ x,y \geqslant 0\ ,\ x,y \text{ interi} \end{cases}$$

4. Indicando con x_1, x_2, x_3, il numero di barattoli di vernice blu,

grigio e nero acquistati, si perviene al problema:

$$\begin{cases} \min 4.000x_1 + 4.500x_2 + 4.250x \\ x_1 \geq 80 \ ; \ x_2 \leq 160 \ ; \ x_3 \geq 40 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 400 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3, \ \ x_i \ \text{intero} \ \ i = 1,2,3 \end{cases}$$

5. Indicando con x_1 ed x_2 il numero di tonnellate di olio grezzo utilizzate nei processi I e II, si perviene al seguente problema:

$$\begin{cases} \max \ (285.000.3/4 + 105.000.1/4 - 60.000)x_1 + \\ \quad + (285.000.1/4 + 105.000.3/4 - 30.000)x_2 = \\ \quad = 180.000x_1 + 120.000x_2 \\ \quad\quad x_1 \leq 2 \ ; \ x_2 \leq 3 \ ; \\ \quad\quad 2x_1 + 10x_2 \leq 40 \ ; \ x_1 + x_2 \leq 4 \ ; \ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. Indicando con x_1 ed x_2 rispettivamente il numero di case di tipo A e di tipo B costruite si ha il problema:

$$\begin{cases} \max 190x_1 + 470x_2 \\ \quad 10x_1 + \quad 5x_2 \leq 50 \\ 2000x_1 + 6000x_2 \leq 1.200.000 \\ \quad\quad x_1 \ , \ x_2 \geq 0 \ \text{interi} \end{cases}$$

7. Indicando con x_1 ed x_2 i giorni in cui vengono impegnati rispettivamente il tecnico A ed il tecnico B, si perviene al seguente problema:

$$\begin{cases} \min 15.000x_1 + 12.000x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ x_1 + x_2 \geq 7 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 27 \\ x_1 \ , \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8. Indicando con x_1 e x_2 la quantità dei prodotti 1 e 2 che la ditta deve produrre, si ha :

$$\begin{cases} \max\ 20.000x_1 + 6.000x_2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 2x_1 \leq 50 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9. Indicata con x_i ed y_i la quantità di merce venduta e comprata nell'i—esimo mese, si ha che $x_1 + x_2 - y_2$ è la quantità di merce in deposito nel mese di febbraio (data dalla quantità di merce acquistata in gennaio e febbraio, diminuita della quantità venduta in febbraio) e $x_1 + x_2 + x_3 - y_2 - y_3$ è la merce in deposito in marzo. Si perviene al problema :

$$\begin{cases} \min\ 70x_1 + 90x_2 + 80x_3 - 90y_2 - 80y_3 - 110y_4 + 10[x_1 + \\ \quad + (x_1 + x_2 - y_2) + (x_1 + x_2 + x_3 - y_2 - y_3)] \\ x_1 \leq 20\ ;\ x_1 + x_2 - y_2 \leq 20\ ; \\ x_1 + x_2 + x_3 - y_2 - y_3 \leq 20\ . \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_2 + y_3 + y_4 \\ x_i, y_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots\ldots, 4 \end{cases}$$

10. Indicando con x_{ij} il numero di passeggeri che, arrivati alla stazione i, vanno alla stazione j, si ottiene il problema :

$$\begin{cases} \max\ 4x_{ab} + 3x_{ac} + 2x_{ad} + 4x_{bc} + 3x_{bd} + 4x_{cd} \\ x_{ab} + x_{ac} + x_{ad} \leq 600 \\ x_{ac} + x_{ad} + x_{bc} + x_{bd} \leq 600 \\ x_{ad} + x_{bd} + x_{cd} \leq 600 \\ 0 \leq x_{ab} \leq 500\ ;\ 0 \leq x_{ac} \leq 300\ ;\ 0 \leq x_{ad} \leq 100\ ; \\ 0 \leq x_{bc} \leq 100\ ;\ 0 \leq x_{bd} \leq 400\ ;\ 0 \leq x_{cd} \leq 300\ . \end{cases}$$

Si osservi che abbiamo massimizzato il risparmio totale e che i primi 3 vincoli rappresentano rispettivamente il numero di passeggeri che transitano nelle stazioni B, C, D.

11. Indichiamo con x_1, x_2, x_3 rispettivamente il numero di metri di carta di ampiezza cm. 58, cm. 26, cm. 24 necessari per esaudire l'ordine. Tenuto conto che da un'ampiezza di 82 cm. si possono ricavare rispettivamente 1 sola striscia di ampiezza 58cm., 3 striscie, ciascuna di ampiezza 26 cm., e 3 striscie, ciascuna di ampiezza 24 cm., si perviene ai vincoli: $x_1 \geq 60$, $3x_2 \geq 84$, $x_1 + 3x_3 \geq 72$, l'ultimo dei quali esprime il fatto che da 82 cm. si possono ricavare 1 striscia di ampiezza 58 cm. ed 1 striscia di ampiezza 24 cm. Si perviene alla seguente formulazione:

$$\begin{cases} \max\ (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 60,\ 3x_2 \geq 84,\ x_1 + 3x_3 \geq 72,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 . \end{cases}$$

12. Indichiamo con x_1, x_2, x_3 i pesi dei carichi rispettivamente appesi nei punti R,S,T, si perviene, per le note condizioni di equilibrio sulle leve, alla seguente formulazione:

$$\begin{array}{l} \max\ x_1 + x_2 + x_3 \\ \left\{ \begin{array}{r} 3/4x_1 + 1/4x_2 + 1/2x_3 \leq 100 \\ 1/4x_1 + 3/4x_2 + 1/2x_3 \leq 100 \\ 1/3x_2 + 1/2x_3 \leq 100 \\ 2/3x_2 + 1/4x_3 \leq 50 \end{array} \right. \\ 1/4x_3 \leq 50 ;\quad 3/4x_3 \leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

18. a) $S^\circ = \{(6,0)\}$;

b) $S^\circ = \{(3,0)\}$;

c) $S^\circ = \overline{AB}$ con $A = (3,4)$ e $B = (6,2)$;

d) S° è la semiretta di origine il punto $(2,0)$ e di equazione $x_1 - 3x_2 = 2$;

e) $S^\circ = \phi$;

f) $S^\circ = \{(4,1)\}$.

21. a) I problemi rappresentati in figura sono rispettivamente

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ x_1 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \min -2x_1 - 3x_2 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) le s.o. sono rispettivamente il punto $(5,2)$ ed il punto $(6,1)$.

