

Note del corso “Gruppi e rappresentazioni”
Anno accademico 2015-2016

Giorgio Mossa

11 aprile 2018

Introduzione

Le seguenti note sono basate sulle lezioni del corso “*Gruppi e rappresentazioni*”, tenuto nell’anno accademico 2015-2016 dal professor *Giovanni Gaiffi* nel corso di studi in Matematica all’università di Pisa.

Nello scrivere queste note l’autore ha cercato di tenere uno stile molto colloquiale e un’attenzione per i dettagli (tanto da temere di poter esser considerato troppo pedante da alcuni lettori). Seppur basato sul anzidetto corso il testo qui riportato è il frutto di una rielaborazione da parte dell’autore, il quale quindi si prende quindi ogni responsabilità per eventuali errori o parti oscure nelle dimostrazioni e nei teoremi.

Escluse critiche per l’eccesso di zelo (a.k.a. pedanteria), ogni segnalazione di errori e/o sviste, parti poco chiare o di suggerimenti per migliorare le note sono ben accetti e possono essere inviati all’indirizzo di posta elettronica mossa@poisson.phc.dm.unipi.it.

A questo punto non resta che augurarvi una buona lettura.

Giorgio Mossa

Indice

1	Prime definizioni e risultati	
	(Lezione 1: 25/02/2016)	5
1.1	Prime definizioni	5
1.2	Decomposizione di rappresentazioni	12
2	Costruzioni con rappresentazioni e caratteri	
	Lezione 2 (29/02/2016)	18
2.1	Operazioni tra rappresentazioni	18
2.2	Ancora su rappresentazioni irriducibili e decomposizioni	26
2.3	Un lungo esercizio per il calcolo di una rappresentazione	29
2.4	Teoria dei caratteri	33
	2.4.1 Prima formula di proiezione	41
3	Caratteri come base delle funzioni classe	
	Lezione 3 (03/03/2016)	45
3.1	Ancora su caratteri di rappresentazioni irriducibili	45
3.2	Funzioni classe	53
4	Rappresentazioni indotte e alcuni esercizi	
	Lezione 4 (07/03/2016)	57
4.1	La costruzione della rappresentazione indotta	57
4.2	Degli esercizi	66
4.3	Ancora qualche esercizio d'esempio	69
5	Esercizi per il calcolo di rappresentazioni di alcuni gruppi	
	Lezione 5 (10/03/2016)	72
6	Classificazione delle rappresentazioni irriducibili di S_n parte I:	
	Tableau, tabloid, politableau e relative rappresentazioni.	
	Lezione 6 (17/03/2016)	82
6.1	Partizioni e diagrammi di Ferrer	82
6.2	Tableau e relative rappresentazioni	84
6.3	Tabloid e relative rappresentazioni	86
6.4	Ordinamenti su partizioni e lemma di dominanza	88
6.5	Moduli di Specht, ovvero le rappresentazioni irriducibili di S_n	90
7	Classificazione delle rappresentazioni irriducibili di S_n parte II:	
	Proprietà delle rappresentazioni dei tabloid e irriducibilità dei moduli di Specht	
	Lezione 7 (21/03/2015)	94
7.1	Alcune proprietà della rappresentazione dei tabloid	94
7.2	Teorema del sotto-modulo di Jones e decomposizione delle M_λ	98
7.3	Caratterizzazione alternativa delle rappresentazioni irriducibili di S_n	101

8	Alcuni esercizi e funzioni simmetriche	
	Lezione 8 (31/03/2016)	104
8.1	Soluzione ad alcuni esercizi	104
8.2	Funzioni simmetriche	107
9	Altre due basi per l'anello delle funzioni simmetriche: funzioni simmetriche elementari e funzioni simmetriche complete	
	Lezione 9 (04/04/2016)	116
9.1	Ancora su funzioni simmetriche elementari	116
9.2	Funzioni simmetriche complete	123
9.3	Un altro esercizietto sulle rappresentazioni	126
10	Somme di potenze e funzioni di Schur	
	Lezione 10 (07/04/2016)	128
10.1	Somme di potenze	128
10.2	Quinta base: le funzioni di Schur	132
10.2.1	Motivazioni dietro alle basi di Schur	132
10.2.2	Le funzioni di Schur	132
11	Funzioni di Schur e relazioni di ortogonalità in Λ	
	Lezione 11 (11/04/2016)	136
11.1	Le funzioni simmetriche di Schur	136
11.2	Ortogonalità	141
11.2.1	Alcuni lemmi preliminari	141
11.2.2	Prodotto scalare per funzioni simmetriche	143
12	Algebre di caratteri	
	Lezione 12 (14/04/2016)	146
12.1	Alcuni risultati di ortogonalità sulle funzioni simmetriche	146
12.2	Anello dei caratteri	147
13	Relazione tra rappresentazioni irriducibili degli S_n e funzioni simmetriche	
	Lezione 13 (21/04/2016)	154
13.1	Relazione tra gli s_λ e i caratteri degli S_λ	154
13.2	Decomposizione degli h_λ e un nuovo metodo per il calcolo dei numeri di Kotska	156
13.3	Alcuni lemmi preliminari per la dimostrazione della seconda formula di Jacobi-Trudi	161
14	Alcuni esercizi sulla regola di Pieri e il calcolo delle dimensioni degli S_λ	
	Lezione 14 (28/04/2016)	165
14.1	Regola di Pieri: parte II	165
14.2	Alcuni esercizi sulla regola di Pieri	166
14.3	Un lungo esercizio: il calcolo della dimensione degli S_λ	169
15	Formula degli uncini e rappresentazioni dei $GL(V)$	
	Lezione 15 (02/05/2016)	173
15.1	La formula degli uncini e alcuni esercizi per il calcolo della dimensione di rappresentazioni	173
15.2	Rappresentazioni di $GL(V)$	176
16	$\mathbb{C}[G]$-moduli destri e caratteri degli $S_\lambda(V)$	
	Lezione 16 (05/05/2016)	181
16.1	Proprietà dei $\mathbb{C}[G]$ -moduli destri	181
16.2	Caratteri degli $S_\lambda(V)$	189

17	Ultime proprietà sugli $S_\lambda(V)$ e decomposizione dei $V^{\otimes d}$ come $\text{Gl}(V)$-rappresentazioni	
	Lezione 17 (09/05/2016)	192
17.1	Dimensione degli $S_\lambda(V)$	192
17.2	Decomposizione di $V^{\otimes d}$ come $\mathfrak{gl}(V)$ -modulo	193
18	Basi di S_λ e una breve introduzione ai gruppi di riflessione	
	Lezione 18 (16/05/2016)	198
18.1	Un lungo esercizio: il calcolo di una base per S_λ	198
18.2	Gruppi di riflessioni (complesse)	202
19	Il teorema di Chevalley Shepard Todd	
	Lezione 19 (19/05/2016)	205
20	Un lungo esercizio: la decomposizione delle S_n-rappresentazioni delle coomologie degli spazi di configurazione	
	Lezione 20 (23/05/2016)	215
20.1	Una breve introduzione geometrica al problema	215
20.1.1	Un po' di topologia	215
20.1.2	Alcuni risultati sul $H^*(C_n(d))$	216
20.2	L'esercizio: capire che rappresentazione è A_n	218
	Bibliografia	223

Capitolo 1

Prime definizioni e risultati (Lezione 1: 25/02/2016)

1.1 Prime definizioni

La teoria delle rappresentazioni dei gruppi ha come oggetto di studio *azioni di gruppi su spazi vettoriali*.

Definizione 1.1 (Rappresentazione). Dato un gruppo G e fissato un campo \mathbb{K} una *rappresentazione del gruppo G* non è altro che il dato di:

- un \mathbb{K} -spazio vettoriale V ;
- un omomorfismo di gruppi $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$.

Definizione 1.2 (Rappresentazione finita). Una rappresentazione $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ si dirà *rappresentazione finita* se lo spazio vettoriale V è finito dimensionale.

Notazione. In seguito spesso faremo uso della seguente notazione: ogni volta che avremo una rappresentazione $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$, per ogni $g \in G$ e $v \in V$ indicheremo con gv l'elemento $\rho(g)(v)$, inoltre spesso identificheremo una rappresentazione (V, ρ) con lo spazio vettoriale di supporto V , laddove non ci siano problemi di ambiguità su quale sia la rappresentazione considerata, infine useremo il termine G -modulo come sinonimo di G -rappresentazione.

Osservazione 1.3. Per ogni gruppo G , ed ogni campo \mathbb{K} , esiste una \mathbb{K} -algebra denotata con $\mathbb{K}[G]$ che come spazio vettoriale è formato dalle combinazioni lineari (formali) di vettori della forma v_g , al variare di g in G . Il prodotto è dato dall'unica applicazione bilineare definita come segue

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{K}[G] \times \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \\ v_g \cdot v_h &= v_{gh} \text{ per ogni } g, h \in G. \end{aligned}$$

Osserviamo che il prodotto è ben definito poiché per definizione i vettori v_g sono una base dello spazio $\mathbb{K}[G]$. È possibile verificare che tale prodotto ha un'unità, data dal vettore v_1 , e che soddisfa la proprietà associativa.¹ Osserviamo che l'anello $\mathbb{K}[G]$ è non commutativo a meno che G stesso non sia un gruppo abeliano.

Vale la seguente proprietà universale: per ogni omomorfismo di gruppi $\varphi: G \rightarrow A^*$, dove A^* è il gruppo delle unità di una \mathbb{K} -algebra (non necessariamente commutativa), esiste ed è unico un omomorfismo di \mathbb{K} -algebre $\bar{\varphi}: \mathbb{K}[G] \rightarrow A$ tale che per ogni $g \in G$ si abbia $\bar{\varphi}(v_g) = \varphi(g)$. In sostanza $\bar{\varphi}$ è l'unico morfismo di \mathbb{K} -spazi vettoriali che manda ogni elemento della base v_g in $\varphi(g)$.² Il fatto

¹Per provare queste proprietà basta vedere che le equazioni che esprimono l'associatività e l'essere unità per v_1 valgono per i vettori v_g della base canonica e poi usare la bilinearità per far vedere che valgono per tutti i vettori.

²L'esistenza, e l'unicità, di tale applicazione lineare è un banale fatto di algebra lineare.

che questa applicazione lineare sia anche un omomorfismo di anelli, e quindi un omomorfismo di \mathbb{K} -algebre, segue dal fatto che φ è un omomorfismo di gruppi e quindi vale l'equazione

$$\bar{\varphi}(v_g \cdot v_h) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \bar{\varphi}(v_g)\bar{\varphi}(v_h)$$

per ogni coppia di elementi $g, h \in G$, da questo, usando il fatto che i v_g sono una base di $\mathbb{K}[G]$ e che $\bar{\varphi}$ è lineare, segue che

$$\bar{\varphi}(v \cdot w) = \bar{\varphi}(v) \cdot \bar{\varphi}(w)$$

per ogni $v, w \in \mathbb{K}[G]$.

Indicando con $v: G \rightarrow \mathbb{K}[G]$ la funzione che ad ogni $g \in G$ associa il vettore $v(g) = v_g$, abbiamo che per ogni \mathbb{K} -algebra A esiste una biezione

$$\begin{aligned} v^*: \text{hom}_{\mathbb{K}\text{-Alg}}[\mathbb{K}[G], A] &\cong \text{hom}_{\text{Grp}}[G, A^*] \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ v . \end{aligned}$$

Tale biiezione è un isomorfismo di spazi vettoriali³ che, per gli amanti del linguaggio categoriale, è naturale in A . Questo ci dice che gli omomorfismi di gruppi da G in A^* e gli omomorfismi di \mathbb{K} -algebre da $\mathbb{K}[G]$ in A sono la stessa cosa.

Osservazione 1.4 (Rappresentazioni come $\mathbb{K}[G]$ -moduli). Applicando l'osservazione precedente alle \mathbb{K} -algebre della forma $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, per un \mathbb{K} -spazio vettoriale V , otteniamo che esiste un isomorfismo di \mathbb{K} -spazi vettoriali

$$\text{hom}_{\text{Grp}}[G, \text{Aut}(V)] \cong \text{hom}_{\mathbb{K}\text{-Alg}}[\mathbb{K}[G], \text{End}(V)] .$$

In particolare ogni $\varphi \in \text{hom}_{\mathbb{K}\text{-Alg}}[\mathbb{K}[G], \text{End}(V)]$ è un omomorfismo di anelli e quindi per la teoria dei moduli esso dà a V una struttura di $\mathbb{K}[G]$ -modulo in cui l'azione di $\mathbb{K}[G]$, ovvero la mappa $\mathbb{K}[G] \times V \rightarrow V$, sia \mathbb{K} -bilineare.

Vale il viceversa: ad ogni $\mathbb{K}[G]$ -modulo V è possibile associare uno (ed uno solo) omomorfismo di \mathbb{K} -algebre $\varphi: \mathbb{K}[G] \rightarrow \text{End}(V)$ e quindi un unico omomorfismo $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

In sintesi quanto detto fin qui ci dice che le G -rappresentazioni e i $\mathbb{K}[G]$ -moduli sono essenzialmente la stessa cosa.

Definizione 1.5 ((Omo)morfismi di rappresentazione). Date due rappresentazioni di un gruppo G , diciamo (V, ρ^V) e (W, ρ^W) , dove

$$\begin{aligned} \rho^V: G &\longrightarrow \text{Aut}(V) \\ \rho^W: G &\longrightarrow \text{Aut}(W) , \end{aligned}$$

un omomorfismo dalla rappresentazione V alla rappresentazione W non è altro che un'applicazione \mathbb{K} -lineare $\varphi: V \rightarrow W$ tale che per ogni $g \in G$ e $v \in V$ si abbia

$$\varphi(gv) = g\varphi(v) ,$$

o più esattamente

$$\varphi(\rho^V(g)(v)) = \rho^W(g)(\varphi(v)) .$$

³La verifica è un facile conto

Osservazione 1.6. In pratica un'applicazione lineare $\varphi: V \rightarrow W$ tra (i supporti del)le rappresentazioni V e W è un omomorfismo di rappresentazioni se e solo se per ogni $g \in G$ vale

$$\varphi \circ \rho^V(g) = \rho^W(g) \circ \varphi$$

ovvero se e solo se il seguente diagramma commuta, per ogni $g \in G$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \rho^V(g) \downarrow & & \downarrow \rho^W(g) \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Osservazione 1.7. È un facile esercizio vedere che un applicazione lineare $\varphi: V \rightarrow W$ è un morfismo di G -rappresentazioni se e solo è un morfismo di $\mathbb{K}[G]$ -moduli, dove le strutture di $\mathbb{K}[G]$ -modulo su V e W sono quelle indotte dalle rappresentazioni come descritto nelle osservazioni precedenti.

Puntualizziamo sul fatto che l'azione di $\mathbb{K}[G]$ su V è data dall'unica mappa bilineare che soddisfi l'equazione

$$gv_h = v_{gh} .$$

Proposizione 1.8. *Date tre G -rappresentazioni V , W e L e due omomorfismi di rappresentazioni $\varphi: V \rightarrow W$ e $\psi: W \rightarrow L$, allora l'applicazione lineare $\psi \circ \varphi: V \rightarrow L$ è anch'essa un omomorfismo di rappresentazioni.*

Dimostrazione. La dimostrazione è una rapido conto: per ipotesi sappiamo che per ogni $g \in G$ valgono $\varphi \circ \rho^V(g) = \rho^W(g) \circ \varphi$ e $\psi \circ \rho^W(g) = \rho^L(g) \circ \psi$ e quindi

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi \circ \rho^V(g) &= \psi \circ \rho^W(g) \circ \varphi \\ &= \rho^L(g) \circ \psi \circ \varphi \end{aligned}$$

che appunto prova che $\psi \circ \varphi$ è un morfismo di G -moduli. □

Proposizione 1.9. *Per ogni G -rappresentazione V il morfismo identità $1_V: V \rightarrow V$ è un omomorfismo di rappresentazioni.*

Dimostrazione. È banale osservare che per ogni $g \in G$ vale in effetti $1_V \circ \rho^V(g) = \rho^V(g) \circ 1_V$ e che quindi 1_V è un omomorfismo di rappresentazioni. □

Osservazione 1.10. Le proposizioni precedenti ci assicurano che, per ogni gruppo G , le rappresentazioni e i relativi omomorfismi formano una categoria.

Un fatto che ci servirà in seguito (per esempio per provare il lemma di Schur) è il seguente.

Proposizione 1.11. *1. Date due G -rappresentazioni V e W e due omomorfismi tra esse, $\varphi: V \rightarrow W$ e $\psi: V \rightarrow W$, l'applicazione lineare $\varphi + \psi: V \rightarrow W$ è ancora un omomorfismo di rappresentazioni.*

2. Date due G -rappresentazioni V e W e un omomorfismo di rappresentazioni $\varphi: V \rightarrow W$, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ l'applicazione lineare $\lambda\varphi: V \rightarrow W$ è un omomorfismo di rappresentazioni.

Dimostrazione. 1. Siano $\varphi, \psi: V \rightarrow W$ omomorfismi di rappresentazioni. Vogliamo provare che $\varphi + \psi$ è anche esso un omomorfismo di rappresentazioni, ovvero che per ogni $g \in G$ e per ogni $x \in V$ si abbia

$$(\varphi + \psi)(gx) = g((\varphi + \psi)(x)) .$$

Usando le definizioni delle mappe si ottiene il seguente conto

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(gx) &= \varphi(gx) + \psi(gx) \\ &= g\varphi(x) + g\psi(x) \text{ (poiché } \varphi \text{ e } \psi \text{ sono morfismi)} \\ &= g(\varphi(x) + \psi(x)) \text{ (per le proprietà delle rappresentazioni)} \\ &= g(\varphi + \psi)(x) \end{aligned}$$

che prova quello che volevamo dimostrare.

2. Sia $\varphi: V \rightarrow W$ il morfismo di rappresentazione. Anche in questo caso per provare che $\lambda\varphi$ è una G -rappresentazione dobbiamo provare che

$$(\lambda\varphi)(gx) = g\lambda\varphi(x)$$

per ogni $g \in G$ e $x \in V$. E anche in questo caso usando le definizioni otteniamo che

$$\begin{aligned} (\lambda\varphi)(gx) &= \lambda\varphi(gx) \\ &= \lambda(g\varphi(x)) \text{ (poiché } \varphi \text{ è morfismo)} \\ &= g(\lambda\varphi(x)) \text{ (per le proprietà delle rappresentazioni)} \\ &= g(\lambda\varphi)(x) \end{aligned}$$

che di nuovo prova il nostro claim. □

Osservazione 1.12. La proposizione precedente prova che per ogni coppia di G -rappresentazioni V e W l'insieme $\text{hom}_G[V, W]$ degli omomorfismi di G -rappresentazioni è un \mathbb{K} -spazio vettoriale.

Per chi conosce la nozione di *categoria additiva* e *categoria lineare* può divertirsi a provare che la categoria delle G -rappresentazioni è una categoria additiva/lineare.

Esempio 1.13. Consideriamo il gruppo S_3 , il gruppo delle permutazioni di un insieme di 3 elementi, e il \mathbb{C} -spazio vettoriale \mathbb{C}^3 . Su tali dati possiamo definire la rappresentazione

$$\begin{aligned} \rho: S_3 &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^3) \\ \rho(\sigma) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ x_{\sigma(3)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definizione 1.14 (Sotto-rappresentazione). Data una rappresentazione (V, ρ^V) di un gruppo G , una sua *sotto-rappresentazione*, anche detto *sotto-spazio G -invariante*, è un sotto-spazio $W \subseteq V$ tale che per ogni $g \in G$ si abbia $\rho^V(g)(W) \subseteq W$ (o in forma più contratta $gW \subseteq W$).

Osservazione 1.15. Se (V, ρ^V) è una G -rappresentazione e $W \subseteq V$ è una sotto-rappresentazione allora segue che ogni $\rho^V(g)$ si può restringere a un

$$\rho^W(g) = \rho^V(g)|_W: W \rightarrow W$$

e non è difficile vedere che in questo modo ρ^W è un omomorfismo dal gruppo G al gruppo $\text{Aut}(W)$, ovvero la coppia (W, ρ^W) è una G -rappresentazione.

Dimostrazione (dell'osservazione). Dobbiamo far vedere che ρ^W è una mappa da G in $\text{Aut}(W)$ e che è un omomorfismo. Sappiamo già che $\rho^W(g): W \rightarrow W$ è un endomorfismo lineare di W , bisogna far vedere che esso è anche biiettivo e quindi che è un automorfismo. Ricordiamo che per definizione $\rho^W(g) = \rho(g)|_W$ e quindi

$$\begin{aligned}\rho^W(gh) &= \rho(gh)|_W \\ &= \rho(g) \circ \rho(h)|_W \\ &= \rho(g)|_W \circ \rho(h)|_W \\ &= \rho^W(g) \circ \rho^W(h)\end{aligned}$$

dove la seconda equazione segue dal fatto che ρ è un omomorfismo mentre la terza da considerazioni set-teoretiche. Da questa osservazione seguono due cose:

1. le equazioni

$$\rho^W(g) \circ \rho^W(g^{-1}) = \rho^W(gg^{-1}) = \rho^W(1) = \text{id}_W$$

che ci garantiscono che $\rho^W(g)$ è invertibile per ogni $g \in G$, e quindi che effettivamente ρ^W è una mappa da G in $\text{Aut}(W)$;

2. che per ogni coppia $g, h \in G$ valga

$$\rho^W(gh) = \rho^W(g) \circ \rho^W(h)$$

ovvero che ρ^W è un omomorfismo di gruppi e quindi una rappresentazione di G su W .

Questo prova la tesi. □

Proposizione 1.16 (che funge anche da esempio, e non sorprenderà molti). *Dato un omomorfismo $\varphi: V \rightarrow W$ tra due G -rappresentazioni allora $\ker \varphi$ è una sotto-rappresentazione di V e $\text{Im } \varphi$ è una sotto-rappresentazione di W .*

Dimostrazione. Sappiamo già che $\ker \varphi$ è un sotto-spazio vettoriale di V , per far vedere che sia anche una sotto-rappresentazione dobbiamo far vedere che per ogni $g \in G$ si ha $g \ker \varphi \subseteq \ker \varphi$, ovvero che per ogni $x \in \ker \varphi$ valga anche $gx \in \ker \varphi$.

Sia dunque $x \in \ker \varphi$ e $g \in G$ allora

$$\begin{aligned}\varphi(gx) &= g\varphi(x) \text{ (per la proprietà di omomorfismo di } \varphi) \\ &= g \cdot 0 \text{ (perché } x \in \ker \varphi) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dunque $\varphi(gx) = 0$ e quindi anche $gx \in \ker \varphi$. Questo prova che $g \ker \varphi \subseteq \ker \varphi$ e che quindi $\ker \varphi$ è una sotto-rappresentazione.

In modo del tutto analogo per provare che $\text{Im } \varphi$ sia una sotto-rappresentazione di W ci basta provare che $g \text{Im } \varphi \subseteq \text{Im } \varphi$, ovvero che per ogni $y \in \text{Im } \varphi$ e ogni $g \in G$ si ha che $gy \in \text{Im } \varphi$.

Se $y \in \text{Im } \varphi$ allora sappiamo che esiste un $x \in V$ tale che $\varphi(x) = y$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}gy &= g\varphi(x) \\ &= \varphi(gx) \text{ (per la proprietà di omomorfismo di } \varphi)\end{aligned}$$

e dato che $\varphi(gx) \in \text{Im } \varphi$ ne segue che $gy \in \text{Im } \varphi$, per ogni $y \in \text{Im } \varphi$ e $g \in G$. Questo prova che $g \text{Im } \varphi \subseteq \text{Im } \varphi$ e che quindi anche $\text{Im } \varphi$ è una sotto-rappresentazione. □

Esempio 1.17. Soffermiamoci per un attimo ancora sulla rappresentazione dell'esempio 1.13. Consideriamo i sotto-spazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : x \in \mathbb{C} \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : x + y + z = 0 \right\}$$

tali sotto-spazi sono S_3 -invarianti, infatti:

- per ogni $\sigma \in S_3$ e un vettore $v \in U$, di componenti $v_1 = v_2 = v_3 = x$, si ha che il vettore σv ha componenti

$$\begin{aligned} (\sigma v)_1 &= v_{\sigma(1)} = x \\ (\sigma v)_2 &= v_{\sigma(2)} = x \\ (\sigma v)_3 &= v_{\sigma(3)} = x \end{aligned}$$

quindi $\sigma v = v$, e pertanto $\sigma U \subseteq U$ (che appunto prova che U è una sotto-rappresentazione);

- per ogni $\sigma \in S_3$ e un vettore $v \in T$, quindi tale che $v_1 + v_2 + v_3 = 0$, si ha che

$$\begin{aligned} (\sigma v)_1 + (\sigma v)_2 + (\sigma v)_3 &= v_{\sigma(1)} + v_{\sigma(2)} + v_{\sigma(3)} \\ &= v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{aligned}$$

quindi $\sigma v \in T$, dato che questo vale per ogni $v \in T$ ne segue che $\sigma T \subseteq T$, quindi T è una sotto-rappresentazione.

Concludiamo questa sezione con un teorema che sarà utile nel seguito per provare che alcuni spazi vettoriali hanno una struttura di G -rappresentazione.

Teorema 1.18 (Quozienti). *Data V una G -rappresentazione e $W \subseteq V$ una sua sotto-rappresentazione, allora V/W ha una naturale struttura di G -rappresentazione, in particolare se $\pi: V \rightarrow V/W$ è l'omomorfismo di proiezione al quoziente allora tale rappresentazione è definita da*

$$\rho^{V/W}(g)(\pi(v)) = \pi(\rho^V(g)(v)) \text{ per ogni } v \in V \text{ e } g \in G$$

o equivalentemente

$$\rho^{V/W}(g) \circ \pi = \pi \circ \rho^V(g)$$

per ogni $g \in G$.

Dimostrazione. La dimostrazione è una semplice applicazione dei teoremi di omomorfismo.

Cominciamo con l'osservare che per ogni $g \in G$ abbiamo che $\rho^V(g)(W) = W$. Infatti dato che W è una sotto-rappresentazione abbiamo che

$$\rho^V(g)(W) \subseteq W$$

e

$$\rho^V(g^{-1})(W) \subseteq W$$

da cui

$$\rho^V(g)(W) \subseteq W = \rho^V(g)(\rho^V(g^{-1})(W)) \subseteq \rho^V(g)(W)$$

e quindi $\rho^V(g)(W) = W$ per ogni $g \in G$.

A questo punto consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho^V(g)} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/W & & V/W \end{array} .$$

In particolare abbiamo che

$$\ker \pi \circ \rho^V(g) = \rho^V(g)^{-1}(\ker \pi) = \rho^V(g^{-1})(W) = W = \ker \pi$$

quindi per il primo teorema di omomorfismo sappiamo che esiste ed è unico il morfismo $\rho^{V/W}(g)$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho^V(g)} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/W & \xrightarrow{\rho^{V/W}(g)} & V/W \end{array}$$

commuti. Inoltre lo stesso teorema di omomorfismo ci dice che $\ker \rho^{V/W}(g) = (0)$ e per proprietà generali sappiamo inoltre che, dato che $\rho^{V/W}(g) \circ \pi = \pi \circ \rho^V(g)$ è suriettiva (perché composizione di π e $\rho^V(g)$ che sono suriettive), $\rho^{V/W}(g)$ è pure suriettiva. Dunque $\rho^{V/W}(g)$ è un automorfismo di V/W . Questo ci dà la funzione

$$\begin{aligned} \rho^{V/W} : G &\longrightarrow \text{Aut}(V/W) \\ g &\longmapsto \rho^{V/W}(g) . \end{aligned}$$

Resta da vedere che questo sia effettivamente un omomorfismo.

Presi $g, h \in G$ dalla commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & & \rho^V(hg) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ V & \xrightarrow{\rho^V(g)} & V & \xrightarrow{\rho^V(h)} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ V/W & \xrightarrow{\rho^{V/W}(g)} & V/W & \xrightarrow{\rho^{V/W}(h)} & V/W \end{array}$$

e dalla definizione di $\rho^{V/W}(hg)$ ne segue che

$$\rho^{V/W}(hg) = \rho^{V/W}(h) \circ \rho^{V/W}(g) .$$

Questo prova che $\rho^{V/W}$ è effettivamente un omomorfismo di gruppi e $\rho^{V/W}(g) \circ \pi = \pi \circ \rho^V(g)$, per ogni $g \in G$, per definizione dei $\rho^{V/W}(g)$ stessi. \square

1.2 Decomposizione di rappresentazioni

Le due sotto-rappresentazioni dell'esempio 1.17 hanno una particolare proprietà: esse ci danno una decomposizione dello spazio \mathbb{C}^3 come

$$\mathbb{C}^3 = U \oplus T ,$$

- si vede subito che se $v \in U \cap T$ allora posto $x = v_1 = v_2 = v_3$ si deve avere $3x = v_1 + v_2 + v_3 = 0$, ovvero $x = 0$, e quindi $v = 0$;
- per provare che $\mathbb{C}^3 = U + T$ basta osservare che U ha dimensione 1, in quanto generato dal vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mentre T ha codimensione 1 in un \mathbb{C} -spazio di dimensione 3, questo perché T è definito da un'equazione lineare, e quindi T ha dimensione 2, da qui si può concludere usando la formula di Grassmann.

Questo esempio mostra già uno dei problemi principali della *teoria delle rappresentazioni di gruppi*: trovare decomposizioni di rappresentazioni in sotto-rappresentazioni più semplici. Questo perché una volta trovata una decomposizione è possibile studiare proprietà della rappresentazione attraverso le proprietà delle sotto-rappresentazioni.

In particolare spesso si cerca di decomporre una rappresentazione come somma diretta di sotto-rappresentazioni irriducibili.

Definizione 1.19 (Rappresentazioni irriducibili). Sia G un gruppo e (V, ρ^V) una sua rappresentazione. Diremo che *la rappresentazione V è irriducibile* se $V \neq (0)$ e le sue uniche sotto-rappresentazioni sono V stesso e (0) .

Notazione. Se $W \subseteq V$ è una sotto-rappresentazione, dove V potrebbe anche non essere irriducibile, diremo che W è una *sotto-rappresentazione irriducibile* se la rappresentazione indotta $(W, \rho^W = \rho^V|_W)$ è una sotto-rappresentazione irriducibile.

Osservazione 1.20. Le sotto-rappresentazioni dell'esempio 1.17 sono delle (sotto)rappresentazioni irriducibili.

Dimostrazione. Lo spazio

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$$

ha dimensione 1 e quindi gli unici sotto-spazi vettoriali possono essere U stesso e (0) , quindi sono anche le uniche possibili sotto-rappresentazioni (una sotto-rappresentazione è un sotto-spazio).

Lo spazio

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : x + y + z = 0 \right\}$$

ha dimensione 2, pertanto, se avesse dei sotto-spazi S_3 -invarianti non banali, essi dovrebbero avere dimensione 1. Il problema è che l'unico sotto-spazio S_3 -invariante di \mathbb{C}^3 , di dimensione 1, è esattamente U , che chiaramente non è contenuto in T . Per far vedere questo fissiamo una sotto-rappresentazione S di dimensione 1 e facciamo vedere che $S = U$. Per fare questo si può procedere in due modi:

1. supposto che $v \in S$ sia un generatore di S , per ipotesi sappiamo che esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tali che $(1, 2)v = \lambda v$ e $(1, 3)v = \mu v$, da queste equazioni vettoriali possiamo estrarre 6 equazioni lineari che risolte ci provano che $v_1 = v_2 = v_3 \neq 0$;
2. dato che S è una sotto-rappresentazione abbiamo che l'omomorfismo ρ induce un omomorfismo

$$\rho^S: S_3 \rightarrow \text{Aut}(S) \cong \text{GL}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$$

tale omomorfismo non può essere iniettivo, poiché S_3 non è abeliano e quindi non si può immergere in un gruppo commutativo come \mathbb{C}^* , pertanto $\ker \rho^S = A_3$; questo ci garantisce che

$$\rho^S((1, 2, 3)) = \rho((1, 2, 3))|_S = \text{id}_S$$

ma da questo allora segue che se $v \in S$ è un generatore di S allora si deve avere che

$$(1, 2, 3)v = v$$

e in particolare

$$((1, 2, 3)v)_1 = v_1$$

$$((1, 2, 3)v)_2 = v_2$$

d'altra parte però, per come era stata definita l'azione di S_3 su \mathbb{C}^3 , si deve anche avere

$$((1, 2, 3)v)_1 = v_2$$

$$((1, 2, 3)v)_2 = v_3$$

e quindi $v_1 = v_2 = v_3$, che prova che $v \in U$.

Dal fatto che U sia l'unico sotto-spazio S_3 -invariante di dimensione 1 segue che T non può avere sotto-rappresentazioni proprie non banali e che quindi è irriducibile. \square

Teorema 1.21. *Per ogni gruppo G finito, una G -rappresentazione finita su un \mathbb{C} -spazio vettoriale V ammette una decomposizione come somma di sotto-rappresentazioni irriducibili.*

Prima di dimostrare il teorema proviamo il seguente lemma.

Lemma 1.22. *Dato un gruppo G finito e una sua \mathbb{C} -rappresentazione V , anche essa finita, allora è possibile mettere su V un prodotto hermitiano H che sia definito positivo e G -invariante: per cui $H(gu, gv) = H(u, v)$ per ogni $u, v \in V$ e $g \in G$.*

Dimostrazione del lemma. Per ipotesi V è un \mathbb{C} -spazio finito dimensionale, pertanto è equipaggiabile con un prodotto hermitiano definito positivo

$$H_0: V \times V \rightarrow \mathbb{C} .$$

A partire da tale prodotto hermitiano possiamo definire la mappa

$$H: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$H(u, v) = \sum_{g \in G} H_0(gu, gv)$$

che è ben definita poiché G è, per ipotesi, finito.

Non è difficile vedere tramite conto esplicito che H è un prodotto hermitiano definito positivo⁴.

Resta da provare che H è anche G -invariante, ovvero per ogni $g \in G$ e per ogni coppia $u, v \in V$ si ha che $H(gu, gv) = H(u, v)$. Per fare questo consideriamo degli $u, v \in V$ e un $h \in G$ e osserviamo che

$$\begin{aligned} H(hu, hv) &= \sum_{g \in G} H_0(ghu, ghv) \\ &= \sum_{g \in Gh} H_0(gu, gv) \\ &= \sum_{g \in G} H_0(gu, gv) \\ &= H(u, v) \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che gli insiemi $Gh = \{ gh : g \in G \}$ e G sono uguali.

Questo prova la tesi. \square

Dimostrazione del teorema 1.21. Come spesso si fa quando si ha a che fare con spazi vettoriali di dimensione finita si procede per induzione su $n = \dim_{\mathbb{C}} V$.

(Passo base). Non consideriamo il caso 0-dimensionale perché è abbastanza “ovvio/inutile”. Se $n = 1$, ovvero abbiamo a che fare con una rappresentazione 1-dimensionale, allora, come abbiamo già visto, tale rappresentazione è irriducibile: perché non ha sotto-spazi non banali e quindi non può avere sotto-rappresentazioni non banali. Quindi se V ha dimensione 1 essa è una rappresentazione irriducibile.

(Passo induttivo). Supponiamo che l'ipotesi sia vera per G -rappresentazioni di dimensione minore (strettamente) a n e che V sia una G -rappresentazione di dimensione n .

Abbiamo due possibilità: o V è una rappresentazione irriducibile, e allora non c'è altro da dimostrare, oppure non lo è, e quindi esiste un sotto-spazio $W \subsetneq V$ che sia G -invariante. Concentriamoci su questo secondo caso.

Per il lemma 1.22 V è equipaggiato con un prodotto hermitiano $H: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ definito positivo che sia G -invariante, ovvero tale che per ogni $g \in G$ e per ogni $u, v \in V$ si abbia

$$H(gu, gv) = H(u, v) .$$

Allora sappiamo che vale la decomposizione

$$V \cong W \oplus W^{\perp}$$

dove W^{\perp} è l'ortogonale di W rispetto al prodotto H .

Se anche W^{\perp} fosse G -invariante allora l'ipotesi induttiva implicherebbe che sia W che W^{\perp} sono decomponibili come somma diretta di sotto-rappresentazioni irriducibili, quindi anche V sarebbe decomponibile come somma delle sotto-(sotto)rappresentazioni irriducibili. Per

⁴ Oppure uno può semplicemente osservare che

$$H = \sum_{g \in G} H_0 \circ (\rho(g) \times \rho(g))$$

ovvero che H è la somma (finita) delle forme hermitiane definite positive $H_0 \circ (\rho(g) \times \rho(g))$.

vedere che effettivamente W^\perp è G -invariante ci basta provare che per ogni $z \in W^\perp$ e per ogni $g \in G$ vale che $gz \in W^\perp$, ovvero che $H(gz, w) = 0$ per ogni $w \in W$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} H(gz, w) &= H(g^{-1}gz, g^{-1}w) \text{ (per } G\text{-invarianza di } H) \\ &= H(z, g^{-1}w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $g^{-1}w \in W$, in quando W è G -invariante, e che $z \in W^\perp$. Quindi effettivamente W^\perp è G -invariante e per le osservazioni precedenti anche V ammette una decomposizione come somma diretta di sotto-rappresentazioni irriducibili.

Per induzione segue la tesi. □

Osservazione 1.23. È facile osservare che la precedente dimostrazione non si può estendere al caso di rappresentazioni su campi di cardinalità positiva. Anzitutto non avremmo i prodotti hermitiani, ma questo sarebbe un problema facilmente aggirabile usando dei prodotti scalari, il problema più grosso sta nel lemma 1.22: preso un prodotto scalare H_0 , definito su una rappresentazione di campo finito \mathbb{K} , il prodotto H definito dall'equazione

$$H(u, v) = \sum_{g \in G} H(gu, gv)$$

potrebbe avere dei comportamenti strani nel caso in cui $\text{char } \mathbb{K} \mid |G|$.

D'altra parte invece un risultato analogo a quello qui presentato vale per gruppi di Lie, una classe particolare di gruppi infiniti muniti di una topologia che renda continue e differenziabili le operazioni di gruppo. Nella dimostrazione di tale risultato si lavora sempre con rappresentazioni su campo complesso e a partire da un prodotto hermitiano H_0 si definisce un prodotto G -invariante

$$H(u, v) = \int_{g \in G} H_0(gu, gv) d\mu$$

dove μ è la misura di Haar.

In seguito vedremo un risultato analogo al teorema appena dimostrato per campi a caratteristica positiva:

Teorema (Maschke). *Sia dato un gruppo finito G , con $|G| = n$, e un campo \mathbb{K} , con $\text{char } \mathbb{K} \nmid n$. Allora per ogni G -rappresentazione V , su campo \mathbb{K} , e per ogni sua sotto-rappresentazione W esiste una G -sotto-rappresentazione U di V tale che $V = W \oplus U$.*

Prima di continuare vediamo alcuni contro-esempi cattivi che ci facciano capire perché nel teorema di Maschke è fondamentale l'ipotesi che il gruppo G sia finito.

Esempio 1.24. Consideriamo la seguente rappresentazione del gruppo infinito $(\mathbb{R}, +)$.

$$\begin{aligned} \rho: \mathbb{R} &\longrightarrow \text{Gl}(\mathbb{C}^2) \\ \rho(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tale rappresentazione ammette la sotto-rappresentazione

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Che questa sia una sotto-rappresentazione segue dal fatto che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore per ogni $\rho(t)$.

Tuttavia U non ammette un supplementare T che sia anche esso \mathbb{R} -invariante. Infatti se così non fosse, e quindi se esistesse una sotto-rappresentazione T tale che $\mathbb{C}^2 \cong U \oplus T$ allora T dovrebbe essere una sotto-rappresentazione di dimensione 1, e quindi dovrebbe esistere un vettore $w \in T$ tale che $T = \langle w \rangle$. Tale w dovrebbe essere un autovettore per tutti i $\rho(t)$ e in particolare dovrebbe esserlo per $\rho(1)$. Posto $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora si avrebbe che $\{v, w\}$ sia una base di autovettori per $\rho(1)$ che quindi dovrebbe essere diagonalizzabile, ma questo è assurdo per i teoremi di algebra lineare.

Ci apprestiamo ora a definire uno dei teoremi più importanti della teoria delle rappresentazioni.

Teorema 1.25 (Lemma di Schur). *Dato $\varphi: V \rightarrow W$ omomorfismo di G -rappresentazioni irriducibili allora*

1. o $\varphi = 0$ o φ è un isomorfismo;
2. se $V = W$ è una \mathbb{C} -rappresentazione irriducibile finita allora $\varphi = \lambda \text{id}_V$ per qualche scalare $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. 1. Sia φ come nelle ipotesi allora $\ker \varphi$ e $\text{Im } \varphi$ sono sotto-rappresentazioni, di V e W rispettivamente. Per l'irriducibilità abbiamo due casi

$\ker \varphi = V$: in tal caso $\varphi = 0$;

$\ker \varphi = (0)$: in questo caso φ è iniettiva e quindi, dato che V è non nullo per ipotesi, $\varphi \neq 0$, questo automaticamente esclude che $\text{Im } \varphi$ possa essere uguale a (0) e quindi, per l'irriducibilità di W , segue che $\text{Im } \varphi = W$, ovvero che φ sia anche suriettiva e quindi un isomorfismo.

2. Nel caso $V = W$ sia una \mathbb{C} -rappresentazione finita allora abbiamo che φ è un endomorfismo lineare su un \mathbb{C} -spazio di dimensione finita, pertanto ha un autovalore λ , ovvero $\varphi - \lambda \text{id}_V$ ha \ker non banale.

Ora, visto che V è per ipotesi irriducibile, per il punto precedente o $\varphi - \lambda \text{id}$ è l'omomorfismo nullo, o $\varphi - \lambda \text{id}$ è un isomorfismo. Questa seconda possibilità è esclusa poiché $\ker(\varphi - \lambda \text{id}) \neq (0)$ e quindi deve valere $\varphi - \lambda \text{id} = 0$ ovvero $\varphi = \lambda \text{id}$. □

Esempio 1.26 (Rappresentazioni irriducibili per gruppi abeliani finiti.). Sia G un gruppo abeliano finito e sia V una sua rappresentazione irriducibile. Vogliamo far vedere che $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$.

Sia $L: G \rightarrow \text{Gl}(V)$ la mappa strutturale della rappresentazione. Per ogni $h \in G$ abbiamo che L_h è un'applicazione lineare di V in se stesso. Inoltre abbiamo che per ogni $g \in G$ vale che

$$L_h \circ L_g = L_{hg} = L_{gh} = L_g \circ L_h$$

o equivalentemente⁵

$$L_h \circ \rho(g) = \rho(g) \circ L_h$$

che ci dice che L_h è un (auto)morfismo⁶ della rappresentazione (V, L) in se stessa.

Allora per il *lemma di Schur* abbiamo che $L_h = \lambda \text{id}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}^*$, in particolare ogni vettore di V sarebbe un autovettore.

Se per assurdo $\dim_{\mathbb{C}} V > 1$ allora presi due vettori linearmente indipendenti v e w in V , per ogni $h \in G$ l'applicazione L_h dovrebbe avere v e w come autovettori e quindi si avrebbe che $L_h(v) \in \langle v \rangle$ e $L_h(w) \in \langle w \rangle$. Da questo seguirebbe che i due spazi $\langle v \rangle$ e $\langle w \rangle$ dovrebbero essere due sotto-spazi G -invarianti non banali, assurdo perché per ipotesi V era irriducibile. Quindi dobbiamo concludere che $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$.

⁵Dato che $\rho(g) = L_g$.

⁶Il fatto che sia un endomorfismo è ovvio, in più è biiettivo.

Esempio 1.27. Proviamo a trovare le rappresentazioni irriducibili (su campo \mathbb{C}) del gruppo C_4 (il gruppo ciclico di ordine 4).

Dall'esempio precedente sappiamo che una tale rappresentazione ha dimensione 1, quindi deve essere della forma

$$\rho: C_4 \longrightarrow \mathrm{Gl}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* .$$

Una rappresentazione ρ di questo tipo, in quanto omomorfismo di gruppi, deve mappare il generatore di $x \in C_4$ in un elemento di $\rho(x) \in \mathbb{C}^*$ tale che $\rho(x)^4 = 1$: quindi $\rho(x)$ deve essere una radice del polinomio $X^4 - 1$.

Dai risultati di teoria dei gruppi sappiamo che per ogni tale elemento (ogni radice di $X^4 - 1$) esiste uno ed un solo omomorfismo ρ come sopra. Quindi le rappresentazioni irriducibili di C_4 sono tutti e soli gli omomorfismi che mappano il generatore x rispettivamente in $1, -1, i$ e $-i$.

Osservazione 1.28. Osserviamo che se iniziamo a studiare le rappresentazioni su campi diversi da \mathbb{C} i risultati precedenti non valgono, poiché non vale la seconda parte di Schur.

Come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.29. Consideriamo la seguente rappresentazione di C_4 .

$$\begin{aligned} \rho: C_4 &\longrightarrow \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^2) \\ \rho(x^k) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \end{aligned}$$

La rappresentazione ρ è irriducibile. Infatti se avesse una sotto-rappresentazione non banale essa dovrebbe avere dimensione 1 e dovrebbe essere un autospazio ogni $\rho(x^k)$. Tuttavia sappiamo che $\rho(x)$ non ha autovalori reali e quindi non può avere autospazi di dimensione 1.

Capitolo 2

Costruzioni con rappresentazioni e caratteri

Lezione 2 (29/02/2016)

In questo capitolo inizieremo a vedere i modi di *comporre rappresentazioni* per costruire rappresentazioni più complesse a partire da “mattoncini semplici” e inizieremo a vedere la teoria dei caratteri che, come vedremo più avanti, diventerà lo strumento essenziale per studiare modi di *decomporre rappresentazioni* su \mathbb{C} tramite rappresentazioni irriducibili.

2.1 Operazioni tra rappresentazioni

Definizione 2.1 (Somma diretta). Date due G -rappresentazioni V e W lo spazio $V \oplus W$ ha una naturale G -rappresentazione associata ad essa data da

$$\begin{aligned}\rho^{V \oplus W} : G &\longrightarrow \text{Aut}(V \oplus W) \\ \rho^{V \oplus W}(g) &= \rho^V(g) \oplus \rho^W(g) ,\end{aligned}$$

ovvero

$$\rho^{V \oplus W}(g)(v, w) = (\rho^V(g)(v), \rho^W(g)(w))$$

che nella notazione contratta si può anche scrivere

$$g(v, w) = (gv, gw) .$$

Proposizione. *La $\rho^{V \oplus W}$ è una rappresentazione.*

Dimostrazione. Ricordiamo che per le proprietà (la funtorialità) della somma diretta, dato che per ogni $g \in G$ abbiamo che $\rho^V(g)$ e $\rho^W(g)$ sono due automorfismi su V e W rispettivamente, abbiamo che $\rho^{V \oplus W}(g)$ è un isomorfismo da $V \oplus W$ in se stesso e quindi appartiene a $\text{Aut}(V \oplus W)$. Questo ci dice che la mappa $\rho^{V \oplus W} : G \rightarrow \text{Aut}(V \oplus W)$ è ben definita.

Non ci resta che provare che $\rho^{V \oplus W}$ è anche un omomorfismo di gruppi. Consideriamo quindi due elementi $g, h \in G$ allora sempre per le proprietà della somma diretta valgono le seguenti

equazioni

$$\begin{aligned}
\rho^{V \oplus W}(gh) &= \rho^V(gh) \oplus \rho^W(gh) \\
&= (\rho^V(g) \circ \rho^V(h)) \oplus (\rho^W(g) \circ \rho^W(h)) \\
&= (\rho^V(g) \oplus \rho^W(g)) \circ (\rho^V(h) \oplus \rho^W(h)) \\
&= \rho^{V \oplus W}(g) \circ \rho^{V \oplus W}(h)
\end{aligned}$$

□

Definizione 2.2 (Prodotto tensore). Date due G -rappresentazioni V e W lo spazio $V \otimes W$ ha una naturale G -rappresentazione associata ad essa data da

$$\begin{aligned}
\rho^{V \otimes W} : G &\longrightarrow \text{Aut}(V \otimes W) \\
\rho^{V \otimes W}(g) &= \rho^V(g) \otimes \rho^W(g) ,
\end{aligned}$$

ovvero

$$\rho^{V \otimes W}(g)(v \otimes w) = (\rho^V(g)(v)) \otimes (\rho^W(g)(w))$$

o in notazione contratta

$$g(v \otimes w) = (gv) \otimes (gw) .$$

Proposizione. La $\rho^{V \otimes W}$ è una rappresentazione.

Dimostrazione. Analogamente al caso della somma diretta anche per il prodotto tensore sfruttando le functorialità e il fatto che per ogni $g \in G$ sia $\rho^V(g)$ che $\rho^W(g)$ sono isomorfismi ne segue che anche $\rho^{V \otimes W}(g)$ definito come sopra è un isomorfismo. Quindi anche in questo caso la mappa $\rho^{V \otimes W}$ prende valori in $\text{Aut}(V \otimes W)$ e quindi è ben definita¹.

Proviamo che $\rho^{V \otimes W}$ è un omomorfismo di gruppi. Prendiamo $g, h \in G$, allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\rho^{V \otimes W}(gh) &= \rho^V(gh) \otimes \rho^W(gh) \\
&= (\rho^V(g) \circ \rho^V(h)) \otimes (\rho^W(g) \circ \rho^W(h)) \\
&= (\rho^V(g) \otimes \rho^W(g)) \circ (\rho^V(h) \otimes \rho^W(h)) \\
&= \rho^{V \otimes W}(g) \circ \rho^{V \otimes W}(h)
\end{aligned}$$

e questo prova che effettivamente $\rho^{V \otimes W}$ è un omomorfismo di gruppi, ovvero una rappresentazione. □

Definizione 2.3 (Duale). Sia V una G -rappresentazione allora V^* ha una naturale struttura di G -rappresentazione data da

$$\begin{aligned}
\rho^{V^*} : G &\longrightarrow \text{Aut}(V^*) \\
\rho^{V^*}(g) &= \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V(g^{-1}), \mathbb{K}]
\end{aligned}$$

¹Il codominio è davvero il gruppo di automorfismi giusto.

o più esplicitamente

$$\rho^{V^*}(g)(\varphi) = \varphi \circ \rho^V(g^{-1}) .$$

Per scrivere la definizione in notazione contratta dobbiamo ricordare che per ogni $g \in G$ e ogni $\varphi \in V^*$ abbiamo che l'elemento $g\varphi$ è una funzione e quindi è completamente descritta da come si comporta sugli elementi $v \in V$: da questa osservazione segue possiamo anche descrivere l'azione/rappresentazione ρ^{V^*} nel seguente modo

$$(g\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v) .$$

Proposizione 2.4. *La ρ^{V^*} è una rappresentazione.*

Posticipiamo per un attimo la dimostrazione, su cui ritorneremo quando vedremo la rappresentazione sullo spazio delle applicazioni lineari.

Prima di continuare facciamo la seguente osservazione.

Osservazione 2.5. Se V è una G -rappresentazione e con $\langle -, - \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}$ indichiamo il ben noto *pairing* di V definito dall'equazione

$$\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$$

che è un'applicazione bilineare, allora abbiamo

$$\begin{aligned} \langle g\varphi, gv \rangle &= (g\varphi)(gv) \\ &= \varphi(g^{-1}gv) \\ &= \varphi(v) \\ &= \langle \varphi, v \rangle \end{aligned}$$

che ci dice che il pairing $\langle -, - \rangle$ è G -invariante nello stesso senso del prodotto hermitiano descritto nel teorema 1.21.

In pratica l'aver definito l'azione come la *pre-composizione* con ρ^V ci garantisce che il pairing sia preservato dall'azione di G .

Definizione 2.6 (Algebra alternante). Data una G -rappresentazione V anche il k -esimo prodotto alternante $\Lambda^k V$ ha una naturale G -rappresentazione associata:

$$\begin{aligned} \rho^{\Lambda^k V} : G &\longrightarrow \text{Aut}(\Lambda^k V) \\ \rho^{\Lambda^k V}(g) &= \Lambda^k \rho^V(g) \end{aligned}$$

e quindi

$$\rho^{\Lambda^k V}(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = (\rho^V(g)(v_1)) \wedge \cdots \wedge (\rho^V(g)(v_k))$$

o in notazione contratta

$$g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = (gv_1) \wedge \cdots \wedge (gv_k) .$$

Proposizione 2.7. *La $\rho^{\Lambda^k V}$ è una rappresentazione.*

Dimostrazione. Ricordiamo che $\Lambda^k V$ è il quoziente di $V^{\otimes k}$ per il sotto-spazio generato dal sottoinsieme

$$S = \{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_{k-1} : v_1, \dots, v_{k-1} \in V \} .$$

Un facile conto mostra che per ogni $v \in S$ si ha che $\rho^{V^{\otimes k}}(g)v \in S$ e da questo segue che il sotto-spazio $W = \langle S \rangle$ è una G -rappresentazione.

Ma allora per il teorema 1.18 segue che $\Lambda^k V = V^{\otimes k}/W$ ha una struttura di G -rappresentazione data dall'omomorfismo $\rho^{\Lambda^k V} : G \rightarrow \text{Aut}(\Lambda^k V)$, definito dall'equazione $\rho^{\Lambda^k V}(g) \circ \pi = \pi \circ \rho^{V^{\otimes k}}(g)$, dove $\pi : V^{\otimes k} \rightarrow \Lambda^k V$ è la proiezione al quoziente. Da questa equazione segue che

$$\begin{aligned} g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) &= \rho^{\Lambda^k V}(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \\ &= \rho^{\Lambda^k V}(g)(\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)) \\ &= \pi(\rho^{V^{\otimes k}}(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)) \\ &= \pi(gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k) \\ &= gv_1 \wedge \cdots \wedge gv_k \end{aligned}$$

e quindi la rappresentazione è proprio quella dell'enunciato. □

Definizione 2.8 (Algebra simmetrica). Data una G -rappresentazione V anche lo spazio $\text{Sym}_k(V)$ ha una naturale struttura di G -modulo data da:

$$\begin{aligned} \rho^{\text{Sym}_k(V)} : G &\longrightarrow \text{Aut}(\text{Sym}_k(V)) \\ \rho^{\text{Sym}_k(V)} &= (\rho^V)^{\odot k} \end{aligned}$$

quindi

$$\rho^{\text{Sym}_k(V)}(g)(v_1 \cdots v_k) = (\rho^V(g)(v_1) \cdots \rho^V(g)(v_k))$$

che in notazione contratta diventa

$$g(v_1 \cdots v_k) = (gv_1) \cdots (gv_k) .$$

Proposizione 2.9. *La $\rho^{\text{Sym}_k(V)}$ è una rappresentazione.*

Dimostrazione. La dimostrazione è pressoché identica a quella per il prodotto alternante. Ricordiamo che $\text{Sym}_k(V) = V^{\otimes k}/W$ dove W è il sotto-spazio generato da

$$S = \{ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_k) - (v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k) : v_1, \dots, v_k \in V \} .$$

Un conto mostra che per ogni $v \in S$ si ha che $\rho^{V^{\otimes k}}(g)(v) \in S$ e che quindi S è G -invariante, da questo segue che anche W è G -invariante e quindi è una sotto-rappresentazione. Il teorema 1.18 ci

dice che $\text{Sym}_k(V)$ ha una struttura di G -rappresentazione data dall'omomorfismo $\rho^{\text{Sym}_k(V)}: G \rightarrow \text{Aut}(\text{Sym}_k(V))$ definito dall'equazione

$$\rho^{\text{Sym}_k(V)}(g) \circ \pi = \pi \circ \rho^{V^{\otimes k}}(g) ,$$

dove $\pi: V^{\otimes k} \rightarrow \text{Sym}_k(V)$ è la proiezione al quoziente.

Dall'equazione segue che

$$\begin{aligned} g(v_1 \dots v_k) &= \rho^{\text{Sym}_k(V)}(g)(v_1 \dots v_k) \\ &= \rho^{\text{Sym}_k(V)}(g)(\pi(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)) \\ &= \pi(\rho^{V^{\otimes k}}(g)(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)) \\ &= \pi(gv_1 \otimes \dots \otimes gv_k) \\ &= (gv_1) \dots (gv_k) \end{aligned}$$

che ci garantisce che $\rho^{\text{Sym}_k(V)}$ è proprio la rappresentazione dell'enunciato. □

Definizione 2.10 (Applicazioni lineari tra rappresentazioni). Se V e W sono G -rappresentazioni allora è possibile munire lo spazio $\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]$ della struttura di G -modulo tramite la seguente

$$\begin{aligned} \rho^{\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]}: G &\longrightarrow \text{Aut}(\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]) \\ \rho^{\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]}(g) &= \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V(g)^{-1}, \rho^W(g)] \end{aligned}$$

quindi

$$\rho^{\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]}(g)(\varphi) = \rho^W(g) \circ \varphi \circ \rho^V(g^{-1}) .$$

Anche in questo caso ricordandoci che $\rho(g)(\varphi)$ ² è un'applicazione lineare, e quindi una funzione, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \rho(g)(\varphi)(v) &= \rho^W(g) \circ \varphi \circ \rho^V(g^{-1})(v) \\ &= \rho^W(g)(\varphi(\rho^V(g^{-1})(v))) \end{aligned}$$

che in notazione contratta possiamo scrivere

$$(g\varphi)(v) = g(\varphi(g^{-1}v)) .$$

Proposizione 2.11. *La $\rho^{\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]}$ è una rappresentazione.*

Dimostrazione. Dai teoremi di algebra lineare e dal fatto che, per ogni $g \in G$, i morfismi $\rho^V(g)$ e $\rho^W(g)$ sono isomorfismi segue che anche $\rho^{\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]}(g) = \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V(g)^{-1}, \rho^W(g)]$ è un isomorfismo. Questo prova la buona definizione di $\rho^{\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]}$.