CAPITOLO V

2. Posto $x = x' - x''$, $y = y' - y''$, $z = z' - z''$ con $x', x'', y', y'', z', z' \geq 0$, il sistema dei vincoli diviene :

$$\begin{cases} x' - x'' + y' - y'' \leq 1 \\ 2x' - 2x'' + z' - z'' = 3 \\ x', x'', y', y'', z', z'' \geq 0 \ . \end{cases}$$

Poiché le colonne associate ad x' ed x'' sono linearmente dipendenti, x' ed x'' non compariranno mai in una stessa base , (in modo analogo ciò accade per le coppie y',y'' e z',z''). In corrispondenza delle s.b. si ha dunque $|x| = x'+x''$, $|y| = y'+y''$ e $|z| = z'+z''$ e quindi il problema dato è equivalente a:

$$\begin{cases} \min x'+x''+y'+y''+z'+z'' \\ x'-x''+y'-y'' \leq 1 \\ 2x'-2x''+z'-z'' = 3 \\ x',x'',y',y'',z',z'' \geq 0 \end{cases}$$

3. Ogni soluzione del sistema $Ax = b$ soddisfa ovviamente al dato sistema di $m + 1$ diseguaglianze. Viceversa dimostriamo che se $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ è soluzione del dato sistema, allora risulta $Ax = b$. Supponiamo, per assurdo, che $Ax \neq b$; almeno una delle m diseguaglianze $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad i = 1, \ldots\ldots, m$ è verificata in senso stretto. Sommando membro a membro tali diseguaglianze, si ottiene $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) > \sum_{i=1}^{m} b_i$, da cui $\sum_{j=1}^{n}\left(-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)x_j < -\sum_{i=1}^{m} b_i$ e tale relazione contraddice l'ipotesi.

4. Poiché una variabile può essere espressa in infiniti modi come differenza di variabili positive, basta effettuare le sostituzioni $x_1 = x_1' - x_0$; $x_2 = x_2' - x_0$, $x_3 = x_3' - x_0$ con $x_1', x_2', x_3', x_0 \geq 0$.

6. a) $(-1/2,0,0,7/2,0)$; b) $(5/2,0,0,-1/2)$.

10. $(-2,0,42,0,-6)$ è di base non ammissibile, $(4,0,0,6,0)$ è di base ammissibile, $(2,1,15,3,0)$ è ammissibile ma non di base, $(0,3,31,-12)$ non è ammissibile e non è di base.

11. Sia $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$; se $x_1, x_2 \in S$, si deve dimostrare che $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in S \;\; \forall \alpha \in (0,1)$. Risulta $A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha A x_1 + (1-\alpha)Ax_2 = \alpha b + (1-\alpha)b = b$; ovviamente risulta poi $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geq 0$. Siano x_1, x_2 s.o. del problema. Risulta $c^T(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha c^T x_1 + (1-\alpha)c^T x_2 = \alpha c^T x_1 + (1-\alpha)c^T x_1 = c^T x_1$. Tale relazione implica, tenuto conto del risultato precedente che ogni combinazione convessa di x_1 e x_2 è ancora s.o. del problema.

14. Indicando con x_{ij} la quantità di prodotto trasportata da M_i a B_j, si ottiene :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i & i = 1,\ldots\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1,\ldots\ldots,n \\ x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j & \end{cases}$$

15. Indicando con x_{ij} il numero di automezzi di tipo M_i da abbinare al percorso P_j, si ottiene :

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} c_{ij} x_{ij} & \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = N_i & i = 1,\ldots\ldots,k \\ \sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_{ij} \geq c_j & j = 1,\ldots\ldots,n \\ x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j & \end{cases}$$

16. Indicando con x_{ij} la quantità di prodotto trasportata dalla fabbrica i al punto di vendita j, si ottiene :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + k_i)\, x_{ij} & \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i & i = 1, \ldots\ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1, \ldots\ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j & \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} & \\ \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, x_{ij} \leq a_i & i = 1, \ldots\ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1, \ldots\ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j & \end{cases}$$

18. Indicando con x_j il consumo giornaliero dell'alimento j, si ottiene :

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i & i = 1, \ldots\ldots, m \\ x_j \geq 0 & j = 1, \ldots\ldots, n \end{cases}$$

19. Indicando con x_{ij} il numero dei centri di tipo A_i che devono essere specializzati nella produzione B_j, ed introducendo la variabile ausiliaria y, si ottiene:

$$
\begin{cases}
\max\ y \\
\dfrac{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_{ij}}{k_j} - y \geq 0 & j = 1,\ldots\ldots,n \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = c_i & i = 1,\ldots\ldots,m \\
x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j
\end{cases}
$$

CAPITOLO VI

1. a) Le s.o.. sono date da tutti i punti del segmento di estremi (2/3,2/3), (5/6,1/3); massimo valore $z = +\,2$.

   b) s.o. (0,5/2,3/4); $z = +\,13/4$.

   c) s.o. (6,0); $z = +\,36$.

3. a) s.o. (0,15/4); $z = +\,15/2$.

   b) Il problema ha s.o. alternative date dal segmento di estremi (20/19,45/19), (2,0); $z = 5$.

   c) Le s.o. sono costituite dai punti di una semiretta di origine il punto (2,3); $z = +\,4$.

   d) s.o. (2,3); $z = +\,10$.

e) s.o. (0,30); $z = +60$.

f) s.o. (3,6) ; $z = +24$.

g) Le s.o. sono costituite da tutti i punti del segmento di estremi (4,4), (6,3); $z = -36$.

h) La s.o. è (5/12,0,1/12); $z = +17/12$.

i) La s.o. è (0,10,20/3) ; $z = +70$.

l) Il problema non ammette s.o.

m) Le s.o. sono tutte le combinazioni convesse dei punti (2,0,5,0), (2,0,0,5), (0,2,5,0), (0,2,0,5).

n) s.o. (2,1) ; $z = +7$.

o) s.o. (0,5,0,5) ; $z = +30$.

p) s.o. (0,10/3,0) ; $z = -70/3$.

q) s.o. (6,6,0,4,6) ; $z = +98$.

r) s.o. (2/3,2/3,1/3); $z = -5/3$.

s) s.o. (0,1,10/3) ; $z = -7/3$

t) s.o. di base (10,0,0,0), (0,10,0,0); $z = +10$.

5. a) Facendo variare la sola x_6, si ha $z = 7 - 2x_6$ ed $x_1 = 2$,

$x_2 = 4+2x_6$, $x_3 = 1+3x_6$. Per ogni $x_6 \geqslant 0$ si hanno dunque soluzioni ammissibili. Posto $z = 7 - 2x_6 = -63$ si ha $x_6 = 35$ e la s.o. richiesta è $(2,74,106,0,0,35)$.

b) Ponendo $x_5 = x_6 = 0$ e facendo variare x_4 si ottengono le s.o. alternative $x_1 = 2 + 2x_4$, $x_2 = 4 + 3x_4$, $x_3 = 1 + 5x_4$. Per $x_4 = 72$ si ha la s.o. $(146,220,361,72,0,0)$.

6. a) $(23,2,101,0,0,20)$ b) $(67,130,385,64,0,0)$.

8. Si devono mettere in base le variabili x_5, x_6, x_7. (vedi paragrafo 6.6).

9. Facendo entrare in base la variabile x_4 si deve fare operazione di cardine su $a_{14} = 8$; ciò comporta un incremento nella f.o. di $8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$; facendo entrare in base la variabile x_5 si deve fare cardine su $a_{15} = 2$ oppure su $a_{35} = 3$. In ogni caso l'incremento della f.o. è dato da 8 . Ne consegue che si deve eseguire una operazione di cardine su a_{15} (oppure a_{35}).

10. La s.b. richiesta è necessariamente la migliore tra le s.b. adiacenti alla s.o. L'analisi dei due possibili casi porta ad affettuare un cardine sull'elemento 3/13 della tabella .

11. d) Nell'ultimo vincolo i coefficienti delle variabili non di base sono non positivi .

12. a) No; b) $x_B = (x_2, x_4, x_5)$; d) La retta di livello passante per la s.o. è "esterna" rispetto al cono individuato da $x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

13. No .

16. a) Essendo la soluzione non degenere si ha $d < 0$, $e < 0$, $a,b,c, \in \mathbb{R}$.

b) Si hanno due casi : $e = 0$, $d \leqslant 0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, oppure $e \leqslant 0$, $d = 0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$.

c) $e > 0$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$; $e \leqslant 0$, $d > 0$, $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$.

d) Almeno due tra i coefficienti a,b,c devono essere positivi. Se, ad esempio, $b > 0$, $c > 0$, deve risultare $3/b = 3/c$, cioè $b = c$.

17. a) $e < 0$, $a \geqslant 0$, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

b) $e \geqslant 0$, $b > 0$, $a \leqslant 0$.

c) $e \geqslant 0$, $d > 0$, $c > 4/3$.

d) $e = 0$, $b > 0$, $a > 0$.

e) $d > 0$, $c = 4/3$.

18. a) $b_i \geqslant 0$, $\forall i$, $c < 0$.

b) $b_i \geqslant 0$, $\forall i$, $c = 0$, almeno un $a_i \neq 0$.

c) $b_i \geqslant 0$, $\forall i$, $c = 0$, $a_i \leqslant 0$ $\forall i$.

d) $c > 0$, $a_i < 0$ $\forall i$.

e) $c > 0$, almeno due tra i coefficienti a_1, a_2, a_3 devono essere positivi. Se ad esempio $a_1, a_2 > 0$, deve risultare
$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$.

19. Essendo x° un punto interno, esiste un intervallo di centro x° contenuto nella regione ammissibile. Se c_i è una componente positiva di c, possiamo prendere l'intervallo $x^\circ + te_i$, ove e_i è il vettore avente la i—esima componente uguale ad 1 e le restanti nulle e $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ con $\epsilon > 0$. Se x° è di minimo, deve esserlo anche rispetto ai valori che la f.o. assume nell'intervallo: d'altra parte risulta: $c^T (x^\circ + te_i) = c^T x^\circ + tc_i$ che, essendo una funzione lineare in t, assume valore minimo per $t = -\epsilon$ e non per $t = 0$ ($t = 0$ corrisponde ad x°).

21. i) $k = -7/2$; ii) $k \neq -7/2$.
i) $k = 9/4$; ii) $k \neq 9/4$.

22. $(1,0,3/2,3/2)$.

23. Non è di base perché la colonna associata ad x_5 è la differenza tra la seconda e la terza colonna. Poiché la quinta riga del sistema è la somma delle precedenti, la matrice del sistema non è di rango massimo e quindi non esistono s.b.

24. Le prime quattro colonne $a^{(i)}$, $i = 1,\dots,4$ sono linearmente dipendenti, risultando $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i a^{(i)} = 0$ con $\lambda_1 = 62$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 1$. Posto $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = 1$, si calcola
$\min_{\lambda_i > 0} \frac{x_i}{\lambda_i} = \frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{1}{62}$. Si determina una nuova s.a. attribuendo

valore zero alla variabile x_1, lasciando a zero le variabili x_5, x_6, x_7 e sostituendo $x_i, i = 2,3,4$, con $x_i' = x_i - x_1 \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_1}$. Si trova (0,53/31,63/62,61/62,0,0,0). Tale soluzione è di base in quanto la seconda, terza e quarta colonna sono linearmente indipendenti.

25. Ogni vettore è s.b.a.

26. No perché la quarta colonna è combinazione lineare delle prime due. L'equazione dello spigolo si ottiene lasciando a zero le variabili x_3, x_5, x_6 e ricavando dal sistema x_1 e x_2 in funzione di x_4.
Si ottiene $x_1 = 1+x_4$, $x_2 = 3+2x_4$. Poiché per ogni $x_4 \geq 0$ la soluzione resta ammissibile, lo spigolo non è limitato.

27. Basta applicare il procedimento dell'ex 24.

28. a) Le s.o. sono tutti i punti del segmento $\overline{AB}$ con A = (5/7,10/7) B = (15/19,25/19);

b) s.o. (0,3,5) ; $z = +16$;

c) s.o. (6,0,0) ; $z = 48$;

d) s.o. (6,10) ; $z = +198$;

e) s.o. (1,5) ; $z = 26$;

f) s.o. (25/17,36/17) ; $z = 158/17$;

g) il problema non ha s.o.

h) s.o. (1,1,3,0) ; $z = -7$;

i) s.o. (0,0,3/2,0,1/2) ; $z = -8$;

l) s.o. (−3,1/2,7/2,0,0) ; $z = -28$;

m) s.o. (5,0,0,0,0,−45) ; $z = -45$;
n) s.o. (0,11/2,7/2,0) ; $z = 94$.

31. Indicando con x_i ($i = 1,\dots\dots,4$) il numero di unità di lunghezza necessario per produrre l'abito i ($i = 1,\dots\dots,4$), si perviene al seguente problema

$$\begin{cases} \max 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \;;\; x_1 + 4x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6 \;; \quad x_3 + 3x_4 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 10 \;; \quad 3x_3 + 3x_4 \leq 12 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots\dots,4 \end{cases}$$

32. a) Indicando con x_1, x_2 rispettivamente la quantità dei prodotti A e B da produrre, si perviene al seguente problema:

$$\begin{cases} \max 1.000.000x_1 + 1.000.000x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \,,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) Indicando con x_1 e x_2 rispettivamente il numero di automobili e di autocarri prodotto, si ha :

$$\max\ 300.000x_1 + 250.000x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 20/7x_2 \leq 100.000 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 64.000 \\ 3x_1 \leq 60.000 \\ 5/2x_2 \leq 37.500 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

c) Indicando con $x_1, x_2, x_3 x_4$ rispettivamente la quantità di filo A, di filo B, di tessuto A, di tessuto B prodotta si ha

$$\begin{cases} \max\ 90x_1 + 80x_2 + 500x_3 + 190x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 \leq 18.000 \\ 2x_3 + 1/2x_4 \leq 3.000 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots\ldots, 4 \end{cases}$$

d) Indicando con x_i $(i = 1, \ldots\ldots, 6)$ la quantità prodotta dell'i–esimo bene, si ha :