²Da questo momento abbandoneremo l'apice $\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]$ per questioni di leggibilità, l'autore delle note conta nella comprensione da parte del lettore.

Per verificare la proprietà di omomorfismo prendiamo g e h in G e osserviamo che valgono le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
\rho(gh) &= \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V((gh)^{-1}), \rho^W(gh)] \\
&= \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V(h^{-1}g^{-1}), \rho^W(gh)] \\
&= \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V(h^{-1}) \circ \rho^V(g^{-1}), \rho^W(g) \circ \rho^W(h)] \\
&= \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V(g^{-1}), \rho^W(g)] \circ \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V(h^{-1}), \rho^W(h)] \\
&= \rho(g) \circ \rho(h)
\end{aligned}$$

che provano che $\rho^{\text{hom}_{\mathbb{K}}[V,W]}$ è effettivamente un omomorfismo e quindi una G -rappresentazione. \square

Osservazione 2.12. Osserviamo che la rappresentazione ρ^{V^*} non è nient'altro che la rappresentazione $\rho^{\text{hom}_{\mathbb{K}}[V,\mathbb{K}]}$ dove \mathbb{K} è vista come G -rappresentazione tramite l'omomorfismo di gruppi banale

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathbb{K}}: G &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{K}) \\
\rho^{\mathbb{K}}(g) &= \text{id}_{\mathbb{K}}
\end{aligned}$$

in tal caso infatti per ogni $g \in G$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\rho^{\text{hom}_{\mathbb{K}}[V,W]}(g) &= \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V(g^{-1}), \rho^{\mathbb{K}}(g)] \\
&= \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V(g^{-1}), \mathbb{K}] \\
&= \rho^{V^*}(g) .
\end{aligned}$$

Osservazione 2.13. Se V e W sono G -rappresentazioni e W è finita allora il seguente

$$\begin{aligned}
L: V^* \otimes W &\longrightarrow \text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W] \\
L_{\varphi \otimes w}(v) &= \varphi(v)w
\end{aligned}$$

è un isomorfismo di G -rappresentazioni.

Dimostrazione. Per dimostrare il nostro claim ci sono tre cose da provare:

1. far vedere che la L è ben definita ed è lineare;
 2. far vedere che la L è biettiva, ovvero che sia un isomorfismo;
 3. far vedere che la L è un morfismo di G -rappresentazioni.
1. Cominciamo con l'osservare che l'applicazione è ben definita (anche nel caso in cui W non sia finita). Infatti abbiamo che la mappa

$$\begin{aligned}
L': V^* \times W &\longrightarrow \text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W] \\
L'(\varphi, w)(v) &= \varphi(v)w
\end{aligned}$$

è bilineare, la verifica è un facile conto.

Quindi per la proprietà universale del prodotto tensore ne segue l'esistenza della

$$L: V^* \otimes W \longrightarrow \text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]$$

$$L_{\varphi \otimes w}(v) = \varphi(v)w$$

definita come nell'enunciato del teorema.

2. Facciamo vedere che L è iniettiva. Per le proprietà del prodotto tensore sappiamo che ogni elemento di $V^* \otimes W$ può essere scritto nella forma

$$\varphi_1 \otimes w_1 + \dots + \varphi_k \otimes w_k$$

con i w_i linearmente indipendenti. Sia dunque $\varphi_1 \otimes w_1 + \dots + \varphi_k \otimes w_k$ un generico elemento di $V^* \otimes W$ e supponiamo che si abbia

$$L(\varphi_1 \otimes w_1 + \dots + \varphi_k \otimes w_k) = 0$$

ovvero, espandendo tramite le definizioni, che per ogni $v \in V$ si abbia

$$\varphi_1(v)w_1 + \dots + \varphi_k(v)w_k = 0 .$$

Dall'indipendenza lineare dei w_i segue che

$$\varphi_i(v) = 0 \text{ per ogni } v \in V$$

per cui tutti i φ_i sono nulli e pertanto $\varphi_1 \otimes w_1 + \dots + \varphi_k \otimes w_k$ è anche nullo.

Quindi l'unico elemento $\varphi_1 \otimes w_1 + \dots + \varphi_k \otimes w_k$ che stia in $\ker L$ è l'elemento nullo, cosa che prova l'iniettività di L .

Notiamo che fino a questo punto non abbiamo usato il fatto che W sia di dimensione finita, come qualcuno può intuire ora useremo questa ipotesi.

Sia w_1, \dots, w_k una base di W e indichiamo con $\pi_i: W \rightarrow \langle w_i \rangle$ la proiezione ortogonale sullo span di w_i . Per ogni applicazione lineare $F \in \text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]$ abbiamo k -funzionali lineari $\pi_i \circ F \in V^*$. Da questi funzionali otteniamo l'elemento $\pi_1 \circ F \otimes w_1 + \dots + \pi_k \circ F \otimes w_k \in V^* \otimes W$. Valutando la L su tale elemento otteniamo:

$$L_{\pi_1 \circ F \otimes w_1 + \dots + \pi_k \circ F \otimes w_k}(v) = \pi_1 \circ F(v)w_1 + \dots + \pi_k \circ F(v)w_k$$

$$= F(v)$$

e questo prova che $F = L_{\pi_1 \circ F \otimes w_1 + \dots + \pi_k \circ F \otimes w_k}$, da cui segue la suriettività, quindi la biettività di L .

3. Non resta che provare che L è un omomorfismo di G -rappresentazioni: ovvero che per ogni $g \in G$ abbiamo³

$$\rho(g) \circ L = L \circ \rho(g) .$$

³In questa parte abbandoniamo gli apici sui ρ per non appesantire troppo la notazione, speriamo che il lettore perdoni, tanto l'apice giusto dovrebbe essere chiaro dal contesto.

Prendiamo dunque un generico $g \in G$ e $\varphi \otimes w \in V^* \otimes W$ e proviamo a seguire i due percorsi del diagramma seguente, che vanno da $V^* \otimes W$ (in alto a sinistra) in $\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]$ (in basso a destra).

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \xrightarrow{L} & \text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W] \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho(g) \\ V^* \otimes W & \xrightarrow{L} & \text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W] . \end{array}$$

Da un lato, muovendoci verso destra e poi in basso, otteniamo

$$\begin{aligned} (\rho(g) \circ L)_{\varphi \otimes w} &= \text{hom}_{\mathbb{K}}[\rho^V(g^{-1}), \rho^W(g)](L_{\varphi \otimes w}) \\ &= \rho^W(g) \circ L_{\varphi \otimes w} \circ \rho^V(g^{-1}) \end{aligned}$$

dall'altro, andando in basso e poi a destra, abbiamo

$$\begin{aligned} (L \circ \rho(g))(\varphi \otimes w) &= L_{g(\varphi \otimes w)} \\ &= L_{(g\varphi) \otimes (gw)} \end{aligned}$$

per vedere che queste due mappe siano uguali proviamo a valutare in un generico $v \in V$ ottenendo

$$\begin{aligned} \rho^W(g) \circ L_{\varphi \otimes w} \circ \rho^V(g^{-1})(v) &= g(\varphi(g^{-1}v)w) \\ &= \varphi(g^{-1}v)(gw) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{(g\varphi) \otimes (gw)}(v) &= (g\varphi)(v)(gw) \\ &= \varphi(g^{-1}v)(gw) \end{aligned}$$

questo prova che le due mappe sono effettivamente uguali, quindi che L sia davvero una G -rappresentazione. □

Osservazione 2.14. Il teorema precedente non è vero in generale nel caso in W non sia di dimensione finita. Il motivo sta nel fatto che per ogni elemento $\varphi_1 \otimes w_1 + \dots + \varphi_k \otimes w_k \in V^* \otimes W$ l'applicazione $L_{\varphi_1 \otimes w_1 + \dots + \varphi_k \otimes w_k}$ mappa ogni elemento $v \in V$ nell'elemento $\varphi_1(v)w_1 + \dots + \varphi_k(v)w_k$ che appartiene al sotto-spazio $\langle w_1, \dots, w_k \rangle$: in pratica tutte le mappe $L_{\varphi_1 \otimes w_1 + \dots + \varphi_k \otimes w_k}$ hanno rango finito e se W ha dimensione infinita (e anche V ha dimensione infinita) allora esistono mappe che non possono stare nell'immagine di L .

A questo punto uno potrebbe anche chiedersi: e se V avesse dimensione finita? Anche in questo caso la mappa L è suriettiva, vediamo un po' perché. Fissiamo una base di V , diciamo v_1, \dots, v_n , allora abbiamo le proiezioni canoniche $\pi_1, \dots, \pi_n: V \rightarrow \mathbb{K}$ che danno per ogni vettore le componenti in tale base. Ora per ogni $F \in \text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]$ abbiamo l'elemento $\pi_1 \otimes F(v_1) + \dots + \pi_n \otimes F(v_n)$,⁴ la

⁴Dato che $\pi_i \in V^*$ e $F(v_i) \in W$ si ha che $\pi_i \otimes F(v_i) \in V^* \otimes W$.

cui immagine tramite L è il morfismo $L_{\pi_1 \otimes F(v_1) + \dots + \pi_n \otimes F(v_n)}$ che valutato in v vale

$$\begin{aligned} L_{\pi_1 \otimes F(v_1) + \dots + \pi_n \otimes F(v_n)}(v) &= \pi_1(v)F(v_1) + \dots + \pi_n(v)F(v_n) \\ &= F(\pi_1(v)v_1 + \dots + \pi_n(v)v_n) \\ &= F(v) \end{aligned}$$

e quindi F sta nell'immagine di L , qualunque sia tale $F \in \text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]$.

Ovviamente se né V né W hanno dimensione finita non c'è più alcun modo di garantire la suriettività di L , che quindi potrebbe non essere un isomorfismo.

2.2 Ancora su rappresentazioni irriducibili e decomposizioni

In questa sezione vedremo un altro grosso teorema di teoria delle rappresentazioni, prima però sarà opportuno introdurre dei lemmi preliminari.

Lemma 2.15. *Siano V e W due rappresentazioni irriducibili e sia $f: V \rightarrow W^k$ un omomorfismo di rappresentazioni. Allora si può avere una e solo una delle seguenti possibilità:*

- o $f = 0$
- oppure $f \neq 0$ e $V \cong W$.

Dimostrazione. Supponiamo che $V \not\cong W$ e per ogni $j = 1, \dots, k$ poniamo che $p_j: W^k \rightarrow W$ sia la proiezione sulla j -esima componente per W^k . Allora per ogni $j = 1, \dots, k$ abbiamo che $p_j \circ f: V \rightarrow W$ è un omomorfismo tra rappresentazioni irriducibili non isomorfe e quindi per il lemma di Schur deve essere l'omomorfismo nullo. Quindi $p_j(f(v)) = 0$ per ogni j e $v \in V$, ma questo vuol dire che $f(v)$ ha tutte le componenti nulle e quindi che $f(v) = 0$, per ogni $v \in V$, ovvero $f = 0$.

In particolare se $f \neq 0$ allora deve per forza essere anche $V \cong W$. □

Lemma 2.16. *Sia V una rappresentazione irriducibile e supponiamo di avere una rappresentazione della forma $\bigoplus_{i=1}^r V_i^{k_i}$ con V_i rappresentazioni irriducibili non isomorfe. Se $f: V \rightarrow \bigoplus_i V_i^{k_i}$ è un omomorfismo di rappresentazioni allora almeno una tra le seguenti deve essere vera:*

- $f = 0$
- esiste un $i = 1, \dots, r$ tale che $V \cong V_i$, tale i è ovviamente unico e

$$\text{Im } f \subseteq V_i^{k_i}$$

dove implicitamente identifichiamo $V_i^{k_i}$ con la relativa sotto-rappresentazione in $\bigoplus_i V_i^{k_i}$.

Dimostrazione. Per ogni $i = 1, \dots, r$ sia $p_i: \bigoplus_{i=1}^r V_i^{k_i} \rightarrow V_i^{k_i}$ la proiezione di $\bigoplus_i V_i^{k_i}$ su $V_i^{k_i}$.

Nel caso in cui si abbia che $V \not\cong V_i$ per ogni i , per il lemma 2.15 tutti i $p_i \circ f: V \rightarrow V_i^{k_i}$ sono nulli, da questo segue che per ogni $v \in V$ il vettore $f(v)$ ha tutte le componenti nulle in $\bigoplus_i V_i^{k_i}$ e quindi $f(v) = 0$. Dunque in questo caso si ha $f = 0$.

Viceversa supponiamo che esista un indice i tale che $V \cong V_i$, allora chiaramente per ogni $i' \neq i$ si ha che $V \not\cong V_{i'}$ e quindi $p_{i'} \circ f = 0$. Questo implica che per ogni $v \in V$ il vettore $f(v)$ ha nulle tutte le componenti tranne al più la i -esima e quindi $\text{Im } f \subseteq V_i^{k_i}$. □

Osservazione 2.17. Le due possibilità descritte nel lemma 2.16 non sono incompatibili: potrebbe benissimo accadere che $V \cong V_i$ per qualche i ma f sia l'omomorfismo nullo. Tuttavia il lemma ci dice che se f è non nullo allora sicuramente $V \cong V_i$ per un unico $i = 1, \dots, r$ e che $\text{Im } f \subseteq V_i^{k_i}$.

Segue un immediato corollario a lemma 2.16.

Corollario 2.18. *Sia V una rappresentazione irriducibile e consideriamo una rappresentazione $\bigoplus_{i=1}^r V_i^{k_i}$, con i V_i rappresentazioni irriducibili non isomorfe tra loro. Se $f: V^k \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r V_i^{k_i}$ è un omomorfismo di rappresentazioni allora una delle seguenti vale:*

- $f = 0$
- esiste un $i = 1, \dots, r$ tale che $V \cong V_i$ e $\text{Im } f \subseteq V_i^{k_i}$.

Dimostrazione. Per le proprietà dei prodotti sappiamo che V^k contiene delle sotto-rappresentazioni $W_1, \dots, W_k \leq V$ tali che

1. per ogni i si ha che $W_i \cong V$
2. per ogni indice i si ha che $W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = (0)$
3. vale l'uguaglianza $V^k = \sum_i W_i$.

Dette $f_i: W_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r V_i^{k_i}$ le restrizioni di f alle sotto-rappresentazioni W_i , abbiamo che:

- se per ogni $i = 1, \dots, r$ si ha che $V \not\cong V_i$ allora per il lemma 2.16 ogni f_i dovrebbe essere nullo, e dato che $V^k = \sum_i W_i$ si avrebbe che

$$f(V^k) = f\left(\sum_i W_i\right) = \sum_i f(W_i) = (0)$$

e quindi dovrebbe valere $f = 0$;

- viceversa se esiste un i tale che $V \cong V_i$, allora questo indice è unico (perché i V_i sono non isomorfi tra loro), e quindi, sempre per il lemma 2.16 per ogni $j = 1, \dots, k$ abbiamo

$$f(W_j) = \text{Im } f_j \subseteq V_i^{k_i}$$

da cui segue che

$$\text{Im } f = f\left(\sum_j W_j\right) = \sum_j f(W_j) \subseteq V_i^{k_i}.$$

□

Teorema 2.19 (di unicità della composizione in irriducibili). *Sia V una G -rappresentazione finita, allora, se esistono, sono uniche le sotto-rappresentazioni irriducibili V_1, \dots, V_r e i coefficienti k_1, \dots, k_r tali che*

$$V \cong V_1^{k_1} \oplus \dots \oplus V_r^{k_r}$$

per ogni i la sotto-rappresentazione $V_i^{k_i}$ è chiamata la componente isotopica di V_i .

Dimostrazione. In pratica dobbiamo dimostrare che se abbiamo un isomorfismo

$$f: \bigoplus_{i=1}^r V_i^{k_i} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^s W_i^{l_i},$$

dove le W_i sono delle rappresentazioni irriducibili, allora $r = s$ e, a meno di permutazioni, $V_i \cong W_i$ e $k_i = l_i$ per ogni $i = 1, \dots, r$.

Per ogni $i = 1, \dots, r$ sia $f_i: V_i^{k_i} \rightarrow \bigoplus_i W_i^{l_i}$ la restrizione di f alla sotto-rappresentazione $V_i^{k_i}$. Ogni f_i è restrizione di un morfismo iniettivo a una sotto-rappresentazione non nulla, quindi è non nullo. Per il corollario 2.18 allora segue che esiste una funzione $\sigma: \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$ tale che per ogni $i = 1, \dots, r$ si abbia che $V_i \cong W_{\sigma(i)}$ e

$$f(V_i^{k_i}) = \text{Im } f_i \subseteq W_{\sigma(i)}^{l_{\sigma(i)}}$$

Applicando lo stesso ragionamento all'isomorfismo $f^{-1}: \bigoplus_1^s W_i^{l_i} \rightarrow \bigoplus_1^r V_i^{k_i}$ si ha che deve esistere anche una $\tau: \{1, \dots, s\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ per cui per ogni $i = 1, \dots, s$ abbiamo che $W_i \cong V_{\tau(i)}$ e

$$f^{-1}(W_i^{l_i}) \subseteq V_{\tau(i)}^{k_{\tau(i)}}.$$

Combinando queste due cose abbiamo che per ogni $i = 1, \dots, r$

$$V_i^{k_i} = f^{-1} \left(f \left(V_i^{k_i} \right) \right) \subseteq f^{-1}(W_{\sigma(i)}^{l_{\sigma(i)}}) \subseteq V_{\tau(\sigma(i))}^{k_{\tau(\sigma(i))}}$$

dato che per $i_1 \neq i_2$ si ha che $V_{i_1}^{k_{i_1}} \cap V_{i_2}^{k_{i_2}} = (0)$, e quindi in particolare $V_{i_1}^{k_{i_1}} \not\subseteq V_{i_2}^{k_{i_2}}$, si deve avere $\tau(\sigma(i)) = i$ per ogni $i = 1, \dots, r$.

In maniera analoga si può provare che $\sigma(\tau(i)) = i$ per ogni $i = 1, \dots, s$.

Questo prova che σ e τ sono una l'inversa dell'altra e quindi $r = s$. Pertanto a meno di permutare i W_i possiamo supporre che $\sigma = \tau = \text{id}$ e quindi $f(V_i^{k_i}) \subseteq W_i^{l_i}$ e $f^{-1}(W_i^{l_i}) \subseteq V_i^{k_i}$.

Da questo segue che f e f^{-1} restringono a una famiglia di morfismi

$$f_i: V_i^{k_i} \rightarrow W_i^{l_i} \qquad f_i^{-1}: W_i^{l_i} \rightarrow V_i^{k_i}$$

che sono isomorfismi: questo perché

$$f_i^{-1} \circ f_i = f^{-1} \circ f|_{V_i^{k_i}} = \text{id}_{V_i^{k_i}}$$

e

$$f_i \circ f_i^{-1} = f \circ f^{-1}|_{W_i^{l_i}} = \text{id}_{W_i^{l_i}}.$$

Dunque $V_i^{k_i} \cong W_i^{l_i}$ e confrontando le dimensioni di questi spazi si ha che

$$k_i \dim V_i = \dim(V_i^{k_i}) = \dim(W_i^{l_i}) = l_i \dim W_i$$

ma dato che $V_i \cong W_i$, e quindi anche $\dim V_i = \dim W_i \neq 0$, ne segue che $k_i = l_i$, per ogni $i = 1, \dots, r$. □

2.3 Un lungo esercizio per il calcolo di una rappresentazione

Esercizio 2.20. Abbiamo già visto nell'osservazione 1.20 che la seguente era una sotto-rappresentazione irriducibile di \mathbb{C}^3 , visto come S_3 -modulo.

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0 \right\}$$

Come conseguenza del teorema di decomposizione sappiamo che $T \otimes T$ è un S_3 -modulo che deve ammettere una decomposizione come somma diretta di componenti irriducibili.

Esercizio: cercare di trovare tale decomposizione. (Hint: la decomposizione sarà $T \oplus$ banale \oplus segno dove banale è la rappresentazione banale di S_3 su \mathbb{C} [l'omomorfismo $\rho: S_3 \rightarrow \text{Gl}(\mathbb{C})$ che mappa tutto nell'identità], segno è la rappresentazione $\rho: S_3 \rightarrow \text{Gl}(\mathbb{C})$ che mappa ogni permutazione pari nell'identità e ogni permutazione dispari in $-\text{id}$.)

Soluzione. Per risolvere questo esercizio ci potrebbero essere molteplici soluzioni. In verità a partire dal prossimo paragrafo introdurremo uno strumento molto potente, *i caratteri*, che servono appunto a trovare le decomposizioni delle rappresentazioni. Tuttavia può essere istruttivo, per prendere familiarità con le rappresentazioni o anche solo per imparare alcune tecniche per studiare rappresentazioni su campo diverso da \mathbb{C} , provare a risolvere questo esercizio con gli strumenti fin qui introdotti.

Per cominciare scegliamo una base per T , così da poter *rappresentare la nostra rappresentazione* tramite matrici. Non è difficile vedere che i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ formano una base per T : un conto fa vedere che sono linearmente indipendenti, stanno in T che ha dimensione 2 e quindi lo generano.

In queste coordinate abbiamo che

$$\rho^T((1, 2)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \rho^T((1, 2)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^T((1, 2, 3)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \rho^T((1, 2, 3)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se poniamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \rho^T((1, 2))v_1 &= v_2 & \rho^T((1, 2))v_2 &= v_1 \\ \rho^T((1, 2, 3))v_1 &= -v_2 & \rho^T((1, 2, 3))v_2 &= v_1 - v_2 \end{aligned}$$

e quindi in questa base possiamo vedere $\rho^T: S_3 \rightarrow \text{Gl}_2(\mathbb{C})$ dove

$$\begin{aligned} \rho^T((1, 2)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \rho^T((1, 2, 3)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi i seguenti isomorfismi

$$T \otimes T \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \text{hom}[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2] \cong \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

dove gli isomorfismi sono di S_3 -rappresentazioni e l'azione di ogni $\sigma \in S_3$ è data da

$$\sigma A = \rho^T(\sigma) A \rho^T(\sigma)^{-1} \text{ per } A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}).$$

Dato che (1, 2) e (1, 2, 3) formano un insieme di generatori per S_3 abbiamo che un sotto-spazio $V \subseteq \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ è una sotto-rappresentazione se e solo se è invariante per l'azione di (1, 2) e (1, 2, 3). Quindi per trovare le sotto-rappresentazioni ci basta trovare i sotto-spazi invarianti per (1, 2) e (1, 2, 3).

Sotto-rappresentazioni di dimensione 1. Cominciamo con il cercare le sotto-rappresentazioni di dimensione 1, tali sotto-rappresentazioni sono rette che, per quanto detto sopra, devono essere invarianti per l'azione di (1, 2) e (1, 2, 3). Per trovare queste rette ci basta trovare tutti i vettori $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ tali che esistano $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ per cui

$$(1, 2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda A \quad (1, 2, 3)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mu A .$$

In pratica stiamo cercando degli auto-vettori comuni alle applicazioni lineari $\rho^{T \otimes T}(1, 2)$ e $\rho^{T \otimes T}(1, 2, 3)$.

Risolviamo la prima equazione matriciale: poniamo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(1, 2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

quindi l'equazione $(1, 2)A = \lambda A$ diventa

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Portando avanti i conti, che non riportiamo per intero per brevità, si verifica che le soluzioni sono divise in due sotto-spazi:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

dove per ogni $A \in V_1$ si ha $(1, 2)A = A$ mentre per ogni $A \in V_{-1}$ si ha $(1, 2)A = -A$.

Si vede subito che

$$(1, 2, 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e che quindi il sotto-spazio $W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ è una sotto rappresentazione di $T \otimes T$. In

particolare dato che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un punto fisso sia per (1, 2) che (1, 2, 3) è anche punto fisso

per ogni $\sigma \in S_3$ e quindi questo ci dice che W_0 è la rappresentazione banale di S_3 , cioè è tale che $\rho^{W_0}(\sigma) = \text{id}$ per ogni $\sigma \in S_3$.

Per trovare altre eventuali sotto-rappresentazioni di dimensione 1 è sufficiente provare a vedere per quali $A \in V_1 \cup V_{-1}$ si ha che $(1, 2, 3)A = \mu A$ per qualche $\mu \in \mathbb{C}$. Con un conto si riesce a vedere che esiste un'unica altra sotto rappresentazione di dimensione 1 esattamente

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ -2a & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Dato che

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) \begin{pmatrix} a & 2a \\ -2a & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 2a \\ -2a & -a \end{pmatrix} \\ (1, 2) \begin{pmatrix} a & 2a \\ -2a & -a \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} a & 2a \\ -2a & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ovvero che $\rho^{W_1}(1, 2, 3) = \text{id}_{W_1}$ mentre $\rho^{W_1}(1, 2) = -\text{id}_{W_1}$ è chiaro che $\rho^{W_1}: S_3 \rightarrow \text{Gl}(W_1) \cong \mathbb{C}^*$ è la rappresentazione segno: l'omomorfismo che manda ogni trasposizione in -1 e A_3 in 1 .

Dunque W_0 e W_1 sono le uniche sotto-rappresentazioni irriducibili di $T \otimes T = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ di dimensione 1. Per completare la decomposizione non ci resta che trovare una sotto-rappresentazione irriducibile di dimensione 2.

Sotto-rappresentazione di dimensione 2. Ovviamente la sotto-rappresentazione di dimensione 2 non può essere più calcolata tramite la ricerca di auto-vettori comuni a $\rho^{T \otimes T}(1, 2)$ e $\rho^{T \otimes T}(1, 2, 3)$, visto che ora abbiamo a che fare con sotto-spazi di dimensione 2. Tuttavia possiamo provare a costruire artificialmente una sotto-rappresentazione nel modo seguente.

È un fatto generale che, per ogni vettore v e ogni σ nel gruppo, il sotto-spazio generato dagli elementi $\{ \rho(\sigma)^n v : n \in \mathbb{Z} \}$ è un sotto-spazio $\rho(\sigma)$ invariante: questo perché $\rho(\sigma)$ agirebbe su ogni combinazione lineare $\sum_n \rho(\sigma)^n v$ permutando i coefficienti applicati ai vettori.⁵ Forti di questa osservazione possiamo considerare il sotto-spazio

$$\begin{aligned} W_2 &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (1, 3, 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

che quindi sappiamo essere $\rho^{T \otimes T}(1, 2, 3)$ invariante. Osserviamo che in questo spazio le matrici $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ formano una base, in quanto

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Inoltre abbiamo che

$$\begin{aligned} (1, 2) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ (1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁵Attenzione non ci sono garanzie sul fatto che $\rho(\sigma)^n v$ siano indipendenti tra loro.

e quindi $(1, 2)$ permuta i vettori della base di W_2 , quindi W_2 è invariante anche per l'azione di $(1, 2)$ e dunque è una sotto-rappresentazione di S_3 che è supplementare a W_0 e W_1 , visto che i due vettori della base stanno nel complementare di $W_0 \cup W_1$.

Questo ci dice che $T \otimes T \cong W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$. Per concludere non resta da capire che rappresentazione sia W_2 .

Consideriamo i seguenti vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che formano una base di W_2 . Possiamo osservare che:

$$(1, 2, 3)w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -w_2$$

$$(1, 2, 3)w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) - \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= w_1 - w_2$$

$$(1, 2)w_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = w_2$$

$$(1, 2)w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = w_1 .$$

Questo ci dice che l'omomorfismo

$$\rho^{W_2}: S_3 \longrightarrow \text{Gl}(W_2) \cong \text{Gl}_2(\mathbb{C}) ,$$

dove l'omomorfismo tra $\text{Gl}(W_2)$ e $\text{Gl}_2(\mathbb{C})$ è quello indotto dalla base $\{w_1, w_2\}$, è tale che

$$\rho^{W_2}(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \rho^T(1, 2, 3)$$

$$\rho^{W_2}(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho^T(1, 2) .$$

Questo ci dice che $\rho^{W_2} = \rho^T$, perché coincidono su dei generatori di S_3 . Quindi $W_2 \cong T$ come rappresentazione di S_3 .

Mettendo tutto assieme questo ci permette di dimostrare che

$$T \otimes T \cong W_0 \oplus W_1 \oplus T$$

dove W_0 è la rappresentazione banale di S_3 su \mathbb{C} e W_1 è la rappresentazione segno. □

Prima di chiudere questa sezione ricordiamo brevemente le tecniche usate per risolvere l'esercizio:

1. fissare delle basi per la rappresentazioni in modo da poter lavorare con matrici;
2. ridurre la ricerca di sotto-rappresentazioni di un gruppo G alla ricerca di sotto-spazi invarianti per una famiglia di applicazioni lineari $\rho(g)$, al variare di g in una *famiglia di generatori del gruppo*;

- generare sotto-rappresentazioni a partire da un vettore $v \in V$ prendendo il sotto-spazio vettoriale generato da tutti i vettori della forma $\rho(g)v$ al variare di $g \in G$.

Queste tecniche possono essere usate in svariati modi tra loro per cercare di trovare esplicitamente sotto-rappresentazioni di una rappresentazione data, pertanto può risultare comodo tenerle a mente.

2.4 Teoria dei caratteri

Notazione. Da qui in poi, salvo diversa indicazione, supporremo sempre che G sia un gruppo finito e che le rappresentazioni siano tutte finite dimensionalità su \mathbb{C} .

Diamo ora una nuova definizione.

Definizione 2.21. Sia (V, ρ) una G -rappresentazione finita allora il suo carattere è la funzione $\chi_V: G \rightarrow \mathbb{C}$ definita come

$$\chi_V(g) = \text{tr}(\rho(g))$$

o più propriamente

$$\chi_V(g) = \text{tr}(\rho(g)) .$$

Questa definizione ci servirà in seguito, infatti a breve vedremo che i caratteri di una rappresentazione (finita su \mathbb{C}) ci permettono di determinare in modo completo la decomposizione in componenti irriducibili di ogni rappresentazione.

Osservazione 2.22. Ricordiamo che dato uno spazio vettoriale di dimensione finita V e un'applicazione lineare $f: V \rightarrow V$ la *traccia di f* è definita come

$$\text{tr}(f) = \text{tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$$

dove $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è la matrice che rappresenta f rispetto alla base \mathcal{B} . Questa è una buona definizione dato che la traccia è un invariante per coniugio (se $B = G^{-1}AG$ per $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ e $G \in \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ allora $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$) e quindi la traccia di f non dipende dalla base scelta \mathcal{B} .

Osservazione 2.23. Come detto prima la traccia è un invariante per coniugio, questo implica che per ogni $g, h \in G$ si ha che

$$\chi_V(h^{-1}gh) = \text{tr}(\rho(h^{-1}gh)) = \text{tr}(\rho(g)) = \chi_V(g)$$

ovvero che i caratteri sono costanti sulle classi di coniugio di G .

Definizione 2.24 (Funzioni classe). Una funzione $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ che sia costante sulle classi di coniugio di G , ovvero tale che $f(h^{-1}gh) = f(g)$ per ogni $g, h \in G$ è chiamata funzione classe.

L'osservazione 2.23 ci dice essenzialmente che i *caratteri* di una rappresentazione sono funzioni classe. Rivedremo ancora queste funzioni nel seguito ma prima di proseguire vediamo alcune proprietà dei caratteri.

Proposizione 2.25. Per ogni coppia di G -rappresentazioni V e W sono vere le seguenti:

- $\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$

2. $\chi_{V \otimes W}(g) = \chi_V(g) \cdot \chi_W(g)$
3. $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)}$
4. $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2} (\chi_V^2(g) - \chi_V(g^2))$.

Dimostrazione. Prima di entrare nel merito dei singoli punti è comodo fare la seguente osservazione: dato uno spazio vettoriale V e una base su di esso, diciamo $\{v_1, \dots, v_n\}$ allora tale base induce su V un prodotto scalare definito come l'unica forma bilineare $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

A questo punto è possibile verificare che per ogni $f: V \rightarrow V$ vale che

$$\text{tr}(f) = \sum_{i=1}^n \langle v_i, f(v_i) \rangle .$$

1. Identifichiamo gli spazi V e W con i relativi sotto-spazi in $V \oplus W$. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V e $\{w_1, \dots, w_m\}$ è una base di W allora sappiamo che, modulo l'identificazione anzidetta, $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ è una base di $V \oplus W$.

Per l'osservazione a inizio dimostrazione allora abbiamo che

$$\begin{aligned} \chi_{V \oplus W}(g) &= \text{tr}(\rho^{V \oplus W}(g)) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v_i, \rho^{V \oplus W}(g)v_i \rangle + \sum_{i=1}^m \langle w_i, \rho^{V \oplus W}(g)w_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v_i, \rho^V(g)v_i \rangle + \sum_{i=1}^m \langle w_i, \rho^W(g)w_i \rangle \quad (\text{segue dalla definizione di } \rho^{V \oplus W}) \\ &= \chi_V(g) + \chi_W(g) \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare.

2. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ sono basi rispettivamente di V e W allora sappiamo che $\{v_i \otimes w_j\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$ sono una base di $V \otimes W$.

Il prodotto scalare $\langle -, - \rangle$ definito da questa base verifica la seguente proprietà

$$\langle v_i \otimes w_j, (\sum_k a_k v_k) \otimes (\sum_l b_l w_l) \rangle = a_i b_j$$

o equivalentemente

$$\langle v_i \otimes w_j, a \otimes b \rangle = \langle v_i, a \rangle \langle w_j, b \rangle$$

dove $a \in V$ e $b \in W$ e i due prodotti a destra sono quelli su V e W indotti dalle basi $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ rispettivamente.

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\chi_{V \otimes W}(g) &= \text{tr}(\rho^{V \otimes W}(g)) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle (v_i \otimes w_j), \rho^{V \otimes W}(g)(v_i \otimes w_j) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle (v_i \otimes w_j), (\rho^V(g)v_i \otimes \rho^W(g)w_j) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle v_i, \rho^V(g)v_i \rangle \langle w_j, \rho^W(g)w_j \rangle \text{ (per l'osservazione fatta prima)} \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i, \rho^V(g)v_i \rangle \left(\sum_{j=1}^m \langle w_j, \rho^W(g)w_j \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i, \rho^V(g)v_i \rangle \chi_W(g) \\
&= \chi_V(g) \chi_W(g)
\end{aligned}$$

come aspettato.

3. Sappiamo che una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ su V induce una base duale $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ su V^* , dove v_i^* è definito come

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ 1 & \text{se } j = i. \end{cases}$$

Un rapido conto mostra che il prodotto $\langle -, - \rangle$ definito dalla base duale è tale che

$$\langle v_i^*, v_j^* \rangle = v_j^*(v_i) = \langle v_j, v_i \rangle$$

dove il prodotto $\langle -, - \rangle$ a destra è quello definito dalla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ su V .

Possiamo ora procedere a calcolare χ_{V^*} . Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\chi_{V^*}(g) &= \text{tr}(\rho^{V^*}(g)) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i^*, \rho^{V^*}(g)(v_i^*) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i^*, v_i^* \circ \rho^V(g^{-1}) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n v_i^*(\rho^V(g^{-1})v_i) \text{ (per quanto detto sopra)} \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i, \rho^V(g^{-1})v_i \rangle \\
&= \text{tr}(\rho^V(g^{-1})) .
\end{aligned}$$

A questo punto per poter concludere è necessario utilizzare l'ipotesi (che fin'ora non abbiamo mai usato) che il gruppo G sia finito. Dato che G è finito ogni suo elemento ha ordine finito e

quindi per ogni $g \in G$ esiste un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $g^k = e$, da questo segue che $\rho^V(g)^k = \text{id}$ e quindi il polinomio minimo di $\rho^V(g)$ divide $t^k - 1$. Posti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di $\rho^V(g)$, non necessariamente distinti, abbiamo che i λ_i devono essere radici di $t^k - 1$ e quindi devono essere radici k -esime dell'unità. Da questo segue che $\lambda_i^{-1} = \bar{\lambda}_i$ e dato che i λ_i^{-1} sono gli autovalori di $\rho^V(g^{-1})$ abbiamo che

$$\text{tr}(\rho^V(g^{-1})) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i = \overline{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \overline{\text{tr}(\rho^V(g))} .$$

Rimettendo tutti i pezzi assieme ne segue che

$$\chi_{V^*}(g) = \text{tr}(\rho^V(g^{-1})) = \overline{\text{tr}(\rho^V(g))} = \overline{\chi_V(g)}$$

come volevasi dimostrare.

4. Presa $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V abbiamo che l'insieme $\{v_i \wedge v_j : i < j\}$ è una base di $\Lambda^2 V$. In tale base si può vedere che il prodotto $\langle -, - \rangle$ indotto su $\Lambda^2 V$ verifica l'uguaglianza

$$\langle v_i \wedge v_j, a \wedge b \rangle = \langle v_i, a \rangle \langle v_j, b \rangle - \langle v_j, a \rangle \langle v_i, b \rangle .$$

Vediamo che

$$\begin{aligned} \chi_{\Lambda^2 V}(g) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \langle v_i \wedge v_j, \rho(g)(v_i \wedge v_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \langle v_i \wedge v_j, (gv_i) \wedge (gv_j) \rangle . \end{aligned}$$

Osservando che vale

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \langle v_i \wedge v_j, (gv_i) \wedge (gv_j) \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \langle -(v_j \wedge v_i), -((gv_j) \wedge (gv_i)) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \langle v_i \wedge v_j, (gv_i) \wedge (gv_j) \rangle \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \langle v_i \wedge v_j, (gv_i) \wedge (gv_j) \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \langle v_i \wedge v_j, (gv_i) \wedge (gv_j) \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \langle v_i \wedge v_j, (gv_i) \wedge (gv_j) \rangle \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \langle v_i \wedge v_j, (gv_i) \wedge (gv_j) \rangle \right) , \end{aligned}$$

possiamo riscrivere il carattere come

$$\begin{aligned} \chi_{\Lambda^2 V}(g) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \langle v_i \wedge v_j, (gv_i) \wedge (gv_j) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} (\langle v_i, gv_i \rangle \langle v_j, gv_j \rangle - \langle v_i, gv_j \rangle \langle v_j, gv_i \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i, gv_i \rangle \langle v_j, gv_j \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i, gv_j \rangle \langle v_j, gv_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)) , \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza

$$\chi_V(g^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i, gv_j \rangle \langle v_j, gv_i \rangle$$

segue in modo diretto dal calcolo di $\chi_V(g^2)$: per ogni i sappiamo che vale $gv_i = \sum_k \langle v_j, gv_i \rangle v_j$, da questo segue che

$$\begin{aligned} \chi_V(g^2) &= \sum_{i=1}^n \langle v_i, g^2 v_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v_i, g \left(\sum_{j=1}^n \langle v_j, gv_i \rangle v_j \right) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v_i, \sum_{j=1}^n \langle v_j, gv_i \rangle gv_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_j, gv_i \rangle \langle v_i, gv_j \rangle . \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.26. Dai corsi di algebra lineare si sa che per ogni $A \in \text{End}(V)$ esiste un altro endomorfismo, nello specifico ${}^t A \in \text{End}(V^*)$, che è l'unico endomorfismo per cui valga

$$\langle {}^t A \varphi, v \rangle = \langle \varphi, Av \rangle .$$

Se (V, ρ) è una G -rappresentazione allora abbiamo che, per quanto detto precedentemente,

$$\langle g\varphi, gv \rangle = \langle \varphi, v \rangle$$

e che

$$\begin{aligned} \langle g\varphi, gv \rangle &= \langle \rho^*(g)\varphi, \rho(g)v \rangle \\ &= \langle ({}^t \rho(g) \circ \rho^*(g))\varphi, v \rangle \end{aligned}$$

segue che

$$\langle ({}^t \rho(g) \circ \rho^*(g))\varphi, v \rangle = \langle \varphi, v \rangle$$

e quindi

$$({}^t \rho(g) \circ \rho^*(g))(\varphi) = \varphi .$$

Da questo segue che

$$\rho^*(g) = {}^t \rho(g)^{-1} = {}^t \rho(g^{-1}) .$$

Definizione 2.27 (Tabella dei caratteri). Dato un gruppo⁶ G la tabella dei suoi caratteri è una tabella in cui:

- gli indici di colonna sono le classi di coniugio di G ,
- gli indici di riga sono le rappresentazioni irriducibili di G ,
- fissata una classe di coniugio $[g]$, con $g \in G$, e una rappresentazione irriducibile V di G , l'elemento di posto $(V, [g])$ è il valore $\chi_V(g)$.

Di seguito diamo una rappresentazione schematica di una generica tabella di caratteri.

Tabella 2.1: Esempio di tabella dei caratteri

G	$[e]$	$[g]$	\dots	\dots
V_1	$\chi_{V_1}(e)$	$\chi_{V_1}(g)$	\dots	\dots
V_2	$\chi_{V_2}(e)$	$\chi_{V_2}(g)$	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Proviamo a calcolare qualche tabella di caratteri per qualche gruppo, per esempio di S_3 . Prima di fare ciò diamo il seguente esercizio.

Esercizio 2.28. Le uniche rappresentazioni irriducibili di S_3 (su \mathbb{C}) sono

la banale: è la rappresentazione unidimensionale $\rho: S_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$ mappa ogni elemento di S_3 nell'identità;

la segno: è ancora una rappresentazione unidimensionale

$$\rho: S_3 \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$$

$$\rho(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari;} \end{cases}$$

la T : che è la rappresentazione irriducibile di S_3 descritta nella famosa osservazione 1.20.

Soluzione. È chiaro che le tre rappresentazioni siano irriducibili: in particolare sappiamo dall'osservazione 1.20 che la T è irriducibile, mentre la *banale* e la *segno* sono rappresentazioni irriducibili in quanto hanno dimensione 1⁷. Resta solo da far vedere che ogni altra sotto-rappresentazione irriducibile di S_3 deve essere isomorfa a una di queste tre.

Sia $\rho: S_3 \rightarrow \text{Gl}(V)$ una generica rappresentazione irriducibile. Possiamo distinguere 3 casi:

1. $\ker \rho = S_3$,
2. $\ker \rho = A_3$,
3. $\ker \rho = (0)$.

Nel primo caso abbiamo che l'omomorfismo ρ manda ogni permutazione nell'identità di V , quindi ogni retta risulta essere un sotto-spazio S_3 -invariante. Ma allora per irriducibilità di V dobbiamo concludere che V deve appunto coincidere con queste rette, ovvero $\dim V = 1$ e in particolare V è la rappresentazione banale.

⁶Si suppone sempre finito

⁷Una sotto-rappresentazione di dimensione 1 non ha sotto-spazi vettoriali non banali, quindi non può avere sotto-rappresentazioni non banali.

Nel secondo caso abbiamo una fattorizzazione di ρ come descritta dal seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} S_3 & \xrightarrow{\rho} & \text{Aut}(V) \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{\rho} \\ & S_3/A_3 & \\ & \downarrow \sim & \\ & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \end{array}$$

quindi V è uno $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -modulo, tramite la rappresentazione $\bar{\rho}$. Non è difficile vedere che un sotto-spazio di V è una sotto- S_3 -rappresentazione se e solo se è una sotto- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -rappresentazione e quindi che V essendo S_3 -irriducibile deve essere $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -irriducibile. Da quanto visto per i gruppi abeliani segue che $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ha solo due rappresentazioni irriducibili, quella banale, che manda tutto nell'identità, e la segno, che è un isomorfismo, entrambe di dimensione 1. Dato che $\bar{\rho}$ ha ker uguale a (0) ne segue che V è isomorfa alla rappresentazione segno. Da questo segue che ρ manda tutti gli elementi pari (gli elementi di A_3) in id_V e quelli dispari in $-\text{id}_V$, inoltre per quanto detto V ha dimensione 1 e quindi ρ è proprio la rappresentazione segno.

Manca l'ultimo caso $\ker \rho = (0)$. In tal caso abbiamo che $\rho((1, 2, 3))$ non è l'identità e inoltre sappiamo che vale

$$\rho((1, 2, 3))^3 = \text{id}$$

ovvero che il polinomio minimo di $\rho((1, 2, 3))$ divide $t^3 - 1$. Dato che $\rho((1, 2, 3))$ non è l'identità ne segue che deve avere autovalori diversi da 1 e quindi, per quanto detto sul polinomio minimo, ha ζ_3 (una radice primitiva terza dell'unità) come autovalore. Sia dunque $v \in V$ uno ζ_3 -autovalore di $\rho((1, 2, 3))$, in particolare abbiamo che il \mathbb{C} -spazio $\langle v \rangle$ generato da v è A_3 -invariante. Osserviamo che anche il vettore $(1, 2)v$ genera un sotto-spazio A_3 -invariante, infatti abbiamo che

$$\begin{aligned} (1, 2, 3)(1, 2)v &= (1, 2)(1, 2)(1, 2, 3)(1, 2)v \\ &= (1, 2)(1, 3, 2)v = (1, 2)\zeta_3^{-1}v = \zeta_3^{-1}(1, 2)v \end{aligned}$$

e dato che $(1, 2, 3)$ è un generatore di A_3 questo è sufficiente a dire che anche $\langle (1, 2)v \rangle$ è A_3 -invariante. Da quanto detto segue che il sotto-spazio $W = \langle v, (1, 2)v \rangle$ è un sotto-spazio di V A_3 -invariante, inoltre è anche $(1, 2)$ -invariante e, dato che A_3 e $(1, 2)$ generano tutto S_3 da questo segue che W è anche S_3 -invariante. Ma V è irriducibile quindi $W = V$. Da questo segue che $\dim V \leq 2$. Non è possibile che $\dim V = 1$, altrimenti $\text{Aut}(V) \cong \mathbb{C}^*$ che un gruppo abeliano e quindi $\ker \rho$ dovrebbe contenere i commutatori di S_3 , ovvero A_3 , contro l'ipotesi che $\ker \rho = (0)$. Dunque $\dim V = 2$ e v e $(1, 2)v$ sono una base di V . A questo punto consideriamo la mappa lineare

$$\varphi: V \longrightarrow T \subseteq \mathbb{C}^3$$

definita sulla base di V da

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \begin{pmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_3^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \varphi((1, 2)v) &= \begin{pmatrix} \zeta_3^2 \\ \zeta_3 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 2) \begin{pmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_3^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

che mappa la base di V in una base di T , e quindi è un isomorfismo vettoriale. Con dei conti è facile vedere che questo è effettivamente un omomorfismo di S_3 -rappresentazioni e quindi un isomorfismo. Da questo ne segue che ogni V rappresentazione irriducibile, tale che $\ker \rho = (0)$, è isomorfa alla T . \square

Esempio 2.29. La tabella 2.2 è la tabella dei caratteri di S_3 .

Tabella 2.2: Tabella dei caratteri per S_3

S_3	id	(1, 2)	(1, 2, 3)
banale $\square\square\square$	1	1	1
segno $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$	1	1	1
T	2	0	-1

Per verificare basta calcolare i caratteri delle varie rappresentazioni sui (rappresentanti) delle varie classi di coniugio.

Banale: Per la rappresentazione banale abbiamo che per ogni $\sigma \in S_3$ la matrice⁸ $\rho(\sigma) = 1$ e dunque

$$\chi(\sigma) = \text{tr}(\rho(\sigma)) = 1$$

qualunque sia $\sigma \in S_3$.

Segno: Per la rappresentazione segno abbiamo che $\ker \rho = A_3$ e quindi

$$\begin{aligned} \rho((1, 2, 3)) &= \rho((1, 2, 3)) = \rho(\text{id}) = 1 \\ \rho((1, 2)) &= \rho((1, 3)) = \rho((2, 3)) = -1 \end{aligned}$$

e quindi un rapido conto ci fa vedere che

$$\begin{aligned} \chi(\text{id}) &= 1 \\ \chi((1, 2, 3)) &= 1 \\ \chi((1, 2)) &= -1 . \end{aligned}$$

T: Per calcolare il carattere della rappresentazione T usiamo invece un trucco che useremo spesso per trovare caratteri: sfruttiamo il fatto che

$$\mathbb{C}^3 \cong \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus T \cong \text{banale} \oplus T$$

e le proprietà dei caratteri abbiamo che $\chi_{\mathbb{C}^3} = \chi_{\text{banale}} + \chi_T$ e quindi $\chi_T = \chi_{\mathbb{C}^3} - \chi_{\text{banale}}$. Da questo segue che

$$\begin{aligned} \chi_T(\text{id}) &= \chi_{\mathbb{C}^3}(\text{id}) - \chi_{\text{banale}}(\text{id}) \\ &= 3 - 1 = 2 \\ \chi_T((1, 2)) &= \chi_{\mathbb{C}^3}((1, 2)) - \chi_{\text{banale}}((1, 2)) \\ &= 1 - 1 = 0 \\ \chi_T((1, 2, 3)) &= \chi_{\mathbb{C}^3}((1, 2, 3)) - \chi_{\text{banale}}((1, 2, 3)) \\ &= 0 - 1 = -1 . \end{aligned}$$

Questo esaurisce il calcolo della tabella dei caratteri.

⁸Abbiamo a che fare con una rappresentazione unidimensionale, quindi si tratta di scalari.

2.4.1 Prima formula di proiezione

Definizione 2.30. Data una G -rappresentazione $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ possiamo definire la mappa

$$\begin{aligned}\varphi_\rho: V &\longrightarrow V \\ \varphi_\rho &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\end{aligned}$$

che possiamo anche scrivere

$$\varphi_\rho(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv .$$

Proposizione 2.31. *La mappa φ_ρ è un morfismo dalla rappresentazione ρ in se stessa.*

Di seguito denoteremo φ_ρ semplicemente con φ , per non appesantire la notazione.

Dimostrazione. La dimostrazione è un semplice conto: fissiamo un generico $h \in G$ e un $v \in V$ e osserviamo che

$$\begin{aligned}\varphi(hv) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} ghv \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in Gh} gv = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h\varphi(v) &= h \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgv \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in hG} gv = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv\end{aligned}$$

che appunto prova che $h\varphi(v) = \varphi(hv)$ per ogni $h \in G$ e $v \in V$. □

Teorema 2.32. *La φ associata alla rappresentazione ρ fattorizza attraverso una mappa di proiezione*

$$\pi: V \longrightarrow V^G$$

dove V^G è definito come

$$V^G = \{ v \in V : \forall g \in G \ gv = v \} .$$

Dimostrazione. Per ogni $v \in V^G$ abbiamo che

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} v = v\end{aligned}$$

e $\varphi(V^G) \subseteq V^G$, quindi $\varphi|_{V^G} = \text{id}_{V^G} : V^G \rightarrow V^G$. D'altra parte abbiamo che per ogni $h \in G$ e per ogni $v \in V$

$$\begin{aligned}h\varphi(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgv = \sum_{g \in hG} gv \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv = \varphi(v)\end{aligned}$$

(come avevamo già visto nella precedente dimostrazione), pertanto abbiamo che $\varphi(v) \in V^G$ per ogni $v \in V$, ovvero $\text{Im } \varphi \subseteq V^G$.

Da questo segue che effettivamente abbiamo una fattorizzazione

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & V^G \\ & \searrow \varphi & \downarrow e \\ & & V \end{array}$$

dove $\pi : V \rightarrow V^G$ è una proiezione di V su V^G ed il morfismo $e : V^G \rightarrow V$ è l'embedding canonico di V^G in V . □

Esercizio 2.33. Date V e W due G -rappresentazioni, determinare il sotto-spazio $\text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G$.

Soluzione. Per definizione ricordiamo che $\theta \in \text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G$ se e solo se $\theta : V \rightarrow W$ è tale che

$$g\theta = \theta$$

per ogni $g \in G$.

Ricordiamo che $g\theta = \rho^W(g) \circ \theta \circ \rho^V(g^{-1})$ e quindi l'uguaglianza

$$g\theta = \rho^W(g) \circ \theta \circ \rho^V(g^{-1}) = \theta$$

è vera se e solo se

$$\rho^W(g) \circ \theta = \theta \circ \rho^V(g).$$

In sostanza $\theta \in \text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G$ se e solo se θ è un morfismo delle G -rappresentazioni V e W . □

Corollario 2.34 (Al teorema 2.32). *Si ha che $\dim_{\mathbb{C}} V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$.*

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\varphi) &= \mathrm{tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) .\end{aligned}$$

D'altra parte per il teorema 2.32 sappiamo che φ fattorizza attraverso una mappa di proiezione su V^G : questo vuol dire che presa v_1, \dots, v_n una base di V tale che v_1, \dots, v_r sia una base di V^G allora abbiamo la matrice che rappresenta φ in questa base è della forma

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id}_r & A \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

(dato che $\varphi|_{V^G} = \mathrm{id}_{V^G}$), da questo segue che $\mathrm{tr}(\varphi) = r = \dim V^G$.

Ma allora da questo segue che

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) .$$

□

In particolare usando il corollario 2.34 abbiamo che

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]}(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V^* \otimes W}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V^*}(g) \chi_W(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) .\end{aligned}$$

Enunciato. *L'equazione*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g)$$

prende il nome di prima formula di proiezione.

Osservazione 2.35. Per ogni coppia di rappresentazioni irriducibili V e W abbiamo che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{hom}[V, W]^G = \begin{cases} 0 & \text{se } V \not\cong_G W \\ 1 & \text{se } V \cong_G W . \end{cases}$$

Questo fatto segue dalla seconda parte del lemma di Schur, e sfrutta il fatto che stiamo lavorando con rappresentazioni su \mathbb{C} . Infatti per l'esercizio precedente sappiamo che $\mathrm{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G$ sono gli omomorfismi di G -rappresentazioni, che nel caso di rappresentazioni irriducibili sono o

omomorfismi nulli o isomorfismi. Da questo segue che se $V \not\cong W$ allora $\text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G$ contiene solo l'omomorfismo nullo, in quanto non ci possono essere isomorfismi, mentre se $V \cong W$ allora abbiamo che

$$\text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G \cong \text{hom}_{\mathbb{C}}[V, V]^G = \{ \lambda \text{id} : \lambda \in \mathbb{C} \} \cong \mathbb{C}$$

dove l'ultima uguaglianza segue per Schur 2.

Definizione 2.36. Chiamiamo *algebra delle funzioni classe* la seguente \mathbb{C} -algebra

$$\mathbb{C}_{cls}(G) = \{ f \in \text{hom}_{\text{Set}}[G, \mathbb{C}] : f \text{ costante sulle classi di coniugio di } G \}$$

dove $\text{hom}_{\text{Set}}[G, \mathbb{C}]$ è la \mathbb{C} -algebra delle funzioni a valori in \mathbb{C} definite su G . Le operazioni sono quelle indotte da $\text{hom}_{\text{Set}}[G, \mathbb{C}]$ di cui $\mathbb{C}_{cls}(G)$ è una sotto- \mathbb{C} -algebra.

Definizione 2.37. Su $\mathbb{C}_{cls}(G)$ è definito il seguente prodotto hermitiano:

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle : \mathbb{C}_{cls}(G) \times \mathbb{C}_{cls}(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle \alpha, \beta \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g) . \end{aligned}$$

Proposizione 2.38. Se V e W sono G -rappresentazioni irriducibili allora $\chi_V, \chi_W \in \mathbb{C}_{cls}(G)$ e inoltre

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } V \not\cong W \\ 1 & \text{se } V \cong W . \end{cases}$$

Questo prova che gli χ_V sono ortonormali e quindi anche linearmente indipendenti.

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza dell'osservazione 2.35, infatti abbiamo che

$$\begin{aligned} \langle \chi_V, \chi_W \rangle &= \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) \\ &= \dim \text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G \end{aligned}$$

e per l'osservazione 2.35 sappiamo che

- se $V \not\cong W$ allora $\dim \text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G = 0$
- se $V \cong W$ allora $\dim \text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G = \dim \text{hom}_{\mathbb{C}}[V, V]^G = 1^9$

che appunto prova la tesi. □

Osservazione 2.39. Da quanto detto fino a questo punto segue che i caratteri χ_V con V rappresentazione irriducibile sono una base per il \mathbb{C} -spazio dei caratteri, che essendo un \mathbb{C} -sotto-spazio di $\mathbb{C}_{cls}(G)$ ha dimensione minore o uguale a $\dim \mathbb{C}_{cls}(G) =$ numero di classi di coniugio di G ¹⁰.

Questo ci dice che il numero di rappresentazioni irriducibili è minore o uguale al numero delle classi di coniugio di G .

Osservazione 2.40. Ricordiamo che nell'esercizio 2.20 abbiamo chiesto di trovare una decomposizione in irriducibili di $T \otimes T$.

Ora usando la teoria dei caratteri è possibile risolvere in maniera molto semplice questo esercizio. Infatti basta dimostrare $\chi_{T \otimes T} = \chi_{\square \square} + \chi_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} + \chi_T$, ovvero che $T \otimes T$ e $T \oplus \square \square \oplus \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ hanno lo stesso carattere, da questo segue che $T \otimes T \cong T \oplus \square \square \oplus \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$.

⁹l'ultima uguaglianza segue dal lemma di Schur.

¹⁰Il fatto che $\dim \mathbb{C}_{cls}(G)$ sia pari al numero delle classi di coniugio di G segue dal fatto che le funzioni classe sono in corrispondenza biunivoca con le funzioni dalle classi di coniugio di G in \mathbb{C} .

Capitolo 3

Caratteri come base delle funzioni classe

Lezione 3 (03/03/2016)

3.1 Ancora su caratteri di rappresentazioni irriducibili

Abbiamo visto che i caratteri associati a rappresentazioni irriducibili sono ortogonali, quindi linearmente indipendenti, nella \mathbb{C} -algebra $\mathbb{C}_{cls}(G)$.

Da questa osservazione abbiamo il seguente corollario.

Corollario 3.1. *Ogni rappresentazione (finita, su campo complesso) è univocamente determinata dal suo carattere.*

Dimostrazione. Sia V una G -rappresentazione che ammetta una decomposizione

$$V \cong \bigoplus_i V_i^{k_i}$$

dove i V_i sono delle rappresentazioni irriducibili.