$$\max\ 10x_1 + 12x_2 + 14x_3 + 11x_4 + 10x_5 + 10x_6$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 2x_6 \leq 135 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 8x_5 + 5x_6 \leq 140 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 5x_5 + 7x_6 \leq 175 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 8x_6 \leq 160 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots\ldots, 6$$

e) Indicando con x_i $(i = 1,2,3)$ la quantità dell'i–esimo prodotto contenuta nella dieta, si ha :

$$\begin{cases} \min\ 1.000x_1 + 3.600x_2 + 2.400x_3 \\ 1.000x_1 + 4.000x_2 + 2.000x_3 \geqslant 20.000 \\ 200x_1 + 900x_2 + 500x_3 \geqslant 3.000 \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

f) Indicando con x_i la quantità fabbricata dell'i–esimo ($i = 1,......,6$) prodotto, si perviene al problema :

$$\begin{cases} \max\ (90x_1 + 80x_2 + 100x_3 + 120x_4 + 90x_5 + 70x_6) \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3/2x_6 \leqslant 2.600 \\ 3/2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 500 \\ 3x_5 + 2x_6 \leqslant 1.600 \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1,......,6 \end{cases}$$

g) Indicando con x_1 il numero di acri coltivati a grano e con x_2 il numero dei capi di bestiame, si ha :

$$\begin{cases} \max\ 1.500x_1 + 12.500x_2 \\ x_1 + 10x_2 \leqslant 3.000 \\ 400x_1 + 25.000x_2 \leqslant 9.000.000 \\ 10/3\,x_1 + 40/3x_2 \leqslant 6.000 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

33. Introducendo le variabili di scarto $x_{n+1},......,x_{n+m}$ e cambiando eventualmente segno ad ogni equazione i–esima che presenta un termine noto $b_i < 0$, possiamo trasformare l'insieme S con un insieme S' del tipo $S' = \{x \in \mathbb{R}^{n+m}:\ A'x = b,\ b \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$.
Consideriamo il problema ausiliario :

$$(1) \quad \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} y_i \\ A'x+y=b \\ x, y \geqslant 0 \end{cases}$$

del quale indichiamo con $S''=\{u=(x,y)\in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^m : A'x+y= = b, x, y \geqslant 0\}$ la regione ammissibile. Tale problema ammette s.o. in quantoché la f.o. è inferiormente limitata su S'', risultando $\sum_{i=1}^{m} y_i \geqslant 0 \quad \forall u \in S''$.

Se $S' \neq \phi$, esiste $\bar{x}$ tale che $A'\bar{x}=b$; di conseguenza $\bar{u}=(\bar{x},0)\in S''$ e la f.o. in $\bar{u}$ vale zero. Ne consegue che ad ogni elemento di S' corrisponde una s.o. di (1) nella quale la f.o. assume valore minimo uguale a zero. Viceversa se il minimo di (1) è zero, la s.o. è necessariamente del tipo $\bar{u}=(\bar{x},0)$; ne consegue che $\bar{x}\in S'$, ovvero $S' \neq \phi$. In conclusione $S' \neq \phi$ se e solo se (1) ha come valore minimo zero ovvero $S' = \phi$ se e solo se (1) ha valore minimo positivo, ovvero possiede una s.o. con una componente di y positiva.

34. Rispetto ad una tabella del simplesso, indichiamo con $b_1, \ldots b_i, \ldots, b_m$ la s.b.a., $c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_s$ i coefficienti ridotti negativi e $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(j)}, \ldots, \lambda^{(s)}$ le rispettive colonne. Se almeno una di tali colonne, sia $\lambda^{(j)}$, non ha elementi positivi, scegliendo c_j si può diminuire la f.o. di quanto vogliamo (la f.o. non è inferiormente limitata) altrimenti calcoliamo

$$\min_{\lambda_i^{(j)}>0} \frac{b_i}{\lambda_i^{(j)}} = \frac{b_k}{\lambda_k^{(j)}} \qquad j=1,\ldots,s$$

Un'operazione di cardine su $\lambda_k^{(j)}$ porta a diminuire la f.o.

della quantità $c_i \dfrac{b_k}{\lambda_k^{(i)}}$; di conseguenza si avrà la maggior diminuzione della f.o. in corrispondenza del

$$\min_j \; c_j \cdot \frac{b_k}{\lambda_k^{(j)}} .$$

35. Basta osservare che ad ogni iterazione il valore della f.o. diminuisce e questo fatto implica che le s.b., che si generano ad ogni iterazione, sono tutte distinte tra di loro. Essendo il numero delle s.b. finito, si ha l'asserto.

36. Sostituendo la i—esima equazione con (k—esima equazione) — (i—esima equazione), $\forall i \neq k$, si ottiene una nuova equazione avente il coefficiente della variabile di scarto uguale ad 1 e per termine noto $b_k - b_i \geq 0$. Ne consegue che è sufficiente introdurre, nel sistema trasformato, una sola variabile artificiale in corrispondenza del k—esimo vincolo che resta inalterato. (vedi ex. 37) .

37. a) Il sistema può essere scritto :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrcl} -x_1 & & & -2x_4 & + x_5 & + x_6 & = & 3 \\ & -x_2 & & +2x_4 & +2x_5 & - x_6 & = & 6 \\ & & -x_3 & + x_4 & -2x_5 & -2x_6 & = & 12 \\ & & & & x_i \geq 0 & & & i = 1,\ldots\ldots,6 \end{array} \right.$$

Il massimo dei termini noti si ha in corrispondenza della 3ª equazione. Se sostituiamo rispettivamente la 1ª e 2ª equazione con (3ª equazione − 1ª equazione) e (3ª equazione − 2ª equazione) (vedi ex.36), si ottiene il nuovo sistema :

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +3x_4-3x_5-3x_6 = 9 \\ \quad x_2 \qquad - x_4-4x_5-x_6 = 6 \\ \qquad -x_3+x_4-2x_5-2x_6 = 12 \end{cases}$$

Essendo i coefficienti di x_1 e x_2 uguali ad 1, possiamo introdurre la sola variabile ausiliaria y_1 nella 3ª equazione .

b) Osserviamo che la 2ª e 3ª equazione hanno i coefficienti delle variabili di scarto x_6 ed x_7 uguali ad 1; tali equazioni possono dunque restare inalterate. Operando nella 1ª e 4ª equazione come in a), si perviene al sistema

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-4x_4+x_5 \qquad -x_8 = 4 \\ x_1 \quad -2x_3-3x_4 \quad +x_6 \quad -x_8 = 4 \\ x_1 \qquad -2x_4 \qquad +x_7 \qquad = 3 \\ 2x_1+x_2 \quad -5x_4 \qquad\qquad -x_8 = 6 \end{cases}$$

e quindi basta introdurre la variabile ausiliaria solo nella 4ª equazione .