Dalle proprietà sui caratteri abbiamo che

$$\chi_V = \sum_i k_i \chi_{V_i} .$$

Se ora

$$V \cong \bigoplus_i V_i'^{k_i'}$$

fosse un'altra decomposizione in cui i V_i' sono pure irriducibili allora avremmo che

$$\chi_V = \sum_i k_i' \chi_{V_i'}$$

e quindi avremmo la seguente uguaglianza di combinazioni \mathbb{Z} -lineari (e quindi anche \mathbb{C} -lineari)

$$\sum_i k_i \chi_{V_i} = \sum_i k_i' \chi_{V_i'}$$

da cui, per l'indipendenza lineare dei χ_{V_i} e dei $\chi_{V'_i}$, segue che a meno di permutazioni si deve avere

$$\begin{aligned}\chi_{V_i} &= \chi_{V'_i} \\ k_i &= k'_i .\end{aligned}$$

Ora dato che V_i e V'_i sono rappresentazioni irriducibili con lo stesso carattere esse devono essere isomorfe per la proposizione 2.38 e da questo segue la tesi. \square

Esempio 3.2 (La rappresentazione regolare di G). Sappiamo che per ogni campo \mathbb{K} e gruppo G possiamo costruire il così detto group-ring $\mathbb{K}[G]$. Il group ring ha una naturale struttura di G -rappresentazione data dalla moltiplicazione a sinistra

$$\begin{aligned}\rho: G &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{K}[G]) \\ \rho(h) &= h \cdot - \\ h \left(\sum_g \lambda g \right) &= \sum_g \lambda_g h g = \sum_g \lambda_{h^{-1}g} g .\end{aligned}$$

Proviamo a calcolare il carattere della rappresentazione $\mathbb{C}[G]$. Ricordiamo che gli elementi di G formano una base per $\mathbb{C}[G]$ e in tale base possiamo rappresentare ogni $\rho(h)$ con una matrice. Dato che per ogni $g \in G$ abbiamo che

$$\rho(h)(g) = hg \in G$$

ne segue che ogni $\rho(h)$ è rappresentato da una matrice di permutazione e che per $h \neq 1$ tale matrice non ha punti fissi. Da questo segue

$$\chi_{\mathbb{C}[G]}(h) = \text{tr}(h) = \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = |G| & \text{se } h = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia ora V_i una G -rappresentazione irriducibile allora abbiamo che

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\mathbb{C}[G]}, \chi_{V_i} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\mathbb{C}[G]}(g)} \chi_{V_i}(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \overline{\chi_{\mathbb{C}[G]}(1)} \chi_{V_i}(1) \\ &= \frac{1}{|G|} \dim \mathbb{C}[G] \dim V_i \\ &= \frac{1}{|G|} |G| \dim V = \dim V_i .\end{aligned}$$

D'altra parte, dai teoremi visti sulle decomposizioni in componenti irriducibili, sappiamo che devono esistere dei coefficienti interi $k_i \in \mathbb{N}$ tali che

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i V_i^{k_i}$$

e quindi

$$\chi_{\mathbb{C}[G]} = \sum_i k_i \chi_{V_i} .$$

Dall'algebra lineare segue che

$$k_i = \langle \chi_{\mathbb{C}[G]}, \chi_{V_i} \rangle$$

e quindi

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i V_i^{\dim V_i} .$$

Osservazione 3.3. Da quanto detto sopra segue che

$$\begin{aligned} |G| &= \sum_i \dim V_i^{\dim V_i} \\ &= \sum_i \dim V_i^2 . \end{aligned}$$

Esercizio 3.4. Proviamo a calcolare la tabella dei caratteri di S_4 . Conosciamo già alcune rappresentazioni irriducibili per esempio la rappresentazione banale, quella per cui $\rho(\sigma) = \text{id}_{\mathbb{C}}$ per ogni $\sigma \in S_4$, che di seguito sarà denotata con il diagramma

$$\square\square\square\square .$$

Il carattere di questa rappresentazione è descritto dalla seguente tabella

	id	(1, 2)	(1, 2, 3)	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3, 4)
$\square\square\square\square$	1	1	1	1	1

Un'altra rappresentazione irriducibile, di seguito denotata con il diagramma

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$$

e chiamata *rappresentazione segno*, è quella che ad ogni $\sigma \in S_4$ associa l'applicazione $\rho(\sigma) = -\text{sgn}(\sigma) \text{id}_{\mathbb{C}}$. Il carattere in questo caso è descritto dalla tabella

	id	(1, 2)	(1, 2, 3)	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3, 4)
$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$	1	-1	1	1	-1

Ricordiamo che queste rappresentazioni sono chiaramente irriducibili perché hanno dimensione 1, ergo non hanno sotto-spazi vettoriali, e quindi neanche sotto-rappresentazioni, a parte le banali.

Un'altra rappresentazione irriducibile è data la seguente sotto-rappresentazione di \mathbb{C}^4

$$\square\square\square = \left\{ x \in \mathbb{C}^4 : \sum_{i=1}^4 x_i = 0 \right\}$$

l'irriducibilità di questo segue dal esercizio 3.5 (che segue), oppure semplicemente basta osservare che il carattere $\chi_{\square\square\square}$ ha norma 1: se $\square\square\square = \bigoplus_i V_i^{k_i}$ è una decomposizione della rappresentazione in componenti irriducibili allora

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\square\square\square}, \chi_{\square\square\square} \rangle &= \sum_i k_i^2 \underbrace{\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle}_{=1} \\ &= \sum_i k_i^2 \end{aligned}$$

dove i k_i sono numeri naturali e quindi $\sum_i k_i^2 = 1$ se e solo se per esattamente un i si ha $k_i = 1$ e per ogni altro indice j si ha che $k_j = 0$, ovvero $\square\square\square = V_i$ e quindi è irriducibile. La dimostrazione che effettivamente $\langle \chi_{\square\square\square}, \chi_{\square\square\square} \rangle = 1$ è data dal fatto che il carattere è descritto dalla seguente tabella

	id	(1, 2)	(1, 2, 3)	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3, 4)
$\square\square\square$	3	1	0	-1	-1

e quindi calcolando la norma del carattere si vede che

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\square\square\square}, \chi_{\square\square\square} \rangle &= \frac{1}{4!} \sum_{\sigma \in S_4} \overline{\chi_{\square\square\square}(\sigma)} \chi_{\square\square\square}(\sigma) \\ &= \frac{3^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}{4!} \\ &= \frac{9 + 1 + 1 + 1}{4!} = 1. \end{aligned}$$

Un'altra rappresentazione irriducibile è data dal prodotto tensore $\square\square\square \otimes \square$. Anche in questo caso l'irriducibilità si prova guardando al carattere della rappresentazione che può essere calcolato tramite la formula

$$\chi_{\square\square\square \otimes \square} = \chi_{\square\square\square} \chi_{\square}$$

ed è descritto dalla tabella seguente:

	id	(1, 2)	(1, 2, 3)	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3, 4)
$\square\square\square \otimes \square$	3	-1	0	1	-1

osservando che

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\square\square\square \otimes \square}, \chi_{\square\square\square \otimes \square} \rangle &= \frac{3^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}{4!} \\ &= \frac{9 + 1 + 1 + 1}{4!} = 1 \end{aligned}$$

segue anche in questo caso l'irriducibilità della rappresentazione.

Per trovare l'ultimo carattere,¹ anziché dare esplicitamente una rappresentazione irriducibile, di cui possiamo calcolare il carattere, sfruttiamo il fatto che per quanto visto nell'esempio 3.2

$$\chi_{\mathbb{C}[S_4]} = \sum_i \dim V_i \chi_{V_i} ,$$

dove V_i sono le rappresentazioni irriducibili del gruppo S_4 . Da questa uguaglianza segue che l'ultimo carattere, associato alla rappresentazione che indichiamo con il diagramma

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} ,$$

è dato dall'equazione

$$\dim \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \chi_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = \chi_{\mathbb{C}[S_4]} - \chi_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} - \chi_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} - 3\chi_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} - 3\chi_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} .$$

Dato che in generale $\chi_V(1) = \dim V$ per ogni rappresentazione V ,² abbiamo che

$$\begin{aligned} \dim \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 &= \dim \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \chi_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}(1) \\ &= \chi_{\mathbb{C}[S_4]}(1) - \chi_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}(1) - \chi_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}}(1) - 3\chi_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}(1) - 3\chi_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}(1) \\ &= 4! - 1 - 1 - 3^2 - 3^2 = 4 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\dim \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = 2$$

e quindi

$$\chi_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = \frac{\chi_{\mathbb{C}[S_4]} - \chi_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} - \chi_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} - 3\chi_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} - 3\chi_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}}{2} .$$

Facendo i conti si vede che il $\chi_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}$ è dato da

	id	(1, 2)	(1, 2, 3)	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3, 4)
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	2	0	-1	0	2

Per chi poi fosse interessato ad avere una descrizione esplicita di quest'ultima rappresentazione irriducibile essa può essere trovata per altre vie: possiamo osservare che, posto $K \triangleleft S_4$ il sottogruppo (normale) di Klein, abbiamo un isomorfismo $S_4/K \cong S_3$, tale che la proiezione canonica

$$\pi: S_4 \longrightarrow S_4/K \cong S_3$$

¹Il fatto che manchi al più un solo carattere segue dal fatto che i caratteri appartengono al \mathbb{C} -spazio vettoriale delle funzioni classe, che hanno dimensione pari alle classi di coniugio di S_4 , che sono esattamente 5.

²Questo segue dal fatto che $\rho(1) = \text{id}_V$ e che quindi $\text{tr}(\rho(1))$ è pari alla dimensione dello spazio vettoriale V .

composta con la rappresentazione standard

$$\rho^{\square\square} : S_3 \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$$

ci da una nuova rappresentazione di S_4 . La rappresentazione

$$\rho^{\square\square} \circ \pi : S_4 \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$$

così ottenuta è irriducibile in quanto (si può far vedere facilmente) che ogni suo sotto-spazio vettoriale è una sotto- S_3 -rappresentazione se e solo se è una sua sotto- S_4 -rappresentazione. Tale rappresentazione irriducibile è proprio la $\square\square$, in quanto è irriducibile e, per quanto detto sopra sullo studio del carattere, è l'unica rappresentazione irriducibile di S_4 avente dimensione 2.

Riassumendo la tabella dei caratteri irriducibili di S_4 è la seguente:

	id	(1, 2)	(1, 2, 3)	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3, 4)
$\square\square\square\square$	1	1	1	1	1
$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}$	1	-1	1	-1	1
$\begin{array}{c} \square\square \\ \square\square \end{array}$	3	1	0	-1	-1
$\begin{array}{c} \square\square \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$	3	-1	0	1	-1
$\square\square$	2	0	-1	0	2

Esercizio 3.5. Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la sotto-rappresentazione di \mathbb{C}^n

$$\overbrace{\square\square\square\square}^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$$

è irriducibile.

Soluzione. Ci basta dimostrare che per ogni elemento $u \in \overbrace{\square\square\square\square}^{n-1}$ non nullo la sotto-rappresentazione generata da u , chiamiamola U , è $\overbrace{\square\square\square\square}^{n-1}$: per ogni sotto-rappresentazione non nulla $V \subseteq \overbrace{\square\square\square\square}^{n-1}$ deve esistere un $u \in V \setminus \{0\}$ quindi $V \supseteq U = \langle u \rangle$, ma se $U = \overbrace{\square\square\square\square}^{n-1}$ ne segue che anche $V = \overbrace{\square\square\square\square}^{n-1}$.

Sia quindi u un tale elemento non nullo, e quindi con una componente $u_i \neq 0$. A meno di applicare $(1, i) \in S_n$ possiamo supporre $u_1 \neq 0$. A questo punto, dato che per definizione $\sum_i u_i = 0$, sappiamo che esiste almeno un indice i tale che $u_1 \neq u_i$ e a meno di applicare $(2, i) \in S_n$ possiamo supporre che tale i sia uguale a 2, quindi $u_2 \neq u_1$.

Chiaramente $u - (1, 2)u \in U$ ma si ha che

$$\begin{aligned} (u - (1, 2)u)_1 &= u_1 - u_2 \\ (u - (1, 2)u)_2 &= u_2 - u_1 = -(u_1 - u_2) \\ (u - (1, 2)u)_i &= u_i - u_i \text{ per ogni } i > 2. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che

$$u - (1, 2)u = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c(e_1 - e_2)$$

per un opportuna costante $c \in \mathbb{C}$, e quindi $e_1 - e_2 \in U$.

Ma allora abbiamo anche che

$$(2, i)(e_1 - e_2) = e_1 - e_i \in U$$

per ogni $i = 3, \dots, n$, quindi U contiene la famiglia $\{e_1 - e_i : i = 2, \dots, n\}$ che è una base di $\square\square\square\square$. □

Esercizio 3.6. Cerchiamo i caratteri irriducibili di A_4 .

Soluzione. Ricordiamo che A_4 ha un unico sotto-gruppo normale non banale, il *gruppo di Klein* K formato dall'identità e da tutti i 2-2-cicli di S_4 . In particolare se $\pi: A_4 \rightarrow A_4/K \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è la proiezione al quoziente allora prendendo le tre rappresentazioni irriducibili di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, date dai tre omomorfismi di gruppi

$$\begin{aligned} \rho_i: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \\ \rho_i(\bar{k}) &= \zeta_3^{ik}, \end{aligned}$$

dove \bar{k} è la classe di resto di k modulo 3 e ζ_3 è la radice primitiva terza dell'unità, da questi possiamo ottenere gli omomorfismi di gruppi

$$r_i = \rho_i \circ \pi: A_4 \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*,$$

che danno tre rappresentazioni irriducibili di S_4 , l'irriducibilità segue dal fatto che sono rappresentazioni di dimensione 1.

Dalla definizione dei ρ_i e dal fatto che A_4 ha 4 classi di coniugio, corrispondenti agli elementi id , $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$ e $(1, 2)(3, 4)$, possiamo calcolare i caratteri associati alle rappresentazioni r_i e inserirli nella seguente parziale dei caratteri.

	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)(3, 4)$
r_1	1	ζ_3	ζ_3^{-1}	1
r_2	1	ζ_3^{-1}	ζ_3	1
r_3	1	1	1	1

Non è difficile vedere che questi sono linearmente indipendenti e quindi che sono caratteri associati a rappresentazioni irriducibili distinte.

Prendiamo adesso la rappresentazione $\rho: S_4 \rightarrow \text{Aut}(\square\square\square\square)$, dove ricordiamo che con $\square\square\square\square$ denotiamo la sotto-rappresentazione di \mathbb{C}^4 data da

$$\square\square\square\square \cong \left\{ z \in \mathbb{C}^4 : \sum_i z_i = 0 \right\}.$$

Facciamo vedere che la restrizione di tale rappresentazione a A_4 , ovvero $\rho|_{A_4}: A_4 \rightarrow \text{Aut}(\square\square\square\square)$, è ancora una rappresentazione irriducibile. Per farlo possiamo fissare la base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

di $\square\square\square\square$ e studiamo l'azione di $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$ e $(1, 2)(3, 4)$ su questi elementi (quella di id è abbastanza ovvia).

Sviluppando i conti non è difficile scoprire che

$$(1, 2, 3)v_1 = v_3$$

$$(1, 2, 3)v_2 = v_1$$

$$(1, 2, 3)v_3 = v_2$$

e quindi nella base scelta abbiamo

$$\rho(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, dato che $(1, 3, 2)$ è inverso a $(1, 2, 3)$, che

$$\rho(1, 3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sempre con dei conti si riesce a vedere che

$$(1, 2)(3, 4)v_1 = v_2 - v_3$$

$$(1, 2)(3, 4)v_2 = v_1 - v_3$$

$$(1, 2)(3, 4)v_3 = -v_3$$

da cui segue che

$$\rho((1, 2)(3, 4)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Da questo segue che il carattere per $\rho: A_4 \rightarrow \text{Aut}(\square\square\square)$, che nel seguito indicheremo con r_4 , è descritto dalla seguente tabella.

	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)(3, 4)$
r_4	3	0	0	-1

Con un calcolo si prova che $\langle r_4, r_4 \rangle = 1$ e da questo segue che esso deve essere il carattere associato a una rappresentazione irriducibile, inoltre dato che questa rappresentazione ha dimensione 3 è diversa dalle altre rappresentazioni viste prima.

A questo punto, ricordandoci che le rappresentazioni irriducibili di A_4 non possono essere più delle classi di coniugio, ovvero 4, possiamo concludere che questi sono tutti i caratteri cercati che possiamo riscrivere nella tabella seguente

	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)(3, 4)$
r_1	1	ζ_3	ζ_3^{-1}	1
r_2	1	ζ_3^{-1}	ζ_3	1
r_3	1	1	1	1
r_4	3	0	0	-1

che ci è la tabella dei caratteri per A_4 . □

3.2 Funzioni classe

Osservazione 3.7. Date V e W due G -rappresentazioni e un $\theta: V \rightarrow W$ applicazione lineare (non necessariamente morfismo di rappresentazioni) vale che l'applicazione lineare

$$\sum_{g \in G} \rho^{\text{hom}[V,W]}(g)(\theta) = \sum_{g \in G} \rho^W(g) \circ \theta \circ \rho^V(g)^{-1}$$

è un morfismo di G -rappresentazioni: questo segue dal fatto che questo morfismo lineare è l'immagine di θ mediante la proiezione canonica $\pi: \text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W] \rightarrow \text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]^G$ di $\text{hom}_{\mathbb{C}}[V, W]$ sul sotto-spazio delle applicazioni G -invarianti, che come abbiamo visto è lo spazio dei morfismi di G -rappresentazioni.

Abbiamo già visto che per ogni rappresentazione V l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \varphi: V &\longrightarrow V \\ \varphi &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \end{aligned}$$

è un omomorfismo di G -rappresentazioni.

Una domanda che è interessante chiedersi è per quali funzioni $\alpha: G \rightarrow \mathbb{C}$ si abbia che per ogni rappresentazione V l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}: V &\longrightarrow V \\ \varphi_{\alpha} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho^V(g) \circ \text{id}_V \end{aligned}$$

sia un morfismo di G -rappresentazioni.

La risposta sorprendente a questa domanda è data dal seguente teorema.

Teorema 3.8. *Data una $\alpha: G \rightarrow \mathbb{C}$ allora per ogni G -rappresentazione V*

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,V}: V &\longrightarrow V \\ \varphi_{\alpha,V} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho(g) \end{aligned}$$

è un (endo)morfismi di G -rappresentazioni se e solo se α è una funzione classe.

Dimostrazione. Cominciamo con il provare la parte facile, ovvero che se α è una funzione classe allora ogni $\varphi_{\alpha,V}$ è un morfismo di G -rappresentazioni.

Basta provare che per ogni rappresentazione V e per ogni $h \in G$ si ha l'uguaglianza

$$\rho(h) \circ \varphi_{\alpha,V} = \varphi_{\alpha,V} \circ \rho(h)$$

o equivalentemente

$$\rho(h) \circ \varphi_{\alpha,V} \circ \rho(h)^{-1} = \varphi_{\alpha,V} .$$

Espandendo usando le definizioni delle $\varphi_{\alpha,V}$ otteniamo che

$$\begin{aligned} \rho(h) \circ \varphi_{\alpha,V} \circ \rho(h)^{-1} &= \rho(h) \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho(g) \text{id}_V \right) \rho(h^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho(h) \rho(g) \rho(h^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho(hgh^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(h^{-1}gh) \rho(g) . \end{aligned}$$

Ora se α è una funzione classe allora sappiamo che per ogni coppia $g, h \in G$ si ha che

$$\alpha(h^{-1}gh) = \alpha(g)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \rho(h) \circ \varphi_{\alpha, V} \circ \rho(h)^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(h^{-1}gh) \rho(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho(g) = \varphi_{\alpha, V} \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare.

Per fare l'altra parte della dimostrazione procediamo per assurdo: facciamo vedere che se α non è una funzione classe allora esiste una rappresentazione V di G tale che $\varphi_{\alpha, V}$ non è un morfismo di G -rappresentazioni, ovvero che per qualche V e per qualche $h \in G$

$$\rho(h) \circ \varphi_{\alpha, V} \circ \rho(h)^{-1} \neq \varphi_{\alpha, V} .$$

Se α non è una funzione classe allora vuol dire che per dei $g, h \in G$ si ha che

$$\alpha(h^{-1}gh) \neq \alpha(g) .$$

Se prendiamo $V = \mathbb{C}[G]$ allora abbiamo che

$$\rho(h) \circ \varphi_{\alpha, \mathbb{C}[G]} \circ \rho(h)^{-1}(1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(h^{-1}gh)g$$

e

$$\varphi_{\alpha, \mathbb{C}[G]}(1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)g$$

se valesse l'uguaglianza $\rho(h) \circ \varphi_{\alpha, \mathbb{C}[G]} \circ \rho(h)^{-1} = \varphi_{\alpha, \mathbb{C}[G]}$ allora si dovrebbe avere

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(h^{-1}gh)g = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)g$$

e dato che i g sono una base di $\mathbb{C}[G]$ si dovrebbe avere in particolare $\alpha(g) = \alpha(h^{-1}gh)$. Per costruzione avevamo $\alpha(h^{-1}gh) \neq \alpha(g)$, ne dobbiamo concludere che non è possibile che $\rho(h) \circ \varphi_{\alpha, \mathbb{C}[G]} \circ \rho(h)^{-1} = \varphi_{\alpha, \mathbb{C}[G]}$ e quindi $\varphi_{\alpha, \mathbb{C}[G]}$ non è un morfismo di G -rappresentazioni.

Da questo, dalla regola per assurdo, ne segue che se per ogni G -rappresentazione V l'applicazione lineare $\varphi_{\alpha, V}$ è un morfismo di G -rappresentazioni allora α deve essere una funzione classe. \square

Il teorema 3.8, che magari potrebbe sembrare non correlato a quello che abbiamo visto fino a questo momento sarà la chiave del prossimo teorema fondamentale.

Teorema 3.9. *Per ogni gruppo finito G i caratteri delle rappresentazioni (finite) irriducibili formano una base ortonormale dello spazio $\mathbb{C}_{cls}(G)$ delle funzioni classe su G .*

Per dimostrare il teorema ci serviremo del seguente lemma.

Lemma 3.10. *L'unica funzione classe α che sia ortogonale ai caratteri delle rappresentazioni irriducibili è la funzione nulla, ovvero se α è tale che*

$$\langle \chi_V, \alpha \rangle = 0 ,$$

per ogni G -rappresentazione irriducibile V , allora $\alpha = 0$.

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \mathbb{C}_{cls}(G)$ ortogonale ai caratteri delle rappresentazioni irriducibili e quindi di conseguenza anche $\bar{\alpha}$ è ortogonale a tutti i caratteri delle irriducibili. Per ogni V rappresentazione irriducibile abbiamo che

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, V}: V &\longrightarrow V \\ \varphi_{\alpha, V} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho(g) \end{aligned}$$

è un morfismo di G -rappresentazioni, per il teorema 3.8. Per il lemma di Schur, versione complessa, sappiamo che $\varphi_{\alpha, V} = \lambda \text{id}_V$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$. Un conto ci mostra che

$$\begin{aligned} \text{tr}(\varphi_{\alpha, V}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \chi_V(g) \\ &= \langle \bar{\alpha}, \chi_V \rangle = 0 \end{aligned}$$

e d'altra parte avremmo che

$$\text{tr}(\varphi_{\alpha, V}) = \text{tr}(\lambda \text{id}_V) = \lambda \dim V .$$

Dunque si dovrebbe avere

$$\lambda \dim V = 0$$

e dato che chiaramente $\dim V \neq 0$ ne segue che deve essere $\lambda = 0$, ovvero che

$$\varphi_{\alpha, V} = 0$$

per ogni rappresentazione irriducibile V .

A questo punto possiamo osservare che per ogni rappresentazione V avente decomposizione

$$V = \bigoplus_i V_i^{k_i}$$

si ha che

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha, V} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho^V(g) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \bigoplus_i (\rho^{V_i})^{k_i}(g) \\
&= \bigoplus_i \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho^{V_i}(g) \right)^{k_i} \\
&= \bigoplus_i (\varphi_{\alpha, V_i})^{k_i} \\
&= \bigoplus_i (0)^{k_i} = 0.
\end{aligned}$$

Quindi per ogni rappresentazione V abbiamo $\varphi_{\alpha, V} = 0$, in particolare prendendo $V = \mathbb{C}[G]$ e applicando $\varphi_{\alpha, \mathbb{C}[G]}$ all'identità del gruppo G , che è un elemento di $\mathbb{C}[G]$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha, \mathbb{C}[G]}(1) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho(g)^{\mathbb{C}[G]}(1) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) g 1 \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) g = 0
\end{aligned}$$

e quindi per l'indipendenza lineare dei g in $\mathbb{C}[G]$ ne segue che $\alpha(g) = 0$ per ogni $g \in G$, ovvero che $\alpha = 0$. \square

Adesso possiamo dimostrare il teorema 3.9.

Dimostrazione del teorema 3.9. Sia $\alpha \in \mathbb{C}_{cls}(G)$ e consideriamo la funzione classe

$$\alpha' = \sum_i \langle \alpha, \chi_{V_i} \rangle \chi_{V_i}$$

dove i V_i sono le rappresentazioni irriducibili di G . Se riuscissimo a far vedere che $\alpha = \alpha'$ allora avremmo concluso: perché avremmo dimostrato che ogni $\alpha \in \mathbb{C}_{cls}(G)$ si può scrivere come combinazione lineare di caratteri per rappresentazioni irriducibili.

Osserviamo che per ogni rappresentazione irriducibile V_i abbiamo che

$$\begin{aligned}
\langle \alpha - \alpha', \chi_{V_i} \rangle &= \langle \alpha, \chi_{V_i} \rangle - \langle \alpha', \chi_{V_i} \rangle \\
&= \langle \alpha, \chi_{V_i} \rangle - \left\langle \sum_j \langle \alpha, \chi_{V_j} \rangle \chi_{V_j}, \chi_{V_i} \right\rangle \\
&= \langle \alpha, \chi_{V_i} \rangle - \langle \alpha, \chi_{V_i} \rangle \underbrace{\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle}_{=1} = 0.
\end{aligned}$$

Quindi per il lemma 3.10 ne segue che $\alpha - \alpha' = 0$, ovvero che $\alpha = \alpha'$, da cui segue la tesi. \square

Osservazione 3.11. Dal teorema 3.9 segue che il numero di rappresentazioni irriducibili è pari al numero di classi di coniugio di G , che è la dimensione di $\mathbb{C}_{cls}(G)$.

Capitolo 4

Rappresentazioni indotte e alcuni esercizi

Lezione 4 (07/03/2016)

4.1 La costruzione della rappresentazione indotta

Non è difficile osservare che dati un gruppo G e un suo sotto-gruppo $H \leq G$ allora da ogni G -rappresentazione (V, ρ^V) è possibile costruire in modo molto naturale la H -rappresentazione $(\text{Res}_H^G(V), \rho^{\text{Res}_H^G(V)})$ avente:

- come spazio vettoriale soggiacente V stesso, ovvero

$$\text{Res}_H^G(V) = V$$

(solo ed esclusivamente come spazi-vettoriali);

- come rappresentazione (cioè l'omomorfismo in $\text{Aut}(V)$) la restrizione di ρ^V ad H , ovvero

$$\rho^{\text{Res}_H^G(V)} = \rho^V|_H: H \longrightarrow \text{Aut}(V) = \text{Aut}(\text{Res}_H^G(V)) .$$

Nel seguito definiremo una costruzione che in un certo senso è l'inversa della Res_H^G appena vista. In pratica ci apprestiamo a definire una costruzione che a partire da una rappresentazione di un gruppo $\rho: H \rightarrow \text{Aut}(W)$, dove $H \leq G$, cerca di costruire una rappresentazione di G , che in un qualche modo estende la H -rappresentazione W .

Per arrivare a questa costruzione useremo una sorta di approccio bottom-up, cioè partiremo da una soluzione al nostro problema, ovvero una descrizione esplicita della nostra rappresentazione-estensione, e successivamente individueremo delle condizioni necessarie e sufficienti che caratterizzino la nostra estensione a meno di isomorfismo.

Prima di cominciare fissiamo alcune notazioni. Anzitutto supponiamo di aver fissato per ogni $\sigma \in G/H$ un rappresentante canonico $g_\sigma \in \sigma$, ovvero un elemento di G tale per cui $g_\sigma H = \sigma$, in particolare prendiamo $g_H = 1$ l'identità del gruppo.

Per ogni $g \in G$ e $\sigma \in G/H$ possiamo considerare l'elemento gg_σ che in generale non sarà uguale al rappresentante $g_{g\sigma}$ scelto per la classe $g\sigma$, tuttavia sappiamo che

$$gg_\sigma \in g\sigma = g_{g\sigma}H$$

per definizione di $g_{g\sigma}$. Da questo segue che per ogni g e σ come sopra esiste sempre uno e un solo $h_{g,\sigma} \in H$ tale che

$$gg_\sigma = g_{g\sigma}h_{g,\sigma} .$$

Con queste notazioni possiamo procedere a definire *la rappresentazione indotta su G da una H -rappresentazione*.

Definizione 4.1 (Rappresentazione indotta). Data una H -rappresentazione W si chiama indotta da H su G la G -rappresentazione $\text{Ind}_H^G(W)$ definita come segue.

- Come spazio vettoriale

$$\text{Ind}_H^G(W) = \bigoplus_{\sigma \in G/H} g_\sigma W$$

i cui elementi sono somme della forma

$$\sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma w_\sigma$$

dove $w_\sigma \in W$, per ogni $\sigma \in G/H$. Le operazioni di somma e moltiplicazioni per gli scalari in \mathbb{C} sono definite nel modo ovvio. Osserviamo che se w_1, \dots, w_k è una base di W allora i vettori $g_\sigma w_i$ al variare di $\sigma \in G/H$ e $i = 1, \dots, k$ formano una base per $\text{Ind}_H^G(W)$.

- L'azione di G su $\text{Ind}_H^G(W)$ è definita nel seguente modo: per ogni $g \in G$ definiamo $\rho(g)$ come l'unica applicazione lineare da $\text{Ind}_H^G(W)$ tale che sulla base di $\text{Ind}_H^G(W)$ agisca nel seguente modo

$$\begin{aligned} \rho(g): \text{Ind}_H^G(W) &\longrightarrow \text{Ind}_H^G(W) \\ \rho(g)(g_\sigma w_i) &= g_{g\sigma}(h_{g,\sigma} w_i) \end{aligned}$$

dove $h_{g,\sigma} w_i$ è l'elemento $\rho^W(h_{g,\sigma})(w_i) \in W$, ben definito perché W è una H -rappresentazione.

Si può facilmente dimostrare, come conseguenza della linearità, che più in generale per ogni $w \in W$ vale che

$$\rho(g)(g_\sigma w) = g_{g\sigma} h_{g,\sigma} w .$$

Proposizione 4.2. *La mappa mappa che associa ad ogni $g \in G$ l'applicazione lineare $\rho(g)$ è davvero una G -rappresentazione: ovvero da un omomorfismo $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(\text{Ind}_H^G(W))$.*

Dimostrazione. Chiaramente abbiamo che ρ è una funzione di tipo

$$\rho: G \longrightarrow \text{End}(\text{Ind}_H^G(W)) .$$

Osserviamo che per ogni coppia $g_1, g_2 \in G$ e per ogni $\sigma \in G/H$ abbiamo che

$$\begin{aligned} g_1 g_2 g_\sigma &= g_1 (g_2 g_\sigma) \\ &= g_1 (g_{g_2 \sigma} h_{g_2, \sigma}) \\ &= (g_1 g_{g_2 \sigma}) h_{g_2, \sigma} \\ &= g_{g_1 g_2 \sigma} h_{g_1, g_2 \sigma} h_{g_2, \sigma} \end{aligned}$$

e quindi dato che per definizione $h_{g_1g_2,\sigma}$ è l'unico elemento di H tale che

$$g_1g_2g_\sigma = g_{g_1g_2\sigma}h_{g_1g_2,\sigma}$$

abbiamo che

$$h_{g_1g_2,\sigma} = h_{g_1,g_2\sigma}h_{g_2,\sigma} .$$

A questo punto possiamo osservare che sugli elementi della base

$$\begin{aligned} \rho(g_1g_2)(g_\sigma w_i) &= g_{g_1g_2\sigma}(h_{g_1g_2,\sigma}w_i) \\ &= g_{g_1g_2\sigma}(h_{g_1,g_2\sigma}h_{g_2,\sigma}w_i) \\ &= \rho(g_1)(g_{g_2\sigma}h_{g_2,\sigma}w_i) \\ &= \rho(g_1)(\rho(g_2)(g_\sigma w_i)) \\ &= \rho(g_1) \circ \rho(g_2)(g_\sigma w_i) \end{aligned}$$

e quindi $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$ poiché hanno stessi valori su una base di $\text{Ind}_H^G(W)$.

Dato che

$$1g_\sigma = g_\sigma \underbrace{1}_{\in H}$$

e quindi $h_{1,\sigma} = 1$, per ogni $\sigma \in G/H$, ne segue che

$$\rho(1)(g_\sigma w_i) = g_\sigma w_i = \text{id}(g_\sigma w_i)$$

e quindi $\rho(1) = \text{id}$, perché le due applicazioni lineari coincidono su una base.

Quanto visto fin qui prova che

$$\rho: G \longrightarrow \text{End}(\text{Ind}_H^G(W))$$

è un omomorfismo di monoidi, ma allora da questo, per proprietà dei monoidi, segue che ogni $\rho(g)$ è invertibile e che quindi in verità ρ ci da un omomorfismo di gruppi

$$\rho: G \longrightarrow \text{Aut}(\text{Ind}_H^G(W))$$

e quindi la coppia $(\text{Ind}_H^G(W), \rho)$ è una G -rappresentazione. □

Osservazione 4.3. All'inizio del capitolo abbiamo detto che in un certo senso $\text{Ind}_H^G(W)$ dovrebbe essere un'estensione della H -rappresentazione W , questo si può verificare facilmente osservando che esiste il *naturale* morfismo

$$\begin{aligned} i: W &\longrightarrow \text{Ind}_H^G(W) \\ i(w) &= g_H w \end{aligned}$$

che mappa isomorficamente W nella componente $g_H W \subseteq \text{Ind}_H^G(W)$, e che quindi costituisce un naturale embedding di W in $\text{Ind}_H^G(W)$.

Tale mappa è anche H -lineare, ovvero è un omomorfismo di H -rappresentazioni:

$$\begin{aligned} i(hw) &= g_H hw \\ &= 1hw \text{ (perché } g_H = 1, \text{ per costruzione)} \\ &= h1w = hg_H w \\ &= hi(w) , \end{aligned}$$

per ogni $h \in H$ e $w \in W$.

Esempio 4.4. Consideriamo la rappresentazione banale $W = \mathbb{C}$ di H (quella dove ogni $h \in G$ agisce come l'identità). Ci chiediamo chi possa essere $\text{Ind}_H^G(W)$.

Per definizione sappiamo che come spazio vettoriale abbiamo

$$\text{Ind}_H^G(W) \cong \bigoplus_{\sigma \in G/H} g_\sigma W$$

e che sulla componente σ -esima

$$g(g_\sigma w) = g_{g\sigma} h_{g,\sigma} w = g_{g\sigma} w$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che H agisce in modo banale su W .

Da quanto visto appare chiaro che G agisce permutando le varie componenti σ -esime: la retta σ -esima viene mandata nella retta $g\sigma$ -esima.

Definizione 4.5 (Rappresentazioni di permutazioni). Data un'azione di G su un insieme X possiamo costruire una G -rappresentazione U dove

- U è lo spazio vettoriale libero di base $\{v_x: x \in X\}$;
- la rappresentazione $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(U)$ è definita come quell'omomorfismo tale che

$$gv_x = v_{gx} .$$

U è detta rappresentazione di permutazione relativa all'azione di G su X .

Osservazione 4.6. Il nome di rappresentazione di permutazione deriva dal fatto che ogni g agisce come una permutazione sugli elementi della base.

Osservazione 4.7. La rappresentazione definita nell'esempio 4.4 era appunto la rappresentazione di permutazione relativa all'azione di G su G/H .

Osservazione 4.8. Se nell'esempio 4.4 supponiamo che sia $H = (e) \leq G$ allora la rappresentazione indotta diventa la rappresentazione di permutazione relativa all'azione di G su $G/H = G$. Quindi tale rappresentazione è proprio $\mathbb{C}[G]$: la rappresentazione regolare.

Osservazione 4.9. Dalla definizione segue banalmente $\dim \text{Ind}_H^G(W) = |G/H| \dim W$.

Come promesso adesso passiamo a una caratterizzazione della rappresentazione indotta. Come spesso accade in algebra anche questa caratterizzazione è descritta tramite una *proprietà universale*.

Teorema 4.10 (Frobenius). *Sia W una H -rappresentazione e U una G -rappresentazione. Allora se $\varphi: W \rightarrow \text{Res}_H^G(U)$ è un omomorfismo di H -rappresentazioni esso si può estendere in modo*

unico a $\tilde{\varphi}: \text{Ind}_H^G(W) \rightarrow U$: per estensione qui intendiamo che $\tilde{\varphi} \circ i = \varphi$, dove $i: W \rightarrow \text{Ind}_H^G(W)$ è il morfismo descritto nell'osservazione 4.3.

Per gli amici categoristi questo ci dice che esiste un isomorfismo (naturale)¹ tra gli spazi vettoriali

$$\text{hom}_H[W, \text{Res}_H^G(U)] \cong \text{hom}_G[\text{Ind}_H^G(W), U] .$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\text{Ind}_H^G(W) \cong \bigoplus_{\sigma} g_{\sigma} W .$$

Allora, posta w_1, \dots, w_k una base di W , e conseguentemente $\{g_{\sigma} w_i: \sigma \in G/H, I = 1, \dots, k\}$ una base di $\text{Ind}_H^G(W)$, definiamo la $\tilde{\varphi}$ come

$$\tilde{\varphi}(g_{\sigma} w_i) = g_{\sigma} \varphi(w_i) .$$

La $\tilde{\varphi}$ è un'applicazione lineare ed è chiaro che per ogni $w \in W$ vale

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(i(w)) &= \tilde{\varphi}(g_H w) \\ &= g_H \varphi(w) \\ &= 1 \varphi(w) \text{ (per definizione } g_H = 1) \\ &= \varphi(w) \end{aligned}$$

ovvero che $\tilde{\varphi} \circ i = \varphi$.

Bisogna far vedere che la $\tilde{\varphi}$ è anche un omomorfismo di G -moduli. Possiamo facilmente osservare che per ogni $g \in G$ e $g_{\sigma} w_i$ della base di $\text{Ind}_H^G(W)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(g g_{\sigma} w_i) &= \tilde{\varphi}(g_{g\sigma}(h_{g,\sigma} w_i)) \\ &= g_{g\sigma} \varphi(h_{g,\sigma} w_i) \\ &= g_{g\sigma} h_{g,\sigma} \varphi(w_i) \text{ (poiché } \varphi \text{ è } H\text{-lineare)} \\ &= g g_{\sigma} \varphi(w_i) \text{ (} g g_{\sigma} = g_{g\sigma} h_{g,\sigma} \text{ per definizione)} \\ &= g(\tilde{\varphi}(g_{\sigma} w_i)) \end{aligned}$$

questo prova che $\rho^V(g) \circ \tilde{\varphi}$ e $\tilde{\varphi} \circ \rho^{\text{Ind}_H^G(W)}(g)$ coincidono su una base di $\text{Ind}_H^G(W)$ e quindi sono uguali: da questo segue che $\tilde{\varphi}$ è un morfismo di G -rappresentazioni.

Resta da far vedere che $\tilde{\varphi}$ è unica. Supponiamo di avere $\varphi': \text{Ind}_H^G(W) \rightarrow V$ tale che $\varphi' \circ i = \varphi$, allora per ogni elemento della base $g_{\sigma} w_i$ si avrebbe che

$$\begin{aligned} \varphi'(g_{\sigma} w_i) &= \varphi'(g_{\sigma} g_H w_i) \\ &= g_{\sigma} \varphi'(g_H w_i) \\ &= g_{\sigma} \varphi'(i(w_i)) \\ &= g_{\sigma} \varphi(w_i) \\ &= \tilde{\varphi}(g_{\sigma} w_i) \end{aligned}$$

¹Sempre per gli amici categoristi avvisiamo che nel seguito non daremo una dimostrazione della naturalità, che tuttavia non è difficile da provare e può essere fatto come facile esercizio.

e quindi $\tilde{\varphi} = \varphi'$ perché coincidono su una base di $\text{Ind}_H^G(W)$. Questa prova la parte sull'unicità.
Per far vedere che l'applicazione biunivoca

$$\begin{aligned} \text{hom}_H[W, \text{Res}_H^G(U)] &\longrightarrow \text{hom}_G[\text{Ind}_H^G(W), U] \\ \varphi &\mapsto \tilde{\varphi} \end{aligned}$$

è lineare basta osservare che la sua inversa è lineare, infatti tale applicazione inversa è data da

$$\begin{aligned} \text{hom}_G[\text{Ind}_H^G(W), U] &\longrightarrow \text{hom}_H[W, \text{Res}_H^G(U)] \\ \psi &\mapsto \text{Res}_H^G(\psi) \circ i \end{aligned}$$

dove $i: W \rightarrow \text{Ind}_H^G(W)$ è l'embedding canonico definito dall'uguaglianza $i(w) = g_H w$ e $\text{Res}_H^G(\psi)$ è essenzialmente ψ stesso visto come mappa di H -moduli tra le restrizioni di $\text{Ind}_H^G(W)$ e U a H (ovvero $\psi: \text{Res}_H^G(\text{Ind}_H^G(W)) \rightarrow \text{Res}_H^G(U)$). Questo è un morfismo di H -moduli perché composto di due morfismi di H -moduli: $\text{Res}_H^G(\psi)$ e i .

La linearità dell'operazione $- \circ i$ è un fatto di algebra lineare: nello specifico abbiamo l'operazione $\text{hom}[i, U]$ ²

$$\begin{aligned} \text{hom}[i, U]: \text{hom}_\mathbb{C}[\text{Ind}_H^G(W), U] &\longrightarrow \text{hom}_\mathbb{C}[W, \text{Res}_H^G(U)] = \text{hom}[W, U] \\ \psi &\mapsto \text{Res}_H^G(\psi) \circ i = \psi \circ i \end{aligned}$$

che sappiamo essere lineare (questo è l'hom-funtore contro-variante $\text{hom}[-, U]$ applicato a i), la mappa

$$\text{hom}_G[\text{Ind}_H^G(W), U] \xrightarrow{- \circ i} \text{hom}_H[W, \text{Res}_H^G(U)]$$

è ottenuta da $\text{hom}[i, U]$ restringendola ai sotto-spazi $\text{hom}_G[\text{Ind}_H^G(W), U]$ e $\text{hom}_H[W, \text{Res}_H^G(U)]$, e quindi è anche essa lineare.

Questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 4.11. Un attento osservatore probabilmente si sarà reso conto che fino a questo punto abbiamo fatto una scelta arbitraria per i rappresentanti g_σ dei vari laterali $\sigma \in G/H$. In linea di principio cambiando i rappresentanti si potrebbero ottenere diverse rappresentazioni indotte, sorge quindi spontaneo chiedersi se tale scelta in realtà sia di qualche rilevanza. La risposta è che cambiando i rappresentanti non cambia la rappresentazione (a meno di isomorfismo).

Per dimostrare questa cosa si può procedere in almeno due modi:

1. chi conosca un po' di teoria delle categorie può far vedere che l'isomorfismo

$$\text{hom}_H[W, \text{Res}_H^G(V)] \cong \text{hom}_G[\text{Ind}_H^G(W), V]$$

è in realtà naturale in V e da qui concludere usando il *lemma di yoneda*;

2. un altro metodo è quello di costruire esplicitamente un isomorfismo tra due possibili rappresentazioni.

²Ricordiamo che come spazi vettoriali U e $\text{Res}_H^G(U)$ sono uguali, analogo discorso vale anche per le mappe ψ e $\text{Res}_H^G(\psi)$.

Qui ci concentriamo sul secondo metodo (seppur più laborioso).

Siano $\{g'_\sigma : \sigma \in G/H\}$ degli altri rappresentanti delle classi laterali in G/H , in cui supponiamo sempre $g'_H = 1$, e indichiamo con $\text{Ind}'_H{}^G(W)$ la rappresentazione indotta da questi nuovi rappresentanti per $\sigma \in G/H$.

Abbiamo che per ogni $\sigma \in G/H$ si deve avere

$$g_\sigma H = \sigma = g'_\sigma H$$

e quindi deve esistere un unico $h_\sigma \in H$ tale che

$$g_\sigma = g'_\sigma h_\sigma ,$$

che in particolare per $\sigma = H$ sarà $h_\sigma = 1$, visto che $g_H = g'_H = 1$.

Consideriamo l'applicazione lineare definita sulla base di $\text{Ind}'_H{}^G(W)$ da

$$\begin{aligned} j: \text{Ind}'_H{}^G(W) &\longrightarrow \text{Ind}'_H{}^G(W) \\ j(g_\sigma w_i) &= g'_\sigma h_\sigma w_i . \end{aligned}$$

Tale applicazione è invertibile con inversa data dall'applicazione definita come

$$\begin{aligned} j^{-1}: \text{Ind}'_H{}^G(W) &\longrightarrow \text{Ind}'_H{}^G(W) \\ j^{-1}(g'_\sigma w_i) &= g_\sigma h_\sigma^{-1} w_i \end{aligned}$$

dove i $g'_\sigma w_i$ formano, al variare di i e dei σ , una base di $\text{Ind}'_H{}^G(W)$. Un conto ci fa vedere che

$$\begin{aligned} j^{-1}(j(g_\sigma w)) &= j^{-1}(g'_\sigma h_\sigma w_i) \\ &= g_\sigma h_\sigma^{-1} h_\sigma w_i = g_\sigma w_i \end{aligned}$$

e quindi $j^{-1} \circ j = \text{id}_{\text{Ind}'_H{}^G(W)}$, perché coincidono su una base. In maniera analoga si prova che $j \circ j^{-1} = \text{id}_{\text{Ind}'_H{}^G(W)}$.

Vediamo adesso che j è un morfismo di G -rappresentazioni: prendiamo un $g \in G$, allora abbiamo che

$$\begin{aligned} j(gg_\sigma w_i) &= j(gg_\sigma h_{g,\sigma} w_i) \\ &= g'_{g\sigma} h_{g\sigma} h_{g,\sigma} w_i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} gj(g_\sigma w_i) &= g(g'_\sigma h_\sigma w_i) \\ &= g'_{g\sigma} h'_{g,\sigma} h_\sigma w_i \end{aligned}$$

dove $h'_{g,\sigma}$ è l'unico elemento di H tale per cui

$$gg'_\sigma = g'_{g\sigma} h'_{g,\sigma} .$$

Con dei semplici conti abbiamo che

$$\begin{aligned}
g'_{g\sigma} h_{g\sigma} h_{g,\sigma} &= g_{g\sigma} h_{g,\sigma} \\
&= g g_\sigma \\
&= g g'_\sigma h_\sigma \\
&= g'_{g\sigma} h'_{g,\sigma} h_\sigma
\end{aligned}$$

e quindi, dividendo per $g'_{g\sigma}$ al primo e ultimo termine dell'equazione otteniamo

$$h_{g\sigma} h_{g,\sigma} = h'_{g,\sigma} h_\sigma$$

da cui segue che

$$h_{g\sigma} h_{g,\sigma} w_i = h'_{g,\sigma} h_\sigma w_i$$

e quindi che

$$j(g g_\sigma w_i) = g'_\sigma h_{g\sigma} h_{g,\sigma} w_i = g'_\sigma h'_{g,\sigma} h_\sigma w_i = g j(g_\sigma w_i) .$$

Da questo segue che le mappe $j \circ \rho(g)$ e $\rho(g) \circ j$ coincidono su una base, quindi devono essere uguali e j deve essere un morfismo di G -rappresentazioni, quindi un isomorfismo, visto che è invertibile.

Corollario 4.12. *Vale la seguente uguaglianza*

$$\langle \chi_{\text{Ind}_H^G(W)}, \chi_U \rangle_G = \langle \chi_W, \chi_{\text{Res}_H^G(U)} \rangle_H .$$

L'interesse in tale corollario sta nel fatto che permette di restringere lo studio dei caratteri al sotto-gruppo più piccolo H .

Dimostrazione. La dimostrazione è una banale conseguenza del teorema di Frobenius.

Per la formula di proiezione sappiamo che

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\text{Ind}_H^G(W)}, \chi_U \rangle &= \dim \text{hom}_{\mathbb{C}}[\text{Ind}_H^G(W), U]^G = \dim \text{hom}_G[\text{Ind}_H^G(W), U] \\
\langle \chi_W, \chi_{\text{Res}_H^G(U)} \rangle &= \dim \text{hom}_{\mathbb{C}}[W, \text{Res}_H^G(U)]^H = \dim \text{hom}_H[W, \text{Res}_H^G(U)]
\end{aligned}$$

ma per il teorema di Frobenius abbiamo che

$$\dim \text{hom}_G[\text{Ind}_H^G(W), U] = \dim \text{hom}_H[W, \text{Res}_H^G(U)]$$

da cui segue facilmente la tesi. □

Prima di concludere questa sezione diamo un risultato che ci dà una proprietà di commutazione delle operazioni di *restrizione* (Res_H^G) e *induzione* (Ind_H^G) con le somme dirette (finite).

Proposizione 4.13. *Vale che*

$$\text{Res}_H^G(W_1 \oplus \cdots \oplus W_k) \cong \text{Ind}_H^G(W_1) \oplus \cdots \oplus \text{Ind}_H^G(W_k)$$

e

$$\text{Res}_H^G(V_1 \cdots \oplus \dots V_k) \cong \text{Res}_H^G(V_1) \oplus \cdots \oplus \text{Res}_H^G(V_k) .$$

Dimostrazione. Ancora una volta gli amici categoristi possono usare il fatto che gli isomorfismi

$$\text{hom}_H[W, \text{Res}_H^G(U)] \cong \text{hom}_G[\text{Ind}_H^G(W), U]$$

sono naturali, e quindi usare il fatto che i *funtori* Res_H^G e Ind_H^G sono aggiunti per concludere.³ Di seguito diamo una dimostrazione alternativa più diretta.

Per Res_H^G , sappiamo che per definizione

$$\text{Res}_H^G(V_1 \oplus \cdots \oplus V_k) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k = \text{Res}_H^G(V_1) \oplus \cdots \oplus \text{Res}_H^G(V_k)$$

dove le uguaglianze si intendono come spazi vettoriali. Basta solo osservare che le due azioni, quella di $\text{Res}_H^G(V_1 \oplus \cdots \oplus V_k)$ e $\text{Res}_H^G(V_1) \oplus \cdots \oplus \text{Res}_H^G(V_k)$, sono uguali.

Per i Ind_H^G iniziamo con l'osservare che esiste un isomorfismo vettoriale

$$i: \text{Ind}_H^G(W_1 \oplus \cdots \oplus W_k) \longrightarrow \text{Ind}_H^G(W_1) \oplus \cdots \oplus \text{Ind}_H^G(W_k)$$

dato dalla composizione dei seguenti ovvi isomorfismi vettoriali

$$\begin{aligned} \text{Ind}_H^G(W_1 \oplus \cdots \oplus W_k) &= \bigoplus_{\sigma \in G/H} g_\sigma(W_1 \oplus \cdots \oplus W_k) \\ &\cong \bigoplus_{\sigma \in G/H} g_\sigma W_1 \oplus \cdots \oplus g_\sigma W_k \\ &\cong \bigoplus_{\sigma \in G/H} g_\sigma W_1 \oplus \cdots \oplus \bigoplus_{\sigma \in G/H} g_\sigma W_k \\ &= \text{Ind}_H^G(W_1) \oplus \cdots \oplus \text{Ind}_H^G(W_k) . \end{aligned}$$

Tale isomorfismo è l'unica applicazione lineare che mandi ogni elemento della forma $g_\sigma(w_1, \dots, w_k)$ in $(g_\sigma w_1, \dots, g_\sigma w_k)$. Per concludere basta far vedere che questo è effettivamente un morfismo di G -rappresentazioni.

Sia dunque $g \in G$ e prendiamo un generico elemento della forma $g_\sigma(w_1, \dots, w_k)$ (che è un elemento di una famiglia di generatori per $\text{Ind}_H^G(W_1 \oplus \cdots \oplus W_k)$).

Con un conto vediamo che

$$\begin{aligned} i(g(g_\sigma(w_1, \dots, w_k))) &= i(g_{g\sigma} h_{g,\sigma}(w_1, \dots, w_k)) \\ &= i(g_{g\sigma}(h_{g,\sigma} w_1, \dots, h_{g,\sigma} w_k)) \\ &= (g_{g\sigma} h_{g,\sigma} w_1, \dots, g_{g\sigma} h_{g,\sigma} w_k) \\ &= (g_{g\sigma} w_1, \dots, g_{g\sigma} w_k) \\ &= g(g_\sigma w_1, \dots, g_\sigma w_k) \\ &= gi(g_\sigma(w_1, \dots, w_k)) \end{aligned}$$

³Ad essere precisi bisognerebbe far vedere che Res_H^G e Ind_H^G si estendono a dei funtori ma confidiamo che gli anzidetti amici categoristi siano in grado di fare anche questo.

che prova che i è G -lineare, perché mostra come $i \circ \rho(g) = \rho(g) \circ i$ dato che coincidono su una famiglia di generatori di $\text{Ind}_H^G(W_1 \oplus \cdots \oplus W_k)$.

Da questo segue che $\text{Ind}_H^G(W_1 \oplus \cdots \oplus W_k)$ e $\text{Ind}_H^G(W_1) \oplus \cdots \oplus \text{Ind}_H^G(W_k)$ sono isomorfe come come G -rappresentazioni. □

4.2 Degli esercizietti

Esercizio 4.14. Cerchiamo di calcolare $\text{Ind}_{S_3}^{S_4}(\square\square)$.

Ricordiamo che $\square\square$ ha dimensione 2, pertanto, per l'osservazione 4.9, la rappresentazione cercata ha dimensione 8.

Per calcolarla proviamo a usare i caratteri: cerchiamo una decomposizione di $\chi_{\text{Ind}_{S_3}^{S_4}(\square\square)}$ tramite i caratteri irriducibili di S_4 , da questa si ottiene la decomposizione di $\text{Ind}_{S_3}^{S_4}(\square\square)$.

Un conto ci mostra che

$$\langle \chi_{\text{Ind}(\square\square)}, \chi_{\square\square\square\square} \rangle = \langle \chi_{\square\square}, \chi_{\text{Res}_{S_3}^{S_4}(\square\square\square\square)} \rangle = \langle \chi_{\square\square}, \chi_{\square\square\square} \rangle = 0$$

e quindi sappiamo che nella decomposizione di $\text{Ind}_H^G(\square\square)$ non compare la rappresentazione banale.

Consideriamo adesso la rappresentazione irriducibile $\square\square\square$. Per il corollario a Frobenius sappiamo che

$$\langle \chi_{\text{Ind}_H^G(\square\square)}, \chi_{\square\square\square} \rangle = \langle \chi_{\square\square}, \chi_{\text{Res}_H^G(\square\square\square)} \rangle$$

quindi a questo punto possiamo ridurci a studiare $\text{Res}_H^G(\square\square\square)$ per cercare di capire il valore di questo prodotto scalare. Se prendiamo la seguente base di $\text{Res}_{S_3}^{S_4}(\square\square\square)$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_4 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e_2 - e_4 \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_3 - e_4$$

è facile vedere che l'azione di S_3 è tale per cui per ogni $\sigma \in S_3$ abbiamo che

$$\sigma v_i = \sigma(e_i - e_4) = e_{\sigma i} - e_4 = v_{\sigma i} ,$$

ovvero che $\text{Res}_{S_3}^{S_4}(\square\square\square)$ è la rappresentazione di permutazione di S_3 su un insieme di 3 elementi.