38. Sia $\bar{x} = (\bar{x}_1,\ldots\ldots,\bar{x}_j,\ldots\ldots,\bar{x}_n)$ la s.o. del problema e $c' = (c_1,\ldots..,c_{j-1}, c'_j,\ldots\ldots)$ con $c'_j = c_j-\gamma_j$ e $\gamma_j > 0$; la nuova f.o. è data da $(c')^T x = c^T x - \gamma_j x_j$. Basta dimostrare che, in corrispondenza di una s.o. $x = (x_1,\ldots\ldots,x_j,\ldots\ldots,x_n)$ con $x_j < \bar{x}_j$, risulta $(c')^T x > (c')^T \bar{x}$. Si ha infatti $(c')^T x = c^T x - \gamma_j x_j > c^T \bar{x} - \gamma_j \bar{x} =$ $= (c')^T \bar{x}$.

39. Si ponga $x_j = x_j^+ - x_j^-$, $x_j^+, x_j^- \geqslant 0$ $j = 1,\ldots\ldots,n$.

In corrispondenza di soluzioni di base del sistema trasformato, si avrà in base al più una delle variabili x_j^+, x_j^- in quantoché le colonne del sistema ad esse associate sono linearmente dipen-

denti (la loro somma è zero). Ne consegue che x_j in corrispondenza delle soluzioni di base vale $x_j^+ - x_j^-$.
Il problema dato è dunque equivalente al programma lineare :

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j^+ + x_j^-) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j^+ - x_j^-) = b_i \qquad i = 1,\ldots\ldots,m \\ c_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots\ldots,n . \end{cases}$$

40. Come già osservato nell'ex. 39, la somma delle colonne del sistema associato ad x_j^+ e x_j^- è il vettore nullo e dunque x_j^+ e x_j^- non possono fare parte della stessa base; quindi, una di esse, in quanto variabile non di base, vale 0. In particolare in una s. o. che è di base, si avrà $x_j^+ \cdot x_j^- = 0$.

44. a) La s.o. è $\bar{x} = (1/7,3/7,0)$.

b) La regione ammissibile del problema è vuota .

c) La s.o. è $\bar{x} = (3/2,1/2)$.

d) La s.o. è $\bar{x} = (15/19,25/19)$.

e) La s.o. è $\bar{x} = (5/2,5/4,0,0)$.

f) La s.o. è $\bar{x} = (0,5)$.

g) La regione ammissibile del problema è vuota .

h) La s.o. è $\bar{x} = (0,5/3)$.

i) La s.o. è $\bar{x} = (15/13,0,4/13)$.

l) La s.o. è $\bar{x} = (1/3, 2/3, 0)$.

m) La s.o. è $\bar{x} = (0,1,1,0,0)$.

45. Con riferimento all'ex. 3 a), la tabella finale del simplesso è data dalla A

$$
\begin{array}{c|c|cccc|}
 & -15/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\
\hline
x_3 & 9/4 & 9/4 & 0 & 1 & \underline{-1/4} \\
x_2 & 15/4 & 3/4 & 1 & 0 & 1/4 \\
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{c|c|ccccc|}
 & -12 & -5 & 0 & -2 & 0 \\
\hline
x_4 & -9 & -9 & 0 & -4 & 1 \\
x_2 & 6 & 3 & 1 & 1 & 0 \\
\end{array}
$$

A B

Volendo determinare una soluzione duale ammissibile, basta scegliere una qualsiasi riga avente almeno un coefficiente negativo, ed applicare la (6.7). Ciò porta ad effettuare un'operazione di cardine su $\underline{-1/4}$ che conduce alla tabella B, corrispondente alla soluzione duale ammissibile $(0,6,0,-9)$. In modo analogo si determina una nuova soluzione duale.

47. La nuova riga dei costi si ottiene aggiungendo alla vecchia riga, la i–ma riga moltiplicata per $\dfrac{-c_{N_k}}{a_{i_k}}$; di conseguenza il nuovo valore della f.o. diviene:

$$-\left(z_o - \frac{c_{N_k}}{a_{i_k}} \cdot b_i\right) = -z_o + \frac{c_{N_k}}{a_{i_k}} b_i$$

Essendo $\bar{z} = \dfrac{c_{N_k}}{a_{i_k}} \cdot b_i > 0$ per $c_{N_k} \neq 0$ (soluzione duale non degenere), si ha un incremento della f.o. di $\bar{z}$.

48. In assenza di degenerazione duale, ad ogni iterazione il valore della f.o. diminuisce e, di conseguenza, le soluzioni duali ammissibili generate dall'algoritmo duale sono tutte distinte tra loro. Essendo poi tali soluzioni in numero finito, si ha l'asserto.

CAPITOLO VII

5. a) Indicando con x_1 ed x_2 rispettivamente la quantità di H_1–fosfato e di L_0–fosfato che si devono produrre, si perviene al seguente problema :

$$\begin{cases} \max\ 15.000x_1 + 10.000x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 1.500 \\ x_1 + x_2 \leq 1.200 \\ x_1 \leq 500 \\ x_1\,,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

la cui s.o. è $\bar{x} = (500,500)$.

b) $\bar{x}$ è ottima $\forall\theta\in[0,1]$.

6. a) $H = \{\theta\in\mathbb{R} : \theta \geq -2\}$; b) $H = \{\theta\in\mathbb{R} : -3/2 \leq \theta \leq 8\}$;

c) $H = \{\theta\in\mathbb{R} : -1/3 \leq \theta \leq 1/2\}$; d) $H = \{\theta\in\mathbb{R} : -3 \leq \theta \leq 4\}$;

e) $H=\{\theta\in\mathbb{R} : \theta \leq 3\}$.

7. a) $H=\{\theta\in\mathbb{R} : \theta \geq 1/6\}$; b) $H=\{\theta\in\mathbb{R} : \theta \geq 1/9\}$;

c) $H=\{\theta\in\mathbb{R} : \theta \geq 7/2\}$; d) $H=\{\theta\in\mathbb{R} : 0 \leq \theta \leq 1/3\}$;

e) $H=\{\theta\in\mathbb{R} : 9/25 \leq \theta \leq 7/27\}$.

11. a) $H_1=\{\theta\in\mathbb{R} : \theta \leq 1\}$, $H_2=\{\theta\in\mathbb{R} : \theta \geq 8/5\}$;

b) $H_1=\{\theta\in\mathbb{R} : -7/17 \leq \theta \leq 1\}$, $H_2=\{\vartheta\in\mathbb{R} : \theta \geq 1/2\}$;

c) $H_1=\{\theta\in\mathbb{R} : -1 \leq \theta \leq 3/2\}$, $H_2=\{\theta\in\mathbb{R} : \theta \geq 3/2\}$;

d) $H_1=\{\theta\in\mathbb{R} : -2/5 \leq \theta \leq 2/7\}$, $H_2=\{\theta\in\mathbb{R} : \theta \leq 1\}$;

e) $H_1=\{\theta\equiv\mathbb{R} : -11/2 \leq \theta \leq 4/7\}$, $H_2=\{\theta\in\mathbb{R} : \theta \geq 10/9\}$;

12. Sia $\bar{u}_B = A_B^{-1} u$. La condizione $A_B^{-1} b' \geq 0$ implica in i)

$\theta\bar{x}_B + \bar{u}_B \geq 0$; posto $\theta_1 = \max\limits_i -\frac{\bar{u}_{B_i}}{\bar{x}_{B_i}}$ si ha $H = [\theta_1, +\infty)$ se

$\bar{u}_B \geq 0$, $\theta_1 < 0$ ed $H \supset [0,1]$.