In particolare ne segue che $\text{Res}_H^G(\square\square\square)$ è isomorfa alla ovvia rappresentazione \mathbb{C}^3 , e già sappiamo che

$$\mathbb{C}^3 \cong \square\square\square \oplus \square\square .$$

Da quanto fin qui detto dunque segue che

$$\langle \chi_{\square\square}, \chi_{\text{Res}_H^G(\square\square\square)} \rangle = \langle \chi_{\square\square}, \chi_{\square\square\square} + \chi_{\square\square} \rangle = 1 .$$

Passiamo alla rappresentazione $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ che come spazio vettoriale

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \cong \left\{ x \in \mathbb{C}^4 : \sum_i x_i = 0 \right\} \otimes \mathbb{C} \cong \left\{ x \in \mathbb{C}^4 : \sum_i x_i = 0 \right\} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} .$$

La differenza tra la $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ e la $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ è data dall'azione di S_4 . Posto

$$U = \left\{ x \in \mathbb{C}^4 : \sum_i x_i = 0 \right\}$$

e per semplicità posti

$$V = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$V' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

per indicare le due rappresentazioni, aventi lo stesso spazio vettoriale di supporto U allora abbiamo che

$$\rho^{V'}(\sigma)(x) = \text{sgn}(\sigma)\rho^V(\sigma)(x)$$

per ogni $x \in U$, ovvero che

$$\rho^{V'}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)\rho^V(\sigma) .$$

Tale uguaglianza di rappresentazioni passa alle restrizioni, ovvero

$$\rho^{\text{Res}_H^G(V')}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)\rho^{\text{Res}_H^G(V)}(\sigma) .$$

Da questo possiamo calcolarci il carattere di $\chi_{\text{Res}_H^G V'}$ come

$$\begin{aligned} \chi_{\text{Res}_H^G(V')}(\sigma) &= \text{tr}(\rho^{\text{Res}_H^G(V')}(\sigma)) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \text{tr}(\rho^{\text{Res}_H^G(V)}(\sigma)) \\ &= \text{sgn}(\sigma)\chi_{\text{Res}_H^G(V)}(\sigma) \end{aligned}$$

e valutando in id , $(1, 2)$ e $(1, 2, 3)$ (i rappresentanti delle classi di coniugio di S_3) si vede facilmente che

$$\chi_{\text{Res}_H^G(V')} = \chi_{\text{Res}_H^G(V)}$$

e quindi che

$$\text{Res}_H^G\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}\right) \cong \text{Res}_H^G\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}\right) .$$

Da questo segue che

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\text{Ind}_H^G(\square)}, \chi_{\square \otimes \square} \rangle &= \langle \chi_{\square}, \chi_{\text{Res}_H^G(\square \otimes \square)} \rangle \\ &= \langle \chi_{\square}, \chi_{\text{Res}_H^G(\square)} \rangle = 1 . \end{aligned}$$

Proviamo adesso a calcolare

$$\langle \chi_{\text{Ind}_{S_3}^{S_4}(\square)}, \chi_{\square} \rangle = \langle \chi_{\square}, \chi_{\text{Res}_{S_3}^{S_4}(\square)} \rangle .$$

Ricordiamo che abbiamo visto che

$$\rho_{\square} = \rho_{\square} \circ \pi$$

dove $\pi: S_4 \rightarrow S_3$ è la proiezione canonica di S_4 , ottenuta quotizzando per il sotto-gruppo di Klein. A meno di isomorfismo vale che

$$\pi|_{S_3} = \text{id}_{S_3}$$

e da questo segue che

$$\begin{aligned} \rho_{\square}|_{S_3} &= \rho_{\square} \circ \pi|_{S_3} \\ &= \rho_{\square} \circ \text{id}_{S_3} = \rho_{\square} . \end{aligned}$$

Questo conto ci prova che

$$\text{Res}_{S_3}^{S_4}(\square) = \square$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\text{Ind}_{S_3}^{S_4}(\square)}, \chi_{\square} \rangle &= \langle \chi_{\square}, \chi_{\text{Res}_{S_3}^{S_4}(\square)} \rangle \\ &= \langle \chi_{\square}, \chi_{\square} \rangle = 1 . \end{aligned}$$

Dalle proprietà dei caratteri allora questo ci dice che $\text{Ind}_{S_3}^{S_4}(\square)$ contiene una sotto-rappresentazione

$$\square \oplus \left(\square \otimes \square \right) \oplus \square$$

che ha dimensione $3 + 3 + 2 = 8$ che è appunto $\dim \text{Ind}_{S_3}^{S_4}(\square)$ e quindi

$$\text{Ind}_{S_3}^{S_4}(\square) = \square \oplus \left(\square \otimes \square \right) \oplus \square .$$

4.3 Ancora qualche esercizio d'esempio

Richiamiamo questo risultato.

Teorema 4.15 (Burnside). *Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme finito X allora abbiamo per ogni $g \in G$ posto*

$$X^g = \{ x \in X : gx = x \}$$

allora

$$|\text{orbite}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

Dimostrazione. Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |X^g| &= \left| \coprod_{g \in G} X^g \right| \\ &= |\{ (g, x) \in G \times X : gx = x \}| \\ &= \sum_{x \in X} |\text{Stab}_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|O_x|} \\ &= |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|O_x|} = |G| \sum_{x \in R} \frac{|O_x|}{|O_x|} = |G| |\text{orbite}| \end{aligned}$$

dove R è un insieme di rappresentanti per le orbite dell'azione. □

Esercizio 4.16. Sia \mathbb{C}^n l'ovvia rappresentazione di S_n . Calcolare il valore $\langle \chi_{\mathbb{C}^n}, \chi_{\mathbb{C}^n} \rangle$.

Non è difficile fa vedere che

$$\mathbb{C}^n \cong \overbrace{\square \oplus \dots \oplus \square}^{n-1} \oplus \overbrace{\square \oplus \dots \oplus \square}^n$$

e quindi che

$$\chi_{\mathbb{C}^n} = \chi_{\square \oplus \dots \oplus \square} + \chi_{\square \oplus \dots \oplus \square}.$$

Sostituendo si ottiene il risultato $\langle \chi_{\mathbb{C}^n}, \chi_{\mathbb{C}^n} \rangle = 2$.

Tuttavia è possibile risolvere il medesimo esercizio in modo diverso. Per farlo si usa il teorema di Burnside.

Abbiamo che

$$\langle \chi_{\mathbb{C}^n}, \chi_{\mathbb{C}^n} \rangle = \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \chi_{\mathbb{C}^n}^2(g)$$

dove $\chi_{\mathbb{C}^n}(g)$ è il numero di elementi della base e_1, \dots, e_n lasciati fissi da $g \in S_n$ ⁴. Dunque

$$\chi_{\mathbb{C}^n}^2(g) = |\{ (e_i, e_j) : ge_i = e_i, ge_j = e_j \}|$$

⁴Questo si vede facilmente vedendo la matrice di permutazione $\rho(g)$.

Questo ci permette di dire che, posto $X = \{e_1, \dots, e_n\}$ l'insieme dei vettori della base canonica,

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\mathbb{C}^n}, \chi_{\mathbb{C}^n} \rangle &= \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |(X \times X)^g| \\ &= \text{numero di orbite per l'azione (per Burnside)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

poiché le orbite di $X \times X$ sono $\{(e_i, e_i): i = 1, \dots, n\}$ e $\{(e_i, e_j): i \neq j\}$.

Magari gli attenti osservatori si saranno resi conto che ogni volta che abbiamo a che fare con un rappresentazione V del gruppo simmetrico nei prodotti hermitiani compare il termine χ_V^2 anziché $\overline{\chi_V} \chi_V$. Il motivo per cui questo avviene è che generalmente per le S_n rappresentazioni i $\rho(\sigma)$ sono rappresentati da matrici reali e quindi:

Osservazione 4.17. Se $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ è una G -rappresentazione che mappa tutti gli elementi di G in matrici reali allora si ha $\overline{\chi_V} = \chi_V$.

Questo ci dice che $\chi_V = \chi_{V^*}$ e quindi in particolare $V \cong_G V^*$.

Osservazione 4.18. Ricordiamo inoltre che per $G = S_n$ se V è una G -rappresentazione allora abbiamo

$$\rho^*(g) = {}^t \rho(g^{-1})$$

da cui

$$\chi_{V^*}(g) = \text{tr}(\rho^*(g)) = \text{tr}({}^t \rho(g^{-1})) = \text{tr}(\rho(g^{-1}))$$

ma in S_n si ha che g e g^{-1} sono coniugati, quindi

$$\chi_V(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \text{tr}(\rho(g^{-1}))$$

e quindi

$$\chi_V(g) = \chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)} .$$

Questo dimostra che per qualunque rappresentazione V di S_n si ha che $V^* \cong V$ (si dimostrerà in seguito che tutte le matrici associate a elementi del gruppo sono reali).

Esercizio 4.19. Sia G un gruppo finito che agisca su X e sia V la rappresentazione di permutazione associata a questa azione. Allora V contiene S copie della rappresentazione banale di G dove $S = |\text{orbite}|$ ⁵.

Osservazione 4.20. La chiave per risolvere l'esercizio 4.19 è il seguente fatto: dato un insieme X e un'azione di G su di esso, posta V_X la rappresentazione di permutazione indotta, allora per ogni $g \in G$ vale che

$$\chi_{V_X}(g) = |X^g| \text{ (che ricordiamo è il numero di punti fissati da } g \text{)}.$$

Per vedere questo supponiamo che $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Per definizione abbiamo che per ogni $g \in G$ e ogni indice i si deve avere $gx_i = x_j$ per qualche j , di seguito indicheremo con gi questo j : per cui per ogni i e g si deve avere

$$gx_i = x_{gi} .$$

⁵Si parla delle orbite dell'azione su X

Per definizione della rappresentazione di permutazione sappiamo che V_X ha una base formata da dei vettori $B_X = \{v_{x_1}, \dots, v_{x_n}\}$ e per ogni $g \in G$ abbiamo che

$$\rho(g)(v_{x_i}) = v_{gx_i} = v_{x_{g_i}} .$$

Questo ci dice che nella base B_X ogni $\rho(g)$ è rappresentato dalla matrice

$$(e_{g_1} \mid \dots \mid e_{g_n})$$

la cui traccia è data da $\sum_{i=1}^n (e_{g_i})_i$ in cui

$$(e_{g_i})_i = \begin{cases} 1 & \text{se } e_{g_i} = e_i, \text{ ovvero } gx_i = x_i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Da quanto detto segue che

$$\begin{aligned} \chi_{V_X}(g) &= \text{tr}(\rho(g)) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_{g_i})_i \\ &= \text{numero di } i \text{ tali che } gx_i = x_i \\ &= |X^g| \end{aligned}$$

come ci aspettavamo.

Adesso possiamo passare alla soluzione del nostro problema.

Soluzione.(dell'esercizio 4.19) Abbiamo che

$$\begin{aligned} \langle \chi_{V_X}, \chi_{\text{banale}} \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_X}(g)} \underbrace{\chi_{\text{banale}}(g)}_{=1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_X}(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| \text{ (per l'osservazione 4.20)} \\ &= |\text{orbite}| \text{ (per Burnside).} \end{aligned}$$

□

Questo esercizio è comodo nello studio dell'omologia dove le rappresentazioni possono comparire come moduli di omologia. Vedere il numero di volte in cui una sotto-rappresentazione compare in una rappresentazione data, ci permette di discriminare tra moduli diversi e quindi permette di discriminare tra diversi tipi di omologie.

Capitolo 5

Esercizi per il calcolo di rappresentazioni di alcuni gruppi

Lezione 5 (10/03/2016)

Esercizio 5.1. Per ogni $n \geq 3$ e $k \geq 2$ la $\text{Sym}^k(\overbrace{\square\square\square}^{n-1})$ non è una S_n -rappresentazione irriducibile.

Prima di affrontare l'esercizio facciamo qualche osservazione.

Soluzione. Sappiamo che $\mathbb{C}^n \cong \overbrace{\square\square}^{n-1} \oplus \overbrace{\square}^n$. Quindi

$$\begin{aligned} \text{Sym}^2(\mathbb{C}^n) &= \text{Sym}^2(\overbrace{\square\square}^{n-1} + \overbrace{\square}^n) \\ &\cong \text{Sym}^2(\overbrace{\square\square}^{n-1}) + \overbrace{\square\square}^{n-1} + \overbrace{\square\square}^n \end{aligned}$$

In $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^n)$ ci sono due sotto-spazi S_n -invarianti:

$$\langle v_1^2 + \dots + v_n^2 \rangle \qquad \langle \sum_{i < j} v_i v_j \rangle$$

che danno due sotto-rappresentazioni banali.

Più in generale in $\text{Sym}^k(V)$ abbiamo la base fatta da $\{v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n} : \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k\}$. Consideriamo l'insieme

$$X = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n : \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k\}$$

il gruppo S_n agisce in modo banale su X permutandone le componenti. Non è difficile vedere che allora $\text{Sym}^k(V)$ è la rappresentazione di permutazione associata all'azione di S_n su X . Ma allora da questo segue che in $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^n)$ ci sono tante coppie della rappresentazione banale ($\square\square\square$) quante sono le orbite in X (per Burnside). Le orbite in X sono tante quante $p(k, n)$ dove

$$p(k, n) = \text{le partizioni di } k \text{ con } \leq n \text{ numeri.}$$

In modo analogo si vede che

$$\text{Sym}^{k+1}(\mathbb{C}^n) \cong \text{Sym}^k(\overbrace{\square\square\square}^{n-1}) \oplus \text{Sym}^k(\mathbb{C}^n) \oplus \dots \oplus \overbrace{\square\square\square}^{n-1} \oplus \overbrace{\square\square\square}^n$$

Per quanto detto prima $\text{Sym}^{k+1}(\mathbb{C}^n)$ contiene $p(k+1, n)$ copie della rappresentazione banale. La cosa interessante è che tutti i pezzi della decomposizione di sopra, meno il primo termine ($\text{Sym}^k(\square\square\square)$), sono la decomposizione della $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^n)$, che conteneva $p(k, n)$ copie della rappresentazione banale. Dato che $p(k, n) < p(k+1, n)$ possiamo già concludere che in $\text{Sym}^k(\square\square\square)$ contiene delle copie della rappresentazione banale, e quindi $\text{Sym}^k(\square\square\square)$ non è irriducibile (che è appunto quello che volevamo provare). □

Esercizio 5.2. Fissiamo G gruppo e un suo sotto-gruppo H . Data W una H -rappresentazione allora $\mathbb{C}[G] \otimes_H W \cong_G \text{Ind}_H^G(W)$ ¹.

Soluzione. Anzitutto abbiamo un'ovvia mappa

$$\begin{aligned} i': G \times W &\longrightarrow \text{Ind}_H^G(W) \\ i'(g, w) &= g_\sigma(h_g w) \end{aligned}$$

dove g_σ e h_g sono rispettivamente il rappresentante del laterale di g in G/H , ovvero quel rappresentante tale che $gH = g_\sigma H$, e l'unico elemento di H tale che $g = g_\sigma h_g$. Questa mappa è lineare in w , per ogni g fissato, e si può estendere per linearità una mappa bilineare

$$\begin{aligned} i'': \mathbb{C}[G] \times W &\longrightarrow \text{Ind}_H^G(W) \\ i''\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g, w\right) &= \sum_{g \in G} \lambda_g i'(g, w) . \end{aligned}$$

Un conto ci fa vedere che per ogni $g \in G$, $h \in H$ e $w \in W$ vale che

$$\begin{aligned} i''(g, hw) &= g_\sigma(h_g hw) \\ &= i''(g_\sigma h_g h, w) = i''(gh, w) . \end{aligned}$$

Questo ci prova che in realtà la mappa i'' induce un'applicazione lineare

$$\begin{aligned} i: \mathbb{C}[G] \otimes_H W &\longrightarrow \text{Ind}_H^G(W) \\ i(g \otimes w) &= g_\sigma(h_g w) . \end{aligned}$$

Dato che $\mathbb{C}[G]$ è una G -rappresentazione (e quindi un $\mathbb{C}[G]$ -modulo sinistro) questo prodotto tensore è anche esso una G -rappresentazione dove

$$\rho(g)(g' \otimes w) = (gg') \otimes w .$$

Facciamo vedere che i è un morfismo di G -rappresentazioni. Fissato $g, g' \in G$ e $w \in W$ abbiamo che

$$i(g(g' \otimes w)) = i((gg') \otimes w)$$

supposto che

$$g' = g_\sigma h_g$$

¹L'isomorfismo è di G -moduli.

dove $g' \in \sigma \in G/H$ e $h_g \in H$ allora abbiamo che

$$\begin{aligned} i(g(g' \otimes w)) &= i((gg_\sigma h_g) \otimes w) \\ &= i((g g_\sigma h_{g,\sigma} h_g) \otimes w) \\ &= g g_\sigma (h_{g,\sigma} h_g w) \end{aligned}$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} gi(g' \otimes w) &= gg_\sigma (h_g w) \\ &= g g_\sigma (h_{g,\sigma} h_g w) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione dell'azione di G su $\text{Ind}_H^G(W)$. Quindi $gi(g' \otimes w) = i(g(g' \otimes w))$ ovvero

$$\rho(g) \circ i(g' \otimes w) = i \circ \rho(g)(g' \otimes w)$$

da cui segue $\rho(g) \circ i = i \circ \rho(g)$, perché l'uguaglianza vale su un insieme di generatori di $\mathbb{C}[G] \otimes_H W$.

Non resta che provare che i è un isomorfismo, ma questo si vede osservando che l'applicazione

$$\begin{aligned} i^{-1}: \text{Ind}_H^G(W) &\longrightarrow \mathbb{C}[G] \otimes_H W \\ i^{-1}(g_\sigma w) &= g_\sigma \otimes w \end{aligned}$$

è proprio un'inversa a i :

$$\begin{aligned} i^{-1} \circ i(g \otimes w) &= i^{-1}(g_\sigma (h_g w)) \\ &= g_\sigma \otimes (h_g w) = (g_\sigma h_g) \otimes w = g \otimes w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \circ i^{-1}(g_\sigma w) &= i(g_\sigma \otimes w) \\ &= g_\sigma w \end{aligned}$$

queste uguaglianze provano che effettivamente $i^{-1} \circ i = \text{id}_{\mathbb{C}[G] \otimes_H W}$ e $i \circ i^{-1} = \text{id}_{\text{Ind}_H^G(W)}$ perché le rispettive coppie di funzioni coincidono su un insieme di generatori. \square

Osservazione 5.3. Questo esercizio ci da un'altra presentazione della rappresentazione indotta.

Osservazione 5.4. Osserviamo che il tensore \otimes_H ha senso in quanto $\mathbb{C}[G]$ è un H -modulo destro²

Esercizio 5.5. Dati tre gruppi $H \leq K \leq G$ e data W una H -rappresentazione allora

$$\text{Ind}_H^G(W) \cong \text{Ind}_K^G(\text{Ind}_H^K(W)) .$$

Soluzione. Usando il risultato dell'esercizio 5.2 questo è estremamente facile: abbiamo che

$$\begin{aligned} \text{Ind}_H^G(W) &\cong \mathbb{C}[G] \otimes_H W \\ &\cong (\mathbb{C}[G] \otimes_K \mathbb{C}[K]) \otimes_H W \\ &\cong \mathbb{C}[G] \otimes_K (\mathbb{C}[K] \otimes_H W) \\ &\cong \mathbb{C}[G] \otimes_K \text{Ind}_H^K(W) \\ &\cong \text{Ind}_K^G(\text{Ind}_H^K(W)) \end{aligned}$$

dove gli isomorfismi intermedi seguono dalle proprietà dei prodotti tensori. \square

²Quando si passa ad anelli non commutativi tensorizzare a destra o sinistra non è equivalente.

Esercizio 5.6. Se U è una G -rappresentazione e W è una H -rappresentazione, con $H < G$, allora

$$U \otimes \text{Ind}_H^G(W) \cong \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(U) \otimes W) .$$

Soluzione. Anzitutto osserviamo che abbiamo la mappa

$$\begin{aligned} i: U \times \text{Ind}_H^G(W) &\longrightarrow \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(U) \otimes W) \\ i(u, \sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma w_\sigma) &= \sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma((g_\sigma^{-1}u) \otimes w_\sigma) . \end{aligned}$$

Non è difficile osservare, tramite conti espliciti, che questa mappa è bilineare e che quindi induce una mappa \mathbb{C} -lineare

$$\begin{aligned} \bar{i}: U \otimes \text{Ind}_H^G(W) &\longrightarrow \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(U) \otimes W) \\ \bar{i}(u \otimes \sum_{\sigma} g_\sigma w_\sigma) &= \sum_{\sigma} g_\sigma((g_\sigma^{-1}u) \otimes w_\sigma) . \end{aligned}$$

Con un conto sui generatori di $U \otimes \text{Ind}_H^G(W)$ della forma $u \otimes g_\sigma w$ possiamo vedere che

$$\begin{aligned} \bar{i}(g(u \otimes g_\sigma w)) &= \bar{i}((gu) \otimes (gg_\sigma w)) \\ &= \bar{i}((gu) \otimes g_{g\sigma}(h_{g,\sigma} w)) \\ &= g_{g\sigma}((g_{g\sigma}^{-1}gu) \otimes (h_{g,\sigma} w)) \\ &= g_{g\sigma}((h_{g,\sigma} g_\sigma^{-1}u) \otimes (h_{g,\sigma} w)) \\ &= g_{g\sigma}(h_{g,\sigma}((g_\sigma^{-1}u) \otimes w)) \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è reso possibile dalla struttura di H -rappresentazione di $\text{Res}_H^G(U) \otimes W$, da qui continuando con i conti si arriva a

$$\begin{aligned} \bar{i}(g(u \otimes g_\sigma w)) &= g_{g\sigma}(h_{g,\sigma}((g_\sigma^{-1}u) \otimes w)) \\ &= g_{g\sigma}h_{g,\sigma}((g_\sigma^{-1}u) \otimes w) \\ &= gg_\sigma((g_\sigma^{-1}u) \otimes w) \\ &= g\bar{i}(u, g_\sigma w) \end{aligned}$$

che prova che \bar{i} è un morfismo di G -rappresentazioni.

Per far vedere che \bar{i} è un isomorfismo basta far vedere che ammette un'inversa come applicazione \mathbb{C} -lineare, questo basta a garantire che ha un'inversa anche come morfismo di G -rappresentazioni. Per ogni $\sigma \in G/H$ possiamo definire l'applicazione

$$\begin{aligned} i_\sigma^{-1}: U \times W &\longrightarrow U \otimes \text{Ind}_H^G(W) \\ i_\sigma^{-1}(u, w) &= (g_\sigma u) \otimes (g_\sigma w) \end{aligned}$$

che si prova facilmente essere bilineare. Questo ci dà la famiglia di applicazioni \mathbb{C} -lineari

$$\begin{aligned} \bar{i}_\sigma^{-1}: U \otimes W &\longrightarrow U \otimes \text{Ind}_H^G(W) \\ \bar{i}_\sigma^{-1}(u \otimes w) &= (g_\sigma u) \otimes g_\sigma w \end{aligned}$$

e usando il fatto che

$$g_\sigma(\text{Res}_H^G(U) \otimes W) = g_\sigma(U \otimes W) \cong U \otimes W$$

come spazi vettoriali, otteniamo dalla proprietà universale delle somme dirette la mappa

$$\begin{aligned} \bar{i}^{-1}: \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(U) \otimes W) &= \bigoplus_{\sigma \in G/H} g_\sigma(\text{Res}_H^G(U) \otimes W) \longrightarrow U \otimes \text{Ind}_H^G(W) \\ \bar{i}^{-1}(g_\sigma(u \otimes w)) &= \bar{i}_\sigma^{-1}(u \otimes w) = (g_\sigma u) \otimes g_\sigma w . \end{aligned}$$

Con un rapido conto possiamo osservare che

$$\begin{aligned} \bar{i}^{-1} \circ \bar{i}(u \otimes g_\sigma w) &= \bar{i}^{-1}(g_\sigma((g_\sigma^{-1}u) \otimes w)) \\ &= (g_\sigma g_\sigma^{-1}u) \otimes g_\sigma w = u \otimes g_\sigma w \end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned} \bar{i} \circ \bar{i}^{-1}(g_\sigma(u \otimes w)) &= \bar{i}((g_\sigma u) \otimes (g_\sigma w)) \\ &= g_\sigma((g_\sigma^{-1}g_\sigma u) \otimes w) = g_\sigma(u \otimes w) \end{aligned}$$

questo prova le uguaglianze tra le applicazioni lineari

$$\bar{i}^{-1} \circ \bar{i} = \text{id}_{U \otimes \text{Ind}_H^G(W)} \qquad \bar{i} \circ \bar{i}^{-1} = \text{id}_{\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(U) \otimes W)}$$

poiché tali uguaglianze sussistono tra le restrizioni delle funzioni a degli insiemi di generatori: i $u \otimes g_\sigma w$ nel primo caso e i $g_\sigma(u \otimes w)$ nel secondo. □

Esempio 5.7. Se W è la rappresentazione banale di H allora

$$U \otimes \text{Ind}_H^G(W) \cong \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(U)) .$$

Osserviamo che l'isomorfismo con U non si poteva avere per questioni di dimensione:

$$\dim \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G U) = \dim \text{Res}_H^G(U) |G/H| = \dim U |G/H| .$$

In generale la U si embedda in $\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(U))$ tramite il morfismo

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(U)) \\ u &\mapsto g_H u = e u \end{aligned}$$

tuttavia la dimensione indotta è maggiore, a meno del caso banale in cui $H = G$.

Esempio 5.8. Consideriamo $H = S_{n-1}$ visto come sotto-gruppo di $G = S_n$. Cosa è $\text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(\overbrace{\square \square \square}^{n-1})$?

Un modo di calcolarlo è usare Frobenius come abbiamo visto la volta scorsa, cercando la decomposizione del carattere associato alla rappresentazione. Provando a *testare* $\chi_{\text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(\square\square\square\square)}$ contro il carattere della rappresentazione banale di S_n otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(\underbrace{\square\square\square\square}_{n-1})}, \chi_{\underbrace{\square\square\square\square}_n} \rangle &= \langle \chi_{\square\square\square\square}, \chi_{\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(\square\square\square\square)} \rangle \\ &= \langle \chi_{\square\square\square\square}, \chi_{\square\square\square\square} \rangle = 1 . \end{aligned}$$

Provando adesso a *testare* con il carattere della rappresentazione *standard* di S_n , ovvero

$$\underbrace{\square\square\square\square}_{n-1} \cong \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$$

otteniamo che

$$\langle \chi_{\text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(\square\square\square\square)}, \chi_{\underbrace{\square\square\square\square}_{n-1}} \rangle = \langle \chi_{\square\square\square\square}, \chi_{\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(\underbrace{\square\square\square\square}_{n-1})} \rangle$$

Per concludere ci serve un'osservazione: consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^{n-1} &\longrightarrow \underbrace{\square\square\square\square}_{n-1} \\ f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} x_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

questo è chiaramente un isomorfismo lineare, l'inversa è la proiezione

$$\begin{aligned} f^{-1}: \underbrace{\square\square\square\square}_{n-1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ f^{-1} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} x_i \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

tuttavia un conto ci mostra che inoltre f è un omomorfismo di S_{n-1} -rappresentazioni quando vista come mappa di tipo $f: \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \underbrace{\square\square\square\square}_{n-1}$. Da questo ne segue che $\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(\underbrace{\square\square\square\square}_{n-1}) \cong \mathbb{C}^{n-1}$ come S_{n-1} -rappresentazione.

Da l'ultima osservazione segue che

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(\square\square\square\square)}, \chi_{\underbrace{\square\square\square\square}_{n-1}} \rangle &= \langle \chi_{\square\square\square\square}, \chi_{\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(\underbrace{\square\square\square\square}_{n-1})} \rangle \\ &= \langle \chi_{\square\square\square\square}, \chi_{\mathbb{C}^{n-1}} \rangle \\ &= \langle \chi_{\square\square\square\square}, \chi_{\underbrace{\square\square\square\square}_{n-1}} + \chi_{\underbrace{\square\square\square\square}_{n-1}} \rangle \\ &= \langle \chi_{\square\square\square\square}, \chi_{\underbrace{\square\square\square\square}_{n-1}} \rangle = 1 . \end{aligned}$$

Dunque abbiamo un'ovvia immersione di S_n -rappresentazioni

$$\overbrace{\square\square\square\square}^n \oplus \overbrace{\square\square\square}^{n-1} \hookrightarrow \text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \left(\overbrace{\square\square\square}^{n-1} \right)$$

e, dato che le due rappresentazioni hanno dimensione rispettivamente $1 + (n - 1)$ e n , questa immersione è in realtà un isomorfismo, quindi:

$$\text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \left(\overbrace{\square\square\square}^n \right) \cong \overbrace{\square\square\square}^n \oplus \overbrace{\square\square\square}^{n-1}$$

Osservazione 5.9. Dall'esempio 5.8 segue che se U è una rappresentazione irriducibile (anche se l'ipotesi di irriducibilità non è necessaria) di S_n allora

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} (\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(U)) &\cong \text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} (\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(U) \otimes \overbrace{\square\square\square}^{n-1}) \\ &\cong U \otimes \text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} (\square\square\square) \\ &\cong U \otimes (\square\square\square \oplus \overbrace{\square\square\square}^{n-1}) \cong U \otimes \square\square\square \oplus U \otimes \overbrace{\square\square\square}^{n-1} \cong U \oplus U \otimes \overbrace{\square\square\square}^{n-1}. \end{aligned}$$

Esercizio 5.10. Guardatevi le rappresentazioni del diedrale (le trovate sulle dispense di D'Antonio).

Esempio 5.11 (La tabella dei caratteri di S_5). In tabella 5.1 sono riportati i caratteri di S_5 .

Il carattere della prima riga è quello della rappresentazione banale: la rappresentazione su \mathbb{C} che mappa ogni elemento di S_5 nell'identità.

Il carattere della seconda riga è quello della rappresentazione segno: la rappresentazione su \mathbb{C} che manda ogni elemento di A_5 nell'identità e ogni permutazione dispari in -1 .

La terza riga contiene il carattere della rappresentazione standard, quella data dal sotto-spazio S_n -invariante di \mathbb{C}^n

$$\overbrace{\square\square\square\square} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \sum_i z_i = 0 \right\},$$

che per l'esercizio 3.5 sappiamo essere irriducibile.

La quarta riga ci presenta il carattere di prodotto tensore di rappresentazioni, e quindi sappiamo che tale carattere è il prodotto di due caratteri. Possiamo osservare che questo è effettivamente il carattere di una rappresentazione irriducibile osservando che ha norma 1 rispetto al prodotto hermitiano definito sulle funzioni classe.

La quinta riga ci dà il carattere della $\Lambda^2(\overbrace{\square\square\square\square})$ che grazie a teoremi già visti sappiamo essere descritto dall'equazione

$$\chi_{\Lambda^2(\overbrace{\square\square\square\square})}(g) = \frac{1}{2} \left(\chi_{\overbrace{\square\square\square\square}(g)}^2 - \chi_{\overbrace{\square\square\square\square}(g^2)} \right).$$

La penultima viene dall'osservazione che

$$\overbrace{\square\square\square\square} \cong \Lambda^2(\overbrace{\square\square\square\square}) \oplus \text{Sym}^2(\overbrace{\square\square\square\square})$$

e quindi

$$\chi_{\text{Sym}^2(\overbrace{\square\square\square\square})} = \chi_{\overbrace{\square\square\square\square}} - \chi_{\Lambda^2(\overbrace{\square\square\square\square})}.$$

L'ultima si calcola con il solito trucco delle decomposizione di $\mathbb{C}[S_5]$:

$$\mathbb{C}[S_5] \cong \bigoplus_{i=1}^7 V_i^{\dim V_i},$$

dove le V_i sono le rappresentazioni irriducibili di S_5 , e quindi

$$\chi_{V_7} = \frac{1}{\dim V_7} \left(\chi_{\mathbb{C}[S_5]} - \sum_{i=1}^6 \dim V_i \chi_{V_i} \right)$$

dove le V_i sono le rappresentazioni trovare fino a questo punto e $\dim V_7$ si può calcolare tramite la formula

$$(\dim V_7)^2 = (\dim \mathbb{C}[S_5])^2 - \sum_{i=1}^6 (\dim V_i)^2.$$

Tabella 5.1: Tabella dei caratteri di S_5

S_5	e	(1, 2)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3, 4)	(1, 2, 3, 4, 5)	(1, 2)(3, 4)	(1, 2)(3, 4, 5)
	1	1	1	1	1	1	1
	1	-1	1	-1	1	1	-1
	4	2	1	0	-1	0	-1
	4	-2	1	0	-1	0	1
Λ^2	6	0	0	0	1	-2	0
Sym^2	5	1	-1	-1	0	1	1
	5	-1	-1	1	0	1	-1

Esercizio 5.12. Sia G un gruppo finito. Sia n il numero delle classi di coniugio in G e, posti C_1, \dots, C_n le n -classi di coniugio in G , V_1, \dots, V_n le n -rappresentazioni irriducibili di G , indichiamo con M la matrice tale che

$$M = (m_{i,j}) \quad m_{i,j} = \sqrt{\frac{|C_i|}{|G|}} \chi_{V_j}(C_i)$$

dove $\chi_{V_j}(C_i)$ rappresenta il valore del carattere della rappresentazione V_j sulla classe di coniugio C_i . Allora abbiamo che

$${}^h M M = \text{id}_n$$

ovvero la matrice M è unitaria.

Inoltre si ha che

$$\sum_{i=1}^n |\chi_{V_i}(C)|^2 = \frac{|G|}{|C|}$$

dove C è una classe di coniugio di G .

Soluzione. Per provare la prima parte basta un conto

$$\begin{aligned}
 ({}^hMM)_{i,j} &= (\overline{m_{1,i}} \quad \dots \quad \overline{m_{n,i}}) \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{k=1}^n \overline{m_{k,i}} m_{k,j} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{|C_k|}{|G|} \overline{\chi_{V_i}(C_k)} \chi_{V_j}(C_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{|G|} \sum_{g \in C_k} \overline{\chi_{V_i}(g)} \chi_{V_j}(g) \\
 &= \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}
 \end{aligned}$$

Da questo segue che ${}^hMM = \text{id}$.

Per l'ultima parte dell'esercizio possiamo osservare che

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{|C_j|}{|G|} |\chi_{V_i}(C_j)|^2 &= \sum_{i=1}^n |m_{j,i}|^2 \\
 &= (M^hM)_{j,j} \\
 &= {}^h({}^hMM) = \text{id}_{j,j} = 1
 \end{aligned}$$

da questo concludiamo che

$$\frac{|C_j|}{|G|} \sum_{i=1}^n |\chi_{V_i}(C_j)|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{|C_j|}{|G|} |\chi_{V_i}(C_j)|^2 = 1$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^n |\chi_{V_i}(C_j)|^2 = \frac{|G|}{|C_j|}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Osservazione 5.13. Con riferimento all'esercizio precedente, vale anche

$$\frac{\sqrt{|C||D|}}{|G|} \sum_i \overline{\chi_{V_i}(C)} \chi_{V_i}(D) = 0$$

dove C e D sono delle classi di coniugio e $C \neq D$. Infatti posto $C = C_j$ e $D = C_l$ abbiamo

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{|C||D|}}{|G|} \sum_i \overline{\chi_{V_i}(C)} \chi_{V_i}(D) &= \frac{\sqrt{|C_j||C_l|}}{|G|} \sum_{i=1}^n \overline{\chi_{V_i}(C_j)} \chi_{V_i}(C_l) \\
 &= \sum_{i=1}^n \overline{m_{j,i}} m_{l,i} \\
 &= (M^hM)_{l,j} = 0
 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $j \neq l$ visto che per ipotesi

$$C_j = C \neq D = C_l .$$

Esempio 5.14 (Tabella dei caratteri di A_5). Le prime 3 righe sono ottenute restringendo le rappresentazioni di S_5 e si può far vedere che sono irriducibili osservando che la loro norma è 1.³ Purtroppo $\text{Res}_{A_5}^{S_5}(\Lambda^2 \square \square \square \square) = (6, 0, -2, 1, 1)$ non è irriducibile, quindi da qui non possiamo più semplicemente fare le restrizioni. Tuttavia quest'ultima si può decomporre come A_5 rappresentazione come somma di due sotto-rappresentazioni X e Y di dimensioni giuste e si può trovare che le X e Y sono le mancanti rappresentazioni irriducibili.

Tabella 5.2: Tabella dei caratteri di A_5

A_5	e	$(1, 2, 3)$	$(1, 2)(3, 4)$	$(1, 2, 3, 4, 5)$	$(2, 1, 3, 4, 5)$
$\text{Res}_{A_5}^{S_5}(\square \square \square \square)$	1	1	1	1	1
$\text{Res}_{A_5}^{S_5}(\square \square \square \square)$	4	1	0	-1	-1
$\text{Res}_{A_5}^{S_5}(\square \square \square \square)$	5	-1	1	0	0
X	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{1-\sqrt{5}}}{2}$
Y	3	0	-1	$\frac{\sqrt{1-\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

La cosa interessante è osservare che in questo caso nelle righe della tabella iniziano a comparire numeri irrazionali, a differenza del caso di S_5 . Questo è dovuto al fatto che A_5 ha un omomorfismo di immersione nel gruppo delle rotazioni dell'icosaedro, che a sua volta è contenuto dentro il gruppo $\text{Gl}(\mathbb{R}^3)$. Questa ci dà una delle rappresentazioni irriducibili di A_5 .

³Questo segue da osservazioni fatte nella risoluzione delle esercizio 3.4.

Capitolo 6

Classificazione delle rappresentazioni irriducibili di S_n parte I: Tableau, tabloid, politableau e relative rappresentazioni. Lezione 6 (17/03/2016)

In questo capitolo inizieremo la classificazione delle rappresentazioni irriducibili degli S_n . Nel fare ciò costruiremo una corrispondenza biunivoca tra le rappresentazioni irriducibili cercate e i diagrammi di Ferrer e vedremo le relazioni tra la combinatoria della rappresentazioni e questi diagrammi.

6.1 Partizioni e diagrammi di Ferrer

Prima di procedere diamo delle definizioni.

Definizione 6.1. Una partizione è una successione $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ¹ di numeri naturali che sia

- decrescente, e quindi $\lambda_n \geq \lambda_{n+1}$ per ogni $n > 0$
- definitivamente nulla: ovvero esiste un $n > 0$ tale che $\lambda_{n+k} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Ad ogni partizione associamo due numeri

la **lunghezza** denotata con $l(\lambda)$, è definita come

$$l(\lambda) = \max \{ k \in \mathbb{N}_0 : \lambda_k \neq 0 \}$$

la **norma** indicata con $|\lambda|$ e definita come

$$|\lambda| = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \sum_{k=1}^{l(\lambda)} \lambda_k .$$

Come notazione useremo scrivere $\lambda \vdash n$ per indicare che $|\lambda| = n$ e diremo che λ è una partizione di n .

¹Con \mathbb{N}_0 indichiamo l'insieme dei numero naturali strettamente positivi.

Osservazione 6.2. Se $\lambda \vdash n$ e quindi

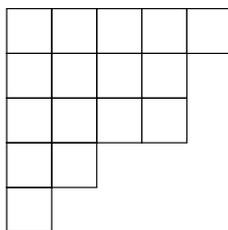
$$\sum_k \lambda_k = n$$

λ rappresenta un modo di dividere un insieme di n elementi in $l(\lambda)$ insiemi non vuoti, da cui il nome partizione.

Definizione 6.3. Un diagramma di Ferrer è una rappresentazione grafica formata da delle righe allineate, ciascuna formata da un numero di celle variabili, e la cui lunghezza (ovvero il numero di celle di ogni riga) decresca verso il basso.

Un esempio di diagramma di Ferrer è quello dato dalla figura 6.1.

Figura 6.1: Esempio di diagramma di Ferrer



Osservazione 6.4. Esiste un'ovvia corrispondenza biunivoca tra le partizioni e i diagrammi di Ferrer. Infatti ad ogni partizione λ possiamo associare il diagramma che abbia $l(\lambda)$ righe e in cui la riga k -esima abbia λ_k elementi. L'inversa a questa corrispondenza associa ad ogni diagramma la partizione λ dove λ_k è il numero di elementi della k -esima riga del diagramma (ovviamente $\lambda_k = 0$ per ogni k maggiore del numero delle righe del diagramma).

Osservazione 6.5. Ad ogni diagramma di Ferrer è possibile associare il *diagramma trasposto*, ottenuto scambiando righe con colonne.

Se λ è la partizione associata al diagramma, ovvero λ_k è il numero di elementi nella k -esima riga del diagramma di Ferrer, allora il diagramma trasposto è il diagramma di Ferrer che ha $l(\lambda)$ colonne e per ogni $k \leq l(\lambda)$ ha λ_k elementi sulla k -esima colonna.

Figura 6.2: Esempi di diagrammi di Ferrer trasposti



Osservazione 6.6. Grazie alla corrispondenza tra diagrammi di Ferrer e partizioni è chiaro che se λ è una partizione ad essa è possibile associare la partizione λ' associata al diagramma trasposto: λ'_k sarà il numero di elementi sulla k -esima riga del nuovo diagramma, ovvero il numero di elementi sulla k -esima colonna del diagramma originale. La partizione λ' è detta *coniugata* a λ .

È possibile vedere che $l(\lambda') = \lambda_1$ e che per ogni $k \leq l(\lambda')$ si ha che λ'_k è il numero di righe di (del diagramma associato a) λ che hanno lunghezza maggiore o uguale a k , ovvero

$$\lambda'_k = |\{ i \leq l(\lambda) : \lambda_i \geq k \}| .$$

L'uguaglianza si ottiene dal fatto che le righe del diagramma di λ che abbiano più di k elementi sono tutte e sole quelle che intersecano la k -esima colonna, queste chiaramente sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi che stanno sulla k -esima colonna.²

Usando questa caratterizzazione è facile far vedere che λ' è davvero una partizione.³

6.2 Tableau e relative rappresentazioni

Definizione 6.7. Sia $\lambda \vdash n$. Un tableau di Young di forma λ è un riempimento del diagramma di Ferrer associato a λ con i numeri $\{1, \dots, n\}$ (in qualunque modo).

Più formalmente possiamo definire un tableau come una funzione biettiva

$$t: I_\lambda \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

dove

$$I_\lambda = \{ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 : i \leq l(\lambda), j \leq \lambda_i \} .$$

Si parlerà in questo caso di λ -tableau.

Come notazione, se t è un tableau, indicheremo con $t_{i,j}$ il numero $t(i, j)$.

Osservazione 6.8. Si noti che la definizione di tableau ha senso perché effettivamente I_λ ha cardinalità $\sum_k \lambda_k = |\lambda| = n$, perciò effettivamente esistono delle biezioni da I_λ in $\{1, \dots, n\}$.

Esempio 6.9. Se $\lambda = (5, 3, 2, 2, 1)$ allora abbiamo che il seguente è un tableau.

1	2	12	4	11
13	7	8		
2	10			
6	3			
5				

Osservazione 6.10. Sia dato $\lambda \vdash n$, allora esiste un'ovvia azione di S_n sull'insieme dei λ -tableau T_λ definita da

$$\begin{aligned} S_n \times T_\lambda &\longrightarrow T_\lambda \\ (\sigma t)_{i,j} &= \sigma(t_{i,j}) \text{ per } (i, j) \in I_\lambda \end{aligned}$$

o più brevemente $\sigma t = \sigma \circ t$.

È facile vedere che questa è effettivamente un'azione di S_n e che in particolare questa è un'azione libera e transitiva.

In particolare se indichiamo con \mathfrak{s} il tableau dato da

$$\mathfrak{s}_{i,j} = \sum_{a=1}^{i-1} \lambda_a + j$$

²Un elemento sta nella k -esima colonna se e solo se sta in una riga che interseca la k -esima colonna e ogni riga interseca, ovviamente, la k -esima colonna in al più un unico elemento.

³Ovvero che la sequenza λ'_n è decrescente e definitivamente nulla.

che può essere rappresentato con diagramma della forma

1	λ_1
λ_1+1	$\lambda_1+\lambda_2$
\vdots	\vdots	\vdots	

in cui i numeri da 1 a n sono disposti crescendo da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, allora la mappa

$$i: S_n \longrightarrow T_\lambda$$

$$i(\sigma) = \sigma \mathfrak{s}$$

che è una biezione, per la libera transitività dell'azione di S_n , stabilisce un isomorfismo di azioni da S_n ⁴ a T_λ : in pratica abbiamo che per ogni $\sigma, \tau \in S_n$

$$i(\tau \circ \sigma) = (\tau \circ \sigma) \mathfrak{s}$$

$$= \tau(\sigma \mathfrak{s})$$

$$= \tau i(\sigma) .$$

La mappa i ovviamente estende a un isomorfismo \bar{i} di \mathbb{C} -spazi vettoriali

$$\bar{i}: \mathbb{C}[S_n] \longrightarrow \mathbb{C}[T_\lambda]$$

$$\bar{i}(v_\sigma) = v_t$$

dove $\mathbb{C}[T_\lambda]$ è il \mathbb{C} -spazio vettoriale della rappresentazione di permutazione associata a T_λ .

Dal fatto che i è un isomorfismo di azioni segue che la sua estensione \bar{i} è un isomorfismo di S_n -rappresentazioni, la verifica è un facile conto.

Osservazione 6.11. Prima di concludere questa sezione notiamo che per ogni λ -tableau t esistono due sotto-gruppi di S_n che nel seguito saranno importanti. Supponiamo di indicare con R_i l'insieme degli elementi che compaiono nella i -esima riga di t , ovvero

$$R_i = \{t_{i,j} : j \leq \lambda_i\}$$

e similmente con C_i l'insieme degli elementi che compaiono nella i -esima colonna di t , ovvero

$$C_i = \{t_{j,i} : j \leq \lambda'_i\} .$$

In generale per ogni sotto-insieme $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ è possibile costruire il sotto-gruppo

$$S(H) = \{ \sigma \in S_n : \forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus H \ \sigma(k) = k \}$$

ovvero il sotto-gruppo delle permutazioni che agiscono (in modo non banale) al più sugli elementi di H .

⁴Dove l'azione di S_n su se stesso è data dalla composizione.

Nel seguito indicheremo con R_t e C_t i sotto-gruppi

$$R_t = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} S(R_i)$$

$$C_t = \prod_{i=1}^{l(\lambda')} S(C_i)$$

ovvero i sotto-gruppi fatti dalle permutazioni che agiscono rispettivamente riga per riga su e colonna per colonna t .

6.3 Tabloid e relative rappresentazioni

Definizione 6.12. Due λ -tableau t_1 e t_2 si dicono equivalenti (per riga) se e solo se righe corrispondenti dei due tableau contengono gli stessi numeri (anche se permutati), ovvero se e solo se per ogni $i \leq l(\lambda)$ si ha che

$$\{ (t_1)_{i,j} : j = 1, \dots, \lambda_i \} = \{ (t_2)_{i,j} : j = 1, \dots, \lambda_i \} .$$

Osservazione 6.13. È facile osservare che la relazione \sim definita sui λ -tableau è una relazione di equivalenza.

Definizione 6.14. Un λ -tabloid è una classe di equivalenza di tableau per la relazione \sim , in generale per ogni tableau t indicheremo con $\{t\}$ la sua classe di equivalenza (il suo tabloid).

Osservazione 6.15. Dato che un tabloid è essenzialmente un tableau in cui si dimentica l'ordine degli elementi delle righe, per rappresentare i tabloid si usano dei diagrammi in cui *vengono soppresse le colonne* e gli elementi di ogni riga sono disposti in ordine crescente.

Ad esempio se t è il tableau

2	4	5
3	1	

il suo tabloid $\{t\}$ è rappresentato dal diagramma

2	4	5
1	3	

Osservazione 6.16. Dalla definizione di \sim è facile osservare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i λ -tabloid e il seguente insieme di partizioni di $\{1, \dots, n\}$:

$$\left\{ (A_k)_{k=1, \dots, l(\lambda)} : \forall k \ |A_k| = \lambda_k, \bigcup_k A_k = \{1, \dots, n\} \right\} .$$

Più nel dettaglio per ogni tableau t il suo tabloid può essere rappresentato come la partizione $(A_k)_k$ di $\{1, \dots, n\}$ dove

$$A_i = \{ t_{i,j} : j \leq \lambda_i \} .$$

Osservazione 6.17. L'azione di S_n è compatibile con la relazione \sim , infatti se t e s sono due λ -tableau tali che $t \sim s$, ovvero per ogni $i \leq l(\lambda)$

$$\{t_{i,j} : j \leq \lambda_i\} = \{s_{i,j} : j \leq \lambda_i\}$$

allora si ha anche che, sempre per ogni $i \leq l(\lambda)$,

$$\{\sigma(t_{i,j}) : j \leq \lambda_i\} = \{\sigma(s_{i,j}) : j \leq \lambda_i\}$$

e quindi $\sigma(t) \sim \sigma(s)$.

Da questo segue che l'azione di S_n passa all'insieme dei λ -tabloid T_λ / \sim , ovvero che è ben definita l'azione

$$\begin{aligned} S_n \times T_\lambda / \sim &\longrightarrow T_\lambda / \sim \\ \sigma\{t\} &= \{\sigma t\} . \end{aligned}$$

Come ben sappiamo questa azione induce una rappresentazione di permutazione, la $\mathbb{C}[T_\lambda / \sim]$.

In particolare un conto mostra che la mappa di proiezione al quoziente

$$\begin{aligned} \pi : T_\lambda &\longrightarrow T_\lambda / \sim \\ \pi(t) &= \{t\} \end{aligned}$$

è un morfismo di azioni, ovvero

$$\pi(\sigma t) = \{\sigma t\} = \sigma\{t\} = \sigma\pi(t) .$$

Da questo fatto segue che la mappa indotta sulle rappresentazioni di permutazione

$$\begin{aligned} \bar{\pi} : \mathbb{C}[T_\lambda] &\longrightarrow \mathbb{C}[T_\lambda / \sim] \\ \bar{\pi}(v_t) &= v_{\{t\}} \end{aligned}$$

da un morfismo di S_n -rappresentazioni.

È facile vedere che l'azione su T_λ / \sim è transitiva, ma non libera, come conseguenza di questo fatto abbiamo che la mappa

$$\begin{aligned} i : S_n &\longrightarrow T_\lambda / \sim \\ i(\sigma) &= \sigma\{\mathfrak{s}\} \end{aligned}$$

è suriettiva ma non biettiva e in particolare essa fattorizza⁵ a una mappa

$$i' : S_n / \text{Stab}(\{\mathfrak{s}\}) \longrightarrow T_\lambda / \sim$$

⁵Per fatti ben noti sulle azioni di gruppo.

dove

$$\text{Stab}(\{\mathfrak{s}\}) = R_{\mathfrak{s}} = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} S(R_i)$$

ovvero è il sottogruppo delle permutazioni che agiscono riga per riga sul tableau standard \mathfrak{s} .

Anche in questo caso i' è un morfismo di azioni di S_n , dove l'azione su $S_n/\text{Stab}(\{\mathfrak{s}\})$ e quella ovvia di S_n sui suoi laterali destri⁶, e si estende a un isomorfismo di S_n -rappresentazioni

$$\bar{i}': \mathbb{C}[S_n/\text{Stab}(\{\mathfrak{s}\})] \longrightarrow \mathbb{C}[T_\lambda/\sim].$$

Notazione. Nel seguito, per non appesantire troppo la notazione, per le rappresentazioni di permutazione identificheremo gli elementi su cui S_n agisce e i corrispondenti vettori nella rappresentazione di permutazione: se X è un insieme su cui S_n agisce $\mathbb{C}[X]$ è la relativa rappresentazione allora useremo x sia per indicare un elemento di X sia per indicare il vettore v_x . Nel caso (rispettivamente) dei tableau, tabloid, elementi di S_n questo significherà che con t , $\{t\}$ e σ indicheremo sia i relativi elementi negli insiemi T_λ , T_λ/\sim e S_n , sia i vettori v_t , $v_{\{t\}}$ e v_σ .

Inoltre poniamo

$$M_\lambda = \mathbb{C}[T_\lambda/\sim].$$

6.4 Ordinamenti su partizioni e lemma di dominanza

Definizione 6.18. Date $\lambda, \mu \vdash n$ si dice che λ domina μ (in simboli $\lambda \succeq \mu$) se $\forall i \geq 1 \lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$. Questo è un ordinamento che chiamiamo raffinamento.

Esempio 6.19. Per esempio $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \succeq \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$

Osservazione 6.20. L'ordinamento sui diagrammi non è totale: per esempio $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ non sono comparabili.

Lemma 6.21 (di dominanza). *Siano t e s tableau (non tabloid) di forma λ e μ rispettivamente. Se per ogni i gli elementi della i -esima riga di t sono in colonne diverse di s allora $\lambda \preceq \mu$.*

Prima di passare alla dimostrazione del teorema facciamo alcune osservazioni preliminari che ci serviranno.

Osservazione 6.22. Anzitutto possiamo osservare che per ogni $\sigma \in C_s$, ovvero una permutazione di S_n che agisce colonna per colonna su s , il μ -tableau σs continua a verificare le ipotesi del teorema: tutti gli elementi di una medesima riga di t compaiono in colonne diverse di σs . Questo perché poste le uguaglianze

$$(\sigma s)_{i_k, j_k} = t_{i, k} \quad (\text{per } k \leq \lambda_i)$$

per l'ipotesi su σ sappiamo che

$$(\sigma s)_{i_k, j_k} = s_{i'_k, j_k}$$

⁶O sinistri a seconda delle definizioni.

per un qualche $i'_k \leq \mu'_{j_k}$, quindi

$$s_{i'_k, j_k} = t_{i, k} \quad (\text{per } k \leq \lambda_i)$$

e per le ipotesi del teorema i j_k devono dunque essere distinti: dunque gli elementi $(\sigma s)_{i_k, j_k}$ stanno su colonne distinte di σt .

Osservazione 6.23. In particolare esiste una permutazione $\sigma \in C_s$ tale che gli elementi di ogni colonna di σs risultano essere ordinati rispetto all'indice di riga che hanno in t : poniamo che $i^t: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, l(\lambda)\}$ e $j^t: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, l(\lambda')\}$ siano le funzioni che associano a ogni k rispettivamente gli indici di riga e colonna di k in t , ovvero tali che

$$t_{i^t(k), j^t(k)} = k$$

allora possiamo trovare una permutazione $\sigma \in C_s$ tale che per ogni $j \leq l(\mu')$ valga

$$i^t((\sigma s)_{i, j}) \leq i^t((\sigma s)_{i+1, j}) .$$

Per l'ipotesi del teorema, che elementi della medesima riga in t compaiono in colonne distinte di s (e quindi di σs per l'osservazione precedente), segue che in ogni colonna di σs non compaiono due elementi di t che stanno nella stessa riga in t , ovvero per ogni indice di colonna j e per ogni coppia di indici di riga i_1 e i_2 abbiamo che

$$i^t((\sigma s)_{i_1, j}) \neq i^t((\sigma s)_{i_2, j}) .$$

Da questo segue che per la σs le disuguaglianze viste precedentemente sono in realtà strette

$$i^t((\sigma s)_{i, j}) < i^t((\sigma s)_{i+1, j})$$

e quindi la mappa

$$i \leq \mu'_j \mapsto i^t((\sigma s)_{i, j})$$

è monotona strettamente crescente.

Passiamo ora alla dimostrazione del lemma [6.21](#)

Dimostrazione del lemma 6.21. Siano t e s rispettivamente un λ e μ -tableau che rispettino le ipotesi del teorema. Per le osservazioni [6.22](#) e [6.23](#) possiamo supporre che gli elementi di ogni colonna di t siano ordinati rispetto all'indice di riga che hanno in s , ovvero che per ogni $j \leq l(\mu')$ si abbia

$$i^t(s_{i, j}) < i^t(s_{i+1, j}) .$$

In questo caso abbiamo che per ogni $(i, j) \in I_\mu$ se $(i', j') \in I_\lambda$ è tale che

$$s_{i, j} = t_{i', j'} ,$$

e quindi $i^t(s_{i,j}) = i'$, per la monotonia della $i^t(s_{i,j})$ nell'indice i segue che $i' \geq i$.

Riletta al contrario la disuguaglianza precedente ci dice che per ogni $(i, j) \in I_\lambda$ se $(i', j') \in I_\mu$ è tale che

$$t_{i,j} = s_{i',j'}$$

allora $i' \leq i$. Da questo segue che per ogni $k \leq l(\lambda)$ si deve avere l'inclusione di insiemi

$$\{ t_{i,j} : i \leq k, j \leq \lambda_i \} \subseteq \{ s_{i,j} : i \leq k, j \leq \mu_i \}$$

da cui segue la disuguaglianza tra le cardinalità

$$\sum_{i=1}^k \lambda_k = |\{ t_{i,j} : i \leq k, j \leq \lambda_i \}| \leq |\{ s_{i,j} : i \leq k, j \leq \mu_i \}| = \sum_{i=1}^k \mu_i$$

che appunto prova che $\lambda \preceq \mu$. □

Definizione 6.24. Dati $\lambda, \mu \vdash n$ diremo che $\lambda < \mu$ nell'ordinamento lessicografico *lex* se per qualche i vale che $\lambda_j = \mu_j$ per ogni $j < i$ e $\lambda_i < \mu_i$.

Osservazione 6.25. L'ordinamento *lex* è un ordinamento totale delle partizioni di n e si dimostra facilmente che se $\lambda \succeq \mu$ allora $\lambda \geq \mu$. Quindi *lex* è un raffinamento del ordinamento di *raffinemento*.

6.5 Moduli di Specht, ovvero le rappresentazioni irriducibili di S_n

Definizione 6.26. Dato $H \subseteq S_n$, dove l'inclusione è di sotto-insiemi (quindi H non deve necessariamente essere un sotto-gruppo) allora denotiamo con

$$H^+ = \sum_{\pi \in H} \pi \in \mathbb{C}[S_n]$$

$$H^- = \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi)\pi \in \mathbb{C}[S_n]$$

Nel caso in cui $H = C_t$, per un tableau t , poniamo

$$k_t = C_t^- = \sum_{g \in C_t} \text{sgn}(g)g$$

Osservazione 6.27. Se le colonne di t sono C_1, \dots, C_m allora abbiamo che

$$k_t = k_{C_1} + \dots + k_{C_m}$$

dove $k_{C_i} = S(C_i)^-$.

Esempio 6.28. Preso il tableau $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$ allora abbiamo che

$$k_t = (e - (3, 4))(e - (1, 5)) = e - (3, 4) - (1, 5) + (1, 5)(3, 4) .$$

Definizione 6.29. Sia t un tableau di forma λ . Il *politableau* associato a t è l'oggetto $e_t = k_t\{t\}$ elemento di M_λ (che ricordiamo era lo spazio generato dai tabloid) ⁷.

Esempio 6.30. Con $k_t = (e - (3, 4))(e - (1, 5))$ come nell'esempio precedente abbiamo che

$$\begin{aligned} e_t &= k_t \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array}} \\ &= \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array}} - (3, 4) \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array}} - (1, 5) \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array}} + (3, 4)(1, 5) \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array}} \\ &= \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array}} - \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{array}} - \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & \end{array}} + \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{array}}. \end{aligned}$$

Definizione 6.31. Per ogni $\lambda \vdash n$ il *modulo di Specht* S_λ è il sotto-modulo di M_λ generato dagli e_t al variare di t tra i tableau di forma λ .

Generalmente un S_λ viene identificato con il suo diagramma di Ferrer.

Osservazione 6.32 (Anticipazione). Guardando al tabloid è possibile individuare la dimensione di S_λ , infatti questo numero è pari al numero di modo di mettere i numeri dentro il tableau in modo che siano crescenti su ogni riga e su ogni colonna.

In realtà vedremo che la medesima dimensione è uguale a $\frac{n!}{\text{numero degli uncini del tableau}}$, dove diremo nel seguito cosa sono gli uncini di tableau.

Lemma 6.33. Sia t un λ -tableau con $\lambda \vdash n$ e sia $\pi \in S_n$ allora

1. si ha che $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$
2. che $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$
3. che $k_{\pi t} = \pi k_t \pi^{-1}$
4. e che $e_{\pi t} = \pi e_t$.

Dimostrazione. 1. Abbiamo già visto che all'osservazione 6.11 che per ogni sotto insieme $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ il sotto-gruppo $S(H)$ è formato da tutte e solo quelle permutazioni che fissano ogni elemento in $H^c = \{1, \dots, n\} \setminus H$. Quindi abbiamo che

$$S(H) = \bigcap_{h \in H^c} \text{Stab}(h).$$

Da fatti generali sulle azioni di gruppo sappiamo che

$$\pi \text{Stab}(h) \pi^{-1} = \text{Stab}(\pi h)$$

⁷Ricordiamo che k_t è un elemento di $\mathbb{C}[S_n]$ e che M_λ è un $\mathbb{C}[S_n]$ -modulo, quindi l'elemento $k_t\{t\}$ è ben definito grazie all'azione di $\mathbb{C}[S_n]$ su M_λ .

e quindi

$$\begin{aligned}
\pi S(H)\pi^{-1} &= \pi \bigcap_{h \in H^c} \text{Stab}(h)\pi^{-1} \\
&= \bigcap_{h \in H^c} \pi \text{Stab}(h)\pi^{-1} \\
&= \bigcap_{h \in H^c} \text{Stab}(\pi h) \\
&= \bigcap_{h \in \pi H^c} \text{Stab}(h) = S(\pi H) .
\end{aligned}$$

Da questo, dato che per definizione $R_t = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} S(R_i)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\pi R_t \pi^{-1} &= \pi \prod_{i=1}^{l(\lambda)} S(R_i) \pi^{-1} \\
&= \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \pi S(R_i) \pi^{-1} \\
&= \prod_{i=1}^{l(\lambda)} S(\pi R_i) \\
&= R_{\pi t} .
\end{aligned}$$

2. Il caso $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ è esattamente identico al precedente, basta solo scambiare gli R_i con i C_i .
3. Un facile conto mostra che

$$\begin{aligned}
k_{\pi t} &= \sum_{\sigma \in C_{\pi t}} \text{sgn}(\sigma) \sigma \\
&= \sum_{\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}} \text{sgn}(\sigma) \sigma \\
&= \sum_{\sigma \in C_t} \underbrace{\text{sgn}(\pi \sigma \pi^{-1})}_{=\text{sgn}(\sigma)} \pi \sigma \pi^{-1} \\
&= \pi \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma) \sigma \pi^{-1} = \pi k_t \pi^{-1} .
\end{aligned}$$

4. Di nuovo un conto mostra la tesi:

$$\begin{aligned}
e_{\pi t} &= k_{\pi t} \{\pi t\} \\
&= \pi k_t \pi^{-1} \pi \{t\} \\
&= \pi k_t \{t\} = \pi e_t .
\end{aligned}$$

□

Proposizione 6.34. *Dato un qualunque tableau t di forma λ allora abbiamo che $S_\lambda = \mathbb{C}[S_n]e_t$ (ovvero S_λ è un S_n -modulo ciclico).*

Dimostrazione. Per il lemma precedente (punto 4) la tesi segue banalmente, infatti ricordiamo che per definizione S_λ è la sotto rappresentazione generata dagli e_t al variare di t tra i λ -tableau, ovvero $S_\lambda = \mathbb{C}[S_n] \langle e_t : t \in T_\lambda \rangle$, ma se t è un λ -tableau e t' un altro λ -tableau allora sappiamo che esiste $\sigma \in S_n$ tale che $t' = \sigma t$ e quindi, per il lemma precedente, abbiamo che

$$e_{t'} = e_{\sigma t} = \sigma e_t .$$

Quindi per ogni $t' \in T_\lambda$ abbiamo che $e_{t'} \in \mathbb{C}[S_n]e_t$ e dunque tutti i generatori di S_λ stanno in $\mathbb{C}[S_n]e_t$, da questo segue che $S_\lambda \subseteq \mathbb{C}[S_n]e_t$, l'altra inclusione è ovvia e quindi $\mathbb{C}[S_n]e_t = S_\lambda$. □

Capitolo 7

Classificazione delle rappresentazioni irriducibili di S_n parte II: Proprietà delle rappresentazioni dei tabloid e irriducibilità dei moduli di Specht Lezione 7 (21/03/2015)

7.1 Alcune proprietà della rappresentazione dei tabloid

Osservazione 7.1. Per risultati noti di algebra lineare è possibile definire un (unico) prodotto hermitiano definito positivo su M_λ tale che per ogni coppia di tabloid $\{t\}$ e $\{s\}$ valga

$$\langle \{t\}, \{s\} \rangle = \delta_{\{t\}, \{s\}}$$

dove δ è la *delta di Dirach* che vale 1 quando $\{t\}$ e $\{s\}$ sono uguali, 0 altrimenti.¹

Lemma 7.2 (del segno). *Sia $H \leq S_n$ (sotto-gruppo) allora*

1. se $\pi \in H$

$$\pi H^- = H^- \pi = \text{sgn}(\pi) H^-$$

2. per ogni coppia $u, v \in M_\lambda$ vale che

$$\langle H^- u, v \rangle = \langle u, H^- v \rangle$$

3. se $(b, c) \in H$ è una trasposizione allora

$$H^- = k(\text{id} - (b, c))$$

con $k \in \mathbb{C}[H]$

¹La buona definizione segue dal fatto che i $\{t\}$ sono una base di M_λ .

4. se t è un tableau con b, c sulla stessa riga del tabloid e $(b, c) \in H$ allora $H^{-}\{t\} = 0$.

Dimostrazione. 1. Basta fare il conto esplicito e si vede che

$$\begin{aligned}
\pi H^{-} &= \sum_{h \in H} \operatorname{sgn}(h) \pi h \\
&= \sum_{h \in H} \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(h) \pi h \\
&= \sum_{h \in H} \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\pi h) \pi h \\
&= \sum_{h \in \pi H} \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(h) h \\
&= \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{h \in H} \operatorname{sgn}(h) h \\
&= \operatorname{sgn}(\pi) H^{-}
\end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza segue dal fatto che $\pi H = H$, dato che H è un sottogruppo e $\pi \in H$.

In maniera del tutto analoga si vede che $H^{-}\pi = \operatorname{sgn}(\pi)H$.

2. Possiamo anzitutto osservare che $\langle -, - \rangle$ è S_n -invariante, ovvero che vale che

$$\langle g\{t\}, g\{s\} \rangle = \langle \{t\}, \{s\} \rangle$$

per ogni $g \in S_n$, t e s tableau. Per vederlo ricordiamo che

$$\langle \{t\}, \{s\} \rangle = \delta_{\{t\}, \{s\}}$$

e per ogni $g \in S_n$ e ogni tabloid $\{t\}$ abbiamo che $g\{t\} = \{gt\}$, per cui

$$\langle g\{t\}, g\{s\} \rangle = \langle \{gt\}, \{gs\} \rangle = \delta_{\{gt\}, \{gs\}} .$$

È chiaro che se $\{t\} = \{s\}$, ovvero $\langle \{t\}, \{s\} \rangle = 1$, allora

$$\{gt\} = g\{t\} = g\{s\} = \{gs\}$$

e quindi

$$\langle g\{t\}, g\{s\} \rangle = \delta_{\{gt\}, \{gs\}} = 1 .$$

Viceversa se $g\{t\} = g\{s\}$ allora abbiamo che

$$\{t\} = g^{-1}g\{t\} = g^{-1}g\{s\} = \{s\}$$

e quindi se $\{t\} \neq \{s\}$, ovvero $\langle \{t\}, \{s\} \rangle = 0$, allora anche $g\{t\} \neq g\{s\}$ e da questo segue che

$$\langle g\{t\}, g\{s\} \rangle = \delta_{\{gt\}, \{gs\}} = 0 .$$

Rimettendo tutto assieme si ottiene che per tutti i tabloid, ovvero gli elementi di una base, abbiamo che

$$\langle g\{t\}, g\{s\} \rangle = \langle \{t\}, \{s\} \rangle$$

dato che la mappa $\langle g-, g- \rangle = \langle -, - \rangle \circ (\rho(g) \times \rho(g))$ è un prodotto hermitiano che coincide su una base con il prodotto hermitiano $\langle -, - \rangle$, questi due prodotti hermitiani devono essere uguali, ovvero $\langle g-, g- \rangle = \langle -, - \rangle$, da cui

$$\langle u, v \rangle = \langle gu, gv \rangle$$

per ogni $u, v \in M_\lambda$: quindi $\langle -, - \rangle$ è effettivamente S_n invariante.²

Ora per provare il nostro claim, ovvero che $\langle H^-u, v \rangle = \langle u, H^-v \rangle$, basta fare il seguente conto:

$$\begin{aligned} \langle H^-u, v \rangle &= \left\langle \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi) \pi u, v \right\rangle \\ &= \sum_{\pi \in H} \langle \text{sgn}(\pi) \pi u, v \rangle \\ &= \sum_{\pi \in H} \langle u, \text{sgn}(\pi) \pi^{-1} v \rangle \quad (\text{questa vale per la } S_n\text{-invarianza}) \\ &= \sum_{\pi \in H} \langle u, \text{sgn}(\pi^{-1}) \pi^{-1} v \rangle \quad (\text{dato che } \text{sgn}(\pi) = \text{sgn}(\pi^{-1})) \\ &= \langle u, \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi^{-1}) \pi^{-1} v \rangle \\ &= \langle u, H^-v \rangle . \end{aligned}$$

3. $H = \bigcup_i \theta_i K$ dove i θ_i sono i rappresentanti delle classi laterali in S_n/K e $K = \{e, (b, c)\}$. Allora ogni elemento di H è della forma θ_i o $\theta_i(b, c)$ e quindi

$$\begin{aligned} H^- &= \sum_i \text{sgn}(\theta_i) \theta_i + \sum_i \text{sgn}(\theta_i(b, c)) \theta_i(b, c) \\ &= \sum_i \text{sgn}(\theta_i) \theta_i + \sum_i -\text{sgn}(\theta_i) \theta_i(b, c) \\ &= \left(\sum_i \text{sgn}(\theta_i) \theta_i \right) (\text{id} - (b, c)) . \end{aligned}$$

4. Per ipotesi $(b, c)\{t\} = \{t\}$.

$$\begin{aligned} H^- \{t\} &= \bar{k}(\text{id} - (b, c)) \{t\} \quad (\text{per il punto 3}) \\ &= \bar{k}(\{t\} - \{t\}) = 0 . \end{aligned}$$

□

²Un altro metodo di provare la S_n -invarianza è quella di osservare che essa è equivalente a dire che i $g \in S_n$ siano rappresentati tramite applicazioni unitarie per il prodotto $\langle -, - \rangle$. Dato che i $g \in S_n$ permutano i tabloid, che sono una base ortonormale di M_λ , ne segue che, nella base dei tabloid, essi sono rappresentati da matrici di permutazione e quindi da matrici unitarie per il prodotto hermitiano in questione.

Corollario 7.3. *Sia t un λ -tableau e sia s un μ -tableau, con $\lambda, \mu \vdash n$. Se $k_t\{s\} \neq 0$ allora $\lambda \succeq \mu$. In particolare se $k_t\{s\} \neq 0$ e $\lambda = \mu$ allora $k_t\{s\} = \pm e_t \in S_\lambda$.*

Dimostrazione. L'idea è di usare il lemma di dominanza per provare che $\lambda \succeq \mu$.

Per fare questo dobbiamo far vedere che non esistono due elementi b, c che stanno su una stessa riga di s e contemporaneamente su una stessa colonna di t . Se per assurdo così non fosse, allora avremmo che $(b, c)\{s\} = \{s\}$ (visto che b e c stanno sulla stessa riga di s) e contemporaneamente $(b, c) \in C_t$ (se b e c stanno sulla stessa colonna in t allora (b, c) è una permutazione che agisce colonna per colonna su t). Ma allora da una parte avremmo

$$k_t = C_t^- = \bar{k}(\text{id} - (b, c)) \text{ (per il lemma del segno parte 3)}$$

e quindi

$$k_t\{s\} = 0 \text{ (per il punto 4 del lemma del segno).}$$

Ma per ipotesi $k_t\{s\} \neq 0$, quindi non è possibile che due b e c siffatti esistano. Questo ci dice che se $k_t\{s\} \neq 0$ allora le ipotesi del lemma di dominanza sono verificate e quindi $\lambda \succeq \mu$.

In particolare se $k_t\{s\} \neq 0$ e $\lambda = \mu$ allora esiste $\pi \in C_t$ tale che $\{s\} = \pi\{t\}$ (rimandiamo la dimostrazione di questo fatto all'osservazione 7.4 che segue).

Facendo il conto

$$\begin{aligned} k_t\{s\} &= k_t\pi\{t\} \\ &= C_t^- \pi\{t\} \\ &= \text{sgn}(\pi)C_t^- \{t\} \text{ (per la prima parte del lemma)} \\ &= \text{sgn}(\pi)k_t\{t\} \\ &= \text{sgn}(\pi)e_t . \end{aligned}$$

□

Osservazione 7.4. Di seguito diamo la dimostrazione del fatto enunciato prima: che se s e t sono due λ -tableau tali che $k_t\{s\} \neq 0$, e che quindi verificano le ipotesi del lemma di dominanza, allora esiste $\pi \in C_t$ tale che $\{s\} = \pi\{t\}$.

Prendiamo $\pi \in C_t$ permutazione che riordina gli elementi di ogni colonna di t secondo l'indice di riga che hanno in s , come fatto nella dimostrazione del **lemma di dominanza**.

Ricordiamo che tale π per costruzione garantisce che per ogni indice di riga i gli elementi della i -esima riga di s comparissero nelle prime i -righe di t , ovvero che

$$\{s_{i,j} : j \leq \lambda_i\} \subseteq \{(\pi t)_{i',j} : i' \leq i, j \leq \lambda_{i'}\} ,$$

da questo segue che per $i = 1$ gli $s_{i,j}$ compaiono nella prima riga di t , e dato che sia s che t sono λ -tableau, e quindi hanno prima riga di medesima lunghezza λ_1 , ne segue che

$$\{s_{1,j} : j \leq \lambda_1\} = \{(\pi t)_{1,j} : j \leq \lambda_1\} .$$

Se supponiamo che per $i' < i$ valga

$$\{s_{i',j} : j \leq \lambda_{i'}\} = \{(\pi t)_{i',j} : j \leq \lambda_{i'}\}$$

allora per la proprietà di πt sappiamo che

$$\{s_{i',j} : i' \leq i, j \leq \lambda_{i'}\} = \{(\pi t)_{i',j} : i' \leq i, j \leq \lambda_{i'}\}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\{s_{i,j} : j \leq \lambda_i\} &= \{s_{i',j} : i' \leq i, j \leq \lambda_{i'}\} \setminus \bigcup_{i' < i} \{s_{i',j} : j \leq \lambda_{i'}\} \\
&= \{(\pi t)_{i',j} : i' \leq i, j \leq \lambda_{i'}\} \setminus \bigcup_{i' < i} \{(\pi t)_{i',j} : j \leq \lambda_{i'}\} \\
&= \{(\pi t)_{i,j} : j \leq \lambda_i\} .
\end{aligned}$$

Per induzione segue che allora per ogni $i \leq l(\lambda)$ si ha

$$\{s_{i,j} : j \leq \lambda_i\} = \{(\pi t)_{i,j} : j \leq \lambda_i\}$$

cioè che s e πt hanno gli stessi elementi su righe corrispondenti: cioè $\{s\} = \{\pi t\} = \pi\{t\}$.

Osservazione 7.5. Il corollario 7.3 ci mostra che anche per due tabloid $\{t\}$ e $\{s\}$ linearmente indipendenti (ovvero distinti) può capitare che una volta moltiplicati per k_t smettano di essere indipendenti. Ovvero le moltiplicazioni per k_t non è detto che siano iniettive.

Corollario 7.6. *Se $u \in M_\mu$ e t è tabloid di forma μ allora $k_t u$ è multiplo di e_t .*

Dimostrazione. Sia $u = \sum c_i \{s_i\}$ con gli s_i dei μ -tableau e i c_i coefficienti complessi. Allora

$$k_t u = \sum c_i k_t \{s_i\} = \gamma e_t$$

dove γ è un opportuno coefficiente complesso, eventualmente 0. □

7.2 Teorema del sotto-modulo di Jones e decomposizione delle M_λ

Teorema 7.7 (del sotto-modulo di Jones). *Sia U un sotto-modulo³ di M_μ allora o $S_\mu \subseteq U$ o $U \subseteq (S_\mu)^\perp$.*

In particolare S_μ è irriducibile⁴.

Dimostrazione. Sia $u \in U$ e sia $\{t\}$ un μ -tabloid. Per il secondo corollario sappiamo che

$$k_t u = \gamma e_t$$

per un certo $\gamma \in \mathbb{C}$.

A questo punto abbiamo due possibilità:

- esistono $u \in U$ e t tableau tale che $\gamma \neq 0$
- per ogni $u \in U$ e t si ha $\gamma = 0$ e quindi $k_t u = 0$ sempre.

Nel primo caso abbiamo che $k_t u \in U$ ma $k_t u = \gamma e_t$, con $\gamma \in \mathbb{C}$ invertibile, e quindi $e_t \in U$. Ma allora dato che $\mathbb{C}[S_n]e_t = S_\mu$ questo ci dice che $S_\mu \subseteq U$.

Nel secondo caso abbiamo che

$$\begin{aligned}
\langle u, e_t \rangle &= \langle u, k_t \{t\} \rangle \\
&= \langle k_t u, \{t\} \rangle \quad (\text{per la parte 2 del lemma del segno}) \\
&= \langle 0, \{t\} \rangle = 0 .
\end{aligned}$$

Dunque u è ortogonale a un insieme di generatori di S_μ , i vari e_t , e quindi $U \subseteq (S_\mu)^\perp$. □

³Ricordiamo che il termine sotto-modulo è usato come sinonimo di sotto-rappresentazione.

⁴Questo stesso teorema vale anche su campi in cui si possa definire una forma bilineare simile a un prodotto hermitiano.

Osservazione 7.8. Noi sapevamo già che le rappresentazioni irriducibili di S_n sono tante quante le classi di coniugio di S_n , ovvero tanti quante le partizioni di $\{1, \dots, n\}$. Adesso sappiamo già che le S_n -rappresentazioni S_λ sono delle rappresentazioni irriducibili, se riuscissimo a far vedere che le S_λ sono a due a due non isomorfe, dato che sono in biezione con le partizioni di $\{1, \dots, n\}$, da questo potremmo concludere che esse sono tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di S_n .

Proposizione 7.9. Sia⁵ $\theta \in \text{hom}_{S_n}[S_\lambda, M_\mu] \setminus \{0\}$, e quindi supponiamo che M_μ contenga una copia di S_λ , allora $\lambda \succeq \mu$ e se $\lambda = \mu$ allora $\theta = \gamma\epsilon$ per un certo $\gamma \in \mathbb{C}$, dove $\epsilon: S_\lambda \hookrightarrow M_\mu = M_\lambda$ è l'embedding canonico di S_λ in M_λ .

Dimostrazione. Sia $\theta \neq 0$ come da ipotesi. Allora $\theta(e_t) \neq 0$, per t un qualche λ -tableau. Sfruttando il fatto che $M_\lambda = S_\lambda \oplus (S_\lambda)^\perp$ ⁶ possiamo estendere θ a un

$$\tilde{\theta}: M_\lambda = S_\lambda \oplus (S_\lambda)^\perp \longrightarrow M_\lambda$$

per esempio ponendo $\tilde{\theta}|_{(S_\lambda)^\perp} = 0$.

Quindi

$$\begin{aligned} 0 &\neq \theta(e_t) \\ &= \tilde{\theta}(k_t\{t\}) \\ &= k_t\tilde{\theta}(\{t\}) \text{ (perché } \tilde{\theta} \text{ è morfismo di } S_n\text{-moduli)} \\ &= k_t \left(\sum c_i \{s_i\} \right) \end{aligned}$$

dove gli s_i sono dei μ -tabloid. Osserviamo che $k_t\{s_i\} \neq 0$ almeno per qualche i e quindi per uno dei corollari precedenti $\lambda \succeq \mu$.

Se inoltre $\lambda = \mu$ allora per uno dei corollari sopra

$$\theta(e_t) = ce_t = c\epsilon(e_t)$$

per un $c \in \mathbb{C}$. Allora per ogni $\pi \in S_n$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \theta(e_{\pi t}) &= \theta(\pi e_t) \\ &= \pi\theta(e_t) \text{ (per proprietà di omomorfismo di } S_n\text{-moduli)} \\ &= \pi(ce_t) \\ &= c\pi e_t = c\epsilon_{\pi t} = c\epsilon(e_{\pi t}) . \end{aligned}$$

Dato che al variare di $\pi \in S_n$ gli $e_{\pi t}$ ci danno un insieme di generatori di S_λ , ne segue che $\theta = c\epsilon$: i due morfismi $c\epsilon$ e θ sono delle applicazioni lineari che coincidono su un insieme di generatori, gli $e_{\pi t}$, e quindi coincidono su tutto S_λ . □

Osservazione 7.10. Ricordiamo che se $\lambda \succeq \mu$ allora $\lambda \geq \mu$. Dunque se S_λ appare dentro M_μ allora vale che $\lambda \geq \mu$. Questo ci dice che dentro M_μ ci possono essere le copie degli M_λ per $\lambda \geq \mu$.

Osservazione 7.11. La proposizione precedente ci dice che nel caso $\lambda = \mu$ allora M_μ può contenere solo una copia di S_λ : poiché $\text{hom}_{S_n}[S_\lambda, M_\mu]$ è costituito dagli omomorfismi della forma $c\epsilon$, al variare di $c \in \mathbb{C}$, e quindi ha dimensione 1, tale dimensione è uguale a $\langle \chi_{S_\lambda}, \chi_{M_\mu} \rangle$ che è appunto il numero di componenti isomorfe a S_λ che compaiono in una decomposizione di M_μ .

⁵Di nuovo puntualizziamo che lavoriamo su campo \mathbb{C} .

⁶L'ortogonale è rispetto al prodotto hermitiano definito sui tabloid a inizio capitolo.

Teorema 7.12. *I moduli di Specht S_λ al variare di λ fra le partizioni di n , formano una lista di moduli irriducibili per S_n a due a due non isomorfi.*

Dimostrazione. Basta solo dimostrare che se $\lambda \neq \mu$ allora $S_\lambda \not\cong S_\mu$. Se $S_\lambda = S_\mu$ allora esisterebbe un $\theta \in \text{hom}_{S_n}[S_\lambda, M_\mu]$ non nullo e quindi $\lambda \succeq \mu$. Ma simmetricamente si avrebbe che $\text{hom}_{S_n}[S_\mu, M_\lambda]$ contiene il suo omomorfismo analogo al θ e quindi $\mu \succeq \lambda$, da cui $\mu = \lambda$. □

Teorema 7.13. *Gli S_λ sono tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di S_n .*

Dimostrazione. Segue banalmente dal teorema precedente e dall'osservazione 7.8. □

Corollario 7.14. *Da quanto fin qui detto segue che*

$$M_\mu = \bigoplus_{\lambda \succeq \mu} k_{\lambda\mu} S_\lambda$$

con $k_{\mu\mu} = 1$.

Dimostrazione. Dal teorema 7.13 sappiamo che M_μ deve decomporsi come somma degli S_λ , inoltre per la proposizione 7.9 sappiamo che gli unici S_λ che possono comparire in M_μ sono quelli per cui $\lambda \succeq \mu$. Inoltre se $\lambda = \mu$ sappiamo anche che $k_{\mu,\mu} = \dim \text{hom}_{S_n}[S_\mu, M_\mu] = 1$. □

Osservazione 7.15 (Curiosità). I numeri $k_{\lambda\mu}$ come nel corollario sopra sono dei numeri famosi chiamati *Kostka numbers*.

Osservazione 7.16. Osserviamo che $\square\square\square \succeq \square\square$ e quindi uno potrebbe chiedersi come si spezza $M^{\square\square\square}$?

Abbiamo che

$$M^{\square\square\square} = \square\square\square + ?\square\square\square + ?\square\square\square\square$$

dove i pezzi a sinistra possono essere solo $\square\square\square$ e $\square\square\square\square$ perché sono le uniche partizioni che possono dominare $\square\square$.

A questo riempiendo il diagramma $\square\square$ come segue

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array},$$

abbiamo che numero di copie delle altre rappresentazioni sono i modi di mettere gli 1 e 2 che compaiono nel riempimento di sopra nei diagrammi delle altre partizioni in modo tale da preservare l'ordine (la dimostrazione di questo fatto la vedremo nel seguito, per ora chiediamo al lettore di fidarsi).

Questo essenzialmente ci da il modo i trovare i $k_{\lambda,\mu}$.

7.3 Caratterizzazione alternativa delle rappresentazioni irriducibili di S_n

È possibile dare una diversa caratterizzazione degli S_n -moduli irriducibili come sotto-rappresentazioni di $\mathbb{C}[S_n]$. Questo non è una sorpresa infatti da quanto visto nel capitolo 3, e grazie al fatto che gli S_λ sono tutte e sole le rappresentazioni irriducibili, sappiamo che

$$\mathbb{C}[S_n] = \bigoplus_{\lambda \vdash n} S_\lambda^{\dim S_\lambda} .$$

Nello specifico abbiamo per ogni $\lambda \vdash n$ e ogni λ -tableau t la sotto-rappresentazione

$$V_t = \mathbb{C}[S_n]R_t^+C_t^- \subseteq \mathbb{C}[S_n] .$$

È possibile provare che $V_t \cong S_\lambda$ e che quindi i V_t non dipendono dalla scelta del λ -tableau ma solo dalla partizione scelta λ e per questo useremo V_λ al posto di V_t (visto che la rappresentazione è la stessa a meno di isomorfismo).

In verità quello che possiamo far vedere è che vale l'isomorfismo $V_t = \mathbb{C}[S_n]R_t^+C_t^- \cong \mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+$. In questo modo risulterà molto più semplice far vedere che effettivamente $V_t \cong S_\lambda$.

Osserviamo che esiste un ovvio omomorfismo di S_n -rappresentazioni⁷

$$\begin{aligned} i: M_\lambda &\longrightarrow \mathbb{C}[T_\lambda] \\ i(\{t\}) &= \frac{1}{|\{t\}|} \sum_{t' \in \{t\}} t' . \end{aligned}$$

Dato che per ogni λ -tableau t abbiamo che $\{t\} = R_t t$ ⁸ vale anche che

$$i(\{t\}) = \frac{1}{|R_t|} \sum_{\sigma \in R_t} \sigma t .$$

Non è difficile vedere che il morfismo i è iniettivo, infatti ha un inverso sinistro dato dal ben noto

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{C}[T_\lambda] &\longrightarrow M_\lambda \\ \pi(t) &= \{t\} , \end{aligned}$$

la verifica che $\pi \circ i = 1_{M_\lambda}$ è data dal seguente conto:

$$\begin{aligned} \pi \circ i(\{t\}) &= \pi \left(\frac{1}{|\{t\}|} \sum_{t' \in \{t\}} t' \right) \\ &= \frac{1}{|\{t\}|} \sum_{t' \in \{t\}} \pi(t') \\ &= \frac{1}{|\{t\}|} \sum_{t' \in \{t\}} \{t'\} \\ &= \frac{1}{|\{t\}|} \sum_{t' \in \{t\}} \{t\} = \frac{|\{t\}|}{|\{t\}|} \{t\} = \{t\} \end{aligned}$$

⁷La prova che sia un morfismo di S_n -rappresentazioni è un facile conto, analogo ai tanti visti fin qui.

⁸Ovvero che $\{t\}$ è l'orbita di t dell'azione di R_t , sotto-gruppo di S_n .

che prova che l'uguaglianza tra $\pi \circ i$ e id_{M_λ} sussiste per i vettori della forma $\{t\}$, per t un λ -tableau, ovviamente l'uguaglianza estende a tutto lo spazio M_λ visto che i $\{t\}$ formano una base di M_λ .

Ricordiamo che per ogni partizione λ abbiamo un isomorfismo di S_n -rappresentazioni

$$\begin{aligned} j: \mathbb{C}[S_n] &\longrightarrow \mathbb{C}[T_\lambda] \\ j(\sigma) &= \sigma \mathfrak{s}_\lambda . \end{aligned}$$

Tramite questo isomorfismo possiamo passare il morfismo $i: M_\lambda \rightarrow \mathbb{C}[T_\lambda]$ a un morfismo $i' = j^{-1} \circ i$. Con dei conti si vede che

$$\begin{aligned} i': M_\lambda &\longrightarrow \mathbb{C}[S_n] \\ i'(\{t\}) &= \frac{1}{|R_t|} \sum_{\sigma \in R_t} \sigma \pi \\ &= \frac{1}{|R_t|} \left(\sum_{\sigma \in R_t} \sigma \right) \pi = \frac{1}{|R_t|} R_t^+ \pi \end{aligned}$$

dove $\pi \in S_n$ è l'unica permutazione tale che $\pi \mathfrak{s}_\lambda = t$.

Dalla restrizione di i' a S_λ otteniamo il morfismo iniettivo

$$i'|_{S_\lambda}: S_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}[S_n]$$

tale morfismo manda un generatore e_t in

$$\begin{aligned} i'(e_t) &= i'(k_t \{t\}) \\ &= i'(C_t^- \{t\}) \\ &= C_t^- i'(\{t\}) \text{ (questo perché } i' \text{ è morfismo di } \mathbb{C}[S_n]\text{-moduli)} \\ &= C_t^- R_t^+ \pi \end{aligned}$$

e quindi da questo si ottiene che

$$S_\lambda = \mathbb{C}[S_n] e_t \cong \mathbb{C}[S_n] C_t^- R_t^+ \pi .$$

A questo punto usando l'isomorfismo $(-\cdot \pi^{-1})$ dato da

$$\begin{aligned} -\cdot (\pi^{-1}): \mathbb{C}[S_n] &\longrightarrow \mathbb{C}[S_n] \\ -\cdot (\pi^{-1})(g) &= g \cdot \pi^{-1} \end{aligned}$$

otteniamo che

$$S_\lambda \cong \mathbb{C}[S_n] C_t^- R_t^+ \pi \stackrel{(-\cdot \pi^{-1})}{\cong} \mathbb{C}[S_n] C_t^- R_t^+ .$$

Questo ci permette di caratterizzare gli S_λ come i sotto-moduli di $\mathbb{C}[S_n]$ generati dagli elementi della forma $C_t^- R_t^+$. In seguito vedremo che $\mathbb{C}[S_n] C_t^- R_t^+ \cong \mathbb{C}[S_n] R_t^+ C_t^-$ che ci darà l'isomorfismo cercato $S_\lambda \cong V_\lambda$.

Esercizio 7.17. Data $\lambda \vdash n$ sia λ' la partizione ottenuta per riflessione lungo la diagonale (esempio $\lambda = \begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ & \square & & & & \\ & & \square & & & \\ & & & \square & & \\ & & & & \square & \\ & & & & & \square \end{array}$ allora $\lambda' = \begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square \\ & \square & & \\ & & \square & \\ & & & \square \\ & & & & \square \\ & & & & & \square \end{array}$).

Allora dimostrare che $S^{\lambda'} = S_{\lambda} \otimes \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}$ (tensore con la segno). Ovvero $V_{\lambda} \otimes \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} = V_{\lambda'}$.

Capitolo 8

Alcuni esercizi e funzioni simmetriche

Lezione 8 (31/03/2016)

8.1 Soluzione ad alcuni esercizi

In questa sezione risolveremo alcuni esercizi che ci permettono in qualche modo di chiudere alcuni dei fatti detti, ma non dimostrati, nel precedente capitolo.

Esercizio 8.1. Il modulo $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]R_t^+C_t^-$ è isomorfo al modulo $\mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+$ e quindi a S_λ .

Soluzione. Consideriamo le mappe

$$V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+ \xrightarrow{-\cdot C_t^-} \mathbb{C}[S_n]R_t^+C_t^- \xrightarrow{-\cdot R_t^+} \mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+$$

le cui composizioni danno

$$\mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+ \xrightarrow{-\cdot C_t^-R_t^+} \mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+ .$$

L'idea è di far vedere che le mappe $-\cdot C_t^-$ e $-\cdot R_t^+$ sono due isomorfismi, per far vedere questo faremo vedere che le due composte

$$(-\cdot R_t^+) \circ (-\cdot C_t^-) = (-\cdot R_t^+C_t^-)$$

e

$$(-\cdot C_t^-) \circ (-\cdot R_t^+) = (-\cdot C_t^-R_t^+)$$

sono due isomorfismi.

Dato che $\mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+$ è un S_n -modulo irriducibile (in quanto isomorfo a S_λ) sappiamo che l'omomorfismo $-\cdot C_t^-R_t^+$ è in realtà uguale a λid per un certo $\lambda \in \mathbb{C}$. Da questo, applicando $-\cdot C_t^-R_t^+$ a $C_t^-R_t^+$ stesso, si ottiene l'uguaglianza

$$C_t^-R_t^+C_t^-R_t^+ = \lambda C_t^-R_t^+ .$$

A questo punto possiamo considerare la mappa \mathbb{C} -lineare seguente

$$i: \mathbb{C}[S_n] \longrightarrow \mathbb{C}[S_n] \\ i(\sigma) = \sigma^{-1} ,$$

definita sulla base ed estesa per linearità. Un conto ci mostra che

$$i(C_t^-R_t^+) = R_t^+C_t^- \qquad i(C_t^-R_t^+C_t^-R_t^+) = R_t^+C_t^-R_t^+C_t^-$$

ma d'altra parte noi sappiamo che $C_t^- R_t^+ C_t^- R_t^+ = \lambda C_t^- R_t^+$ e quindi

$$\begin{aligned} R_t^+ C_t^- R_t^+ C_t^- &= i(C_t^- R_t^+ C_t^- R_t^+) \\ &= i(\lambda C_t^- R_t^+) \\ &= \lambda R_t^+ C_t^- . \end{aligned}$$

Da questo segue facilmente che anche la mappa

$$\mathbb{C}[S_n] R_t^+ C_t^- \xrightarrow{-\cdot C_t^- R_t^+} \mathbb{C}[S_n] R_t^+ C_t^-$$

è uguale alla λid , in quanto per ogni elemento della forma $\eta R_t^+ C_t^-$, con $\eta \in \mathbb{C}[S_n]$, viene mandato in $\lambda(\eta R_t^+ C_t^-)$.

A questo punto ci basta far vedere che λ sia diverso da 0 per concludere: infatti se $\lambda \neq 0$ allora questo implica che

$$(-\cdot C_t^-) \circ \frac{1}{\lambda}(-\cdot R_t^+) = \frac{1}{\lambda}(-\cdot R_t^+ C_t^-) = \text{id}$$

e che

$$\frac{1}{\lambda}(-\cdot R_t^+) \circ (-\cdot C_t^-) = \frac{1}{\lambda}(-\cdot C_t^- R_t^+) = \text{id} ,$$

che prova che $(-\cdot C_t^-): \mathbb{C}[S_n] C_t^- R_t^+ \rightarrow \mathbb{C}[S_n] R_t^+ C_t^-$ è un isomorfismo, in quanto ha un inversa.

Consideriamo ancora la mappa $(-\cdot C_t^- R_t^+): \mathbb{C}[S_n] \rightarrow \mathbb{C}[S_n]$. Per ogni elemento $\sigma \in S_n$, e quindi per ogni vettore della base canonica di $\mathbb{C}[S_n]$, abbiamo che

$$\begin{aligned} (-\cdot C_t^- R_t^+)(\sigma) &= \sigma C_t^- R_t^+ \\ &= \sum_{q \in C_t} \sum_{p \in R_t} \text{sgn}(q) \sigma qp . \end{aligned}$$

A questo punto calcoliamo la traccia dell'applicazione che è

$$\begin{aligned} \text{tr}(-\cdot C_t^- R_t^+) &= \sum_{\sigma \in S_n} \langle \sigma, \sigma C_t^- R_t^+ \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{p \in R_t} \sum_{q \in C_t} \text{sgn}(q) \langle \sigma, \sigma qp \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{qp=\text{id}} \text{sgn}(q) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\langle \sigma, \tau \rangle \neq 0$ se e solo se $\sigma = \tau$ ¹ e $\langle \sigma, \sigma \rangle = 1$. Dato che $R_t \cap C_t = (\text{id})$ ne segue che l'unica coppia $(p, q) \in R_t \times C_t$ tale che $qp = \text{id}$ e proprio data da $p = q = \text{id}$. Da questo segue che

$$\text{tr}(-\cdot C_t^- R_t^+) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\text{id}) = n! .$$

A questo punto osserviamo che la nostra mappa ha immagine il sotto S_n -modulo $\mathbb{C}[S_n] C_t^- R_t^+$ e inoltre per ogni $\eta \in \mathbb{C}[S_n]$ abbiamo già visto che

$$(-\cdot C_t^- R_t^+)(\eta C_t^- R_t^+) = \eta C_t^- R_t^+ C_t^- R_t^+ = \lambda \eta C_t^- R_t^+ ,$$

¹Questo è l'unico prodotto scalare standard (non hermitiano attenzione) definito su $\mathbb{C}[S_n]$ dalla base S_n .

da questo possiamo osservare che prendendo una base v_1, \dots, v_n di $\mathbb{C}[S_n]$ in cui i primi r vettori sono una base di $\mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+$ e i restanti una base di $\ker(-\cdot C_t^-R_t^+)$, la matrice che rappresenti la $(-\cdot C_t^-R_t^+)$ in questa base è della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda \text{id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero è una matrice di proiezione a sotto-spazio, la cui traccia è uguale a $\lambda r = \lambda \dim \mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+$. Ma abbiamo già visto che la traccia dell'applicazione è pari a $n!$ e quindi

$$\begin{aligned} \lambda \dim \mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+ &= n! \\ \lambda &= \frac{n!}{\dim \mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+}, \end{aligned}$$

possiamo dividere per $\dim \mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+$ poiché abbiamo a che fare con una rappresentazione irriducibile, quindi di dimensione non nulla. Questo ci dice che $\lambda \neq 0$ e per gli argomenti detti prima ne segue che $(-\cdot C_t^-)$ ha un'inversa, quindi è un isomorfismo di S_n -moduli. \square

Un altro esercizio importante è il *teorema di Maschke* anche per campi generici.

Teorema 8.2 (di Maschke). *Sia G gruppo finito di ordine n e \mathbb{K} sia una campo con $\text{char } \mathbb{K} \nmid n$. Allora ogni \mathbb{K} -rappresentazione di G si spezza in somma diretta di irriducibili.*

Dimostrazione. Per induzione. Il punto importante: data una rappresentazione V e una sua sotto-rappresentazione U allora esiste un'altra sotto-rappresentazione complementare a U , diciamo U' , tale che $V \cong U \oplus U'$.

Prendiamo una mappa di proiezione $\pi: V \rightarrow U$ e facciamone la *media* ovvero consideriamo la $\varphi: V \rightarrow U$ definita come

$$\frac{1}{n}\varphi = \sum_{g \in G} g\pi$$

che come ben sappiamo è un omomorfismo di G -rappresentazioni, ovvero $\varphi \in \text{hom}_G[V, U] = \text{hom}[V, U]^{G^2}$.

Adesso facciamo vedere che φ è una proiezione su U (ovvero che fissa gli elementi di U : per ogni $u \in U \subseteq V$ allora abbiamo che

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (g\pi)(u) \\ &= \frac{1}{n} \sum_g g\pi(g^{-1}u) \\ &= \frac{1}{n} \sum_g gg^{-1}u \\ &= \frac{1}{n} nu = u. \end{aligned}$$

Da questo segue che è possibile dare la decomposizione $V \cong_G U \oplus \ker \varphi$. \square

Osservazione 8.3. Nel teorema precedente ci serviva l'ipotesi $\text{char } \mathbb{K} \nmid |G|$ per garantire l'esistenza dello scalare $\frac{1}{n}$ in \mathbb{K} : senza quell'ipotesi non si sarebbe potuta ottenere la proiezione G -invariante e quindi la dimostrazione non avrebbe potuto funzionare.

²Ricordiamo che abbiamo già fatto vedere che $\text{hom}_G[V, U] = \text{hom}[V, U]^{G^2}$, ovvero che gli omomorfismi di G -rappresentazioni sono tutti e soli i punti fissi dell'azione di G su $\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, U] = \text{hom}[V, U]$.

8.2 Funzioni simmetriche

Abbiamo fatto la classificazione delle rappresentazioni irriducibili di S_n . Questo ci potrebbe far pensare che abbiamo finito lo studio delle rappresentazioni di S_n , ma in realtà la questione non è così semplice: conoscere tutte le rappresentazioni irriducibili non ci dà una conoscenza di tutte le possibili rappresentazioni di S_n , per fare questo ci servirebbe la conoscenza di come si possano riscrivere tutte le possibili operazioni sulle rappresentazioni ($- \otimes -$, $-^*$, Sym^k , e così via) in termini di somme dirette. Per esempio date due rappresentazioni (con relative decomposizioni in componenti irriducibili) $V = \bigoplus_i V_i^{k_i}$ e $W = \bigoplus_j W_j^{l_j}$ ci chiediamo quali siano le decomposizioni delle rappresentazioni $V \otimes W$, $\text{hom}_{\mathbb{K}}[V, W]$, V^* etc. Con quanto visto fin ora non siamo ancora in grado di rispondere a questo quesito.

Per approcciare questo problema esistono diverse soluzioni, una di queste fa uso di tableau e tabloid per descrivere tutti le possibili rappresentazioni di S_n . Tuttavia nel seguito sceglieremo un'altra strada che ci porterà a conoscere lo strumento delle funzioni simmetriche.

Osservazione 8.4. Cominciamo con l'osservare che esiste un'ovvia azione di S_n sull'insieme dei polinomi $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, più in generale c'è un'azione su $R[X_1, \dots, X_n]$ per ogni anello R . Tale azione è definita dall'applicazione

$$\begin{aligned} S_n \times \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] &\longrightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \\ \sigma p(X_1, \dots, X_n) &= p(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma n}) . \end{aligned}$$

Questa azione è essenzialmente l'unica mappa che ad ogni $\sigma \in S_n$ associa l'unico omomorfismo di anelli

$$\begin{aligned} l_\sigma: \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] &\longrightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \\ l_\sigma(X_i) &= X_{\sigma i} \end{aligned}$$

ovvero l'omomorfismo che valuta ogni variabile X_i nella variabile $X_{\sigma(i)}$.

La verifica che questa sia effettivamente un'azione è un facile conto.

Definizione 8.5. Un polinomio $p(x) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ si dice simmetrico se per ogni $\sigma \in S_n$ si ha che

$$\sigma p(X) = p(\sigma X) = p(X) .$$

L'insieme dei polinomi simmetrici (in n -variabili) è denotato con Λ_n ed è un sotto-anello di $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$.

Osservazione 8.6. L'anello Λ_n ha la struttura di un anello graduato

$$\Lambda_n \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda_n^k$$

la cui k -esima componente graduata è data dal sotto-gruppo $\Lambda_n^k \subseteq \Lambda_n$ formato da tutti i polinomi simmetrici omogenei di grado k . Per l'esattezza con questa struttura Λ_n è un sotto-anello graduato di $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$.

Dimostrazione. Chiaramente $\Lambda_n \supseteq \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_n^k$ e facilmente si vede che $\Lambda_n^k \cap \Lambda_n^l = (0)$ per $k \neq l$. Quello che resta da provare è che $\Lambda_n \subseteq \sum_k \Lambda_n^k$.

Sappiamo che ogni polinomio $p \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ ammette una decomposizione

$$p = \sum_k p_k$$

dove ogni p_k è un polinomio omogeneo di grado k . Per concludere ci basta provare che se $p \in \Lambda_n$ allora $p_k \in \Lambda_n^k$ per ogni $k \geq 0$. Sia $\sigma \in S_n$ allora sappiamo per ipotesi che $\sigma p = p$ e quindi

$$\sum_k \sigma p_k = \sum_k p_k$$

dove ogni σp_k è omogeneo di grado k . Per l'unicità della decomposizione omogenea ne segue che si deve avere

$$\sigma p_k = p_k$$

per ogni $k \geq 0$, che appunto prova che i p_k sono polinomi simmetrici, oltre che omogenei di grado k , e quindi $p_k \in \Lambda_n^k$ per ogni k . □

Definizione 8.7. Chiameremo serie di composizione ogni sequenza $\alpha = (\alpha_n)_{n>0}$ di naturali con un numero finito di componenti non nulle.³ Per ogni α siffatto poniamo $l(\alpha) = \max\{k : \alpha_k \neq 0\}$ e $|\alpha| = \sum_n \alpha_n$. Si può osservare che $l(-)$ e $|-|$ appena definiti estendono le corrispondenti operazioni definite per le partizioni: chiaramente ogni partizione è una serie di composizione.

Notazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ e α tale che $l(\alpha) = n$ indichiamo con X^α il polinomio

$$X^\alpha = \prod_{n=1}^{\infty} X^{\alpha_n} .$$

Osserviamo che questa definizione è buona poiché per ogni $k > n$, per definizione di $l(\alpha)$, si ha che $\alpha_k = 0$ e quindi $X^{\alpha_k} = 1$.

Osservazione 8.8. Facciamo notare che per ogni monomio X^α si ha che

$$\begin{aligned} \sigma X^\alpha &= \prod_{i=1}^n \sigma X_i^{\alpha_i} \\ &= \prod_{i=1}^n X_{\sigma i}^{\alpha_i} \\ &= \prod_{j=1}^n X_j^{\alpha_{\sigma^{-1}j}} = X^{\alpha \sigma^{-1}} . \end{aligned}$$

Definizione 8.9. Data $\lambda \vdash n$, e quindi $l(\lambda) \leq n$, definiamo

$$m_\lambda^{(n)}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\alpha \in \lambda S_n} X^\alpha$$

³O equivalentemente una sequenza definitivamente nulla.

dove $\lambda S_n = \{(\lambda_{\sigma(n)})_n : \sigma \in S_n\}$ è l'orbita dell'azione destra di S_n ⁴ sull'insieme delle sequenze $\alpha = (\alpha_n)_n$ tali che $l(\alpha) \leq n$.

Osservazione 8.10. Iniziamo a osservare che gli $\alpha \in \lambda S_n$ sono tutte sequenze che hanno $l(\alpha) \leq n$. Inoltre gli α che stanno in λS_n , non sono in biiezione con le permutazioni di S_n , a meno che λ non sia strettamente decrescente: questo perché se λ non è strettamente monotona in generale esistono delle permutazioni che fissano λ stesso e quindi ci sono permutazioni di S_n a cui corrispondono stessi elementi di λS_n .⁵

Questo vuol dire che i monomi che appaiono in $m_\lambda^{(n)}$ non sono necessariamente $n!$.

Esempio 8.11. Per $n = 3$ e $\lambda = (1, 1, 0, 0, \dots)$ abbiamo $m_\lambda^{(3)} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, per $n = 4$ e $\lambda = (2, 0, 0, \dots)$ abbiamo $m_\lambda^{(4)} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Proposizione 8.12. *L'insieme $\{m_\lambda^{(n)}\}_{l(\lambda) \leq n}$ è una base di Λ_n (come gruppo abeliano), più nello specifico $\{m_\lambda^{(n)}\}_{l(\lambda) \leq n, |\lambda|=k}$ è una base di Λ_n^k .*

Dimostrazione. Cominciamo con il provare che $\{m_\lambda^{(n)} : l(\lambda) \leq n, |\lambda| = k\}$ è una base di Λ_n^k . Sia dunque $p \in \Lambda_n^k$ allora sappiamo che esiste una scrittura unica della forma

$$p = \sum_{|\alpha|=k, l(\alpha) \leq k} c_\alpha X^\alpha$$

dove $(c_\alpha)_\alpha \in \bigoplus_{l(\alpha) \leq n, |\alpha|=k} \mathbb{Z}$. Per ogni $\sigma \in S_n$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \sigma p &= \sum_{|\alpha|=k, l(\alpha) \leq n} c_\alpha \sigma X^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=k, l(\alpha) \leq n} c_\alpha X^{\alpha \sigma^{-1}} \\ &= \sum_{|\alpha|=k, l(\alpha) \leq n} c_{\alpha \sigma} X^\alpha. \end{aligned}$$

inoltre grazie al fatto che p è simmetrico abbiamo che $\sigma p = p$ e quindi, sfruttando il fatto che gli X^α sono una base di $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ (come gruppo abeliano), abbiamo che

$$c_\alpha = c_{\alpha \sigma}$$

per ogni $\sigma \in S_n$. Questo ci dice che per ogni coppia di α e β serie di composizione se $\beta = \alpha \sigma$ allora $c_\alpha = c_\beta$.

⁴Implicitamente identifichiamo ogni $\sigma \in S_n$ con la permutazione estesa $\tilde{\sigma}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definita come $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ per $i \leq n$ e $\tilde{\sigma}(i) = i$ per gli altri i .

⁵Questo è dovuto al ben noto fatto che $|\lambda S_n| = |S_n|/|\text{Stab}(\lambda)|$ e che se $\text{Stab}(\lambda) \neq \{\text{id}\}$ allora $|\lambda S_n| \neq |S_n|$.

Per concludere osserviamo che per ogni α tale che $l(\alpha) \leq n$ e $|\alpha| = k$ esiste ed è unica la partizione λ_α tale che $l(\lambda_\alpha) \leq n$, $|\lambda_\alpha| = k$ e $\alpha = \lambda\sigma$ per qualche $\sigma \in S_n$. Con questo abbiamo che

$$\begin{aligned} p &= \sum_{\lambda \vdash k, l(\lambda) \leq n} \sum_{\alpha \in \lambda S_n} c_\alpha X^\alpha \\ &= \sum_{\lambda \vdash k, l(\lambda) \leq n} \sum_{\alpha \in \lambda S_n} c_\lambda X^\alpha \\ &= \sum_{\lambda \vdash k, l(\lambda) \leq n} c_\lambda \sum_{\alpha \in \lambda X_n} X^\alpha \\ &= \sum_{\lambda \vdash k, l(\lambda) \leq n} c_\lambda m_\lambda^{(n)} \end{aligned}$$

che prova che $p \in \langle m_\lambda^{(n)} \rangle_{|\lambda|=k, l(\lambda) \leq n}$.

Per provare l'unicità della decomposizione basta osservare che se

$$p = \sum_{l(\lambda) \leq n, |\lambda|=k} d_\lambda m_\lambda^{(n)}$$

allora si dovrebbe avere

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} d_\lambda m_\lambda^{(n)} &= \sum_{\lambda} \sum_{\alpha \in \lambda S_n} d_\lambda X^\alpha \\ &= \sum_{\lambda} \sum_{\alpha \in \lambda S_n} c_\alpha X^\alpha \\ &= \sum_{\lambda} \sum_{\alpha \in \lambda S_n} c_\lambda X^\alpha \end{aligned}$$

da cui segue subito che $d_\lambda = c_\lambda$ per l'indipendenza lineare degli X^α .

Questo prova che gli $\{m_\lambda^{(n)}\}_{\lambda \vdash k}$ sono una base di Λ_n^k . Dato che Λ_n è somma diretta dei Λ_n^k ne segue che $\{m_\lambda^{(n)}\}_{l(\lambda) \leq n}$ è una base di Λ_n . \square

Osservazione 8.13. Se $m > n$ allora abbiamo un'ovvia mappa

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}: \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m] &\longrightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \\ X_i &\mapsto X_i \text{ se } i \leq n \\ X_i &\mapsto 0 \text{ altrimenti.} \end{aligned}$$

Osservazione 8.14. Le $\rho_{m,n}$ sono omogenee: per ogni grado k e per monomio X^α , con α tale che $l(\alpha) \leq m$ e $|\alpha| = k$, abbiamo che $\rho_{m,n}(X^\alpha) = 0$, se compare una X_i con $i > n$, altrimenti $\rho_{m,n}(X^\alpha) = X^\alpha$, in entrambi i casi abbiamo $\rho_{m,n}(X^\alpha) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]_k$; ⁶ dato che gli X^α così fatti sono una base del gruppo dei polinomi omogenei di grado k questo ci permette di concludere che effettivamente le $\rho_{m,n}$ mandano componenti omogenee di $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ in componenti omogenee di $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$.

⁶Con $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]_k$ indichiamo il sotto-gruppo dei polinomi omogenei di grado k .

Osservazione 8.15. Le $\rho_{m,n}$ restringono a delle $\rho_{m,n}: \Lambda_m \rightarrow \Lambda_n$, per verificarlo basta un semplice conto: per $p \in \Lambda_m$ e per $\sigma \in S_n$ allora

$$\begin{aligned} \sigma \rho_{m,n}(p(X_1, \dots, X_m)) &= \sigma p(X_1, \dots, X_n, 0, \dots, 0) \\ &= p(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma n}, 0, \dots, 0) \\ &= \rho_{m,n}(p(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma n}, X_{n+1}, \dots, X_m)) \\ &= \rho_{m,n}(\sigma p(X_1, \dots, X_m)) = \rho_{m,n}(p(X_1, \dots, X_m)) . \end{aligned}$$

Osservazione 8.16. Dato che le $\rho_{m,n}$ sono mappe omogenee esse restringono a delle mappe

$$\rho_{m,n}^k: \Lambda_m^k \rightarrow \Lambda_n^k .$$

Posto $k \leq n \leq m$, per ogni λ con $|\lambda| = k$ si ha che $l(\lambda) \leq |\lambda| = k \leq n$, quindi in tal caso, facendo un po' di conti sulla base $\{m_\lambda^{(m)}: \lambda\}$, si riesce a vedere che $\rho_{m,n}^k$ è un isomorfismo.

Definizione 8.17. Fissato k abbiamo il seguente diagramma di moduli

$$\Lambda_1^k \xleftarrow{\rho_{1,2}^k} \Lambda_2^k \xleftarrow{\rho_{3,2}^k} \Lambda_3^k \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} \Lambda_n^k \xleftarrow{\rho_{n+1,n}^k} \Lambda_{n+1}^k \xleftarrow{\quad} \dots$$

Allora chiamiamo Λ^k il limite inverso del diagramma sopra: $\Lambda^k = \varprojlim \Lambda_n^k$.

Osservazione 8.18. In verità le $\rho_{m,n}: \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m] \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, tra gli anelli polinomiali, sono anche esse restrizioni degli omomorfismi

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}: \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_m]] &\longrightarrow \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]] \\ \rho_{m,n}(s(X_1, \dots, X_m)) &= s(X_1, \dots, X_n, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

definiti tra anelli di serie formali in più variabili. Anche in questo caso otteniamo un sistema inverso

$$\mathbb{Z}[[X_1]] \xleftarrow{\rho_{2,1}} \mathbb{Z}[[X_1, X_2]] \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\rho_{n,n-1}} \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]] \xleftarrow{\rho_{n+1,n}} \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_{n+1}]] \xleftarrow{\quad} \dots$$

e quindi un limite inverso $\varprojlim_n \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]]$.

Un generico elemento $p = (p_n)_n \in \varprojlim_n \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]]$ è tale che per ogni $n \geq 1$ si abbia

$$p_{n+1}(X_1, \dots, X_n, 0) = p_n(X_1, \dots, X_n) ,$$

e quindi si deve avere

$$p_{n+1}(X_1, \dots, X_{n+1}) = p_n(X_1, \dots, X_n) + X_{n+1} h_{n+1}(X_1, \dots, X_{n+1}) ,$$

per un unico $h_{n+1} \in \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_{n+1}]]$. Da quanto detto segue che una sequenza coerente $(p_n)_n$ (ovvero un elemento di $\varprojlim_n \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]]$) deve essere nella forma

$$(p_n)_n = (h_0 + \sum_{i=1}^n X_i h_i(X_1, \dots, X_i))_n ,$$

per degli opportuni $h_i \in \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_i]]$ e un $h_0 \in \mathbb{Z}$ che sono univocamente determinati dai p_n .

Prima procedere ulteriormente diamo un'osservazione

Osservazione 8.19. Esiste il seguente omomorfismo⁷

$$\lim: \varprojlim_n \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]] \longrightarrow \mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$$

$$\lim \left(\left(h_0 + \sum_{i=1}^n X_i h_i(X_1, \dots, X_i) \right)_n \right) = h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} X_i h_i(X_1, \dots, X_i) .$$

La cosa interessante è che questo è in realtà un isomorfismo: non è difficile vedere che $\ker \lim = (0)$, e che quindi \lim sia iniettivo, per provare la suriettività basta osservare che per ogni $h \in \mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$ la successione $(h_n)_n \in \prod_n \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]]$ definita da

$$h_n = h(X_1, \dots, X_n, 0, \dots)$$

è coerente e che $\lim((h_n)) = h$.