Rispetto a ii) si ha la condizione $\theta\bar{x}_B + (1-\theta)\bar{u}_B \geq 0$, ovvero $\theta(\bar{x}_B - \bar{u}_B) + \bar{u}_B \geq 0$. Siano I_1, I_2, I_3 gli insiemi di indici per i quali risulta, rispettivamente $\bar{x}_{B_i} - \bar{u}_{B_i} \gtreqless 0$.

In corrispondenza di $i\in I_2$ la diseguazione è soddisfatta per ogni valore reale di θ; dunque se $I_1 \cup I_3 = \phi$, $H = \mathbb{R}$.

Se $I_3 = \phi$, posto $\theta_1 = \max_{i \in I_1} - \frac{\bar{u}_{B_i}}{\bar{x}_{B_i} - \bar{u}_{B_i}}$, si ha $H = [\theta_1, +\infty)$;

Se $I_1 = \phi$, posto $\theta_0 = \min_{i \in I_3} - \frac{\bar{u}_{B_i}}{\bar{x}_{B_i} - \bar{u}_{B_i}}$, si ha $H = (-\infty, \theta_1]$.

Se I_1 e I_3 sono non vuoti, si ha $H = [\theta_1, \theta_0]$. Si osservi che $1 \in H$ in ogni caso in quantoché verifica ovviamente la condizione data ed inoltre $\theta_1 < 1, \theta_0 > 1$.

13. La condizione di non positività sui coefficienti ridotti diviene nel caso i) $\theta\, \bar{c}_N^T + \bar{u}_N^T \leqslant 0$ e nel caso ii) $\theta \bar{c}_N^T + (1-\theta)\bar{u}_N^T \leqslant 0$. Ragionare in modo del tutto analogo all'esercizio precedente .

14. La condizione $\bar{c}_N^T + \theta \bar{u}_N^T \leqslant 0$ si riduce a $\bar{c}_N^T + \theta u_N^T \leqslant 0$ se $u_B^T A_B^{-1} A_N = 0$ e, in particolare, se $u_B = 0$ ovvero se sono nulli i coefficienti di u relativi alle variabili di base .

15. a) $-2 \leqslant \theta \leqslant 1$; $\theta \geqslant 8/5$ b) $-7/17 \leqslant \theta \leqslant 1$; $1/2 \leqslant \theta \leqslant 8$

c) $-1/3 \leqslant \theta \leqslant 1/2$; ϕ d) $-2/5 \leqslant \theta \leqslant 2/7$; $-3 \leqslant \theta \leqslant 1$

e) $-11/2 \leqslant \theta \leqslant 4/7$; $10/9 \leqslant \theta \leqslant 3$.

16. a) per $\theta < -10, S = \phi$; per $-10 \leqslant \theta \leqslant -3, z(\theta) = 90 + 9\theta$; per $-3 \leqslant \theta \leqslant 2/3, z(\theta) = 84 + 7\theta$; per $\theta > 2/3$, $z(\theta) = 266/3$. Si ha $\max_{\theta} z(\theta) = 266/3$ con $\bar{x} = (10/3, 22/3)$;

b) trattato nel testo ; $\max_{\theta} z(\theta) = 84$;

c) per $\theta < -56$, $S = \phi$; per $-56 \leqslant \theta \leqslant -20$, $z(\theta) = 112 + 2\theta$; per $-20 \leqslant \theta \leqslant -8$, $z(\theta) = 266/3 + 5\theta/6$; per $-8 \leqslant \theta \leqslant 24$, $z(\theta) = 84 + \theta/4$; per $\theta > 24$, $z(\theta) = 90$. Risulta $\max_{\theta} z(\theta) = 90$ con $\bar{x} = (10,0)$. E' più conveniente far variare la terza risorsa .

17. a) Trattato nel testo ;

b) per $\theta < -7/2$, $z(\theta) = 63$; per $-7/2 \leqslant \theta \leqslant 1$, $z(\theta) = 84 + 6\theta$; per $1 \leqslant \theta \leqslant 10$, $z(\theta) = 82 + 8\theta$; per $\theta \geqslant 10$, $z(\theta) = 52 + 11\theta$.

Il 20% di aumento sul primo prodotto corrisponde ad avere $9+\theta = 9+9/5$ cioè $\theta = 9/5$; conseguentemente $z(9/5) = 84+4 \cdot 9/5 = 91{,}2$.
Il 20% di aumento sul secondo prodotto corrisponde ad avere $8+\theta = 8+8/5$ cioè $\theta = 8/5$; risulta $z(8/5) = 82+8 \cdot 8/5 = 94{,}8$.
L'aumento del 10% su ogni prodotto porta ad ottenere $c_1 = 9{,}9$, $c_2 = 8{,}8$ al quale corrisponde il valore ottimo $z = 92{,}4$.
E' quindi preferibile aumentare il secondo prodotto del 20%.

18. a) per $\theta \geqslant -3/2$, $z(\theta) = 5 + 5/3\theta$; per $\theta < -3/2$, $S = \phi$.

b) per $\theta < -1/2$, $S = \phi$; per $-1/2 \leqslant \theta \leqslant -2/5$, $z(\theta) = 6 + 12\theta$; per $\theta \geqslant -2/5$, $z(\theta) = \dfrac{16+31\theta}{3}$.

c) per $\theta < -26/21$, $S = \phi$; per $-26/21 \leqslant \theta \leqslant -5/9$, $z(\theta) = 138/5 + 103\theta/5$; per $-5/9 \leqslant \theta \leqslant 3/11$, $z(\theta) = 83/5 + 4\theta/5$; per $3/11 \leqslant \theta \leqslant 53/3$, $z(\theta) = 118/7 - \theta/7$; per $\theta \geqslant 53/3$, $z(\theta) = 107/5 - 14\theta/7$.

d) per $\theta < -3$, $z(\theta) = -6-2\theta$; per $-3 \leqslant \theta \leqslant 2$, $z(\theta) = 0$; per $+2 \leqslant \theta \leqslant 4$, $z(\theta) = -6+3\theta$; per $4 \leqslant \theta \leqslant 8$, $z(\theta) = -18+6\theta$; $\theta \geqslant 8$, $z(\theta) = -50+10\theta$.

e) per $\theta \leqslant 3$, $z(\theta) = -10+2\theta$; $3 \leqslant \theta \leqslant 13/3$, $z(\theta) = -49/4 + 11\theta/4$; per $13/3 \leqslant \theta \leqslant 9/2$, $z(\theta) = -22+5\theta$; per $\theta > 9/2$, $S = \phi$.