Osservazione 8.20. Abbiamo il seguente diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi abeliani

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & \Lambda_n^k & \xleftarrow{\rho_{n+1,n}} & \Lambda_{n+1}^k & \xleftarrow{\rho_{n+2,n+1}} & \Lambda_{n+2}^k & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & \Lambda_n & \xleftarrow{\rho_{n+1,n}} & \Lambda_{n+1} & \xleftarrow{\rho_{n+2,n+1}} & \Lambda_{n+2} & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] & \xleftarrow{\rho_{n+1,n}} & \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n+1}] & \xleftarrow{\rho_{n+2,n+1}} & \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n+2}] & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]] & \xleftarrow{\rho_{n+1,n}} & \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_{n+1}]] & \xleftarrow{\rho_{n+2,n+1}} & \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_{n+2}]] & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

in cui i morfismi verticali sono le naturali immersioni. Da questo diagramma otteniamo la seguente sequenza di immersioni

$$\varprojlim_n \Lambda_n^k \hookrightarrow \varprojlim_n \Lambda_n \hookrightarrow \varprojlim_n \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{i} \varprojlim_n \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$$

dove l'ultimo omomorfismo è l'isomorfismo \lim dell'osservazione 8.19.

In questo modo ogni $p^k \in \Lambda^k$ può essere unicamente rappresentato come una serie formale. Nello specifico se $p^k = (p_n^k)$ con

$$p_n^k = h_0 + \sum_{i=1}^n X_i h_i(X_1, \dots, X_i) ,$$

dove gli h_i sono tutti omogenei di grado $k - 1$, allora

$$i(p^k) = h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} X_i h_i$$

⁷Qui di seguito con $\mathbb{Z}[[X_n : \mathbb{N}_0]]$ indichiamo l'anello delle serie di potenze nelle variabili $\{X_n : n > 0\}$ e nella definizione di \lim usiamo la caratterizzazione delle successioni coerenti in $\varprojlim_n \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]]$ come visto nell'osservazione 8.18.

e quindi ogni p^k corrisponde un'unica serie di potenze composta usando solo monomi di grado k , qualcosa che potremmo chiamare una serie omogenea di grado k .

Definizione 8.21. Chiameremo anello delle funzioni simmetriche l'anello graduato $\Lambda = \bigoplus_k \Lambda^k$, con la struttura di gruppo additivo, data da quella di somma diretta, e la moltiplicazione (graduata) ovvia:

$$\begin{aligned} \Lambda^k \times \Lambda^l &\longrightarrow \Lambda^{k+l} \\ (p_n)_n \cdot (q_n)_n &= (p_n q_n)_n . \end{aligned}$$

Per vedere che questa moltiplicazione è ben definita possiamo cominciare con l'osservare che dato che p_n e q_n sono polinomi omogenei di grado k e l nelle variabili X_1, \dots, X_n il loro prodotto $p_n q_n$ è un polinomio omogeneo di grado $k+l$ nelle variabili X_1, \dots, X_n . Per concludere possiamo osservare che poiché ogni $\rho_{n+1,n}$ è un omomorfismo

$$\begin{aligned} \rho_{n+1,n}(p_{n+1}q_{n+1}) &= \rho_{n+1,n}(p_{n+1})\rho_{n+1,n}(q_{n+1}) \\ &= p_n q_n \end{aligned}$$

che appunto prova che la sequenza $(p_n q_n)_n$ è una *sequenza coerente* e quindi un elemento di Λ^{k+l} .

Osservazione 8.22. Usando le immersioni dei Λ^k in $\mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$ non è difficile osservare che essi estendono a un omomorfismo

$$\begin{aligned} i: \Lambda = \bigoplus_k \Lambda^k &\longrightarrow \mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]] \\ i\left(\sum_{k=0}^n p^{(k)}\right) &= \sum_{k=0}^n i(p^{(k)}) \end{aligned}$$

dove ogni $p^{(k)} \in \Lambda^k$ viene mandato in una serie formale della forma

$$i(p^{(k)}) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha X^\alpha .$$

Non è difficile vedere che questo è *quasi un omomorfismo di anelli graduati*,⁸ dove la gradazione di Λ è quella data dalla decomposizione nei Λ^k mentre quella di $\mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$ è quella data dai gradi dei monomi che compongono le serie formali: data una serie $s = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha$ la sua componente omogenea di grado k è la serie formale $\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha X^\alpha$.

Se identifichiamo gli elementi di Λ con le loro serie formali tramite l'immersione i possiamo osservare che per ogni $p \in \Lambda$ corrisponde a una serie formale in cui i monomi che compaiono devono avere grado limitato, cioè solo della forma $\sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha X^\alpha$. Ovviamente esistono infinite α tali che $|\alpha| = k$, per esempio per $k = 1$ abbiamo le $(\alpha^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ definite come

$$\alpha_n^i = \begin{cases} 1 & \text{se } n = i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

⁸Non è proprio un omomorfismo di anelli graduati perché $\mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$ non è somma-diretta delle sue componenti omogenee ma un prodotto: un generico elemento è una somma infinita di serie di monomi di grado di fissato.

Questo esempio ci mostra che le $\sum_{\alpha} c_{\alpha} X^{\alpha}$ corrispondenti a elementi di Λ non si riducono mai a somme finite.⁹

Osservazione 8.23. Ricordiamo che avevamo visto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ i polinomi $m_{\lambda}^{(n)}$, al variare di λ tra le partizioni di lunghezza n (ovvero tali che $l(\lambda) \leq n$), formavano una base di Λ_n^k . Un conto ci mostra che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e i λ come sopra vale anche che

$$\rho_{n+1,n}(m_{\lambda}^{n+1}) = m_{\lambda}^{(n)}.$$

Da questo segue che la sequenza $(m_{\lambda}^{(n)})_n$ è coerente e quindi ci da un elemento di Λ^k .

Non è difficile vedere che gli $m_{\lambda} = (m_{\lambda}^{(n)})_n$, al variare di λ tra tutte le possibili partizioni, formano una base di Λ . In particolare gli m_{λ} , con $|\lambda| = k$ formano una base di Λ^k .¹⁰

Dimostrazione. Per dimostrare il risultato cominciamo con l'osservare che per ogni $n \geq k$ i morfismi $\rho_{n+1,n}: \Lambda_{n+1}^k \rightarrow \Lambda_n^k$ sono biettivi e quindi isomorfismi. Sappiamo già che i $(m_{\lambda}^{(n)})_n$ e i $(m_{\lambda}^{(n+1)})_n$, con $|\lambda| = k$, sono una base rispettivamente di Λ_n^k e Λ_{n+1}^k , inoltre sappiamo anche che

$$\rho_{n+1,n}(m_{\lambda}^{(n+1)}) = m_{\lambda}^{(n)}$$

da cui segue che $\rho_{n+1,n}$ manda in modo biunivoco una base di Λ_{n+1}^k in una base di Λ_n^k e quindi è un isomorfismo. A partire da questo, grazie a dei risultati generali sui limiti inversi, ne segue che le mappe di proiezione canonica

$$\pi_n: \Lambda^k \longrightarrow \Lambda_n^k$$

sono degli isomorfismi per $n \geq k$.

Usando il fatto che per ogni λ tale che $|\lambda| = k$ si ha che $\pi_k(m_{\lambda}) = m_{\lambda}^{(k)}$, che i $m_{\lambda}^{(k)}$ sono una base di Λ_k^k e che i π_k sono isomorfismi ne segue i m_{λ} sono una base di Λ^k , in quanto immagine inversa di una base di Λ_k^k tramite un isomorfismo.

Dal fatto che i $(m_{\lambda})_{|\lambda|=k}$ sono una base di Λ^k per ogni k segue che i $(m_{\lambda})_{\lambda}$ sono una base di $\Lambda = \bigoplus_k \Lambda^k$. □

Definizione 8.24. Per ogni $r, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq r$ definiamo la seguente famiglia di polinomi simmetrici:

$$e_r^{(n)} = m_{\lambda=(1,1,1,\dots,1,0,0,0,\dots)}^{(n)}$$

dove $|\lambda| = l(\lambda) = r$. Gli $e_r^{(n)}$ ovviamente ci danno una famiglia coerente $e_r = (e_r^{(n)})_n$ ovvero delle funzioni simmetriche (elementi di Λ), tali e_r prendono il nome *funzioni simmetriche elementari*.

Osservazione 8.25. Gli $e_r^{(n)}$ compaiono naturalmente come *coefficienti* dei polinomi $p(X) = (X - \gamma_1) \dots (X - \gamma_n)$: in dettaglio abbiamo

$$p(X) = X^n + e_{n-1}^{(n)}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) X^{n-1} + \dots + e_0^{(n)}(\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Definizione 8.26. Esiste un importante elemento di $\Lambda[[t]]$ che è dato da $E(t) = \sum_{r \in \mathbb{N}} e_r t^r$.

⁹Non diamo una dimostrazione di questo fatto, che per quanto interessante non ci servirà nel seguito. Il lettore desideroso è comunque invitato a provare questo risultato per prendere familiarità con questa rappresentazione delle funzioni simmetriche.

¹⁰Per base si intende come gruppo abeliano.

Osservazione 8.27. Prima di proseguire facciamo una piccola digressione.

Abbiamo visto che esiste un isomorfismo $\lim_{\leftarrow n} \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]] \rightarrow \mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$ che ad ogni successione $(s_n)_n \in \prod_n \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]]$ di serie formali coerente associa il suo *limite* in $\mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$, tale isomorfismo da un'operazione di limite anche sulle serie formali a coefficienti in $\mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$: data una successione $(S_n) \in \mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]][t]$, dove possiamo porre

$$S_n = \sum_{r=0}^{\infty} c_r^{(n)} t^r$$

tali che per ogni r fissato le successioni $(c_r^{(n)})_n \in \prod_n \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]]$ siano coerenti, possiamo definire il limite della successione (S_n) come quella $S \in \mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]][t]$ definita da

$$S = \sum_r (\lim_n c_r^{(n)}) t^r .$$

Non è difficile vedere che quando gli $(c_r^{(n)})_n \in \prod_n \Lambda_n$ allora si ha $\lim S_n \in \Lambda[[t]]$.

Proposizione 8.28. *Vale che $E(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + X_i t)$, dove $\prod_{i=1}^{\infty}$ è l'operatore $\lim_n \prod_{i=1}^n$ che fa il limite dei prodotti parziali.*

Dimostrazione. Consideriamo la sequenza $(\prod_{i=1}^n (1 + X_i t))_n$ che vive nell'anello $\mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]][[t]]$. Possiamo osservare che per ogni n fissato

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (1 + X_i t) &= \sum_{r=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_r} X_{i_1} \dots X_{i_r} t^r \\ &= \sum_r e_r^{(n)} t^r \end{aligned}$$

Quindi la successione S_n definita da

$$S_n = \prod_{i=1}^n (1 + X_i t)$$

da una sequenza coerente di serie formali in $\mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]][[t]]$ e quindi effettivamente ammette un limite.

Dalla definizione del limite segue che

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\infty} (1 + X_i t) &= \lim \prod_{i=1}^n (1 + X_i t) \\ &= \lim_n \sum_r e_r^{(n)} t^r \\ &= \sum_r e_r t^r = E(t) , \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare. □

Definizione 8.29. Per ogni partizione $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots)$ definiamo $e_\lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k}$.

Teorema. *Gli e_λ costituiscono una base di Λ su \mathbb{Z} .*

La dimostrazione la vedremo nel prossimo capitolo.

Corollario. *Abbiamo che $\Lambda = \mathbb{Z}[e_n : n \in \mathbb{N}]$, con gli e_i algebricamente indipendenti: ovvero Λ è anello polinomiale negli e_i .*

Questo ci dice che ogni funzione simmetrica si può scrivere come un polinomio delle funzioni simmetriche e, a meno di passare alle proiezioni $\Lambda \rightarrow \Lambda_n$ (che valutano tutte le variabili di indice maggiore strettamente di n a 0), questo ci dice anche che ogni polinomio simmetrico si può scrivere come un polinomio valutato nei polinomi simmetrici elementari.

Capitolo 9

Altre due basi per l'anello delle funzioni simmetriche: funzioni simmetriche elementari e funzioni simmetriche complete

Lezione 9 (04/04/2016)

9.1 Ancora su funzioni simmetriche elementari

Nel precedente capitolo avevamo enunciato un teorema tralasciando la dimostrazione.

Teorema 9.1. *Gli e_λ sono un base di Λ su \mathbb{Z} , al variare di λ tra le partizioni.*

Per dimostrare questo teorema useremo il seguente teorema.

Teorema 9.2. *Sia λ una partizione e λ' la sua coniugata¹. Allora*

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_{\lambda > \mu} a_{\lambda\mu} m_\mu .$$

Esempio 9.3.

$$e_{\square\square\square} = m_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} + \dots \text{ niente perché non ci sono } \mu \prec \lambda$$
$$e_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} = m_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} + cm_{\square\square\square}$$

Osservazione 9.4. L'esempio precedente ci suggerisce che la matrice che esprime gli $e_{\lambda'}$ rispetto agli m_λ ² risulta essere triangolare, con 1 sulla diagonale e a coefficienti interi.

Dimostrazione: del teorema 9.2. Abbiamo che

$$e_{\lambda'} = e_{\lambda'_1} \dots e_{\lambda'_k}$$

¹La partizione corrispondente al diagramma di Ferrer riflesso rispetto alla diagonale del diagramma di λ .

²Matrice di cambiamento di base.

dove ogni $e_{\lambda'_j}$ può essere scritto come

$$e_{\lambda'_j} = \sum_{n_{1,j} < \dots < n_{\lambda'_j,j}} X_{n_{1,j}} \dots X_{n_{\lambda'_j,j}}$$

questo ci dice che $e_{\lambda'}$ è somma di prodotti di monomi della forma

$$\prod_j X_{n_{1,j}} \dots X_{n_{\lambda'_j,j}}$$

per delle famiglie $(n_{i,j})_{i,j}$ che siano monotone in ogni j fissato e il cui dominio, l'insieme delle coppie di indici per cui $n_{i,j}$ è definito, è dato da

$$\{ (i, j) : j \leq l(\lambda'), i \leq \lambda'_j \} = \{ (i, j) : i \leq l(\lambda), j \leq \lambda_i \} = I_\lambda .$$

Da questo segue che un monomio m compare in $e_{\lambda'}$ se e solo se esiste una funzione $n : I_\lambda \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni j la funzione ristretta $n_{-,j}$ sia monotona stretta e valga l'uguaglianza

$$m = \prod_{i=1, \dots, l(\lambda)} \prod_{j=1, \dots, \lambda_i} X_{n_{i,j}} .$$

Abbiamo già visto che i m_μ sono una base di Λ e quindi sappiamo che esiste una famiglia di coefficienti $(c_\mu)_\mu$ tale che

$$e_{\lambda'} = \sum_{\mu} c_\mu m_\mu$$

dove al più un numero finito di $c_\mu \neq 0$. Ovviamente per come sono fatti di m_μ abbiamo che $c_\mu \neq 0$ se e solo se il monomio $X_1^{\mu_1} \dots X_l^{\mu_l}$ compare in $e_{\lambda'}$, dove $l = l(\mu)$. Se tale monomio compare in $e_{\lambda'}$ allora questo vuol dire che esiste una funzione $n : I_\lambda \rightarrow \mathbb{N}$ tale che

$$X_1^{\mu_1} \dots X_l^{\mu_l} = \prod_{i=1, \dots, l(\lambda)} \prod_{j=1, \dots, \lambda_i} X_{n_{i,j}}$$

con ogni $n_{-,j}$ strettamente monotona.³ Se questa uguaglianza sussiste questo vuol dire che μ_i sarà pari al numero di coppie (i', j') tali che $n_{i',j'} = i$. Inoltre per la monotonia della $n_{-,j}$ sappiamo che per $(i', j') \in I_\lambda$ vale $n_{i',j'} = i$ solo se $i' \leq i$.⁴ Da questo si può dedurre che vale la seguente inclusione

$$\{ (i', j') \in I_\lambda : n_{i',j'} \leq i \} \subseteq \{ (i', j') \in I_\lambda : i' \leq i \} .$$

³Ogni $(n_{i,j})$ può essere pensato come a un riempimento del diagramma di Ferrer associato a λ con dei numeri, in modo tale che in ogni colonna i numeri siano disposti in ordine crescente dall'alto verso il basso.

⁴Se così non fosse, ovvero se $i' > i$, allora $\{n_{i'',j'} : i'' < i'\}$ conterrebbe più di i elementi e quindi per principio dei cassetti, o piccionaia, ci dovrebbe essere un $i'' < i'$ tale che $n_{i'',j'} > i = n_{i',j'}$, contro la monotonia della $n_{-,j}$.

Ora il primo insieme ha cardinalità pari al numero di occorrenze delle variabili X_1, \dots, X_i nel monomio

$$\prod_{i=1, \dots, l(\lambda)} \prod_{j=1, \dots, \lambda_i} X_{n_{i,j}},$$

che per costruzione è uguale a $X_1^{\mu_1} \dots X_l^{\mu_l}$, e quindi ha cardinalità $\sum_{i' \leq i} \mu_{i'}$. Del secondo insieme sappiamo benissimo che ha cardinalità pari a $\sum_{i' \leq i} \lambda_{i'}$, quindi l'inclusione ci dà la disuguaglianza:

$$\sum_{i' \leq i} \mu_{i'} \leq \sum_{i' \leq i} \lambda_{i'}$$

ovvero che $\mu \preceq \lambda$. Questo prova che $c_\mu \neq 0$ solo se $\mu \preceq \lambda$.

L'ultima cosa da far vedere che è che $c_\lambda = 1$. Per fare questo ricordiamo che, per come è fatto $e_{\lambda'}$, il coefficiente c_μ conta il numero di modi di ottenere il monomio $X_1^{\mu_1} \dots X_l^{\mu_l}$ come prodotto della forma $\prod_{(i,j) \in I_\lambda} X_{n_{i,j}}$, al variare di $(n_{i,j})$ in famiglie del tipo descritto sopra. Anche in questo caso un argomento basato sul principio dei cassetti ci permette di dire che esiste un'unica $(n_{i,j})$ tale che

$$\prod_{(i,j)} X_{n_{i,j}} = X_1^{\lambda_1} \dots X_{k'}^{\lambda_{k'}} \text{ dove } k' = l(\lambda),$$

nello specifico la famiglia definita dall'equazione $n_{i,j} = i$, quindi $c_\lambda = 1$. □

Dimostrazione: del teorema 9.1. Vogliamo far vedere che gli e_λ formano una base di Λ , come gruppo abeliano. Dal teorema 9.2 sappiamo che ogni λ partizione si ha

$$e_\lambda = m_{\lambda'} + \sum_{\mu \prec \lambda'} c_\mu^{\lambda'} m_\mu$$

da questo possiamo costruire il seguente omomorfismo di gruppi abeliani, definito su una base di Λ ,

$$\begin{aligned} f: \Lambda &\longrightarrow \Lambda \\ f(m_\lambda) &= e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} c_\mu^\lambda m_\mu \end{aligned}$$

Far vedere che questo sia un isomorfismo è un facile esercizio di algebra lineare. Un modo di provarlo è considerare sulle partizioni l'ordinamento lessicografico (\leq), che è un buon ordinamento, e osservare che f essenzialmente è il limite diretto della famiglia di omomorfismi

$$\begin{aligned} f_\lambda: \Lambda_{\leq \lambda} &\longrightarrow \Lambda_{\leq \lambda} \\ f_\lambda(m_\mu) &= m_\mu + \sum_{\mu' \prec \mu} c_{\mu'}^\mu m_{\mu'} \end{aligned}$$

dove $\Lambda_{\leq \lambda}$ è il sotto-gruppo di Λ generato dai m_μ con $\mu \leq \lambda$.

Con un conto si vede che, nella base ben ordinata $\{m_\mu: \mu \leq \lambda\}$, la f_λ è rappresentata da una matrice triangolare avente tutti gli elementi sulla diagonale pari a 1 e pertanto invertibile. A partire da questo è facile vedere che f è iniettivo: infatti se

$$f \left(\sum_{i=1}^k c_{\lambda_i} m_{\lambda_i} \right) = 0,$$

in cui possiamo supporre che $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ rispetto all'ordinamento lessicografico, da questo seguirebbe che

$$f_\lambda \left(\sum_{i=1}^k c_{\lambda_i} m_{\lambda_i} \right) = 0$$

e quindi $c_{\lambda_i} = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$. In maniera analoga dalla suriettività degli f_λ segue la suriettività di f : per ogni m_λ sappiamo che esiste una certa famiglia $(c_\mu)_{\mu \leq \lambda}$ tale che

$$f_\lambda \left(\sum_{\mu \leq \lambda} c_\mu m_\mu \right) = m_\lambda$$

e quindi conseguentemente

$$f \left(\sum_{\mu \leq \lambda} c_\mu m_\mu \right) = m_\lambda$$

da cui segue che $\text{Im } f$ contiene una base di Λ , quindi che è suriettivo.

Il fatto che f sia un isomorfismo implica che la famiglia $\{e_{\lambda'}\}_\lambda$, e quindi anche la famiglia $\{e_\lambda\}_\lambda$, sia una base, in quanto immagine tramite un isomorfismo di una base di Λ . \square

Corollario 9.5. $\Lambda = \mathbb{Z}[e_n: n \in \mathbb{N}]$ dove gli e_i sono algebricamente indipendenti.

Dimostrazione. Consideriamo l'omomorfismo di anelli

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z}[X_n: n \in \mathbb{N}] &\longrightarrow \Lambda \\ f(X_n) &= e_n \end{aligned}$$

dato che $e_\lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k}$, per ogni λ con $k = l(\lambda)$, abbiamo che

$$f(X_{\lambda_1} \dots X_{\lambda_k}) = e_\lambda$$

quindi f è suriettivo perché l'immagine contiene una base di Λ come gruppo additivo.

Inoltre f è anche iniettivo: ogni monomio si può scrivere nella forma $X_{\lambda_1} \dots X_{\lambda_k}$ per λ una partizione di lunghezza k e quindi f manda i monomi di $\mathbb{Z}[X_n: n \in \mathbb{N}]$, ovvero una base, nella base $\{e_\lambda\}_\lambda$ di Λ .

Dunque f è un isomorfismo, quindi gli e_n formano un sistema di generatori algebricamente indipendenti per Λ . \square

Osservazione 9.6. Per i teoremi 9.1 e 9.2 valgono dei risultati analoghi per i Λ_n , nello specifico ricordiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ abbiamo i polinomi $m_\lambda^{(n)}$ al variare di λ tali che $l(\lambda) \leq n$, che formano una base di Λ_n , e i polinomi simmetrici elementari $e_r^{(n)} = m_{(\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots)}^{(n)}$. Ponendo

$$e_\lambda^{(n)} = e_{\lambda_1}^{(n)} \dots e_{\lambda_k}^{(n)}$$

con $\lambda_i \leq n$ per ogni $i \leq k = l(\lambda)$, abbiamo che

1. per ogni λ , come sopra, vale l'uguaglianza

$$e_{\lambda'}^{(n)} = m_\lambda^{(n)} + \sum_{\mu < \lambda} c_\mu m_\mu^{(n)}$$

2. gli $e_\lambda^{(n)}$ sono una base di Λ_n
3. $\Lambda_n = \mathbb{Z}[e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}]$ con gli $e_i^{(n)}$ algebricamente indipendenti.

Un modo di dimostrare questo può essere il ripercorrere le dimostrazioni dei teoremi 9.1 e 9.2 lavorando con i polinomi in n -variabili anziché con serie di potenze in infinite variabili. Un altro modo è considerare il morfismo

$$\begin{aligned} f_n: \Lambda &\longrightarrow \Lambda_n \\ f_n(m_\lambda) &= m_\lambda^{(n)} \end{aligned}$$

ottenuto come restrizione dell'unico omomorfismo

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{Z}[[X_n: n \in \mathbb{N}_0]] &\longrightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \\ f_n(X_i) &= \begin{cases} X_i & \text{per } i \leq n \\ 0 & \text{se } i > n \end{cases} \end{aligned}$$

È facile vedere che $f_n(e_\lambda) = e_\lambda^{(n)}$ e sfruttando le proprietà dell'omomorfismo f_n si possono dimostrare i risultati anzidetti.

In particolare per quanto appena visto abbiamo che:

Corollario. *Sia $g(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio simmetrico con n -variabili, ovvero un elemento di Λ_n , allora $g(x_1, \dots, x_n) = h(e_1, \dots, e_n)$ per qualche $h \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$.*

Prima di concludere questa sezione diamo qualche applicazione dei risultati fin qui visti sulle funzioni simmetriche elementari.

Esempio 9.7. Trovare le funzioni $f: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ che siano polinomiali (nei coefficienti della matrice) e invarianti per coniugio.⁵

Sia f una tale funzione e sia $\text{Diag} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ il sotto-spazio delle matrici diagonali. Ovviamente $f|_{\text{Diag}}$ sarà una funzione dipendente solo da n -coefficienti, quelli sulla diagonale. La richiesta di invarianza per coniugio⁶ di f implica che $f|_{\text{Diag}}$ è un polinomio simmetrico.

⁵Questo è un problemino che viene dalla teoria degli invarianti.

⁶Per coniugio si intende la similitudine di matrici, non il coniugio dei complessi.

Per il corollario $f|_{\text{Diag}} = g(e_1, \dots, e_n)$ dove gli $e_i(d_1, \dots, d_n)$ sono i polinomi simmetrici visti prima.

Ricordiamo che ad ogni matrice $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C} \times n}(n)$ è associato il polinomio caratteristico

$$P_A(t) = t^n + s_1(A)t^{n-1} + \dots + s_{n-1}(A)t + s_n(A)$$

dove gli s_i sono delle funzioni polinomiali nei coefficienti della matrice A e inoltre posto $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ gli autovalori, contati con molteplicità, della matrice A vale che

$$s_i(A) = e_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n) .$$

Mettendo insieme quanto fin ora detto abbiamo che per ogni matrice diagonale D vale

$$f(D) = g(e_1(\gamma), \dots, e_n(\gamma)) = g(s_1(D), \dots, s_n(D)) ,$$

quello che adesso vorremmo far vedere è che questa uguaglianza sussiste anche quando D non è diagonale. Iniziamo con l'osservare che l'uguaglianza vale per matrici diagonalizzabili, oltre che per le diagonali: infatti se A è matrice diagonalizzabile, ovvero tale che esistano un $G \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ e una D diagonale per cui $A = G^{-1}DG$, abbiamo

$$\begin{aligned} f(A) &= f(D) \text{ per l'ipotesi di invarianza per coniugio} \\ &= g(s_1(D), \dots, s_n(D)) \\ &= g(s_1(A), \dots, s_n(A)) , \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che gli $s_i(D)$ e gli $s_i(A)$ sono i coefficienti dei polinomi caratteristico di D e A che quindi sono uguali (essendo le due matrici coniugate).

A questo punto possiamo servirci del fatto topologico che le matrici diagonalizzabili sono un denso di $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ ⁷ e quindi abbiamo che i *due polinomi* f e $g(s_1, \dots, s_n)$ sono due funzioni continue che coincidono su un denso, per tanto coincidono su tutto lo spazio $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$.

La densità delle matrici diagonali in realtà segue da un risultato più forte: le matrici ad autovalori distinti formano un denso di $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, dato che queste sono tutte matrici diagonalizzabili segue che anche le diagonalizzabili sono un denso. Per vedere questo risultato forte si può osservare che per ogni matrice triangolare di forma

$$T = \begin{pmatrix} \gamma_1 & * & * & * \\ 0 & \gamma_2 & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

e per ogni $\epsilon > 0$ è possibile considerare la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \gamma_1 + \delta_1 & * & * & * \\ 0 & \gamma_2 + \delta_2 & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n + \delta_n \end{pmatrix}$$

ottenuta aggiungendo degli opportuni δ_i che siano in modulo minore strettamente di ϵ/n e tali che i $\gamma_i + \delta_i$ siano tutti distinti tra loro. In questo modo la matrice D ha autovalori distinti e per costruzione dista da T meno di ϵ . In breve questo dimostra che per ogni ϵ è possibile trovare una matrice con autovalori distinti che dista da T meno di ϵ .

Usando il fatto che ogni matrice è triangolabile su \mathbb{C} e che gli autovalori sono invarianti per coniugio segue il risultato di densità.

⁷Per la topologia Euclidea e quindi anche per la topologia di Zariski.

Esempio 9.8 (Risultato di Kronecher). Sia $p \in \mathbb{Z}[X]$, monico, con radici complesse di modulo minore o uguale a 1 e tale che $p(0) \neq 0$. Allora le radici di p sono radici dell'unità.

Sappiamo che $p = x^n - e_1(z_1, \dots, z_n)x^{n-1} + \dots + (-1)^n e_n(z_1, \dots, z_n)$, dove gli z_i sono gli zeri di p .

Ovviamente dato che abbiamo $p \in \mathbb{Z}[X]$ vale che $e_i(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}$, per ogni i .

Consideriamo dunque $Q_k = (X - z_1^k) \dots (X - z_n^k)$ con $k > 0$, allora Q ha ancora radici di modulo minore e uguale a 1 e $Q_k(0) \neq 0$, inoltre $Q_k \in \mathbb{Z}[X]$. Per vedere questo cominciamo con l'osservare che

$$Q_k(X) = X^n + (-1)^{n-1} e_1(z_1^k, \dots, z_n^k) X^{n-1} + \dots + (-1)^n e_n(z_1^k, \dots, z_n^k)$$

e abbiamo che

1. per ogni $\varphi \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$,⁸ dato che gli z_i sono radici del medesimo polinomio $P(X)$, esiste una $\sigma \in S_n$ tale che $\varphi(z_i) = z_{\sigma(i)}$, da questo segue che

$$\begin{aligned} \varphi(e_i(z_1^k, \dots, z_n^k)) &= e_i(\varphi(z_1)^k, \dots, \varphi(z_n)^k) \\ &= e_i(z_{\sigma(1)}^k, \dots, z_{\sigma(n)}^k) = e_i(z_1^k, \dots, z_n^k), \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che e_i è simmetrico. Quindi $e_i(z_1^k, \dots, z_n^k)$ è fissato da ogni $\varphi \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, per cui $e_i(z_1^k, \dots, z_n^k) \in \mathbb{Q}$

2. inoltre $e_i(z_1^k, \dots, z_n^k)$ è combinazione polinomiale degli z_i che sono elementi interi su \mathbb{Z} , in quanto radici del polinomio monico $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Da questo segue che gli $e_i(z_1^k, \dots, z_n^k)$ sono elementi interi su \mathbb{Z} e appartenenti a \mathbb{Q} , ma è fatto noto che \mathbb{Z} è integralmente chiuso su \mathbb{Q} , ovvero che gli unici elementi di \mathbb{Q} interi su \mathbb{Z} sono gli elementi di \mathbb{Z} stesso. Da questo segue che $e_i(z_1^k, \dots, z_n^k) \in \mathbb{Z}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $i = 1, \dots, n$, e che quindi $Q_k \in \mathbb{Z}[X]$.

Riassumendo abbiamo che per ogni k il polinomio $Q_k = (X - z_1^k) \dots (X - z_n^k)$ è un polinomio monico, a coefficienti in \mathbb{Z} , con radici in modulo minore di 1 e tale che $Q_k(0) \neq 0$.

Con un conto possiamo osservare che per ogni grado fissato n tutti polinomi che soddisfino le nostre ipotesi (monici, a coefficienti in \mathbb{Z} etc etc) sono in numero finito. Per vedere questo cominciamo con l'osservare che ogni P di questo tipo si deve fattorizzare come $P = \prod_i (X - \gamma_i)$ per certi $\gamma_i \in \mathbb{C}$ che devono essere tali che $|\gamma_i| \leq 1$, in particolare quindi deve essere

$$P = X^n + (-1)s_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n)X^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)X + (-1)^n s_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

dove

$$e_k(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k} \in \mathbb{Z}.$$

Dato che

$$|\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}| = |\gamma_{i_1}| \dots |\gamma_{i_k}| \leq 1$$

si ha che

$$\begin{aligned} |e_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n)| &= \left| \sum_{i_1 < \dots < i_k} \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k} \right| \\ &\leq \sum_{i_1 < \dots < i_k} 1 = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

⁸Con $\text{Aut}(F/K)$ indichiamo il gruppo degli automorfismi del campo F in se stesso che fissano il campo base K .

Da questo segue che P deve appartenere all'insieme dei polinomi

$$\left\{ X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n : \forall k = 1, \dots, n \mid a_k \leq \binom{n}{k} \right\}$$

che cardinalità pari a

$$\prod_{k=1}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{1} \binom{n}{2} \dots \binom{n}{n-1} \binom{n}{n}$$

che è finito. In particolare i Q_k devono appartenere a questo insieme.

Da quanto detto segue che i Q_k devono essere in numero finito, quindi esiste una successione crescente di naturali $(k_l)_l$ tale che $Q_{k_l} = Q_{k_0}$ per ogni l e quindi si deve avere che $e_n(z_1^{k_l}, \dots, z_n^{k_l}) = e_n(z_1^{k_0}, \dots, z_n^{k_0})$, ovvero che la successione $(e_n(z_1^{k_l}, \dots, z_n^{k_l}))_l$ è costante.

Se per assurdo si avesse che $|z_i| < 1$ anche per un solo indice i , allora si avrebbe che

$$\lim_{l \rightarrow \infty} e_n(z_1^{k_l}, \dots, z_n^{k_l}) = \lim_{l \rightarrow \infty} z_1^{k_l} \dots z_n^{k_l} = 0,$$

e quindi, dato che la successione $(e_n(z_1^{k_l}, \dots, z_n^{k_l}))_l$ è costante, questo implicherebbe che

$$e_n(z_1^{k_0}, \dots, z_n^{k_0}) = z_1^{k_0} \dots z_n^{k_0} = 0$$

e quindi si dovrebbe avere $Q_{k_1}(0) = 0$, che è assurdo per quanto detto sopra. Da questo ne segue che non è possibile che per un z_i si possa avere $|z_i| < 1$ e quindi, dato che $|z_i| \leq 1$ per ogni i , ne segue che $|z_i| = 1$ per ogni i .

9.2 Funzioni simmetriche complete

Definizione 9.9 (Funzioni simmetriche complete). Per ogni $r \geq 0$ la funzione simmetrica completa h_r è

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda.$$

Ovviamente esistono anche delle versioni in n variabili

$$h_r^{(n)} = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda^{(n)}$$

e posto $\pi_n: \Lambda \rightarrow \Lambda_n$ il morfismo di proiezione canonico, che valuta a zero tutte le variabili X_i con $i > n$, vale l'uguaglianza

$$\pi_n(h_r) = h_r^{(n)}.$$

Esempio 9.10. Per $r = 2$ abbiamo

$$\begin{aligned} h_2 &= \sum_{i \leq j} x_i x_j \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_1 x_2 + \dots \end{aligned}$$

Definizione 9.11. Chiamiamo $H(t)$ la funzione

$$H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r \in \Lambda[[t]]$$

Osservazione 9.12. Vale che $H(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - X_i t)^{-1}$.

La dimostrazione non è difficile: osserviamo che vale

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (1 - X_i t)^{-1} &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_r X_i^r t^r \right) \\ &= \sum_r \sum_{|\alpha|=r, l(\alpha) \leq n} X_1^{\alpha(1)} \dots X_n^{\alpha(n)} t^{|\alpha|} \\ &= \sum_r \left(\sum_{|\lambda|=r, l(\lambda) \leq n} m_{\lambda}^{(n)} \right) t^r \\ &= \sum_r h_r^{(n)} t^r, \end{aligned}$$

quindi la successione $\prod_{i=1}^n (1 - X_i t)$ è coerente e ammette limite che è appunto $\sum_r h_r t^r$.

Teorema 9.13. Abbiamo che $H(t)E(-t) = 1$ in $\Lambda[[t]]$.

Dimostrazione. Questo è conseguenza del fatto che l'operazione \lim si comporta bene rispetto alle operazioni di $\mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$.⁹ Osservando che

$$E(-t) = \lim_n \prod_{i=1}^n (1 + X_i(-t)) = \lim_n \prod_{i=1}^n (1 - X_i t)$$

si può far vedere che

$$\begin{aligned} H(t)E(-t) &= \lim_n \prod_{i=1}^n (1 - X_i t)^{-1} \lim_n \prod_{i=1}^n (1 - X_i t) \\ &= \lim_n \prod_{i=1}^n (1 - X_i t)^{-1} \prod_{i=1}^n (1 - X_i t) \\ &= \lim_n 1 = 1. \end{aligned}$$

□

Corollario 9.14. Vale che $\sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r} = 0$ per $n \geq 1$.

Dimostrazione. Usando il fatto che $H(t)E(-t) = 1$ e sviluppando il prodotto $H(t)E(-t)$ si vede che

$$\sum_n \left(\sum_{r=0}^n h_r (-1)^{n-r} e_{n-r} \right) t^n = 1$$

da cui segue che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{r=0}^n h_r (-1)^{n-r} e_{n-r} = 0.$$

□

⁹Ovvero dal fatto che \lim è un omomorfismo di anelli.

Dato che e_i sono algebricamente indipendenti possiamo definire il seguente endomorfismo (di anelli) su Λ

$$\begin{aligned}\omega: \Lambda &\longrightarrow \Lambda \\ e_i &\mapsto h_i\end{aligned}$$

Teorema 9.15. *Vale che $\omega^2 = \text{id}$ e quindi in particolare ω è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Per il corollario abbiamo che per ogni $n \geq 1$

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r} = 0$$

e quindi passando entrambi i membri ad omega otteniamo

$$\begin{aligned}\omega\left(\sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r}\right) &= 0 \\ \sum_{r=0}^n (-1)^r \omega(e_r) \omega(h_{n-r}) &= 0 \\ \sum_{r=0}^n (-1)^r h_r \omega(h_{n-r}) &= 0.\end{aligned}$$

A questo punto possiamo osservare che

$$\omega(h_0) = \omega(1) = 1 = e_0$$

e per ogni $n > 0$ valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned}e_n = e_n h_0 &= -\sum_{r=0}^{n-1} e_r h_{n-r} \\ \omega(h_n) = \omega(h_n) h_0 &= -\sum_{r=0}^{n-1} \omega(h_r) h_{n-r}\end{aligned}$$

Se supponiamo induttivamente che $\omega(h_k) = e_k$ per ogni $k < n$ allora ne segue che

$$\begin{aligned}\omega(h_n) &= -\sum_{r=0}^{n-1} \omega(h_r) h_{n-r} \\ &= -\sum_{r=0}^{n-1} e_r h_{n-r} = e_n.\end{aligned}$$

Per induzione dunque segue che $\omega(h_n) = e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui si ha la tesi. \square

Teorema 9.16. *Vale che $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n, \dots]$ dove gli h_i sono algebricamente indipendenti.*

Dimostrazione. Dato che ω è un isomorfismo che manda ogni e_i in h_i segue che

$$\mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n, \dots] = \text{Im } \omega = \Lambda$$

e che gli h_i sono algebricamente indipendenti, in quanto immagini tramite di un isomorfismo di elementi algebricamente indipendenti. \square

9.3 Un altro esercizietto sulle rappresentazioni

Chiudiamo questo capitolo con un esercizietto che non è collegato con lo studio delle funzioni simmetriche ma a che fare con il calcolo di alcune rappresentazioni composte.

Esercizio 9.17. Calcolare $S_{\lambda'} \cong S_{\lambda} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$, o equivalentemente $V_{\lambda'} \cong V_{\lambda} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$.

Soluzione. Sappiamo già che per ogni partizione λ abbiamo che

$$V_{\lambda} \cong \mathbb{C}[S_n]C_t^- R_t^+$$

per t un λ -tableau. Ovviamente se indichiamo con t' il λ' -tableau *trasposto a t*, ovvero il tableau tale che $t'_{i,j} = t_{j,i}$ abbiamo che

$$V_{\lambda'} \cong \mathbb{C}[S_n]C_{t'}^- R_{t'}^+ .$$

Inoltre vale che $R_t = C_{t'}$ e $C_t = R_{t'}$, dato che le righe e le colonne di t diventano rispettivamente le colonne e le righe di t' , quindi

$$V_{\lambda'} \cong \mathbb{C}[S_n]R_t^- C_t^+ .$$

A questo punto possiamo considerare il seguente morfismo

$$f: \mathbb{C}[S_n] \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \longrightarrow \mathbb{C}[S_n]$$

$$f(\sigma \otimes 1) = \text{sgn}(\sigma)\sigma ,$$

definito su una base di $\mathbb{C}[S_n] \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ ed esteso per linearità. Un conto mostra che

$$\begin{aligned} f(\tau(\sigma \otimes 1)) &= f(\tau\sigma \otimes \text{sgn}(\tau)) = f(\text{sgn}(\tau)(\tau \circ \sigma \otimes 1)) \\ &= \text{sgn}(\tau)f(\tau \circ \sigma \otimes 1) \\ &= \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\tau \circ \sigma)\tau \circ \sigma \\ &= \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\sigma)\tau \circ \sigma \\ &= \tau(\text{sgn}(\sigma)\sigma) = \tau f(\sigma \otimes 1) , \end{aligned}$$

ovvero che f è un morfismo di S_n -moduli. Non è difficile vedere che questo è anche biunivoco e quindi un isomorfismo: visto che l'immagine contiene tutti $\text{sgn}(\sigma)\sigma = f(\sigma \otimes 1)$, che sono una base di $\mathbb{C}[S_n]$, f è suriettivo e poiché i due spazi hanno la stessa dimensione ne segue che deve essere anche iniettivo.

Con un altro conto vediamo che

$$\begin{aligned} f(C_t^- R_t^+ \otimes 1) &= \sum_{p \in R_t} \sum_{q \in C_t} \text{sgn}(q) f(qp \otimes 1) \\ &= \sum_{p \in R_t} \sum_{q \in C_t} \text{sgn}(q) \text{sgn}(qp) qp \\ &= \sum_{p \in R_t} \sum_{q \in C_t} \text{sgn}(q) \text{sgn}(q) \text{sgn}(p) qp \\ &= \sum_{p \in R_t} \sum_{q \in C_t} \text{sgn}(p) qp = C_t^+ R_t^- . \end{aligned}$$

Questo ci dice che restringendo f al sotto-modulo $\mathbb{C}[S_n]C_t^- R_t^+ \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ otteniamo un isomorfismo

$$f|: \mathbb{C}[S_n]C_t^- R_t^+ \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \longrightarrow \mathbb{C}[S_n]C_t^+ R_t^- .$$

Ma dall'esercizio 8.1 sappiamo che

$$\mathbb{C}[S_n]R_{t'}^+C_{t'}^- \cong \mathbb{C}[S_n]C_{t'}^-R_{t'}^+ = V_\lambda ,$$

e per quanto visto all'inizio dell'esercizio abbiamo anche che

$$\mathbb{C}[S_n]C_t^+R_t^- = \mathbb{C}[S_n]R_{t'}^+C_{t'}^-$$

e quindi possiamo concludere che effettivamente esiste un isomorfismo

$$V_\lambda \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \mathbb{C}[S_n]C_t^-R_t^+ \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \mathbb{C}[S_n]R_{t'}^+C_{t'}^- \cong V_{\lambda'} .$$

□

Capitolo 10

Somme di potenze e funzioni di Schur

Lezione 10 (07/04/2016)

10.1 Somme di potenze

Definizione 10.1. Introduciamo

$$p_r = m_{(r,0,0,\dots)}$$

o più esplicitamente, usando la rappresentazione come serie di potenze in $\mathbb{Z}[[X_n : n \in \mathbb{N}_0]]$,

$$p_r = \left(\sum_{i=1}^n X_i^r \right)_n .$$

Agli elementi p_r associamo la serie di potenze

$$P(t) = \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} \in \Lambda[[t]] .$$

Facendo il seguente conto otteniamo

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} \\ &= \sum_{i \geq 1} \sum_{r \geq 1} x_i^r t^{r-1} \\ &= \sum_{i \geq 1} x_i \sum_{r \geq 1} (x_i t)^{r-1} \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1 - x_i t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i \geq 1} \log \frac{1}{1 - x_i t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \log \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i t} = \frac{d}{dt} \log H(t) \end{aligned}$$

dove i vari passaggi sono garantiti dalle proprietà buone delle serie di potenze.

Da quello fin qui visto segue che $P(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}$.

Ora ricordiamo che $H(t)E(-t) = 1$ da questa uguaglianza passando alle derivate si ottiene

$$H'(t)E(-t) - H(t)E'(-t) = 0$$

e quindi

$$\frac{H'(t)}{H(t)} = \frac{E'(-t)}{E(-t)}$$

e quindi $P(-t) = \frac{E'(-t)}{E(-t)}$. Applicando ω a $P(t)$ otteniamo che

$$\sum_n \omega(p_{n+1})t^n = \omega(P(t)) = \omega\left(\frac{H'(t)}{H(t)}\right) = \frac{E'(t)}{E(t)} = P(-t) = \sum_n (-1)^n p_{n+1}t^n$$

e quindi $\omega(p_n) = (-1)^{n-1}p_n$ per ogni $n > 1$.

Teorema 10.2 (Formule di Newton). *Sono veri i seguenti fatti:*

1. $nh_n = \sum_{r=1}^n p_r h_{n-r}$
2. $ne_n = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}$.

Dimostrazione. Basta usare le formule viste sopra e sviluppare i conti: $P(t)H(t) = H'(t)$ e quindi per ogni $n \geq 0$ l' n -esimo termine di $H'(t)$ è uguale all' n -esimo termine di $P(t)H(t)$, quindi

$$\begin{aligned} (n+1)h_{n+1} &= \sum_{r=0}^n p_{r+1}h_{n-r} \\ &= \sum_{r=1}^{n+1} p_r h_{n+1-r} \end{aligned}$$

e ovviamente

$$0h_0 = 0 = \sum_{r=1}^0 p_r h_{0-r} .$$

Per l'altro punto si può procedere nello stesso modo usando l'equazione

$$P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}$$

oppure si può usare l'operatore ω all'equazione precedente, questo ci da

$$\begin{aligned} ne_n &= \omega(nh_n) = \sum_{r=1}^n \omega(p_r)\omega(h_{n-r}) \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} p_r e_{n-r} \end{aligned}$$

che è appunto l'altra formula che volevamo. □

Osservazione 10.3. Vale

$$\mathbb{Q}[p_1, \dots, p_n, \dots] = \mathbb{Q}[h_1, \dots, h_n, \dots] = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Per vedere questo basta usare le identità di Newton, da esse seguono le uguaglianze

$$h_n = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n p_r h_{n-r}$$

$$p_n = p_n h_0 = (n+1)h_{n+1} - \sum_{r=1}^{n-1} p_r h_{n-r}$$

che per mettono di provare induttivamente che $p_n \in \mathbb{Q}[h_1, \dots, h_n]$ e $h_n \in \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_n]$ per ogni $n \geq 1$. Da questo segue che l'uguaglianza $\mathbb{Q}[h_1, \dots, h_n, \dots] = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_n, \dots]$.

In realtà vale molto di più, infatti abbiamo detto che vale l'uguaglianza $\mathbb{Q}[p_1, \dots, p_n] = \mathbb{Q}[h_1, \dots, h_n]$, per ogni n , e usando il lemma di Noether sappiamo che, dato che gli h_i sono algebricamente indipendenti, questo anello ha dimensione n , ragionando per assurdo segue che anche i p_i sono algebricamente indipendenti.

È anche possibile dimostrare l'indipendenza algebrica dei p_n usando argomenti che non facciano uso del lemma di Noether, tramite dei conti espliciti.

Osservazione 10.4. Se prendiamo h_2 , ovvero la somma di tutti i monomi omogenei di grado 2, allora osserviamo che $h_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2)$. Questo è l'unico modo di scrivere h_2 come polinomio degli h_i , visto che h_i sono algebricamente indipendenti. In particolare $h_2 \notin \mathbb{Z}[p_1, \dots, p_n]$, poiché c'è il fattore $\frac{1}{2}$ nella decomposizione di prima.

Questa piccola osservazione ci mostra come in realtà

$$\mathbb{Z}[h_n : n \in \mathbb{N}_0] \supsetneq \mathbb{Z}[p_n : n \in \mathbb{N}_0],$$

ovvero che i p_n non sono dei generatori per Λ , ma solo per $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

Osservazione 10.5. Più in generale presa una partizione λ allora i polinomi

$$p_{\lambda} = p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_{l(\lambda)}}$$

formano una \mathbb{Q} -base di $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Proposizione 10.6. *Si ha che $\omega(p_{\lambda}) = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} p_{\lambda}$.*

Dimostrazione. È una facile conseguenza delle osservazioni precedenti. Abbiamo che per definizione

$$p_{\lambda} = p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_{l(\lambda)}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \omega(p_{\lambda}) &= \omega(p_{\lambda_1}) \cdots \omega(p_{\lambda_{l(\lambda)}}) \\ &= (-1)^{\lambda_1 - 1} p_{\lambda_1} \cdots (-1)^{\lambda_{l(\lambda)} - 1} p_{\lambda_{l(\lambda)}} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{l(\lambda)} \lambda_i - \sum_{i=1}^{l(\lambda)} 1} p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_{l(\lambda)}} \\ &= (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} p_{\lambda}. \end{aligned}$$

□

Teorema 10.7. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$H(t) = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda} t^{|\lambda|}$$

$$E(t) = \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda} t^{|\lambda|}$$

dove $z_{\lambda} = \prod_{i \in \lambda} m_i! i^{m_i}$, dove $i \in \lambda$ se e solo se $\lambda_j = i$ per qualche j e m_i è il numero di j tali che $\lambda_j = i$.

Notazione. Se $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, 0, \dots)$ è una partizione esiste anche un'altra notazione per le partizioni la notazione $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$ ¹ dove m_i conta il numero sotto-insiemi di cardinalità i nella partizione.

Dimostrazione del teorema 10.7. Ricordiamo che $P(t) = \frac{d}{dt} \log H(t)$, quindi $\int P(t) = \log H(t)$ e dunque $H(t) = e^{\int P(t)}$ ²

Sviluppando i conti si ottiene che

$$H(t) = e^{\int P(t)} = e^{\sum_{r \geq 1} p_r \frac{t^r}{r}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{p_r}{r} t^r \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Theta_n} \frac{p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_n}}{n! \alpha_1 \cdots \alpha_n} t^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$$

dove Θ_n è l'insieme delle serie di composizione α tali che $l(\alpha) = n$ e $\alpha_i \geq 1$ per ogni $i \leq n$.

A meno di reindicizzazioni si ottiene che

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l(\lambda)=n} \sum_{\alpha \in \lambda S_n} \frac{p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_n}}{n! \alpha_1 \cdots \alpha_n} t^{|\alpha|}$$

$$= \sum_n \sum_{l(\lambda)=n} \sum_{\alpha \in \lambda S_n} \frac{p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_n}}{n! \lambda_1 \cdots \lambda_n} t^{|\lambda|}$$

$$= \sum_n \sum_{l(\lambda)=n} |\lambda S_n| \frac{p_{\lambda}}{n! \prod_i \lambda_i} t^{|\lambda|}$$

A questo punto possiamo osservare che λS_n ha cardinalità pari a

$$|\lambda S_n| = \frac{|S_n|}{|\text{Stab}_{S_n}(\lambda)|}$$

$$= \frac{n!}{\prod_{i \in \lambda} m_i!}$$

¹Osservare che gli esponenti qui sono formali, non numerici.

²Qui la composizione con l'esponenziale è ben definita perché l'integrale a sempre grado maggiore o uguale a 1.

dove ricordiamo che m_i è il numero di indici j per cui $\lambda_j = i$, inoltre possiamo osservare che $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \prod_{i \in \lambda} i^{m_i}$. Rimettendo tutto assieme otteniamo che

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{\lambda} \frac{n!}{\prod_{i \in \lambda} m_i!} \frac{p_{\lambda}}{n! \prod_{i \in \lambda} i^{m_i}} t^{|\lambda|} \\ &= \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}}{\prod_{i \in \lambda} m_i! i^{m_i}} t^{|\lambda|} \\ &= \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda} t^{|\lambda|}. \end{aligned}$$

L'uguaglianza $E(t) = \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} p_{\lambda} t^{|\lambda|}$ segue applicando ω a $H(t)$ e usando il fatto, precedentemente visto, che $\omega(p_{\lambda}) = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} p_{\lambda}$. \square

Corollario 10.8. *Abbiamo che $h_n = \sum_{|\lambda|=n} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}$.*

10.2 Quinta base: le funzioni di Schur

10.2.1 Motivazioni dietro alle basi di Schur

Avevamo parlato $\mathbb{C}_{cls}(S_n) = \langle X_{V_{\lambda}} : \lambda \vdash n \rangle$, dove le V_{λ} sono le rappresentazioni irriducibili di S_n .

Allora possiamo prendere lo spazio $\bigoplus_n \mathbb{C}_{cls}(S_n)$ e munirlo della struttura di anello graduato definendo un opportuno prodotto tra i generatori, ovvero le rappresentazioni irriducibili degli S_n .

In particolare ci serve un prodotto che presi un carattere di una rappresentazione irriducibile $\chi_{V_{\lambda}}$ di S_n e un carattere $\chi_{V_{\mu}}$ di una rappresentazione irriducibile di S_m ci dia un certo $\chi_{V_{\lambda}} \cdot \chi_{V_{\mu}}$ che sia il carattere di una rappresentazione di S_{n+m} . Un buon candidato è il signor $\chi_{\text{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} V_{\lambda} \otimes V_{\mu}}$.

Vedremo che esiste un isomorfismo di \mathbb{C} -algebre

$$\bigoplus_n \mathbb{C}_{cls}(S_n) \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$$

e le immagini dei caratteri $\chi_{V_{\lambda}}$ tramite questo isomorfismo sono delle funzioni simmetriche s_{λ} , che formano la base di $\Lambda_{\mathbb{C}}$ che ci apprestiamo a presentare.³

10.2.2 Le funzioni di Schur

Fissiamo un naturale $n \geq 1$.

Definizione 10.9. Sia α una serie di composizione con $l(\alpha) \leq n$ allora definiamo

$$a_{\alpha}^{(n)} = \sum_{w \in S_n} \text{sgn}(w) w(X^{\alpha}) = \sum_{w \in S_n} \text{sgn}(w) X^{\alpha w^{-1}}.$$

Nel seguito, per evitare di appesantire troppo la notazione, eviteremo di scrivere l'apice (n) sui polinomi a_{α} , laddove l' n -considerato sia chiaro dal contesto.

Osservazione 10.10. Per ogni $\sigma \in S_n$ abbiamo che $\sigma(a_{\alpha}) = \text{sgn}(\sigma) a_{\alpha}$: i polinomi così costruiti sono detti anti-simmetrici.

³In verità noi faremo vedere di più: che gli s_{λ} sono una base di Λ , e conseguentemente anche di $\Lambda_{\mathbb{C}}$.

Per provare questa uguaglianza basta osservare che a_α è il determinante (con formula chiusa) della matrice

$$X_\alpha = (X_i^{\alpha_j}) = \begin{pmatrix} X_1^{\alpha_1} & X_1^{\alpha_2} & \dots & X_1^{\alpha_n} \\ X_2^{\alpha_1} & X_2^{\alpha_2} & \dots & X_2^{\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_n^{\alpha_1} & X_n^{\alpha_2} & \dots & X_n^{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

e σa_α è il determinante della matrice $P_\sigma X_\alpha$ dove P_σ è la matrice di permutazione associata a sigma, ovvero la matrice che come colonna j -esima ha il vettore $e_{\sigma j}$, ovvero

$$P_\sigma = (e_{\sigma 1} \quad \dots \quad e_{\sigma n}) .$$

Oppure più semplicemente uno può fare il conto

$$\begin{aligned} \sigma a_\alpha &= \sum_{w \in S_n} \operatorname{sgn}(w) \sigma X^{\alpha w} \\ &= \sum_{w \in S_n} \operatorname{sgn}(w) X^{\alpha w \sigma^{-1}} \\ &= \sum_{w \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(w \sigma^{-1}) X^{\alpha w \sigma^{-1}} \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\underbrace{w \in S_n \sigma^{-1}}_{S_n}} \operatorname{sgn}(w) X^{\alpha w} \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma) a_\alpha \end{aligned}$$

che prova l'uguaglianza voluta.

Osservazione 10.11. Possiamo inoltre osservare che se α è una serie di composizione tale che esistano due indici $i, j \leq n$ distinti per cui $\alpha_i = \alpha_j$, e quindi $\alpha(i, j) = \alpha$, abbiamo che

$$\begin{aligned} a_\alpha &= \sum_{w \in S_n} \operatorname{sgn}(w) X^{\alpha w} \\ &= \sum_{w \in S_n} \operatorname{sgn}(w) X^{\alpha(i, j)w} \\ &= - \sum_{w \in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}((i, j))}_{=-1} \operatorname{sgn}(w) X^{\alpha(i, j)w} \\ &= - \sum_{\underbrace{w \in (i, j) S_n}_{=S_n}} \operatorname{sgn}(w) X^{\alpha w} \\ &= -a_\alpha \end{aligned}$$

e quindi $a_\alpha = 0$.

Da questo segue che a_α non è uguale a zero se e solo se gli $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ sono a due a due distinti.

Osservazione 10.12. Sappiamo già che se α è una serie di composizione con $l(\alpha) \leq n$ allora esiste un $\sigma \in S_n$ tale che $\alpha = \lambda \sigma$ per una certa partizione λ , con $l(\lambda) \leq n$. Da questo segue che $a_\alpha = \operatorname{sgn}(\sigma) a_\lambda$ e quindi tutti i polinomi anti-simmetrici sono a meno del segno della forma a_λ per una partizione λ di lunghezza n .

Inoltre per l'osservazione precedente se $a_\lambda \neq 0$ allora gli elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ devono essere distinti e per la monotonia di λ questo è possibile se e solo se $(\lambda_i)_{i \leq n}$ è strettamente decrescente. Da questo segue che tali λ sono tutti e i soli quelli che si possono scrivere come $\lambda = \delta^{(n)} + \mu$ dove

$$\delta_i^{(n)} = \begin{cases} n - i & \text{per } i \leq n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e μ è una generica partizione.

Notazione. Nel seguito eviteremo di indicare (n) in $\delta^{(n)}$, laddove possa capirsi del contesto, ma useremo solamente δ .