20. a) per $\theta < -3/2$ non esistono soluzioni; per $\theta \geqslant -3/2$ $z(\theta) = 4\theta-2$.

b) per $\theta \leqslant 0$, $z(\theta) = -1/5(8\theta+1)$; per $\theta > 0$ non esistono soluzioni.

c) per $\theta \leqslant -5/2$, $z(\theta) = 25\theta-5$; per $-5/2 \leqslant \theta \leqslant -1/10$, $z(\theta) = 47\theta/2-35/4$; per $-1/10 \leqslant \theta \leqslant -1/27$, $z(\theta) = 21\theta-9$; per $-1/27 \leqslant \theta \leqslant 2$, $z(\theta) = -11-33\theta$; per $\theta \geqslant 2$, $z(\theta) = 7/3-119\theta$.

d) per $\theta \leqslant 1/3$, $z(\theta) = -12+26\theta$; per $1/3 \leqslant \theta \leqslant 11/13$, $z(\theta) = -4+2\theta$; per $11/13 \leqslant \theta \leqslant 29/27$, $z(\theta) = +3/2-9\theta/2$; per $\theta \geqslant 29/27$, $z(\theta) = \dfrac{-45\theta+25}{7}$.

e) $\theta \leqslant 0$, $z(\theta) = 0$; per $\theta \geqslant 0$, $z(\theta) = 18\theta$.

f) $\theta \leqslant 0$, $z(\theta) = 0$; per $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $z(\theta) = 28\theta$; per $\theta \geqslant 1$ $z(\theta) = -6+34\theta$.

21. Per $\theta = 4$ si ha una s.a. Il problema non ammette s.o.

22. a) $-3/4 \leqslant \theta \leqslant -17/30$.

23. a) per $\theta_1 \leqslant -4, z(\theta_1) = 12$; $-4 \leqslant \theta_1 \leqslant -7/3$, $z(\theta_1) = \dfrac{108+12\theta_1}{5}$; per $\theta_1 \geqslant -7/3$, $z(\theta_1) = 30+6\theta$;

b) per $\theta_2 \leqslant -1/2$, $z(\theta_2) = 12$; $-1/2 \leqslant \theta_2 \leqslant 2$, $z(\theta_2) = \dfrac{72+24\theta_2}{5}$; per $\theta \geqslant 2$, $z(\theta) = 12+6\theta$;

c) per $\theta < -12$, $S = \phi$; per $-12 \leqslant \theta \leqslant -6$, $z(\theta) = 12+\theta$; per $-6 \leqslant \theta \leqslant 4$, $z(\theta) = \dfrac{36+\theta}{5}$; per $\theta \geqslant 4$, $z(\theta) = 8$.

24. Siano x_1, x_2, x_3 il numero di unità di A,B,C prodotte. Si perviene al problema

$$\begin{cases} \max\ 2\lambda x_1 + (2\lambda-1)x_2 + \lambda x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 900 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 800 \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

Se $\lambda \leqslant 0$ non si produce nessun prodotto perché il profitto è nullo; se $0 \leqslant \lambda \leqslant 3/2$ si producono 300 unità di A con un profitto $z(\lambda) = 600\lambda$; se $\lambda \geqslant 3/2$ si producono 200 unità di A e 120 unità di B con un profitto $z(\lambda) = 680\lambda - 120$.

25. a) Siano x_1 e x_2 rispettivamente il numero di uomini e donne assunti. Si perviene al problema

$$\begin{cases} \min 25.000x_1 + 22.000x_2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 300x_1 + 600x_2 \geqslant 3400 \\ 80x_1 + 50x_2 \geqslant 680 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Per minimizzare il costo occorre assumere 6 uomini e 4 donne.

b) 3 uomini e 2 donne.

26. Si ponga nella (7.1) $\bar{u}_B = A_B^{-1}u$. Essendo A_B non singolare $\bar{u}_B = 0$ se e solo se $u = 0$. Se $u \neq 0$ siano I_1, I_2 gli insiemi di indici $I_1 = \{i : \bar{u}_{B_i} > 0\}$, $I_2 = \{i : \bar{u}_{B_i} < 0\}$.

Se $I_1 = \phi$, posto $\theta_1 = \min\limits_{i \in I_2} -\dfrac{\bar{x}_{B_i}}{\bar{u}_{B_i}}$, risulta $H = (-\infty, \theta_1]$ con $\theta_1 > 0$ essendo $\bar{x}$ non degenere. Se $I_2 = \phi$, posto $\theta_0 = \max\limits_{i \in I_1} -\dfrac{\bar{x}_{B_i}}{\bar{u}_{B_i}}$, risulta $H = [\theta_0, +\infty)$ con $\theta_0 < 0$.

Se I_1 e I_2 sono non vuoti risulta $H = [\theta_0, \theta_1]$. In ogni caso $0 \in H$. H è una semiretta quando I_1 oppure I_2 è vuoto. Se $u \neq 0$ H non può essere una retta.

28. Posto $A_B^{-1}u^{(i)} = \bar{u}^{(i)}$ $i = 1, \ldots, n$, l'insieme di stabilità è dato dai valori di $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ soddisfacenti il sistema di disequazioni lineari $\bar{x}_B + \theta_1 \bar{u}^1 + \ldots + \theta_n \bar{u}^n \geqslant 0$ che rappresenta un poliedro convesso.

29. Ragionare in modo analogo all'ex. 26.

30. Ragionare in modo analogo all'ex. 28 .

31. a) Posto $\theta = \alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2$, $\alpha \in [0,1]$ e $c = \alpha c + (1-\alpha)c$ risulta $c+\theta u = \alpha(c+\theta_1 u) + (1-\alpha)(c+\theta_2 u)$. Indicati con z_1 e z_2 i valori massimi del problema considerato per $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ si ha $(c+\theta u)^T x \leq \alpha z_1 + (1-\alpha)z_2$. Ne consegue che la f.o. è superiormente limitata su S e pertanto esiste il massimo.

b) Negando la tesi esisterebbero due valori θ_1, θ_2 con $\theta_1 < \theta_0$ e $\theta_2 > \theta_0$ rispetto ai quali la f.o. è superiormente limitata. Per la a) ciò implica che la f.o. si mantiene superiormente limitata per ogni $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ e in particolare per $\theta = \theta_0$ contro l'ipotesi .

32. Basta osservare che $\min(c+\theta u)^T x = -\max -(c+\theta u)^T x$ e che l'opposta di una funzione lineare a tratti e convessa è ancora lineare a tratti ma concava .

33. Conseguenza del teorema 2 ponendo $\max c^T x = -\min - c^T x$.

CAPITOLO VIII

19. $c_1 = 2,\ c_2 = -4,\ c_3 = 1,\ c_4 = -1,\ c_5 = 2$.

20. $c_1 = -3,\ c_2 = 1,\ c_3 = -1,\ c_4 = c_5 = 2$.