Osservazione 10.13. Possiamo osservare che

$$a_\delta = \det \begin{pmatrix} X_1^{n-1} & \dots & X_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_n^{n-1} & \dots & X_n & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero che a_δ è il determinante di una matrice di Vandermonde e quindi

$$a_\delta = \prod_{i < j} (X_i - X_j).$$

Osservazione 10.14. Per ogni partizione λ (si suppone sempre $l(\lambda) \leq n$) abbiamo che

$$a_{\delta+\lambda} = \det \begin{pmatrix} X_1^{n-1+\lambda_1} & \dots & X_1^{1+\lambda_{n-1}} & X_1^{\lambda_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_n^{n-1+\lambda_1} & \dots & X_n^{1+\lambda_{n-1}} & X_n^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

In particolare per ogni coppia $i < j$ abbiamo che

$$a_{\delta+\lambda}(X_1, \dots, X_i, \dots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \dots, X_n) = \det \begin{pmatrix} X_1^{n-1+\lambda_1} & \dots & X_1^{1+\lambda_{n-1}} & X_1^{\lambda_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_i^{n-1+\lambda_1} & \dots & X_i^{1+\lambda_{n-1}} & X_i^{\lambda_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_i^{n-1+\lambda_1} & \dots & X_i^{1+\lambda_{n-1}} & X_i^{\lambda_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_n^{n-1+\lambda_1} & \dots & X_n^{1+\lambda_{n-1}} & X_n^{\lambda_n} \end{pmatrix} = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che il determinante di una matrice avente due righe uguali è 0, ovvero dall'alternanza del determinante.

Da questo segue che $(X_i - X_j) \mid a_{\delta+\lambda}$ per ogni λ come sopra, quindi dato che i polinomi $X_i - X_j$ sono a due a due coprimi ne segue che

$$a_\delta = \prod_{i < j} (X_i - X_j) \mid a_{\delta+\lambda}$$

per ogni λ con $l(\lambda) \leq n$.

Definizione 10.15. Data la partizione λ definiamo il seguente polinomio di Schur

$$s_\lambda^{(n)} = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

che è ben definito perché come abbiamo visto dall'osservazione precedente $a_\delta \mid a_{\delta+\lambda}$.

Osservazione 10.16. I polinomi $s_\lambda^{(n)}$ sono dei polinomi omogenei, simmetrici di grado $|\lambda|$. Per vedere l'omogeneità e il grado basta osservare che gli a_δ e $a_{\delta+\lambda}$ sono polinomi omogenei di grado rispettivamente $|\delta| = \sum_i \delta_i$ e $|\delta + \lambda| = \sum_i (\delta_i + \lambda_i) = |\delta| + |\lambda|$, quindi per proprietà dei polinomi omogenei segue che $s_\lambda^{(n)}$ è omogeneo di grado $|\delta + \lambda| - |\delta| = |\lambda|$.

Per vedere che $s_\lambda^{(n)}$ è simmetrico basta osservare che per ogni $\sigma \in S_n$ si ha

$$\begin{aligned}\sigma s_\lambda^{(n)} &= \frac{\sigma a_{\delta+\lambda}}{\sigma a_\delta} \\ &= \frac{\text{sgn}(\sigma) a_{\delta+\lambda}}{\text{sgn}(\sigma) a_\delta} \\ &= \frac{a_{\delta+\lambda}}{a_\delta} = s_\lambda^{(n)}\end{aligned}$$

che appunto prova la simmetricità del polinomio $s_\lambda^{(n)}$.

Dunque $s_\lambda^{(n)} \in \Lambda_n^{|\lambda|}$ per ogni λ con $l(\lambda) \leq n$.

Teorema 10.17. *L'insieme $\{s_\lambda^{(n)} : l(\lambda) \leq n\}$ è una base di Λ_n .*

Dimostrazione. Si consideri la mappa

$$\Lambda_n \xrightarrow{\cdot a_\delta} A_n$$

dove A_n è lo \mathbb{Z} -modulo graduato generato dai polinomi anti-simmetrici in $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. Questa mappa è ben definita, ovvero l'immagine è effettivamente contenuta in A_n , dato che per ogni polinomio simmetrico $p \in \Lambda_n$ il polinomio prodotto pa_δ è un polinomio anti-simmetrico.

È possibile provare che gli $a_{\lambda+\delta}$ formano una base di A_n , al variare di λ tra le partizioni con $l(\lambda) \leq n$.

Ora la mappa $\cdot a_\delta$ è iniettiva, in quanto restrizione della mappa di moltiplicazione

$$\cdot a_\delta: \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$$

che è iniettiva dato che $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ è un dominio.

Inoltre abbiamo che $s_\lambda \cdot a_\delta = a_{\lambda+\delta}$ e quindi al variare di λ otteniamo tutta la base di A_n . Dunque l'immagine di $\cdot a_\delta$ contiene una base di A_n , quindi è suriettiva. Da questo segue che $\cdot a_\delta$ è un isomorfismo di \mathbb{Z} -moduli. Dato che gli s_λ sono mappati in una base di A_n tramite questo isomorfismo, essi stessi sono una base di Λ_n . □

Osservazione 10.18. Più nello specifico si può vedere che $s_\lambda^{(n)}$, con $|\lambda| = k$, sono una base di Λ_n^k .

Capitolo 11

Funzioni di Schur e relazioni di ortogonalità in Λ

Lezione 11 (11/04/2016)

11.1 Le funzioni simmetriche di Schur

Osservazione 11.1. Per ogni partizione λ , con $l(\lambda) \leq n$, abbiamo che

$$\begin{aligned} a_{\delta^{(n+1)+\lambda}} &= \det \begin{pmatrix} X_1^{\delta_1^{(n+1)}+\lambda_1} & \dots & X_n^{\delta_n^{(n+1)}+\lambda_n} & X_1^{\delta_{n+1}^{(n+1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^{\delta_1^{(n+1)}+\lambda_1} & \dots & X_n^{\delta_n^{(n+1)}+\lambda_n} & X_n^{\delta_{n+1}^{(n+1)}} \\ X_{n+1}^{\delta_1^{(n+1)}+\lambda_1} & \dots & X_{n+1}^{\delta_n^{(n+1)}+\lambda_n} & X_{n+1}^{\delta_{n+1}^{(n+1)}} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} X_1^{n+\lambda_1} & \dots & X_1^{1+\lambda_n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^{n+\lambda_1} & \dots & X_n^{1+\lambda_n} & 1 \\ X_{n+1}^{n+\lambda_1} & \dots & X_{n+1}^{1+\lambda_n} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da questo segue che valutando X_{n+1} a 0 si ottiene

$$\begin{aligned} a_{\delta^{(n+1)+\lambda}}(X_1, \dots, X_n, 0) &= \det \begin{pmatrix} X_1^{n+\lambda_1} & \dots & X_1^{1+\lambda_n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^{n+\lambda_1} & \dots & X_n^{1+\lambda_n} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} X_1^{n+\lambda_1} & \dots & X_1^{1+\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^{n+\lambda_1} & \dots & X_n^{1+\lambda_n} \end{pmatrix} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n X_i \right) \det \begin{pmatrix} X_1^{n-1+\lambda_1} & \dots & X_1^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^{n-1+\lambda_1} & \dots & X_n^{\lambda_n} \end{pmatrix} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n X_i \right) a_{\delta^{(n)+\lambda}} \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza segue dalla linearità in ogni singola riga del determinante.

Proposizione 11.2. La successione $(s_\lambda^{(n)})_n \in \prod_n \Lambda_n^k$, con $k = |\lambda|$, è coerente e quindi ci da un elemento $s_\lambda = (s_\lambda^{(n)})_n \in \Lambda^k \subseteq \Lambda$.

Gli s_λ così definiti prendono il nome di funzioni (simmetriche) di Schur.

Dimostrazione. La dimostrazione è un facile conto:

$$\begin{aligned} \rho_{n+1,n}(s_\lambda^{(n+1)}) &= s_\lambda^{(n+1)}(X_1, \dots, X_n, 0) \\ &= \frac{a_{\delta^{(n+1)}+\lambda}(X_1, \dots, X_n, 0)}{a_{\delta^{(n+1)}}(X_1, \dots, X_n, 0)} \\ &= \frac{(\prod_{i=1}^n X_i) a_{\delta^{(n)}+\lambda}}{(\prod_{i=1}^n X_i) a_{\delta^{(n)}}} \\ &= s_\lambda^{(n)} \end{aligned}$$

questo prova che $(s_\lambda^{(n)})_n$ è coerente e che quindi $s_\lambda = (s_\lambda^{(n)})_n$ è effettivamente una funzione simmetrica. \square

Teorema 11.3. Si ha che i $\{s_\lambda\}_\lambda$ sono una base di Λ .

Dimostrazione. Al solito basta concentrarsi sui Λ^k e far vedere che le funzioni simmetriche s_λ , al variare di λ tra le partizioni con $|\lambda| = k$, formano una base di Λ^k .

Per fare questo usiamo il già citato risultato che ci dice che le proiezioni

$$\pi_n: \Lambda^k \longrightarrow \Lambda_n^k$$

sono degli isomorfismi per n abbastanza grande. A questo punto usando il fatto che per tali n abbiamo $\pi_n(s_\lambda) = s_\lambda^{(n)}$ e il fatto che tali $s_\lambda^{(n)}$ sono una base di Λ_n^k segue che anche gli s_λ sono una base di Λ^k : perché immagine inversa di una base tramite un isomorfismo. \square

Definizione 11.4. Denotiamo con $e_r^{(n,-k)}$ il polinomio

$$e_r^{(n,-k)} = e_r^{(n)}(X_1, \dots, X_{k-1}, 0, X_{k+1}, \dots, X_n)$$

ottenuto dal polinomio elementare $e_r^{(n)}$ valutando la variabile X_k a 0.

Esempio 11.5. Posto $n = 4$ abbiamo $e_3^{(4,-2)}$ che è $X_1 X_3 X_4$.

Definiamo la matrice $M = ((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(n,-k)})_{i,k}$ ¹. che quindi appare come nella forma seguente

$$M = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(n,-1)} & \dots & (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(n,-n+1)} & (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(n,-n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -e_1^{(n,-1)} & \dots & -e_1^{(n,-n+1)} & -e_1^{(n,-n)} \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 11.6. Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se $A_\alpha = (X_j^{\alpha_i})_{i,j}$ e $H_\alpha = (h_{\alpha_i - \delta_j})_{i,j} = (h_{\alpha_i - n + j})$ (dove si pone $h_t = 0$ se $t < 0$) allora $A_\alpha = H_\alpha M$.

¹Dove le i indicizzano le righe e i k le colonne.

Dimostrazione. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo $E^{(n,-k)}(t) = \sum_{r=0}^{n-1} e_r^{(n,-k)} t^r$. Vale che $E^{(n,-k)}(t) = \prod_{i \neq k} (1 + X_i t)$. Quindi

$$H^{(n)}(t)E^{(n,-k)}(-t) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - X_i t} \prod_{i \neq k} (1 - X_i t) = \frac{1}{1 - X_k t}.$$

Dunque il coefficiente di t^{α_i} in $H^{(n)}(t)E^{(n,-k)}(-t)$ è

$$\sum_{r=0}^{\alpha_i} (-1)^r e_r^{(n,-k)} h_{\alpha_i - r}.$$

A questo punto possiamo distinguere due casi

1. se $n < \alpha_i$ allora sappiamo che $e_r^{(n,-k)} = 0$ per $n < r \leq \alpha_i$ e quindi

$$\sum_{r=0}^{\alpha_i} (-1)^r e_r^{(n,-k)} h_{\alpha_i - r} = \sum_{r=0}^n (-1)^r e_r^{(n,-k)} h_{\alpha_i - r}$$

2. se invece $n \geq \alpha_i$ allora abbiamo che $h_{\alpha_i - r} = 0$ per $\alpha_i < r < n$, poiché $\alpha_i - r < 0$ e quindi

$$\sum_{r=0}^{\alpha_i} (-1)^r e_r^{(n,-k)} h_{\alpha_i - r} = \sum_{r=0}^n (-1)^r e_r^{(n,-k)} h_{\alpha_i - r}$$

In entrambi i casi abbiamo dunque che il coefficiente di grado α_i di $H^{(n)}(t)E^{(n,-k)}(-t)$ è pari a

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r e_r^{(n,-k)} h_{\alpha_i - r} = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} e_{n-r}^{(n,-k)} h_{\alpha_i - (n-r)}.$$

D'altra parte però abbiamo visto che $H^{(n)}(t)E^{(n,-k)}(-t) = (1 - X_k t)^{-1}$ e quindi il coefficiente di grado α_i dovrebbe essere anche uguale a $X_k^{\alpha_i}$, dunque

$$\begin{aligned} X_k^{\alpha_i} &= \sum_{r=0}^n h_{\alpha_i - (n-r)} (-1)^{n-r} e_{n-r}^{(n,-k)} \\ &= \sum_{r=0}^n h_{\alpha_i - \delta_r} (-1)^{n-r} e_{n-r}^{(n,-k)} \end{aligned}$$

Per concludere basta osservare che

$$\begin{aligned} (H_\alpha M)_{i,k} &= \sum_{r=0}^n h_{\alpha_i - \delta_r} (-1)^{n-r} e_{n-r}^{(n,-k)} \\ &= X_k^{\alpha_i} \\ &= (A_\alpha)_{i,j}. \end{aligned}$$

□

Teorema 11.7 (Formule di Jacobi-Trudi). *Sia λ una partizione con $l(\lambda) \leq n$ vale che*

1. $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j}),$

2. $s_\lambda = \det(e_{\lambda_i - i + j}).$

Di seguito ci limitiamo a dimostrare la prima parte del teorema, la seconda la rivedremo in seguito come conseguenza del primo pezzo tramite un piccolo passaggio di algebra lineare.

Dimostrazione. Si ha che

$$a_\alpha = \det(A_\alpha) = (\det H_\alpha)(\det M) .$$

Per $\alpha = \delta$ con $\delta = (n - 1, n - 2, \dots, 1, 0)$ abbiamo

$$H_\delta = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & * \\ 0 & h_0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\det H_\delta = h_0^n = 1$. In particolare segue che

$$a_\alpha = \det H_\alpha a_\delta .$$

Posto $\alpha = \lambda + \delta$ abbiamo

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = \det H_{\lambda+\delta} \\ &= \det(h_{\lambda_i + \delta_i - \delta_j}) = \det(h_{\lambda_i - i + j}) . \end{aligned}$$

□

Osservazione 11.8. Nel teorema precedente abbiamo dimostrato che $s_\lambda^{(n)} = \det(h_{\lambda_i - i + j}^{(n)})$, cioè la relazione tra polinomi simmetrici in n -variabili.

Possiamo definire $\det(h_{\lambda_i - i + j})$, dove adesso gli h_* sono funzioni simmetriche non polinomi, tramite la seguente equazione:

$$\det(h_{\lambda_i - i + j}) = \sum_{\sigma \in S_{\mathbb{N}}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{\infty} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)}$$

dove $S_{\mathbb{N}}$ è il gruppo delle permutazioni di \mathbb{N} in se stesso che permutano solo un numero finito di elementi o equivalentemente le permutazioni definitivamente identiche (i $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tali che $\sigma(k) = k$ per ogni $k \geq n$ per un certo n , che siano biettivi).

Prima di proseguire cerchiamo di dare un senso all'espressione precedente. Anzitutto osserviamo che per ogni $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ possiamo definire n_σ come

$$n_\sigma = \max\{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) \neq n\} + 1 ,$$

ovvero il primo naturale a partire dal qualche la σ diventa costantemente l'identità.

A questo punto abbiamo che per ogni $i \geq \max\{n_\sigma, l(\lambda) + 1\}$ vale

$$h_{\underbrace{\lambda_i}_{=0} - i + \sigma(i)} = h_{-i+i} = h_0 = 1$$

quindi è sensato definire $k_\sigma = \max\{n_\sigma, l(\lambda) + 1\}$ e

$$\prod_{i=1}^{\infty} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)} = \prod_{i=1}^{k_\sigma} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)} .$$

Questo da senso alle produttorie infinite nella definizione di $\det(h_{\lambda_i - i + j})$ resta da provare che la risultante somma infinita *converga*, ovvero abbia senso. A questo punto osserviamo che per ogni $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ se $n_\sigma > l(\lambda) + 1$ (quindi $k_\sigma = n_\sigma$) allora abbiamo che $\sigma(n_\sigma - 1) < n_\sigma - 1$. Se, per non appesantire la notazione, poniamo $m = n_\sigma - 1$ otteniamo che

$$h_{\underbrace{\lambda_m}_{=0} - m + \sigma(m)} = h_{\underbrace{-m + \sigma(m)}_{<0}} = 0$$

e quindi

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\infty} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)} &= \prod_{i=1}^{n_\sigma} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)} \\ &= \prod_{i \neq m} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)} \underbrace{h_{\lambda_m - m + \sigma(m)}}_{=0} = 0 . \end{aligned}$$

Ora se identifichiamo S_n con il sotto-gruppo di $S_{\mathbb{N}}$ formato da tutte le permutazioni che fissano tutti i naturali maggiori strettamente di n , o equivalentemente il sotto-gruppo di tutti i σ tali che $n_\sigma \leq n + 1$, allora abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_{\mathbb{N}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{\infty} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)} &= \sum_{\sigma \in S_{l(\lambda)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{\infty} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)} + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_{\mathbb{N}} \setminus S_{l(\lambda)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{\infty} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)}}_{=0} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{l(\lambda)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{\infty} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)} \end{aligned}$$

dove ricordiamo che i $\prod_i h_{\lambda_i - i + \sigma(i)} = 0$ per $\sigma \in S_{\mathbb{N}} \setminus S_{l(\lambda)}$ perché questi sono esattamente i σ con $n_\sigma > l(\lambda) + 1$. Quindi abbiamo che anche la sommatoria nella definizione di $\det(h_{\lambda_i - i + j})$ ha senso.

A questo punto è una facile conto osservare che valutando a 0 tutte le variabili X_i con $i > n$ otteniamo

$$\begin{aligned} \det(h_{\lambda_i - i + j})(X_1, \dots, X_n, 0, 0, \dots) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{k_\sigma} h_{\lambda_i - i + \sigma(i)}^{(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n h_{\lambda_i - i + \sigma(i)}^{(n)} \\ &= \det(h_{\lambda_i - i + j}^{(n)}) \end{aligned}$$

da questo, per le proprietà dei limiti inversi ne segue che

$$\det(h_{\lambda_i - i + j}) = (\det(h_{\lambda_i - i + j}^{(n)}))_n = (s_\lambda^n)_n = s_\lambda .$$

Vediamo qualche esempietto.

Esempio 11.9. Posto $\lambda = (n, 0, \dots, 0)$ allora

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \det(h_{\lambda_i - i + j}) \\ &= \det \begin{pmatrix} h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-1} \\ 0 & h_0 & \dots & h_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_0 \end{pmatrix} = h_n \underbrace{h_0^{n-1}}_{=1} = h_n \end{aligned}$$

Esempio 11.10. Se prendiamo $\lambda = (1, 1, 1, 1, \dots, 1)$ abbiamo

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \det(e_{\lambda'_i - i + j}) \\ &= \det \begin{pmatrix} e_n & e_{n+1} & \dots & e_{2n-1} \\ 0 & e_0 & \dots & e_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_0 \end{pmatrix} = e_n \underbrace{e_0^{n-1}}_{=1} = e_n \end{aligned}$$

per la seconda formula di Jacobi-Trudi.

11.2 Ortogonalità

11.2.1 Alcuni lemmi preliminari

Cominciamo il seguente teorema.

Teorema 11.11. *Consideriamo due famiglie infinite di variabili $\{X_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ e $\{Y_n: n \in \mathbb{N}_0\}$. Valgono i seguenti fatti*

1. $\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(X) p_\lambda(Y)$
2. $\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_\lambda h_\lambda(X) m_\lambda(Y) = \sum_\lambda h_\lambda(Y) m_\lambda(X)$
3. $\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(X) s_\lambda(Y)$.

Dimostrazione. 1. Si considerano le $\{Z_{i,j} = X_i Y_j\}_{i,j}$ e prendiamo

$$\begin{aligned} H(t) &= \prod_{i,j} (1 - (Z_{i,j} t))^{-1} = \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j t)^{-1} \\ &= \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(Z_{i,j}) t^{|\lambda|} \text{ per il teorema 10.7} \end{aligned}$$

ma si ha che $p_\lambda(Z_{i,j}) = p_\lambda(X) p_\lambda(Y)$ e quindi

$$H(t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(X) p_\lambda(Y) t^{|\lambda|} .$$

Valutando t a 1

$$\sum_{i,j} (1 - X_i Y_i)^{-1} = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(X) p_\lambda(Y) .$$

2. Partiamo con l'osservare che $H(t) = \prod_i (1 - X_i t)^{-1}$ e quindi

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} &= \prod_j H(Y_j) \\
&= \prod_j \sum_r h_r(X) Y_j^r \\
&= \sum_{\alpha} h_{\alpha_1} \dots h_{\alpha_n} Y_1^{\alpha_1} \dots Y_n^{\alpha_n} \\
&= \sum_{\alpha} h_{\alpha} Y^{\alpha}
\end{aligned}$$

dove $h_{\alpha} = h_{\alpha_1} \dots h_{\alpha_n}$. Raggruppando i termini α che siano equivalenti a meno di permutazioni alla partizione λ otteniamo

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} &= \sum_{\lambda} \sum_{\alpha \in \lambda S_{\mathbb{N}}} \underbrace{h_{\alpha}}_{=h_{\lambda}} Y^{\alpha} \\
&= \sum_{\lambda} h_{\lambda} \left(\sum_{\alpha \in \lambda S_{\mathbb{N}}} Y^{\alpha} \right) \\
&= \sum_{\lambda} h_{\lambda}(X) m_{\lambda}(Y) .
\end{aligned}$$

3. Ci mettiamo nel caso di finite variabili X_1, \dots, X_n e Y_1, \dots, Y_n . Abbiamo

$$\begin{aligned}
a_{\delta}(X) a_{\delta}(Y) \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} &= a_{\delta}(X) a_{\delta}(Y) \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X) Y^{\alpha} \\
&= a_{\delta}(X) \left(\sum_{w \in S_n} \text{sgn}(w) Y^{\delta w} \right) \left(\sum_{\alpha} h_{\alpha}(X) Y^{\alpha} \right) \\
&= a_{\delta}(X) \sum_{w, \alpha} \text{sgn}(w) h_{\alpha}(X) Y^{\alpha + \delta w} \\
&= a_{\delta}(X) \sum_{w, \beta} \text{sgn}(w) h_{\beta - \delta w}(X) Y^{\beta} \\
&= \sum_{\beta} \left(a_{\delta}(X) \underbrace{\sum_{w \in S_n} \text{sgn}(w) h_{\beta - \delta w}(X)}_{= \det H_{\beta}} \right) Y^{\beta}
\end{aligned}$$

usando il fatto che $a_{\beta}(X) = \det H_{\beta}(X) a_{\delta}(X)$ abbiamo che

$$a_{\delta}(X) a_{\delta}(Y) \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_{\beta} a_{\beta}(X) Y^{\beta}$$

dove sappiamo che gli a_β non nulli sono tutti e soli quelli della forma $\beta = (\delta + \lambda)\sigma$ per qualche $\sigma \in S_n$ e λ partizione, quindi

$$\begin{aligned} a_\delta(X)a_\delta(Y) \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} &= \sum_\lambda \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{a_{(\delta+\lambda)\sigma}(X)}_{=\text{sgn}(\sigma)a_{\delta+\lambda}(X)} Y^{(\delta+\lambda)\sigma} \\ &= \sum_\lambda a_{\delta+\lambda}(X) \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) Y^{(\delta+\lambda)\sigma} \right) \\ &= \sum_\lambda a_{\delta+\lambda}(X) a_{\delta+\lambda}(Y). \end{aligned}$$

A questo punto dividendo entrambi i membri per $a_\delta(X)a_\delta(Y)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} &= \frac{\sum_\lambda a_{\lambda+\delta}(x) a_{\lambda+\delta}(y)}{a_\delta(x) a_\delta(y)} \\ &= \sum_\lambda s_\lambda(X) s_\lambda(Y) \end{aligned}$$

dove lo ricordiamo stiamo lavorando con gli insiemi di variabili finite $\{X_1, \dots, X_n\}$ e $\{Y_1, \dots, Y_n\}$. Passando ai limiti per n che tende all'infinito si ottiene l'uguaglianza

$$\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(X) s_\lambda(Y)$$

tra serie di potenze, e quindi funzioni simmetriche. □

11.2.2 Prodotto scalare per funzioni simmetriche

Definizione 11.12. Sfruttando il fatto che le due famiglie $\{h_\lambda\}_\lambda$ e $\{m_\lambda\}_\lambda$ sono due basi per Λ , dall'algebra lineare sappiamo che esiste una ed una sola forma bilineare che soddisfi le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle : \Lambda \times \Lambda &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \langle h_\lambda, m_\mu \rangle &= \delta_{\lambda,\mu} \end{aligned}$$

dove δ è la delta di Dirach. Tale forma si estende in modo naturale a una forma \mathbb{Q} -bilineare definita su $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

Proposizione 11.13. *Date due \mathbb{Q} -basi $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ di $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ ². Sono equivalenti i seguenti fatti*

1. $\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$
2. $\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_\lambda u_\lambda(X) v_\lambda(Y)$.

La proposizione 11.13 ci permetterà di provare che la famiglia $\{s_\lambda\}_\lambda$ è una base ortonormale di $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ per il prodotto scalare definito.

²L'anello delle funzioni simmetriche tensorizzato su \mathbb{Q} .

Dimostrazione. La dimostrazione è essenzialmente un conto. Poniamo $u_\lambda = \sum_\rho a_{\lambda,\rho} h_\rho$ e $v_\lambda = \sum_\xi b_{\lambda,\xi} m_\xi$. Abbiamo che valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}\langle u_\lambda, v_\mu \rangle &= \sum_{\rho,\xi} (a_{\lambda,\rho} b_{\mu,\xi}) \langle h_\rho, m_\xi \rangle \\ &= \sum_\rho a_{\lambda,\rho} b_{\mu,\rho}\end{aligned}$$

$$\sum_\lambda u_\lambda(X) v_\lambda(Y) = \sum_{\rho,\xi} \left(\sum_\lambda a_{\lambda,\rho} b_{\lambda,\xi} \right) h_\rho(X) m_\xi(Y) .$$

Se prendiamo le matrici $A = (a_{\lambda,\rho})_{\lambda,\rho}$ e $B = (b_{\lambda,\xi})_{\lambda,\xi}$,³ e consideriamo i due prodotti tAB e $A{}^tB$ non è difficile vedere che

$$(A{}^tB)_{\lambda,\mu} = \sum_\rho a_{\lambda,\rho} b_{\mu,\rho}$$

e che

$$({}^tAB)_{\rho,\xi} = \sum_\lambda a_{\lambda,\rho} b_{\lambda,\xi} ,$$

quindi abbiamo che

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = (A{}^tB)_{\lambda,\mu}$$

e

$$\sum_\lambda u_\lambda(X) v_\lambda(Y) = \sum_{\rho,\xi} ({}^tAB)_{\rho,\xi} h_\rho(X) m_\xi(Y) .$$

Ora valgono le seguenti equivalenze logiche

$$(A{}^tB)_{\lambda,\mu} = \delta_{\lambda,\mu} \iff A{}^tB = \text{id} \iff {}^tAB = \text{id} \iff ({}^tAB)_{\rho,\xi} = \delta_{\rho,\xi}$$

inoltre sappiamo che i prodotti $h_\lambda(X) m_\lambda(Y)$ formano una base per il \mathbb{Q} -spazio vettoriale $\Lambda_{\mathbb{Q}}[X, Y]$,⁴ e quindi l'uguaglianza

$$\begin{aligned}\sum_{\rho,\xi} ({}^tAB)_{\rho,\xi} h_\rho(X) m_\xi(Y) &= \sum_{\rho,\xi} \delta_{\rho,\xi} h_\rho(X) m_\xi(Y) \\ &= \sum_\rho h_\rho(X) m_\rho(Y) = \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1}\end{aligned}$$

vale *se e solo se*

$${}^tAB = (\delta_{\rho,\xi}) = \text{id} .$$

³Dove usiamo le partizioni come insieme di indici.

⁴Questo è conseguenza del fatto che l'anello dove vivono i prodotti $h_\rho(X) m_\xi(Y)$ è un prodotto tensore di $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ con se stesso.

Riassumendo abbiamo che

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu} \iff A^t B = \text{id} \iff {}^t A B = \text{id} \iff \sum_\lambda u_\lambda(X) v_\lambda(X) = \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1}$$

ovvero la tesi. □

Corollario 11.14. 1. $\langle \frac{p_\lambda}{z_\lambda}, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$

2. $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$

Dimostrazione. Per il teorema 11.11 sappiamo che

$$\prod_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(X) p_\lambda(Y) = \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1}$$

quindi per la proposizione precedente abbiamo che

$$\langle \frac{p_\lambda}{z_\lambda}, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu} .$$

Sempre per il teorema 11.11

$$\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(X) s_\lambda(Y)$$

da cui segue che

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu} .$$

□

Corollario 11.15. La forma $\langle -, - \rangle$ è simmetrica e definita positiva, ovvero è un prodotto scalare.

Dimostrazione. Dalla definizione sappiamo che $\langle -, - \rangle$ è una forma \mathbb{Q} -bilineare. Per vedere che è simmetrica basta osservare che sugli elementi della base si ha

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu} = \delta_{\mu,\lambda} = \langle s_\mu, s_\lambda \rangle$$

quindi usando la bilinearità abbiamo che per ogni $u = \sum_\lambda a_\lambda s_\lambda$ e $v = \sum_\mu b_\mu s_\mu$ si deve avere che

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \sum_{\lambda,\mu} a_\lambda b_\mu \langle s_\lambda, s_\mu \rangle \\ &= \sum_{\lambda,\mu} a_\lambda b_\mu \langle s_\mu, s_\lambda \rangle \\ &= \langle \sum_\mu b_\mu s_\mu, \sum_\lambda a_\lambda s_\lambda \rangle = \langle v, u \rangle \end{aligned}$$

che prova la simmetricità della forma $\langle -, - \rangle$.

La definita positività segue dal banale conto

$$\begin{aligned} \langle \sum_\lambda c_\lambda s_\lambda, \sum_\lambda c_\lambda s_\lambda \rangle &= \sum_\lambda c_\lambda c_\mu \langle s_\lambda, s_\mu \rangle \\ &= \sum_\lambda c_\lambda^2 \geq 0 \end{aligned}$$

dove la disuguaglianza sopra è sempre stretta tranne che nel caso $c_\lambda = 0$ per ogni λ . □

Capitolo 12

Algebre di caratteri

Lezione 12 (14/04/2016)

12.1 Alcuni risultati di ortogonalità sulle funzioni simmetriche

Ricordiamo che abbiamo visto l'isomorfismo

$$\begin{aligned}\omega: \Lambda &\longrightarrow \Lambda \\ \omega(e_n) &= h_n\end{aligned}$$

che ovviamente estende a un isomorfismo

$$\begin{aligned}\omega: \Lambda_{\mathbb{Q}} &\longrightarrow \Lambda_{\mathbb{Q}} \\ \omega(e_n) &= h_n.\end{aligned}$$

Proposizione 12.1. *L'isomorfismo ω è un'isometria rispetto a $\langle -, - \rangle$.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che $\omega(p_\lambda) = (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} p_\lambda$ e sappiamo che i vettori p_λ sono ortogonali.

Un rapido conto ci mostra che

$$\begin{aligned}\langle \omega(p_\lambda), \omega(p_\mu) \rangle &= (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} (-1)^{|\mu|-l(\mu)} \langle p_\lambda, p_\mu \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \neq \mu \\ 1 & \text{se } \lambda = \mu \end{cases},\end{aligned}$$

in tutti i casi abbiamo che

$$\langle \omega(p_\lambda), \omega(p_\mu) \rangle = \langle p_\lambda, p_\mu \rangle$$

questo, con il fatto che i p_λ formano una base di $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ e la bilinearità di $\langle -, - \rangle$ ci permette di concludere che effettivamente ω è un isometria. □

Osservazione 12.2. Prima di andare oltre osserviamo che, grazie a risultati di algebra lineare, è possibile estendere il prodotto scalare $\langle -, - \rangle$, in uno ed un solo modo, a un prodotto hermitiano definito su $\Lambda_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$. In maniera analoga è possibile estendere la ω a un isometria (ovvero un applicazione unitaria) $\omega: \Lambda_{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}$.

12.2 Anello dei caratteri

Definizione 12.3. Sia G un gruppo (finito), A una \mathbb{Q} -algebra commutativa e siano $f, g: G \rightarrow A$ funzioni. Allora possiamo introdurre il prodotto

$$\langle -, - \rangle: [G, A] \times [G, A] \longrightarrow A$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x^{-1})g(x)$$

Osservazione 12.4. Prendendo $A = \mathbb{C}$ e restringendo il prodotto al sotto-spazio di $[G, A]$ formato dalle sole funzioni classe¹, il prodotto scalare ottenuto diventa il prodotto hermitiano definito nel capitolo 3.

Notazione. Sia $w \in S_n$, sappiamo che esistono e sono unici i cicli disgiunti $c_1, \dots, c_k \in S_n$ tali che $w = c_1 \circ \dots \circ c_k$. Posto ρ_i pari alla lunghezza del ciclo c_i , a meno di permutare gli indici dei cicli² possiamo supporre

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_k .$$

In questo modo possiamo associare ad ogni permutazione $w \in S_n$ un'unica partizione

$$\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k, 0, 0 \dots) .$$

Con $\rho(w)$ indicheremo la partizione associata alla permutazione w .

Definizione 12.5. Sia $\psi_n: S_n \rightarrow \Lambda$ definita da

$$\psi_n(w) = p_{\rho(w)} = p_{\rho_1} \dots p_{\rho_n} .$$

Per non appesantire la notazione nel seguito useremo $\psi(w)$ al posto di $\psi_n(w)$, laddove sia chiaro dal contesto quale sia il naturale n per cui $w \in S_n$.

In questa sezione e nel prossimo capitolo finalmente mostreremo il collegamento che esiste tra le funzioni simmetriche e le funzioni classe degli S_n (e quindi della relazione tra funzioni simmetriche e rappresentazioni degli S_n).

In quello che segue considereremo $S_n \times S_m$ come sotto-gruppo di S_{n+m} con l'ovvia immersione che manda una coppia $(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m$ nell'elemento $\sigma \times \tau \in S_{n+m}$ definito dalla seguente equazione

$$(\sigma \times \tau)(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{se } i \leq n \\ \tau(i - n) + n & \text{se } n < i \leq n + m. \end{cases}$$

Definizione 12.6. Chiamiamo $R^{(n)}$ lo \mathbb{Z} -modulo generato dai caratteri delle rappresentazioni irriducibili di S_n .

$$\text{Poniamo } R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R^{(n)} .$$

Osservazione 12.7. Vale chiaramente $R^{(0)} = \mathbb{Z}$.

¹Che ricordiamo sono le funzioni costanti sulle classi di coniugio di G .

²Cosa che possiamo fare visto che i cicli sono disgiunti, quindi commutano rispetto alla composizione di S_n .

Definizione 12.8. Per ogni $\chi_V \in R^{(n)}$ e $\chi_W \in R^{(m)}$ caratteri irriducibili definiamo

$$\chi_V \cdot \chi_W = \chi_{\text{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}(V \otimes W)},$$

dove $V \otimes W$ è visto come $S_n \times S_m$ -modulo con l'azione data da

$$(\sigma, \tau)(u \otimes v) = (\sigma u) \otimes (\tau v).$$

Estendendo per bilinearità otteniamo una famiglia di mappe bilineari

$$\cdot: R^{(n)} \times R^{(m)} \longrightarrow R^{(n+m)}$$

che danno a R la struttura di una \mathbb{Z} -algebra graduata.

Esercizio 12.9. Verificare che il prodotto così definito da a R la struttura di un anello graduato.

Soluzione. Sappiamo già che il prodotto definito su R è distributivo, in quanto \mathbb{Z} -bilineare. Per concludere dobbiamo solo far vedere che è anche associativo e unitario.

Per provare l'associatività basta osservare che se V , W e K sono rispettivamente rappresentazioni irriducibili di S_n , S_m e S_k allora

$$\text{Ind}_{S_{n+m} \times S_k}^{S_{n+m+k}}(\text{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}(V \otimes W) \otimes K) \cong \text{Ind}_{S_n \times S_{m+k}}^{S_{n+m+k}}(V \otimes \text{Ind}_{S_m \times S_k}^{S_{m+k}}(W \otimes K))$$

e che i caratteri di queste due rappresentazioni sono rispettivamente $(\chi_V \cdot \chi_W) \cdot \chi_K$ e $\chi_V \cdot (\chi_W \cdot \chi_K)$. Quindi

$$(\chi_V \cdot \chi_W) \cdot \chi_K = \chi_V \cdot (\chi_W \cdot \chi_K)$$

ovvero l'associatività vale per gli elementi di una base di R , per bilinearità segue l'associatività generale.

Per vedere che R è unitario osserviamo che preso $1 = \chi_{\mathbb{C}}$ l'unica rappresentazione irriducibile di $S_0 = \{\text{id}\}$, per ogni S_n -modulo irriducibile V abbiamo che

$$\text{Ind}_{S_n \times S_0}^{S_n}(V \otimes \mathbb{C}) \cong V \cong \text{Ind}_{S_0 \times S_n}^{S_n}(\mathbb{C} \otimes V)$$

da cui segue che

$$\chi_V \cdot 1 = \chi_V = 1 \cdot \chi_V,$$

dalla bilinearità segue che l'uguaglianza di sopra si estende anche a tutti gli elementi di R , ovvero

$$f \cdot 1 = f = 1 \cdot f$$

per ogni $f \in R$ non necessariamente carattere irriducibile di qualche S_n . □

Definizione 12.10. Diamo il seguente *prodotto scalare* su R (a valori in \mathbb{C}):

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f_n, g_n \rangle_{S_n}$$

dove $f = (f_n) \in R$ e $g = (g_n) \in R$ e i vari $\langle f_n, g_n \rangle_{S_n}$ sono (le opportune restrizioni) dei prodotti scalari definiti prima sulle mappe in $[S_n, \mathbb{C}]$.

Quello che vorremmo dimostrare a questo punto è che esiste un isomorfismo tra gli anelli R e Λ . Per fare questo sarà necessario prima passare dalle \mathbb{C} -algebre $\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes \mathbb{C}$ e $R_{\mathbb{C}} = R \otimes \mathbb{C}$.

Osservazione 12.11. Prima di continuare ci teniamo a far osservare che

$$R_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_n R^{(n)} \otimes \mathbb{C} \cong \bigoplus_n (R^{(n)} \otimes \mathbb{C}) \cong \bigoplus_n \mathbb{C}_{cls}(S_n) ,$$

ovvero che R è un anello i cui elementi sono combinazioni lineari di funzioni classe sugli S_n .

Osservazione 12.12. Esiste ed è unico un prodotto hermitiano definito su $R_{\mathbb{C}}$ che soddisfi l'equazione

$$\langle f, g \rangle_{R_{\mathbb{C}}} = \sum_n \langle f_n, g_n \rangle_{S_n}$$

dove gli f_n e g_n sono delle S_n -funzioni classe, ovvero degli elementi di $R_{\mathbb{C}}^{(n)}$, $f = \sum_n f_n$ e $g = \sum_n g_n$.

Tale prodotto essenzialmente restringe sui sotto-spazi $R^{(n)}$ al prodotto hermitiano definito sullo spazio delle funzioni classe $\mathbb{C}_{cls}(S_n)$ visto nel capitolo 3.

Proposizione 12.13. *Sia ch l'unico morfismo di \mathbb{C} -spazi vettoriali tale che*

$$\begin{aligned} \text{ch}: R_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \Lambda_{\mathbb{C}} \\ \text{ch}(f) &= \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} f(w) p_{\rho(w)} , \end{aligned}$$

per ogni $f \in R_{\mathbb{C}}^{(n)} = \mathbb{C}_{cls}(S_n)$. Tale morfismo è un isomorfismo isometrico di \mathbb{C} -algebre munite di prodotto hermitiano.

Dimostrazione. Non è difficile rendersi conto che ch è effettivamente \mathbb{C} -lineare: è l'unico morfismo che manda ogni S_n -carattere irriducibile χ_V nel polinomio $\frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} \chi_V(w) p_{\rho(w)}$.

Vogliamo far vedere che questa mappa è un omomorfismo di anelli e che è biettiva. Iniziamo con il far vedere che ch è un omomorfismo di anelli.

Usando la definizione si vede facilmente che $\text{ch}(1) = 1$. Siano ora χ_V e χ_W due caratteri irriducibili rispettivamente di S_n e S_m , se riuscissimo a far vedere che $\text{ch}(\chi_V \chi_W) = \text{ch}(\chi_V) \text{ch}(\chi_W)$, per ogni coppia di rappresentazioni irriducibili V e W , allora per \mathbb{C} -bilinearità seguirebbe che $\text{ch}(fg) = \text{ch}(f) \text{ch}(g)$ per ogni coppia $f, g \in R_{\mathbb{C}}$. Procediamo con i conti:

$$\begin{aligned} \text{ch}(\chi_V \chi_W) &= \frac{1}{(n+m)!} \sum_{w \in S_{n+m}} \chi_V \chi_W(w) p_{\rho(w)} \\ &= \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\lambda} \sum_{\rho(w)=\lambda} \chi_V \chi_W(w) p_{\lambda} \\ &= \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\lambda} \sum_{\rho(w)=\lambda} \chi_V \chi_W(w) c_{\lambda}(w) p_{\lambda} \\ &= \sum_{\lambda} \left(\sum_{w \in S_{n+m}} \frac{1}{(n+m)!} \chi_V \chi_W(w) c_{\lambda}(w) \right) p_{\lambda} \\ &= \sum_{\lambda} \langle \chi_V \chi_W, c_{\lambda} \rangle_{S_{n+m}} p_{\lambda} \end{aligned}$$

dove $c_{\lambda}: S_{n+m} \rightarrow \mathbb{C}$ è la funzione classe che vale 1 su tutte le permutazioni di forma λ e 0 sulle altre.

Se ci concentriamo per un attimo sui prodotti scalari nell'ultima equazione possiamo osservare, usando Frobenius, che

$$\begin{aligned}\langle \chi_V \chi_W, c_\lambda \rangle_{S_{n+m}} &= \langle \chi_{\text{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} V \otimes W}, c_\lambda \rangle_{S_{n+m}} \\ &= \langle \chi_{V \otimes W}, \text{Res}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} c_\lambda \rangle_{S_n \times S_m}\end{aligned}$$

dove $\text{Res}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} c_\lambda$ è la funzione classe ottenuta restringendo c_λ al sotto-gruppo $S_n \times S_m$. A questo punto sviluppando otteniamo

$$\begin{aligned}\langle \chi_{V \otimes W}, \text{Res}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} c_\lambda \rangle_{S_n \times S_m} &= \frac{1}{n!m!} \sum_{(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m} \chi_{V \otimes W}(\sigma, \tau) c_\lambda(\sigma, \tau) \\ &= \frac{1}{n!m!} \sum_{(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m} \chi_V(\sigma) \chi_W(\tau) c_\lambda(\sigma, \tau),\end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione principale abbiamo che

$$\begin{aligned}\text{ch}(\chi_V \chi_W) &= \sum_{\lambda \vdash n+m} \left(\frac{1}{n!m!} \sum_{(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m} \chi_V(\sigma) \chi_W(\tau) c_\lambda(\sigma, \tau) \right) p_\lambda \\ &= \frac{1}{n!m!} \sum_{(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m} \sum_{\lambda} \chi_V(\sigma) \chi_W(\tau) c_\lambda(\sigma, \tau) p_\lambda.\end{aligned}$$

Posto di indicare $\rho(\sigma, \tau)$ la sequenza ottenuta prendendo i numeri in $\rho(\sigma)$ e $\rho(\tau)$ ordinandoli in modo decrescente, che quindi è una partizione, abbiamo che per ogni λ vale

$$c_\lambda(\sigma, \tau) \neq 0$$

se e solo se $\lambda = \rho(\sigma, \tau)$, pertanto abbiamo che

$$\begin{aligned}\text{ch}(\chi_V \chi_W) &= \frac{1}{n!m!} \sum_{(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m} \chi_V(\sigma) \chi_W(\tau) \underbrace{c_{\rho(\sigma, \tau)}(\sigma, \tau)}_{=1} p_{\rho(\sigma, \tau)} \\ &= \frac{1}{n!m!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_m} \chi_V(\sigma) \chi_W(\tau) p_{\rho(\sigma, \tau)}\end{aligned}$$

per concludere osserviamo che per come è stato definito $\rho(\sigma, \tau)$ vale che

$$p_{\rho(\sigma, \tau)} = p_{\rho(\sigma)} p_{\rho(\tau)}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\text{ch}(\chi_V \chi_W) &= \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_m} \chi_V(\sigma) \chi_W(\tau) p_{\rho(\sigma)} p_{\rho(\tau)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi_V(\sigma) p_{\rho(\sigma)} \frac{1}{m!} \sum_{\tau \in S_m} \chi_W(\tau) p_{\rho(\tau)} \\ &= \text{ch}(\chi_V) \text{ch}(\chi_W).\end{aligned}$$

Per quanto detto sopra questo è sufficiente per provare che ch è un omomorfismo di anelli. Non resta che da provare che ch è anche biettiva.

Per provare l'iniettività facciamo vedere direttamente che ch è un isometria da $R_{\mathbb{C}}$ in $\Lambda_{\mathbb{C}}$ rispetto a prodotti hermitiani definiti su questi \mathbb{C} -spazi vettoriali, da questo segue automaticamente che ch

è iniettiva per i risultati ben noti di algebra lineare. Siano quindi $f \in R_{\mathbb{C}}^{(n)}$ e $g \in R^{(m)}$, ovvero f e g sono delle funzioni classe definite rispettivamente su S_n e S_m , e vogliamo far vedere che

$$\langle \text{ch}(f), \text{ch}(g) \rangle_{\Lambda_{\mathbb{C}}} = \langle f, g \rangle_{R_{\mathbb{C}}} ,$$

per farlo distingueremo due casi, quello in cui $n \neq m$ e quello in cui $n = m$, tuttavia prima di procedere osserviamo che per ogni $f \in R_{\mathbb{C}}^{(k)}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \text{ch}(f) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_k} f(\sigma) p_{\rho(\sigma)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash k} \sum_{\rho(\sigma)=k} \underbrace{f(\sigma)}_{f(\lambda)} p_{\lambda} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash k} z_{\lambda}^{-1} n! f(\lambda) p_{\lambda} , \end{aligned}$$

dove $f(\lambda)$ denota il valore di f su tutte le partizioni di S_k di forma λ , da questo segue l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \langle \text{ch}(f), \text{ch}(g) \rangle &= \left\langle \sum_{\lambda \vdash n} z_{\lambda}^{-1} f(\lambda) p_{\lambda}, \sum_{\mu \vdash m} z_{\mu}^{-1} g(\mu) p_{\mu} \right\rangle \\ &= \sum_{\lambda, \mu} z_{\mu}^{-1} \overline{f(\lambda)} g(\mu) \langle z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle \end{aligned}$$

che tornerà molto comoda nel seguito.

Torniamo al problema principale e cominciamo a considerare il caso $n \neq m$ e quindi $\langle f, g \rangle_{R_{\mathbb{C}}} = 0$ abbiamo che

$$\langle \text{ch}(f), \text{ch}(g) \rangle_{\Lambda_{\mathbb{C}}} = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu \vdash m} z_{\mu}^{-1} \overline{f(\lambda)} g(\mu) \langle z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle$$

che è pari a 0 poiché $n \neq m$ e quindi le partizioni λ e μ sono sempre distinte, essendo rispettivamente una partizione di n e m , e quindi $\langle z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle = 0$ per tutti i λ e μ . Quindi in questo caso effettivamente $\langle \text{ch}(f), \text{ch}(g) \rangle = \langle f, g \rangle$.

Passiamo ora al caso $n = m$, in questo caso abbiamo che

$$\begin{aligned} \langle \text{ch}(f), \text{ch}(g) \rangle_{\Lambda_{\mathbb{C}}} &= \sum_{\lambda, \mu \vdash n} z_{\mu}^{-1} \overline{f(\lambda)} g(\mu) \langle z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle_{\Lambda_{\mathbb{C}}} \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} z_{\lambda}^{-1} \overline{f(\lambda)} g(\lambda) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda} \sum_{\rho(\sigma)=\lambda} \overline{f(\sigma)} g(\sigma) = \langle f, g \rangle_{R_{\mathbb{C}}} . \end{aligned}$$

Più in generale per $f, g \in R_{\mathbb{C}}$, poste $f = \sum_n f_n$ e $g = \sum_n g_n$ le decomposizioni di f e g come elementi di $R_{\mathbb{C}} = \bigoplus_n R_{\mathbb{C}}^{(n)}$, ovvero $f_n, g_n \in R_{\mathbb{C}}^{(n)}$, allora abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \text{ch}(f), \text{ch}(g) \rangle_{\Lambda_{\mathbb{C}}} &= \sum_{n, m} \langle \text{ch}(f_n), \text{ch}(g_m) \rangle_{\Lambda_{\mathbb{C}}} \\ &= \sum_n \langle \text{ch}(f_n), \text{ch}(g_n) \rangle_{\Lambda_{\mathbb{C}}} \\ &= \sum_n \langle f_n, g_n \rangle_{R_{\mathbb{C}}} \\ &= \sum_n \langle f_n, g_n \rangle_{S_n} = \langle f, g \rangle_{R_{\mathbb{C}}} \end{aligned}$$

che appunto prova che ch è un isometria, quindi in particolare è iniettiva.

Rimane solo da dimostrare che ch sia suriettiva, per provare questo osserviamo che per ogni n abbiamo che $M_{(n,0,\dots)}$ è la rappresentazione banale di S_n

$$\begin{aligned} \text{ch}(\chi_{M_{(n,0,\dots)}}) &= \sum_{\mu \vdash n} z_\mu^{-1} \underbrace{\chi_{M_{(n,0,\dots)}}(\mu)}_{=1} p_\mu \\ &= h_n \end{aligned}$$

da questo segue che Im ch contiene tutti gli h_n , che sono un insieme di generatori per $\Lambda_{\mathbb{C}}$ e quindi $\text{Im ch} = \Lambda_{\mathbb{C}}$, cioè ch è suriettiva.

Quindi abbiamo provato che $\text{ch}: R_{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}$ è un isomorfismo isometrico di \mathbb{C} -algebre munite di prodotto hermitiano. □

Osservazione 12.14. Nella precedente dimostrazione abbiamo fatto vedere che per ogni n

$$\text{ch}(\chi_{M_{(n,0,\dots)}}) = h_n .$$

Usando la prima formula di Jacobi-Trudi, che ricordiamo ci diceva che

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j}) ,$$

indicando con χ_λ la funzione classe

$$\chi_\lambda = \det(\psi_{\lambda_i - i + j})$$

dove $\psi_n = \chi_{M_{(n,0,\dots)}}$, abbiamo che

$$s_\lambda = \text{ch}(\chi_\lambda) .$$

Usando il fatto che ch è un isometria e che $\langle s_\lambda, s_\lambda \rangle = 1$ abbiamo che $\langle \chi_\lambda, \chi_\lambda \rangle = 1$. Ricordiamo che i ψ_n , essendo dei caratteri di rappresentazioni, sono combinazioni a coefficienti interi dei caratteri irriducibili degli S_n e quindi dato che $\chi_\lambda = \det(\psi_{\lambda_i - i + j})$ abbiamo che devono esistere dei coefficienti interi c_μ tali che

$$\chi_\lambda = \sum_{\mu} c_\mu \chi_{S_\mu} .$$

Da questo segue che

$$\begin{aligned} \langle \chi_\lambda, \chi_\lambda \rangle &= \sum_{\xi, \rho} \underbrace{\overline{c_\xi}}_{=c_\xi} c_\rho \langle \chi_{S_\xi}, \chi_{S_\rho} \rangle \\ &= \sum_{\mu} c_\mu^2 \langle \chi_{S_\mu}, \chi_{S_\mu} \rangle \end{aligned}$$

che può essere uguale a 1 solo ed esclusivamente quando esattamente uno dei c_μ è pari a ± 1 .

Dato che i χ_λ sono mandati negli s_λ che sono linearmente indipendenti questo ci permette di dire che per ogni λ esiste uno ed un solo μ tale che $\chi_\lambda = \pm \chi_{S_\mu}$.

Nel seguito vedremo che per in verità $\chi_\lambda = \chi_{S_\lambda}$ (ovvero che $\text{ch}(\chi_{S_\lambda}) = s_\lambda$), tuttavia quanto fin detto è sufficiente per dirci che gli s_λ sono esattamente tutti e sole le immagini dei caratteri irriducibili degli S_n , modulo il segno.

Teorema 12.15. *La mappa $\text{ch}: R_{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}$ restringe a un isomorfismo di anelli $\text{ch}: R \rightarrow \Lambda$.*

Dimostrazione. Da quanto visto nell'osservazione 12.14 sappiamo che gli s_λ , che lo ricordiamo sono una base di Λ , sono immagini, a meno del segno dei caratteri delle rappresentazioni irriducibili degli S_n , ovvero sono immagini di una base di R . Da questo segue che

$$\text{ch}(R) = \text{ch}(\langle \chi_{S_\lambda} : \lambda \rangle) = \langle s_\lambda : \lambda \rangle = \Lambda ,$$

e dunque ch restringe un omomorfismo suriettivo di anelli

$$\text{ch}: R \longrightarrow \Lambda ,$$

che per di più è iniettivo, in quanto restrizione di un morfismo iniettivo, e quindi questo è un isomorfismo. \square

Capitolo 13

Relazione tra rappresentazioni irriducibili degli S_n e funzioni simmetriche

Lezione 13 (21/04/2016)

13.1 Relazione tra gli s_λ e i caratteri degli S_λ

In questo capitolo ci apprestiamo a provare che $\text{ch}(\chi_{S_\lambda}) = s_\lambda$.

Prima di poter arrivare a dimostrare questo ci serviranno una serie di risultati preliminari. Ricordiamo che per ogni n avevamo

$$\psi_n = \chi_{M_{(n,0,\dots)}}$$

per cui valeva $\text{ch}(\psi_n) = h_n$. Nel seguito poniamo per ogni $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots)$

$$\psi_\lambda = \psi_{\lambda_1} \dots \psi_{\lambda_k}$$

e quindi avremo $\text{ch}(\psi_\lambda) = h_\lambda$.

Proposizione 13.1. *Abbiamo che per ogni λ vale l'uguaglianza*

$$\psi_\lambda = \chi_{M_\lambda} ,$$

dove con M_λ indichiamo la rappresentazione dei tabloid di forma λ .

Dimostrazione. Per definizione abbiamo che $\psi_\lambda = \psi_{\lambda_1} \dots \psi_{\lambda_k}$ quindi dalla definizione del prodotto in R segue che

$$\begin{aligned} \psi_\lambda &= \chi_{M_{(\lambda_1)}} \dots \chi_{M_{(\lambda_k)}} \\ &= \chi_{\text{Ind}_{S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}}^{S_{|\lambda|}} M_{(\lambda_1)} \otimes \dots \otimes M_{(\lambda_k)}} \end{aligned}$$

ricordando che ogni $M_{(\lambda_i)}$ è una rappresentazione banale, e quindi è isomorfa a \mathbb{C} come spazio vettoriale, otteniamo che

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}}^{S_{|\lambda|}} M_{(\lambda_1)} \otimes \dots \otimes M_{(\lambda_k)} &\cong \text{Ind}_{S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}}^{S_{|\lambda|}} \mathbb{C}^{\otimes k} \\ &\cong \text{Ind}_{S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}}^{S_{|\lambda|}} \mathbb{C} \\ &\cong \mathbb{C}[S_{|\lambda|}/S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}] \cong M_\lambda , \end{aligned}$$

da cui appunto segue la tesi $\psi_\lambda = \chi_{M_\lambda}$. □

Osservazione 13.2. Dato che gli s_μ sono una base di Λ abbiamo che per h_λ esistono certi $c_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}$ tali che

$$h_\lambda = \sum_{\mu} c_{\lambda\mu} s_\mu ,$$

in particolare dato che $h_\lambda \in \Lambda^{|\lambda|}$, posto $n = |\lambda|$, abbiamo che

$$h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} c_{\lambda\mu} s_\mu ,$$

ovvero possiamo supporre i $c_{\lambda\mu} = 0$ per ogni μ che non sia una partizione di n . Da questo, posto di indicare per ogni μ con χ_μ l'elemento in R tale che $\text{ch}(\chi_\mu) = s_\mu$ otteniamo la relazione

$$\psi_\lambda = \sum_{\mu} c_{\lambda\mu} \chi_\mu .$$

Nel seguito calcoleremo esplicitamente i $c_{\lambda\mu}$ ma per ora chiediamo al lettore di fidarsi del fatto che $c_{\lambda\lambda} = 1$, fatto che useremo nella dimostrazione del teorema 13.3, ovvero il teorema di questa sezione.

Da quanto appena visto sappiamo che $\psi_\lambda = \sum_{\mu} c_{\lambda\mu} s_\mu$ d'altra parte sappiamo che ψ_λ è il carattere della rappresentazione M_λ e che vale l'isomorfismo

$$M_\lambda \cong \bigoplus_{\mu \succeq \lambda} k_{\lambda\mu} S_\mu$$

da cui segue l'uguaglianza di caratteri

$$\psi_\lambda = \sum_{\mu} k_{\lambda\mu} \chi_{S_\mu} .$$

Ci apprestiamo a questo punto a provare come promesso che $\chi_{S_\mu} = \chi_\mu$, ovvero che $\text{ch}(\chi_{S_\mu}) = s_\mu$, e inoltre vedremo che $k_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu}$.