21. $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2,\ c_1 = -1,\ c_2 = 3,\ c_3 = 1,\ c_4 = 2,\ c_5 > 2$.

23. $\begin{cases} \max \ell y^{(1)} - k y^{(2)} \\ A^T y^{(1)} - A^T y^{(2)} = c \\ y^{(1)}, \quad y^{(2)} \geq 0 \end{cases}$; $(Ax-\ell)y^{(1)}=0$; $(-Ax-k)y^{(2)} = 0$

Una condizione è che A^T sia di rango massimo con $n < m$.

24. Il duale è $\begin{cases} \max b^T y \\ A^T y = c \end{cases}$

e la sua regione ammissibile è non vuota se e solo se c è combinazione lineare delle righe di A il che comporta che la f.o. del primale è costante sulla sua regione ammissibile.

25. Il duale del problema è

$\begin{cases} \max b^T w - c^T z \\ A^T w \leq c \\ -Az \leq -b, \; w, z \geq 0 \end{cases}$ equivalente, posto $z = x$ $w = y$ al problema. $\begin{cases} \max -c^T x + b^T y \\ Ax \geq b \\ -A^T y \geq -c, x, y \geq 0 \end{cases}$

Il problema dato e il suo duale hanno dunque la stessa regione ammissibile mentre le f.o. sono opposte tra loro. Di conseguenza, se $S \neq \phi$, si ottiene, per il teorema fondamentale della dualità, una uguaglianza del tipo $f(\bar{x}) = -f(\bar{x})$ da cui $f(\bar{x}) = 0$.

26. Il duale ha come s.o. unica il vettore nullo inquantoché i coefficienti della f.o. sono strettamente negativi.

27. Basta osservare che esprimendo il problema in funzione della base ottima non degenere, si ottiene il problema dell'ex. 26.

28. w differisce da $\bar{y}$ nella sua k–ma componente data da

a) $w_k = \frac{1}{\mu} \bar{y}_k$ b) $w_k = \bar{y}_k - \mu \bar{y}_r$ c) $w_k = \bar{y}_k + \mu$

29. $c = -b$, $A = -A^T$.

31. Conseguenza immediata del teorema degli scarti complementari applicato ad una s.o. $\bar{x}$ non di base del primale e ad una s. o. $\bar{y}$ di base del duale .

CAPITOLO IX

1. Indicando con (x_1, x_2) un generico punto di A e con (x_3, x_4) un generico punto di B si perviene al problema

$$\begin{cases} \min \left[\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2} \right] \\ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \leq 0 \\ (x_3 - 5)^2 + 4(x_4 - 3)^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

2. Sia $P = (x_1, x_2)$ un generico punto di Γ, appartenente al primo quadrante, si ottiene il problema :

$$\begin{cases} \max 4x_1 \; x_2 \\ x_1^2 + 3x_2^2 = 9 \\ x_1 \; , \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Indicando con x_1 e x_2 rispettivamente il raggio di base e l'altezza del cilindro, si ha :

$$\begin{cases} \min 2\pi x_1 (x_1 + x_2) \\ x_1^2 \cdot x_2 = k \\ x_1 , x_2 > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

4. Indicando con x_1 e x_2 i lati del rettangolo, si ha :

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ x_1 \quad x_2 = k \\ x_1 , x_2 > 0 \end{cases}$$

5. Supposte le navi A e B nella posizione di figura 6.1, e avendo indicato con V_A , V_B e m rispettivamente le velocità delle navi A e B e la distanza tra le navi al tempo $t = 0$, si perviene al problema :

$$\begin{cases} \min (V_A t)^2 + (m - V_B t)^2 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

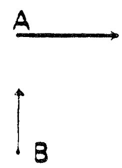


Fig. 61

6. Si ottiene il problema :

$$\min \sum_{i=1}^{3} c_i d_i \, [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]$$

7. Si ottiene :

$$\begin{cases} \max [5(p_2 - p_1)(p_1 - 100) + (p_2 - 150)(32 + 5p_1 - 10p_2)] \\ p_1 \geq 100, \; p_2 \geq 150 \end{cases}$$

8. Si ottiene il problema :

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j - d_j x_j^2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \ , \quad i = 1,\dots\dots,m \\ x_j \geqslant 0 \ , \quad j = 1,\dots\dots,n \end{cases}$$

9. Si ottiene il problema :

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} f_j (x_j) \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = M \\ x_j \geqslant 0 \ , \quad j = 1,\dots\dots,n \end{cases}$$

10. $x^\circ = (1/4,\ 3/4\sqrt{7})$, valore della f.o. 65/8 .

11. $x^\circ = (0,10)$, valore della f.o. 200 .

12. $x^\circ = (1,3)$, valore della f.o. 18 .

14. $x^\circ = (129/29\ ,\ 48/29)$.

15. $x^\circ = (5,0)$, valore della f.o. 50,25 .

16. $x^\circ = (2,\sqrt{5})$, valore della f.o. 42 .

17. $x^\circ = (3/4,9/4)$, valore della f.o. 27/8 .

19. **Il problema è** :

$$\begin{cases} \max x_1\, x_2 \\ x_1 + x_2 = k \\ x_1, x_2, k > 0 \end{cases} \quad \text{la cui s.o. è } \bar{x} = (k/2, k/2)$$

20. Le curve di livello sono rette passanti per $(-6/5, 3/5)$, $x^\circ = (1/2, 3/2)$, valore della f.o. 7/19 .

21. Le curve di livello sono rette passanti per $(-7/19, 20/19)$, $x^\circ = (3/22, 10/11)$, valore della f.o. 27/26 .

22. Le curve di livello sono date da $\dfrac{2}{x_1 + 2x_2 + 4} = h$, ovvero del tipo $x_1 + 2x_2 = k$, la s.o. è $x^\circ = (0,0)$, il valore della f.o. è 1/2 .

23. Le forme lineari associate al numeratore e al denominatore sono tra loro proporzionali. Si ha : $\dfrac{2x_1 + 4x_2 - 5}{x_1 + 2x_2 + 4} = 1 - \dfrac{13}{2(x_1 + 2x_2 + 4)}$; $x^\circ = (1,3)$, valore della f.o. 9/22.

24. a) $x^\circ = (4,0)$, valore della f.o. 0 ;
    b) $x^\circ = (0,0)$, valore della f.o. 1/4 ;
    c) la s.o. è in $(0,3)$ ed in ogni altro punto del segmento di estremi $(0,3)$, $(1,3)$; valore della f.o. 4 ;
    d) la s.o. è $(1,3)$ ed in ogni punto del segmento di estremi $(1,3)$, $(4,0)$; valore della f.o. 1/2 .

25. Non esistono soluzioni .

26. $x^\circ = (0,1)$; valore della f.o. 2/9 .

27. $x^\circ = (13/4, 1/2)$; valore della f.o. −27,81 .

28. $x^\circ = (4/5, 2/5)$; valore della f.o. −16/5 .