Teorema 13.3. *Per ogni partizione λ abbiamo che $S_\lambda = \chi_\lambda$ e inoltre i coefficienti $c_{\lambda\mu}$ che compaiono nella decomposizione*

$$h_\lambda = \sum_{\mu} c_{\lambda\mu} s_\mu$$

sono i numeri di Kostka già visti, cioè $c_{\lambda\mu} = k_{\lambda\mu}$ per ogni coppia di partizioni λ e μ .

Dimostrazione. Cominciamo a considerare il caso in cui $\lambda = (n, 0, \dots)$. In questo caso sappiamo che M_λ è la rappresentazione di S_n banale e quindi $M_\lambda = S_\lambda$, in particolare

$$\psi_\lambda = \chi_{S_\lambda} ,$$

inoltre vale anche $h_\lambda = s_\lambda$ e quindi $\psi_\lambda = \chi_\lambda$. Da questo segue che $\chi_{S_\lambda} = \chi_\lambda$ e, per l'unicità della scrittura di ψ_λ come combinazione \mathbb{Z} -lineare nei χ_{S_μ} e nei χ_μ , che $k_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu}$ per ogni μ .

A questo punto supponiamo che per ogni partizione $\rho > \lambda$, rispetto all'ordinamento lessicografico (che un ordinamento totale su un insieme finito, quindi un buon ordinamento), dove $\rho \dashv n$, si abbia che $\chi_{S_\rho} = \chi_\rho$. Da un lato abbiamo che

$$M_\lambda = \bigoplus_{\mu \succeq \lambda} k_{\lambda\mu} S_\mu = S_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu} k_{\lambda,\mu} S_\mu$$

e quindi che

$$\begin{aligned}\psi_\lambda &= \chi_{S_\lambda} + \sum_{\mu} k_{\lambda\mu} \chi_{S_\mu} \\ &= \chi_{S_\lambda} + \sum_{\mu} k_{\lambda\mu} \chi_{S_\mu}\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza sappiamo che $k_{\lambda\mu} = 0$ se $\mu \not\preceq \lambda$. Dall'ipotesi induttiva possiamo anche riscrivere l'ultima equazione come

$$\psi_\lambda = \chi_{S_\lambda} + \sum_{\mu} k_{\lambda\mu} \chi_{\mu}.$$

D'altra parte noi sappiamo che¹

$$\psi_\lambda = \chi_\lambda + \sum_{\mu} c_{\lambda\mu} \chi_\mu$$

e sappiamo che a meno di segno i χ_ρ sono dei caratteri irriducibili. Abbiamo quindi due riscritture di ψ_λ come combinazione lineare di caratteri irriducibili, ovvero una base di R , da questo possiamo concludere che

- per ogni $\mu > \lambda$ si deve avere $k_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu}$
- per λ abbiamo che χ_{S_λ} è l'unico carattere diverso dai χ_μ che compaia nella prima decomposizione di ψ_λ , essendo χ_λ un carattere, anche esso diverso dai χ_μ , che compare nella seconda decomposizione dalla lineare si deve avere che $\chi_{S_\lambda} = \chi_\lambda$,
- infine per i restanti μ si deve avere $c_{\lambda\mu} = 0 = k_{\lambda\mu}$.

A questo punto per induzione, sull'ordinamento lessicografico inverso sulle partizioni di n , che è un buon ordinamento, segue la tesi. \square

Con quest ultimo risultato abbiamo finalmente provato, come promesso, il legame tra i caratteri delle rappresentazioni irriducibili degli S_n e le funzioni di Schur. Questa relazione in particolare ci darà un modo per calcolare i numeri di Kotska $k_{\lambda\mu}$ come coefficienti della decomposizione

$$h_\lambda = \sum_{\mu} k_{\lambda\mu} s_\mu$$

come vedremo nella prossima sezione.

13.2 Decomposizione degli h_λ e un nuovo metodo per il calcolo dei numeri di Kotska

Prima di enunciare il teorema cardine di questa sezione diamo una definizione.

Definizione 13.4. Fissata una partizione $\lambda \vdash n$ un tableau semi-standard di forma λ è un riempimento del diagramma di Ferrer associato a λ in cui gli elementi (numeri naturali) siano disposti in ordine debolmente crescente lungo le righe e strettamente crescente lungo le colonne: più formalmente un tableau semi-standard è una funzione $t: I_\lambda \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tale che $t(i, j) \leq t(i, j + 1)$ e $t(i, j) < t(i + 1, j)$ per ogni coppia $(i, j) \in I_\lambda$.

¹Ricordiamo che abbiamo già anticipato che $c_{\lambda\lambda} = 1$, fatto che seguirà da quanto vedremo nella prossima sezione.

In questa sezione dimostreremo il seguente teorema

Teorema 13.5. *Nella decomposizione*

$$h_\lambda = \sum_{\mu} k_{\lambda\mu} s_\mu$$

le $k_{\lambda\mu}$ sono i numeri di μ -tableau semi-standard contenenti λ_i elementi uguali a i , per ogni $i = 1, \dots, l(\lambda)$.

Per dimostrare questo teorema ci servirà un risultato preliminare importante.

Teorema 13.6 (Regola di Pieri). *Per ogni partizione μ e un r naturale si ha*

$$s_\mu h_r = \sum_{\lambda \in I_\mu^r} s_\lambda$$

dove I_μ^r è l'insieme delle partizioni ottenute da μ aggiungendo r quadratini in r colonne distinte.²

Dimostrazione della regola di Pieri. Anzitutto applicando l'involuzione ω possiamo osservare che la nostra tesi è equivalente alla

$$\omega(s_\mu)\omega(h_r) = \sum_{\lambda \in I_\mu^r} \omega(s_\lambda),$$

dove

$$\omega(s_\mu) = \det(\omega(h_{\lambda_i - i + j})) = \det(e_{\lambda_i - i + j})$$

e quindi per la seconda formula di Jacobi-Trudi

$$\omega(s_\mu) = s_{\mu'}.$$

Dunque la nostra tesi è equivalente a provare

$$s_{\mu'} e_r = \sum_{\lambda \in I_\mu^r} s_{\lambda'}$$

che possiamo anche riscrivere come

$$s_\mu e_r = \sum_{\lambda \in J_\mu^r} s_\lambda$$

dove J_μ^r è l'insieme delle partizioni ottenute da μ aggiungendo r quadratini in r righe distinte, anziché colonne. Non ci resta che provare questa uguaglianza.

Lavoriamo nell'anello $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ e osserviamo che

$$\begin{aligned} a_{\delta+\mu} e_r^{(n)} &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) X^{(\delta+\mu)\sigma} \right) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_r} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\alpha \in B_r} \text{sgn}(\sigma) X^{(\mu+\delta)\sigma + \alpha} \end{aligned}$$

²In verità a essere precisi avremmo dovuto parlare di diagrammi di Ferrer ma speriamo che il lettore ci perdoni questo abuso di notazione.

dove B_r è formato da sequenze di lunghezza n i cui valori sono 0 o 1 e in cui 1 compaia esattamente r -volte. Non è difficile osservare che per ogni permutazione $\sigma \in S_n$ e per ogni $\alpha \in B_r$ esiste sempre uno ed un unico $\beta \in B_r$ tale che $\alpha = \beta\sigma$ e quindi

$$\begin{aligned} a_{\delta+\mu} e_r^{(n)} &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\beta \in B_r} \text{sgn}(\sigma) X^{(\mu+\delta+\beta)\sigma} \\ &= \sum_{\beta \in B_r} a_{\mu+\delta+\beta} . \end{aligned}$$

A questo punto per quanto già visto sugli a_γ sappiamo che $a_\gamma \neq 0$ se e solo se per ogni $i, j \leq n$ con $i \neq j$ si ha $\gamma_i \neq \gamma_j$. Consideriamo quindi un β come sopra e osserviamo che per ogni i abbiamo che

$$(\mu + \delta + \beta)_i \geq \mu_i + \delta_i \geq \mu_{i+1} + \delta_{i+1} + 1 \geq (\mu + \delta + \beta)_{i+1}$$

e quindi i $(\mu + \delta + \beta)_i$ sono distinti se e solo se $\mu + \delta + \beta$ è strettamente decrescente e quindi se e solo se $\mu + \beta$ è una partizione. Dalla forma che ha β questo ci dice che gli $a_{\mu+\delta+\beta}$ non nulli sono tutti e solo quelli dove $\mu + \beta$ è una partizione formata aggiungendo a μ esattamente r -elementi in r righe distinte, ovvero

$$a_{\mu+\delta} e_r^{(n)} = \sum_{\lambda \in J_\mu^r} a_{\lambda+\delta} ,$$

a questo punto dividendo a entrambi i membri per a_δ otteniamo

$$s_\mu^{(n)} e_r^{(n)} = \sum_{\lambda \in J_\mu^r} s_\lambda^{(n)}$$

che quindi passando ai limiti (inversi) ci dà

$$s_\mu e_r = \sum_{\lambda \in J_\mu^r} s_\lambda$$

come volevamo appunto provare. □

A questo punto possiamo dare una dimostrazione del teorema [13.5](#)

Dimostrazione del teorema 13.5. Ricordiamo che il nostro scopo è provare l'uguaglianza

$$h_\lambda = \sum_{\mu} k_{\lambda\mu} s_\mu$$

dove i $k_{\lambda\mu}$ sono i numeri di μ -tableau semi-standard in cui ogni $i \leq l(\lambda)$ compare esattamente λ_i volte. Per farlo procediamo per induzione su $l(\lambda)$.

Se $l(\lambda) = 1$ allora sappiamo che

$$h_\lambda = h_{(\lambda_1, 0, \dots)} = s_{(\lambda_1, 0, \dots)} = s_\lambda$$

e per ogni partizione μ possiamo vedere che il numero di μ -tableau semi-standard con esattamente λ_1 occorrenze di 1 sono 1 se $\mu = \lambda$ e 0 altrimenti.

Supponiamo che per le partizioni di lunghezza n valga la tesi e sia $l(\lambda) = n + 1$, infine poniamo di indicare con λ^l la partizione $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, \dots)$. Allora abbiamo che

$$\begin{aligned} h_\lambda &= h_{\lambda_1} \dots h_{\lambda_n} h_{\lambda_{n+1}} \\ &= h_{\lambda^l} h_{\lambda_{n+1}} . \end{aligned}$$

A questo punto applicando l'ipotesi induttiva a $h_{\lambda|}$ otteniamo

$$h_{\lambda} = \sum_{\mu} k_{\lambda|\mu} s_{\mu} h_{\lambda_{n+1}} ,$$

usando la regola di Pieri otteniamo

$$\begin{aligned} h_{\lambda} &= \sum_{\mu} k_{\lambda|\mu} \sum_{\rho \in I_{\mu}^{\lambda_{n+1}}} s_{\rho} \\ &= \sum_{\mu} \sum_{\rho \in I_{\mu}^{\lambda_{n+1}}} k_{\lambda|\mu} s_{\rho} \\ &= \sum_{\rho} d_{\lambda\rho} s_{\rho} \end{aligned}$$

dove $d_{\lambda\rho}$ è pari alla somma dei vari $k_{\lambda|\mu}$ per cui $\rho \in I_{\mu}^{\lambda_{n+1}}$. Resta solo da far vedere che

$$k_{\lambda\rho} = \sum_{\rho \in I_{\mu}^{\lambda_{n+1}}} k_{\lambda|\mu} .$$

Per definizione sappiamo che $\rho \in I_{\mu}^{\lambda_{n+1}}$ se e solo se ρ si può ottenere da μ aggiungendo λ_{n+1} elementi in λ_{n+1} colonne distinte, o visto al contrario se e solo se μ si può ottenere da ρ rimuovendo λ_{n+1} elementi da λ_{n+1} colonne distinte. Ovviamente per ogni μ così fatto esiste un unico modo di aggiungere λ_{n+1} elementi in modo da ottenere ρ e quindi per ognuno dei $k_{\lambda|\mu}$ tableau semi-standard esiste uno ed un solo modo di estenderlo a un ρ -tableau semi-standard avente λ_{n+1} occorrenze di $n+1$: basta estendere il diagramma $t: I_{\mu} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ a un $t': I_{\rho} \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$ che manda ogni $(i, j) \in I_{\rho} \setminus I_{\mu}$ in $n+1$, questo è l'unico modo di estendere t a un tableau semi-standard che abbia λ_i occorrenze di i per ogni $i \leq l(\lambda)$. D'altra parte ogni ρ -tableau semi-standard è ottenuto in modo unico da uno e un solo μ -tableau semi-standard in cui occorranza λ_i i per ogni $i \leq n = l(\lambda)$: in questo caso basta osservare che per il fatto di essere semi-standard l'insieme $t^{-1}(\{1, \dots, n\})$, le coppie (i, j) su cui t vale meno di $n+1$, è lo schema di un diagramma di Ferrer per una partizione μ e quindi restringendo t a I_{μ} otteniamo un μ -tableau semi-standard che è determinato in modo unico.

Quanto detto nell'ultima parte in pratica ci dice che c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei μ -tableau semi-standard con λ_i occorrenze di i (per $i \leq n$), ottenuti al variare di μ tra le partizioni per cui $\rho \in I_{\mu}^{\lambda_{n+1}}$, e i ρ -tableau semi-standard contenenti λ_i occorrenze di i per ogni $i \leq n+1 = l(\lambda)$. Ora il primo di questi insiemi ha cardinalità $\sum_{\mu} k_{\lambda|\mu}$ mentre il secondo a $k_{\lambda\rho}$ elementi e quindi dal fatto che i due insiemi siano in biezione segue che

$$k_{\lambda\rho} = \sum_{\rho \in I_{\mu}^{\lambda_{n+1}}} k_{\lambda|\mu} = d_{\lambda\rho}$$

e quindi con questo concludiamo che

$$h_{\lambda} = \sum_{\rho} k_{\lambda\rho} s_{\rho} .$$

Per induzione segue la tesi. □

Osservazione 13.7. Dalla definizione dei $k_{\lambda\mu}$ tramite i tableau semi-standard segue facilmente che $k_{\lambda\lambda} = 1$. In questo modo abbiamo mantenuto la promessa fatta nella sezione precedente, ovvero di provare che i $c_{\lambda\lambda}$ fossero tutti uguali a 1, cosa che c'era servita per provare che i caratteri degli S_{λ} fossero mandati dalla ch nelle funzioni di Schur.

Prima di concludere questa sezione diamo un risultato che è equivalente al teorema 13.5.

Proposizione 13.8. *Per ogni partizione λ abbiamo l'uguaglianza*

$$s_\mu = \sum_{\lambda} k_{\lambda\mu} m_\lambda .$$

Dimostrazione. Anzitutto ricordiamo che $s_\mu \in \Lambda^n$ una cui base è formata dai m_λ con $|\lambda| = n$ e quindi esistono certi coefficienti $c_{\mu\lambda} \in \mathbb{Z}$ tali che

$$s_\mu = \sum_{\lambda} c_{\mu\lambda} m_\lambda ,$$

vogliamo far vedere che $c_{\mu\lambda} = k_{\lambda\mu}$.

Osserviamo che per ogni $f \in R^n$ abbiamo

$$\text{ch}(f) = \sum_{\rho} z_{\rho}^{-1} f(\rho) p_{\rho}$$

e quindi dall'ortogonalità dei p_{ρ} otteniamo che $\langle \text{ch}(f), p_{\rho} \rangle = f(\rho)$, questo in particolare ci dice che

$$\begin{aligned} \langle h_{\lambda}, p_{\rho} \rangle &= \langle \text{ch}(\psi_{\lambda}), p_{\rho} \rangle = \psi_{\lambda}(\rho) \\ \langle s_{\lambda}, p_{\rho} \rangle &= \langle \text{ch}(\chi_{\lambda}), p_{\rho} \rangle = \chi_{\lambda}(\rho) . \end{aligned}$$

A questo punto abbiamo che se

$$p_{\rho} = \sum_{\lambda} d_{\rho\lambda} m_{\lambda}$$

allora si deve avere che

$$\langle h_{\lambda}, p_{\rho} \rangle = \sum_{\mu} d_{\rho\mu} \langle h_{\lambda}, m_{\mu} \rangle = d_{\rho\lambda}$$

e quindi

$$p_{\rho} = \sum_{\lambda} \langle h_{\lambda}, p_{\rho} \rangle m_{\lambda} = \sum_{\lambda} \psi_{\lambda}(\rho) m_{\lambda},$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} p_{\rho} &= \sum_{\mu} \langle s_{\mu}, p_{\rho} \rangle s_{\mu} \text{ (poiché gli } s_{\mu} \text{ sono base ortonormale)} \\ &= \sum_{\mu} \sum_{\lambda} \langle s_{\mu}, p_{\rho} \rangle c_{\mu\lambda} m_{\lambda} \\ &= \sum_{\lambda} \left(\sum_{\mu} c_{\mu\lambda} \chi_{\mu}(\rho) \right) m_{\lambda} \end{aligned}$$

e quindi si deve avere

$$\sum_{\lambda} \psi_{\lambda}(\rho) m_{\lambda} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\mu} c_{\mu\lambda} \chi_{\mu}(\rho) \right) m_{\lambda}$$

e usando il fatto che i m_{λ} sono linearmente indipendenti ne segue che

$$\psi_{\lambda}(\rho) = \sum_{\mu} c_{\mu\lambda} \chi_{\mu}(\rho)$$

ma noi già sappiamo che

$$\psi_{\lambda} = \sum_{\mu} k_{\lambda\mu} \chi_{\mu}$$

e quindi di nuovo per l'indipendenza lineare si deve avere che $c_{\mu\lambda} = k_{\lambda\mu}$ per ogni coppia λ e μ . \square

Osservazione 13.9. La formula

$$\langle \text{ch}(f), p_\rho \rangle = f(\rho) ,$$

introdotta nella dimostrazione della proposizione 13.8, ci da un modo per calcolare i caratteri delle rappresentazioni irriducibili di S_n , infatti preso $\chi_\lambda = \chi_{S_\lambda}$, il carattere della rappresentazione irriducibile S_λ , abbiamo

$$\chi_\lambda(\sigma) = \langle s_\lambda, p_{\rho(\sigma)} \rangle$$

dove $\rho(\sigma)$ è la solita partizione che descrive il tipo di della permutazione σ .³

13.3 Alcuni lemmi preliminari per la dimostrazione della seconda formula di Jacobi-Trudi

Ricordiamo che nel capitolo 11 e nello specifico nel teorema 11.7 (le formule di Jacobi-Trudi) avevamo provato solo una delle due formule, nel prossimo capitolo proveremo la seconda formula. Prima di poter dimostrare la seconda formula di Jacobi-Trudi ci servirà introdurre alcuni lemmi preliminari.

Lemma 13.10. *Siano A e B due matrici tali che $AB = cid$ per qualche costante c e siano (S, S') e (T, T') due partizioni di $\{1, \dots, r\}$ di forma $(k, r - k)$, ovvero*

$$S \cup S' = T \cup T' = \{1, \dots, r\}$$

e

$$|S| = |T| = k \qquad |S'| = |T'| = r - k .$$

Poniamo di indicare con $\sigma_{S, S'}, \sigma_{T, T'} \in S_r$ le permutazioni definite da

$$\sigma_{S, S'}(l) = \begin{cases} i_l & \text{per } l \leq k \\ j_{l-k} & \text{per } l > k \end{cases} \qquad \sigma_{T, T'}(l) = \begin{cases} i'_l & \text{per } l \leq k \\ j'_{l-k} & \text{per } l > k \end{cases}$$

dove $S = \{i_l : l \leq k\}$, $S' = \{j_l : l \leq r - k\}$, $T = \{i'_l : l \leq k\}$, $T' = \{j'_l : l \leq r - k\}$.

Vale la seguente uguaglianza:

$$c^{r-k} \det A_{S, T} = \text{sgn}(\sigma_{S, S'}) \text{sgn}(\sigma_{T, T'}) \det A \det B_{S', T'}$$

dove per M matrice e A e B due sotto-insiemi di $\{1, \dots, r\}$ con $M_{A, B}$ indichiamo la sotto-matrice ottenuta da M prendendo gli elementi i cui indici di righe stanno in A e gli indici di colonna in B .

Dimostrazione. Cominciamo con l'indicare con $P_{S, S'}$ e $P_{T, T'}$ le matrici di permutazione associate a $\sigma_{S, S'}$ e $\sigma_{T, T'}$, ovvero le matrici tali che

$$P_{S, S'} e_i = e_{\sigma_{S, S'}(i)} \qquad P_{T, T'} e_i = e_{\sigma_{T, T'}(i)} ,$$

dove gli e_j sono i vettori della base canonica. Un conto ci mostra che valgono le seguenti uguaglianze:

$$P_{S, S'}^{-1} A P_{T, T'} = \begin{pmatrix} A_{S, T} & A_{S, T'} \\ A_{S', T} & A_{S', T'} \end{pmatrix} \qquad P_{T, T'}^{-1} B P_{S, S'} = \begin{pmatrix} B_{T, S} & B_{T, S'} \\ B_{T', S} & B_{T', S'} \end{pmatrix} ,$$

³Ricordiamo che il tipo di una permutazione è la partizione che descrive la fattorizzazione in cicli disgiunti della permutazione stessa.

dove le matrici a secondo membro sono rappresentate come matrici a blocchi.

A questo punto per provare il lemma è sufficiente fare una serie di osservazioni furbe.

Prima osservazione furba: vale l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{S,T} & A_{S,T'} \\ A_{S',T} & A_{S',T'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{T,S} & B_{T,S'} \\ B_{T',S} & B_{T',S'} \end{pmatrix} &= P_{S,S'}^{-1} A P_{T,T'} P_{T,T'}^{-1} B P_{S,S'} \\ &= P_{S,S'}^{-1} A B P_{S,S'} \\ &= P_{S,S'}^{-1} c \text{id}_r P_{S,S'} \\ &= c \text{id}_r \end{aligned}$$

che quindi sviluppando i conti ci dà

$$\begin{pmatrix} A_{S,T} B_{T,S} + A_{S,T'} B_{T',S} & A_{S,T} B_{T,S'} + A_{S,T'} B_{T',S'} \\ A_{S',T} B_{T,S} + A_{S',T'} B_{T',S} & A_{S',T} B_{T,S'} + A_{S',T'} B_{T',S'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \text{id}_k & 0 \\ 0 & c \text{id}_{r-k} \end{pmatrix}$$

Seconda osservazione furba: valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma_{S,S'}) \text{sgn}(\sigma_{T,T'}) \det A &= \det P_{S,S'}^{-1} \det A \det P_{T,T'} \\ &= \det P_{S,S'}^{-1} A P_{T,T'} \end{aligned}$$

e

$$\det B_{T',S'} = \det \begin{pmatrix} \text{id}_k & B_{T,S'} \\ 0 & B_{T',S'} \end{pmatrix},$$

da questo otteniamo che

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma_{S,S'}) \text{sgn}(\sigma_{T,T'}) \det A \det B_{T',S'} &= \det \underbrace{\begin{pmatrix} A_{S,T} & A_{S,T'} \\ A_{S',T} & A_{S',T'} \end{pmatrix}}_{P_{S,S'}^{-1} A P_{T,T'}} \det \begin{pmatrix} \text{id}_k & B_{T,S'} \\ 0 & B_{T',S'} \end{pmatrix} \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} A_{S,T} & A_{S,T'} \\ A_{S',T} & A_{S',T'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id}_k & B_{T,S'} \\ 0 & B_{T',S'} \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} A_{S,T} & A_{S,T} B_{T,S'} + A_{S,T'} B_{T',S'} \\ A_{S',T} & A_{S',T} B_{T,S'} + A_{S',T'} B_{T',S'} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A questo punto dalla prima osservazione sappiamo che

$$A_{S,T} B_{T,S'} + A_{S,T'} B_{T',S'} = 0 \quad A_{S',T} B_{T,S'} + A_{S',T'} B_{T',S'} = c \text{id}_{r-k}$$

e quindi otteniamo

$$\text{sgn}(\sigma_{S,S'}) \text{sgn}(\sigma_{T,T'}) \det A \det B_{T',S'} = \det \begin{pmatrix} A_{S,T} & 0 \\ A_{S',T} & c \text{id}_{r-k} \end{pmatrix} = c^{r-k} \det A_{S,T},$$

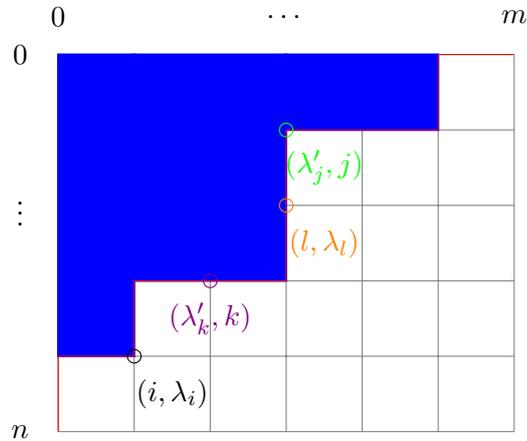
che è appunto quello che volevamo dimostrare. \square

Lemma 13.11. *Sia λ una partizione e siano n e m numeri naturali tali che $n \geq l(\lambda)$ e $m \geq l(\lambda')$. Allora gli insiemi*

$$S = \{\lambda_i + n - i : i = 1, \dots, n\} \quad S' = \{n - 1 + j - \lambda'_j : j = 1, \dots, m\}$$

formano una partizione dell'insieme $\{0, \dots, n + m - 1\}$.

Figura 13.1: Immersione di un diagramma di Ferrer in un reticolo: in blu è rappresentato il diagramma di Ferrer, mentre la linea rossa rappresenta il cammino C che connette i punti $(n, 0)$ e $(0, m)$ estremi del reticolo.



Dimostrazione. La dimostrazione che diamo fa uso di alcune idee geometriche. Cominciamo con l'osservare che possiamo immergere il diagramma di Ferrer dentro un reticolo $\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ identificandolo con l'insieme dei punti

$$\{ (i, j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\} : 0 \leq j \leq \lambda_i \} .$$

La figura 13.1 mostra un esempio di tale immersione.

In tale insieme possiamo prendere l'insieme dei punti

$$C = \{ (i, \lambda_i) : i = 1, \dots, n \} \cup \{ (\lambda'_j, j - 1) : j = 1, \dots, m \}$$

che geometricamente sono rispettivamente

- i punti che stanno in posizione in basso a destra dell'ultimo quadrato di una riga del diagramma di Ferrer (consideriamo anche le righe vuote, ovvero gli estremi verticali a sinistra del reticolo, con punti di coordinate $(0, k)$);
- i punti che stanno in posizione in basso a sinistra dell'ultimo quadrato di una colonna del diagramma di Ferrer (dove consideriamo anche le colonne vuote, ovvero gli estremi orizzontali in alto del reticolo).

Non è difficile vedere che i punti (i, λ_i) e $(\lambda'_j, j - 1)$ sono distinti e che, aggiungendo il punto $(0, m)$, formano un cammino sul reticolo $\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ che va dal punto $(n, 0)$ al punto $(0, m)$, in cui ogni punto del cammino è ottenuto dal precedente tramite uno spostamento di 1 passo a destra o in alto.⁴

Dal fatto che il cammino è ottenuto con movimenti di +1 a destra o in alto segue che le distanze intere dal punto $(n, 0)$ dei vari punti del cammino formano un insieme di numeri naturali che va da 0 e che ad ogni passo cresce di +1 (per distanza intera tra due punti (i, j) e (i', j') intendiamo il numero $|i - i'| + |j - j'|$). Da questo segue l'insieme di tali distanze coincide con l'insieme dei numeri $\{0, \dots, n + m\}$ e se escludiamo il punto $(0, m)$ questo diventa l'insieme $\{0, \dots, n + m - 1\}$. D'altra parte per ogni punto del cammino, sempre escluso $(0, m)$, abbiamo che

- o il punto è della forma (i, λ_i) che quindi dista $\lambda_i + n - i$ da $(n, 0)$
- o è della forma $(\lambda'_j, j - 1)$ e quindi la sua distanza da $(n, 0)$ è $n - \lambda'_j + j - 1$

⁴Di questo non diamo i dettagli che allungherebbero notevolmente la dimostrazione.

da questo segue che

$$\{ \text{distInt}((i, j), (n, 0)) : (i, j) \in C \} = \{ \lambda_i + n - i : i = 1, \dots, n \} \cup \{ n - 1 + j - \lambda'_j : j = 1, \dots, m \},$$

ma da quanto detto prima questo insieme è anche uguale all'insieme $\{0, \dots, n + m - 1\}$, quindi

$$\{ \lambda_i + n - i : i = 1, \dots, n \} \cup \{ n - 1 + j - \lambda'_j : j = 1, \dots, m \} = \{ 0, \dots, n + m - 1 \},$$

e per il principio dei cassetti segue che i $\lambda_i + n - i$ e $n - 1 + j - \lambda'_j$ sono distinti: infatti formano un insieme di al più $n + m$ numeri, ma formano proprio l'insieme $\{0, \dots, n + m - 1\}$ di $n + m$ elementi, quindi devono essere tutti distinti.

Ne segue che gli insiemi $\{\lambda_i + n - i : i = 1, \dots, n\}$ e $\{n - 1 + j - \lambda'_j : j = 1, \dots, m\}$ sono una partizione di $\{0, \dots, n + m - 1\}$. \square

Capitolo 14

Alcuni esercizi sulla regola di Pieri e il calcolo delle dimensioni degli S_λ

Lezione 14 (28/04/2016)

14.1 Regola di Pieri: parte II

Ricordiamo che abbiamo visto i seguenti risultati.

Lemma. *Date due matrici A e B tali che $AB = cid$, per una costante c , e date due partizioni (S, S') e (T, T') , di forma $(k, r - k)$, dell'insieme $\{1, \dots, r\}$ allora*

$$c^{r-k} \det A_{S,T} = \operatorname{sgn}(\sigma_{S,S'}) \operatorname{sgn}(\tau_{T,T'}) \det A \det B_{T',S'} .$$

Lemma. *Data una partizione λ e $n \geq l(\lambda)$ e $m \geq l(\lambda')$ allora gli $\{\lambda_i + n - i : i = 1, \dots, n\}$ e $\{n - 1 + j - \lambda'_j : j = 1, \dots, m\}$ danno una partizione di $\{0, \dots, n + m - 1\}$.*

Con questi siamo pronti a dimostrare la seconda formula di Jacobi-Trudi ovvero:

Teorema. *Per ogni partizione λ abbiamo che*

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j}) .$$

Dimostrazione. Poniamo $k = l(\lambda)$ e $l = l(\lambda')$ e consideriamo le due matrici

$$A = (h_{i-j}) \qquad B = ((-1)^{i-j} e_{i-j})$$

un conto ci mostra che

$$AB = \operatorname{id}_n$$

dove $n = k + l$.

Per il lemma 13.11 abbiamo i due insiemi

$$S = \{\lambda_i + k - i + 1 : i = 1, \dots, k\} \qquad S' = \{k + j - \lambda'_j : j = 1, \dots, l\}$$

formano una partizione dell'insieme $\{1, \dots, n\}$. D'altra parte possiamo considerare un'altra partizione di $\{1, \dots, n\}$, quella data da

$$T = \{k - i + 1 : i = 1, \dots, k\} \qquad T' = \{k + j : j = 1, \dots, l\} ,$$

in questo modo abbiamo le due permutazioni $\sigma_{S,S'}, \sigma_{T,T'} \in S_n$ e per il lemma 13.10, applicato alle matrici A e B come sopra, otteniamo che

$$\det A_{S,T} = \operatorname{sgn}(\sigma_{S,S'}) \operatorname{sgn}(\sigma_{T,T'}) \underbrace{\det A}_{=1} \det B_{T',S'} .$$

Ora osserviamo che

$$A_{S,T} = (h_{(\lambda_i+k-i+1)-(k-j+1)}) = (h_{\lambda_i-i+j})$$

e quindi

$$\det A_{S,T} = s_\lambda$$

per la prima formula di Jacobi-Trudi. D'altra parte abbiamo che

$$\begin{aligned} B_{T',S'} &= ((-1)^{(k+i)-(k+j-\lambda'_j)}) e_{(k+i)-(k+j-\lambda'_j)} = ((-1)^{\lambda'_j-j+i}) e_{\lambda'_j-j+i} \\ &= (-1)^{\sum_i \lambda'_i + \sum_{i=1}^r i - \sum_{j=1}^r j} \det(e_{\lambda'_i-i+j}) \\ &= (-1)^{|\lambda'|} \det(e_{\lambda'_i-i+j}), \end{aligned}$$

e quindi

$$\operatorname{sgn}(\sigma_{S,S'}) \operatorname{sgn}(\sigma_{T,T'}) \det B_{T',S'} = \operatorname{sgn}(\sigma_{S,S'}) \operatorname{sgn}(\sigma_{T,T'}) (-1)^{|\lambda'|} \det(e_{\lambda'_i-i+j})$$

non è difficile far vedere, si tratta ancora una volta di un conto, che

$$\operatorname{sgn}(\sigma_{S,S'}) \operatorname{sgn}(\sigma_{T,T'}) = (-1)^{|\lambda'|}$$

e che quindi

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \det A_{S,T} = \operatorname{sgn}(\sigma_{S,S'}) \operatorname{sgn}(\sigma_{T,T'}) \det B_{T',S'} \\ &= \det(e_{\lambda'_i-i+j}), \end{aligned}$$

come volevamo appunto dimostrare. □

14.2 Alcuni esercizi sulla regola di Pieri

In questa sezione vediamo alcune conseguenze della Regola di Pieri finalizzate al calcolo delle decomposizioni di certe rappresentazioni.

Osservazione 14.1. Per ogni n e $\mu \vdash n$ abbiamo che

$$\operatorname{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu \cong \bigoplus_{\lambda \in I_\mu^1} S_\lambda$$

dove I_λ^1 lo ricordiamo è l'insieme di tutte le partizioni di $n+1$ i cui diagrammi associati si ottengono da quello di μ aggiungendo un elemento ad una colonna.

Per vedere questo ci basta usare il fatto che

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu &\cong \operatorname{Ind}_{S_n \times S_1}^{S_{n+1}} \left(\operatorname{Ind}_{S_n}^{S_n \times S_1} S_\mu \right) \\ &\cong \operatorname{Ind}_{S_n \times S_1}^{S_{n+1}} \left(S_\mu \otimes \underbrace{\mathbb{C}[S_1]}_{M_{(1,0,\dots)}} \right), \end{aligned}$$

e quindi, passando ai caratteri, che

$$\chi_{\operatorname{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu} = \chi_{S_\mu} \chi_{M_{(1,0,\dots)}}.$$

A questo punto basta ricordarsi che

$$\text{ch}(\chi_{S_\mu}) = s_\mu \qquad \text{ch}(\chi_{M_{(1,0,\dots)}}) = h_1$$

e quindi

$$\text{ch}(\chi_{\text{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu}) = s_\mu h_1 = \sum_{\lambda \in I_\mu^1} s_\lambda \text{ (per Pieri).}$$

Da questo applicando l'inversa di ch otteniamo che

$$\chi_{\text{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu} = \sum_{\lambda \in I_\mu^1} \chi_{S_\lambda}$$

e quindi che

$$\text{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu \cong \bigoplus_{\lambda \in I_\mu^1} S_\lambda .$$

Osservazione 14.2. Per ogni n e $\mu \vdash m$ abbiamo che

$$\text{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu \cong \bigoplus_{\mu \in I_\lambda^1} S_\lambda$$

che dice essenzialmente che la restrizione di S_μ a S_n è la somma di tutte quelle S_λ per cui il λ si ottiene rimuovendo da μ un elemento.

Per vedere questo basta usare il fatto che

$$\text{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu \cong \bigoplus_{\lambda} \langle \chi_{\text{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu}, \chi_{S_\lambda} \rangle S_\lambda$$

e poi che, per Frobenius,

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\text{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu}, \chi_{S_\lambda} \rangle &= \langle \chi_{S_\mu}, \chi_{\text{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\lambda} \rangle \\ &= \sum_{\rho \in I_\lambda^1} \langle \chi_{S_\mu}, \chi_{S_\rho} \rangle \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } \mu \in I_\lambda^1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza segue dall'osservazione 14.1. Mettendo tutto assieme si ottiene che

$$\text{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\mu \cong \bigoplus_{\mu \in I_\lambda^1} S_\lambda .$$

Vediamo adesso di usare questi corollari alla regola di Pieri per calcolare qualche rappresentazione

Esercizio 14.3. Trovare la decomposizione della rappresentazione $S_\lambda \otimes S_\lambda$ con $\lambda = (4, 1, 0, \dots)$, ovvero

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} .$$

Soluzione. La soluzione di questo esercizio, come tal volta accade in matematica, parte da un'osservazione che sembra essere poco correlata, ovvero il fatto che

$$\text{Ind}_{S_4}^{S_5} S_{\square\square\square\square} = S_{\square\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square\square} ,$$

questo segue dall'osservazione 14.1. Da questo ne possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} S_{\square\square\square\square} \otimes \text{Ind}_{S_4}^{S_5} S_{\square\square\square\square} &\cong S_{\square\square\square\square} \otimes S_{\square\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square\square} \otimes S_{\square\square\square\square} \\ &\cong S_{\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square\square} \otimes S_{\square\square\square\square} . \end{aligned}$$

D'altra parte per un esercizio già visto¹ sappiamo dire che

$$\begin{aligned} S_{\square\square\square\square} \otimes \text{Ind}_{S_4}^{S_5} S_{\square\square\square\square} &\cong \text{Ind}_{S_4}^{S_5} (\text{Res}_{S_4}^{S_5} S_{\square\square\square\square} \otimes S_{\square\square\square\square}) \\ &\cong \text{Ind}_{S_4}^{S_5} \text{Res}_{S_4}^{S_5} S_{\square\square\square\square} \end{aligned}$$

e a questo punto usando le osservazioni 14.1 e 14.2 abbiamo

$$\text{Res}_{S_4}^{S_5} S_{\square\square\square\square} \cong S_{\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{S_4}^{S_5} \text{Res}_{S_4}^{S_5} S_{\square\square\square\square} &\cong \text{Ind}_{S_4}^{S_5} S_{\square\square\square\square} \oplus \text{Ind}_{S_4}^{S_5} S_{\square\square\square} \\ &\cong S_{\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square} . \end{aligned}$$

Rimettendo tutto assieme abbiamo il seguente isomorfismo di rappresentazioni

$$S_{\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square\square} \otimes S_{\square\square\square\square} \cong S_{\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square} .$$

e quindi per l'unicità della decomposizione in irriducibili possiamo togliere un $S_{\square\square\square\square}$ ad ambo i membri dell'isomorfismo ottenendo

$$S_{\square\square\square\square} \otimes S_{\square\square\square\square} \cong S_{\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square} \oplus S_{\square\square\square} .$$

□

Osservazione 14.4 (La formula di Littlewood-Richardson). Ricordiamo che la regola di Pieri ci dà un modo per calcolare il prodotto $s_\lambda h_r$ per ogni partizione λ e un naturale r . Ricordandoci che $s_{(r,0,\dots)} = h_r$ questa ci dà anche un modo per calcolare dei prodotti particolari della forma $s_\lambda s_\mu$.

Più in generale vale la seguente formula

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda,\mu,\nu} s_\nu$$

dove i $c_{\lambda,\mu,\nu}$ sono chiamati i numeri di Littlewood-Richardson. Tali numeri sono pari ai numeri dei cosiddetti tableau di Littlewood-Richardson. Non diamo qui i dettagli della definizione di tali numeri, ma il lettore che fosse interessato può trovare tutti i dettagli sul [Mac98].

¹Parliamo del famigerato esercizio 5.6.

14.3 Un lungo esercizio: il calcolo della dimensione degli S_λ

Concludiamo la sezione con un esercizio per il calcolo della dimensione degli S_λ .

Esercizio 14.5. Calcolare $\dim S_\lambda$.

Soluzione. Sappiamo che per ogni rappresentazione V vale

$$\dim V = \chi_V(\text{id}) ,$$

quindi in particolare

$$\dim S_\lambda = \chi_{S_\lambda}(\text{id}) .$$

A questo punto possiamo ricordarci che

$$\chi_{S_\lambda}(\text{id}) = \langle \text{ch}(\chi_{S_\lambda}), p_{\rho(\text{id})} \rangle = \langle \chi_{S_\lambda}, p_\rho \rangle$$

dove

$$\rho = \rho(\text{id}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, \dots) ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} p_\rho &= \sum_{\lambda} \langle s_\lambda, p_\rho \rangle s_\lambda \\ &= \sum_{\lambda} \chi_{S_\lambda}(\rho) s_\lambda , \end{aligned}$$

ovvero che

$$p_\rho = \sum_{\lambda \vdash n} \dim S_\lambda s_\lambda .$$

In questo modo abbiamo ridotto il problema del calcolo dei $\dim S_\lambda$ a trovare i coefficienti della decomposizione di p_ρ come combinazione lineare degli s_λ .

Per fare questo calcolo passiamo ai polinomi in r variabili, con $r \geq n$, dove sappiamo che continua a valere

$$p_\rho^{(r)} = \sum_{\lambda \vdash n} \dim S_\lambda s_\lambda^{(r)} ,$$

e gli $s_\lambda^{(r)}$ continuano a restare \mathbb{Z} -linearmente indipendenti. Moltiplicando ad ambo i membri per a_δ otteniamo

$$\begin{aligned} a_\delta p_\rho^{(r)} &= \sum_{\lambda} \dim S_\lambda a_\delta s_\lambda^{(r)} \\ &= \sum_{\lambda} \dim S_\lambda a_{\delta+\lambda} \end{aligned}$$

e sviluppando il primo membro vediamo che

$$\begin{aligned}
a_\delta p_\rho^{(r)} &= a_\delta \left(p_1^{(r)} \right)^n \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) X^{\delta\sigma} \right) \left(\sum_{i=1}^r X_i \right)^n \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) X^{\delta\sigma} \right) \left(\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, r\}^n} X_{i_1} \dots X_{i_n} \right) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) X^{\delta\sigma} \right) \left(\sum_{|\alpha|=n, l(\alpha) \leq r} \prod_{i=1}^r \binom{n - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k}{\alpha_i} X^\alpha \right) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) X^{\delta\sigma} \right) \left(\sum_{|\alpha|=n, l(\alpha) \leq r} \frac{n!}{\prod_{i=1}^r \alpha_i!} X^\alpha \right) \\
&= \sum_{\sigma} \sum_{\alpha} \text{sgn}(\sigma) \frac{n!}{\prod_i \alpha_i!} X^{\delta\sigma + \alpha} \\
&= \sum_{\sigma, \alpha} \text{sgn}(\sigma) \frac{n!}{\prod_i \alpha_i!} X_1^{r - \sigma(1) + \alpha_1} \dots X_r^{r - \sigma(r) + \alpha_r} .
\end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che per ogni λ la variabile $X^{\delta+\lambda}$ compare solo nel polinomio antisimmetrico $a_{\delta+\lambda}$ e quindi il coefficiente di $X^{\delta+\lambda}$ in $a_\delta p_\rho$ è uguale al coefficiente di $a_{\delta+\lambda}$, ovvero a $\dim S_\lambda$.

D'altra parte nell'espansione di $a_\delta p_\rho$ abbiamo che gli $X^{\delta\sigma+\alpha}$ che siano uguali a $X^{\delta+\lambda}$ sono esattamente tutti e soli quelli per cui si abbia

$$\delta_{\sigma(i)} + \alpha_i = \delta_i + \lambda_i$$

ovvero quelli per cui

$$\alpha_i = \lambda_i + \delta_i - \delta_{\sigma(i)} ,$$

per ogni i .

Rimettendo assieme quanto fin qui detto segue che

$$\dim S_\lambda = \sum_{\sigma, \alpha} \text{sgn}(\sigma) \frac{n!}{\prod_i \alpha_i!}$$

dove la somma è fatta solo sulle coppie $\sigma \in S_r$ e α tali che $\alpha = \delta + \lambda - \delta\sigma$, e quindi

$$\dim S_\lambda = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \frac{n!}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i - \delta_{\sigma(i)})!}$$

dove in questo caso la somma è fatta solo per quei σ per cui $\lambda_i + \delta_i - \delta_{\sigma(i)} \geq 0$, visto che i $\lambda + \delta - \delta\sigma$ corrispondono agli α di sopra e che per costruzione $\alpha_i \geq 0$.

A questo punto possiamo osservare che

$$\frac{n!}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i - \delta_{\sigma(i)})!} = \frac{n!}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)!} \prod_{i=1}^r \prod_{k=0}^{\delta_{\sigma(i)}-1} (\lambda_i + \delta_i - k)$$

dove questa uguaglianza vale sia per i σ che soddisfano la condizione $\lambda_i + \delta_i - \delta_{\sigma(i)} \geq 0$ per ogni i , sia per i σ che non la soddisfano. In realtà vale qualcosa di più: per i σ per cui esista un i tale che $\lambda_i + \delta_i - \delta_{\sigma(i)} < 0$ abbiamo la situazione descritta dalla seguente formula

$$\underbrace{\lambda_i + \delta_i}_{\geq 0} > \lambda_i + \delta_i - 1 > \dots > \underbrace{\lambda_i + \delta_i - (\delta_{\sigma(i)} - 1)}_{< 0}$$

per cui per qualche $k = 0, \dots, \delta_{\sigma(i)-1}$ si ha che $\lambda_i + \delta_i - k = 0$ e quindi vale l'uguaglianza

$$\frac{n!}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)!} \prod_i \prod_{k=0}^{\delta_{\sigma(i)}-1} (\lambda_i + \delta_i - k) = 0 .$$

L'ultima uguaglianza è estremamente importante perché ci permette di riscrivere $\dim S_\lambda$ in una nuova forma:

$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^r \prod_{k=0}^{\delta_{\sigma(i)}-1} (\lambda_i + \delta_i - k) ,$$

dove, e lo enfatizziamo ancora una volta, i σ possono essere qualsiasi proprio perché per i σ che soddisfano la condizione $\lambda_i + \delta_i - \delta_{\sigma(i)} \geq 0$ quei termini comparivano nella scrittura di $\dim S_\lambda$ mentre per gli altri σ il termine è pari a zero, quindi possono essere inseriti nella formula della dimensione senza far danni.

Ricapitolando abbiamo visto che

$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \prod_{k=0}^{\delta_{\sigma(i)}-1} (\lambda_i + \delta_i - k) ,$$

e non è difficile vedere che il pezzo

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \prod_{k=0}^{\delta_{\sigma(i)}-1} (\lambda_i + \delta_i - k)$$

è in realtà il determinante della matrice

$$\begin{aligned} M_n(\lambda_1 + \delta_1, \dots, \lambda_n + \delta_n) &= \begin{pmatrix} \delta_1 - 1 \\ \prod_{k=0}^{\delta_1 - 1} (\lambda_1 + \delta_1 - k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \delta_1) \dots (\lambda_1 + \delta_1 - (\delta_1 - 1)) & \dots & (\lambda_1 + \delta_1) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\lambda_n + \delta_n) \dots (\lambda_n + \delta_n - (\delta_1 - 1)) & \dots & (\lambda_n + \delta_n) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \delta_1) \dots (\lambda_1 + \delta_1 - (n - 2)) & \dots & (\lambda_1 + \delta_1) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\lambda_n + \delta_n) \dots (\lambda_n + \delta_n - (n - 2)) & \dots & (\lambda_n + \delta_n) & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

A questo punto sviluppando i conti tramite la regola di Laplace si vede facilmente che

$$\begin{aligned} \det M_n(\lambda_1 + \delta_1, \dots, \lambda_n + \delta_n) &= (\lambda_1 + \delta_1) \dots (\lambda_1 + \delta_1 + n - 2) \det M_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n) + \dots \\ &= \det M_{n-1}(\lambda_2 + \delta_2, \dots, \lambda_n + \delta_n) \lambda_1^{n-1} + h(\lambda_1 + \delta_1, \dots, \lambda_n + \delta_n) , \end{aligned}$$

dove $h(X_1, \dots, X_n)$ è un polinomio che in X_1 ha grado strettamente minore di $n - 1$. Sostituendo si vede facilmente che

$$\det M_n(\lambda_i + \delta_i, \lambda_2 + \delta_2, \dots, \lambda_n + \delta_n) = 0 ,$$

per ogni $i \geq 2$ e quindi, per fatti ben noti sui polinomi, segue che

$$\det M_n(\lambda_1 + \delta_1, \dots, \lambda_n + \delta_n) = \det M_{n-1}(\lambda_2 + \delta_2, \dots, \lambda_n + \delta_n) \prod_{j>1} ((\lambda_1 + \delta_1) - (\lambda_j + \delta_j))$$

e procedendo per induzione si vede che quindi²

$$\det M_n(\lambda_1 + \delta_1, \dots, \lambda_n + \delta_n) = \prod_{i<j} ((\lambda_i + \delta_i) - (\lambda_j + \delta_j)) .$$

Questo ci permette, finalmente, di concludere il nostro calcolo e di dire che

$$\begin{aligned} \dim S_\lambda &= \frac{n!}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)!} \prod_{i<j} (\lambda_i + \delta_i - \lambda_j - \delta_j) \\ &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^r (\lambda_i + \delta_i)!} \prod_{1 \leq i < j \leq r} ((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)) . \end{aligned}$$

□

Osservazione 14.6. Ci teniamo a ricordare che nella formula appena vista

$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i=1}^r (\lambda_i + \delta_i)!} \prod_{1 \leq i < j \leq r} ((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j))$$

$n = |\lambda|$ mentre r può essere un qualsiasi naturale che soddisfi la condizione $r \geq n$. Il lettore scettico può divertirsi a verificare che in effetti la formula non dipende dal r scelto.

²Il lettore attento si sarà reso conto che questo è essenzialmente lo stesso metodo che si usa per calcolare il determinante della matrice di Vandermonde.

Capitolo 15

Formula degli uncini e rappresentazioni dei $Gl(V)$ Lezione 15 (02/05/2016)

15.1 La formula degli uncini e alcuni esercizi per il calcolo della dimensione di rappresentazioni

Abbiamo visto nel precedente capitolo la seguente formula per il calcolo della dimensione delle S_n -rappresentazioni irriducibili S_λ

$$\dim S^\lambda = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k (\lambda_i + \delta_i)!} \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_i - i + j - \lambda_j)$$

dove $\delta = (k-1, k-2, \dots, 1, 0)$, $|\lambda| = n$ e $k \geq n$.

Ci apprestiamo a dare un'altra formula per calcolare $\dim S_\lambda$, la cosiddetta *formula degli uncini*.¹ Prima di introdurre questa formula diamo qualche definizione.

Definizione 15.1 (Uncini). Data una partizione λ e per una coppia $(i, j) \in I_\lambda$ il suo (i, j) -esimo uncino è l'insieme

$$U_{i,j}^\lambda = \{ (i, k) : j \leq k \leq \lambda_i \} \cup \{ (k, j) : i \leq k \leq \lambda'_j \} ,$$

o, equivalentemente, l'insieme degli elementi del diagramma di Ferrer che stanno a destra e sotto l'elemento di posizione (i, j) .

Nel seguito poniamo di indicare con $u_{i,j}^\lambda$ la cardinalità dell'insieme $U_{i,j}^\lambda$.

Esempio 15.2. Nella figura 15.1 possiamo vedere l'uncino $(2, 3)$ della partizione $\lambda = (4, 3, 3, 1)$ individuato dagli elementi di colore rosso, per il quale $u_{2,3}^\lambda = 3$.

Ora siamo pronti per dare la formula degli uncini.

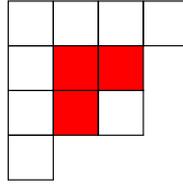
Proposizione 15.3. *Data una partizione λ allora vale la seguente uguaglianza*

$$\dim S_\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j) \in I_\lambda} u_{i,j}^\lambda} .$$

Dimostrazione. Procederemo per induzione su $n = l(\lambda')$, ovvero sul numero delle colonne in λ .

¹In inglese è nota come *hook-formula*.

Figura 15.1: Esempio di uncino: l'uncino $(1, 2)$ di $(4, 3, 3, 1)$.



Per $n = 1$ abbiamo che $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots)$ e quindi per la formula già vista da un lato abbiamo²

$$\begin{aligned} \dim S_\lambda &= \frac{|\lambda|!}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)!} \prod_{i < j} ((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)) \\ &= \frac{k!}{\prod_{i=1}^k (1 + k - i)!} \prod_{1 \leq i < j \leq k} (j - i) \\ &= \frac{k!}{\prod_{i=1}^k i!} \prod_{j=2}^k (j - 1)! \\ &= \frac{k!}{k!} = 1 \end{aligned}$$

e dall'altra parte, sviluppando la formula degli uncini, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j) \in I_\lambda} u_{i,j}^\lambda} &= \frac{k!}{\prod_{i \leq k} u_{i,1}^\lambda} \\ &= \frac{k!}{\prod_{i=1, \dots, k} (k - i + 1)} = \frac{k!}{k!} = 1 \end{aligned}$$

che appunto prova che la tesi vale per tutte le partizioni con $l(\lambda') = 1$.

Supponiamo come ipotesi induttiva che la tesi valga per partizioni con meno di n colonne, ovvero che per ogni μ tale che $l(\mu') < n$ si abbia

$$\dim S_\mu = \frac{|\mu|!}{\prod_{(i,j) \in I_\mu} u_{i,j}^\mu}.$$

Sia λ una partizione con $l(\lambda') = n$, cioè con (diagramma con) n colonne, e chiamiamo μ la partizione ottenuta togliendo a λ la prima colonna: in pratica μ è la partizione tale che $\mu_i = \lambda_i - 1$ per ogni $i \leq l(\lambda)$ e $\mu_i = 0$ per i restanti i . Sviluppiamo la dimensione di S_λ con la formula che conosciamo

²Oppure ci possiamo ricordare che in questo caso S_λ è la rappresentazione segno, che ha dimensione 1.

ottenendo

$$\begin{aligned}
 \dim S_\lambda &= \frac{|\lambda|!}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)!} \prod_{i < j} ((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)) \\
 &= \frac{\prod_{j=|\mu|+1}^{|\lambda|} j}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)} \frac{|\mu|!}{\prod_i (\lambda_i - 1 + \delta_i)!} \prod_{i < j} ((\lambda_i - 1 - i) - (\lambda_j - 1 - j)) \\
 &= \frac{\prod_{j=|\mu|+1}^{|\lambda|} j}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)} \frac{|\mu|!}{\prod_i (\mu_i + \delta_i)!} \prod_{i < j} ((\mu_i - i) - (\mu_j - j)) \\
 &= \frac{\prod_{j=|\mu|+1}^{|\lambda|} j}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)} \dim S_\mu
 \end{aligned}$$

a questo punto usando l'ipotesi induttiva otteniamo

$$\dim S_\lambda = \frac{\prod_{j=|\mu|+1}^{|\lambda|} j}{\prod_i (\lambda_i + \delta_i)} \frac{|\mu|!}{\prod_{(i,j) \in I_\mu} u_{(i,j)}^\mu}$$

per concludere osserviamo che per ogni $(i, j+1) \in I_\lambda$

$$u_{i,j+1}^\lambda = u_{i,j}^\mu$$

e che

$$u_{i,1}^\lambda = \lambda_i + k - i = \lambda_i + \delta_i$$

e quindi

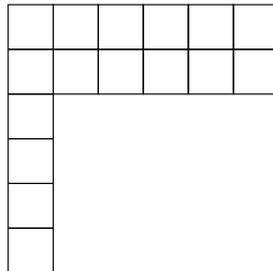
$$\begin{aligned}
 \dim S_\lambda &= \frac{\prod_{j=|\mu|+1}^{|\lambda|} j}{\prod_i (u_{i,1}^\lambda)} \frac{|\mu|!}{\prod_{(i,j+1) \in I_\lambda} u_{i,j+1}^\lambda} \\
 &= \frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j) \in I_\lambda} u_{i,j}^\lambda},
 \end{aligned}$$

appunto quello che volevamo provare.

Per induzione segue la tesi. □

Esercizio 15.4. Calcoliamo la dimensione di S_λ , con $\lambda = (n - k, n - k, \underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{k \text{ volte}})$.

Soluzione. Osserviamo che il diagramma associato a λ è della forma



dove ci sono esattamente $n - k$ elementi sulle prime due righe e i restanti k elementi sono messi sulla prima colonna.

Si vede che

$$\begin{aligned}
u_{1,1}^\lambda &= n - k + k + 1 = n + 1 \\
u_{2,1}^\lambda &= n - k + k = n \\
u_{1,i}^\lambda &= n - k - (i - 1) + 1 = n - k - i + 2 \quad (\text{per } i \geq 2) \\
u_{2,i}^\lambda &= n - k - (i - 1) = n - k - i + 1 \quad (\text{per } i \geq 2) \\
u_{j,1}^\lambda &= k - (j - 3) = k - j + 3 \quad (\text{per } j \geq 3) ,
\end{aligned}$$

e quindi per la formula degli uncini

$$\begin{aligned}
\dim S_\lambda &= \frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j)} u_{i,j}^\lambda} \\
&= \frac{(2n - k)!}{(n + 1)n \prod_{i=2}^{n-k} (n - k - i + 2) \prod_{i=2}^{n-k} (n - k - i + 1) \prod_{j=3}^{k+2} (k - j + 3)} \\
&= \frac{(2n - k)!}{(n + 1)n(n - k)!(n - k - 1)!k!} \\
&= \frac{(2n - k)!}{(n + 1)!(n - k - 1)!} \frac{(n - 1)!}{(n - k)!k!} \frac{n}{n} \\
&= \frac{1}{n} \binom{2n - k}{n + 1} \binom{n}{k} .
\end{aligned}$$

□

15.2 Rappresentazioni di $\text{Gl}(V)$

Iniziamo a uscire dai meandri dei gruppi finiti e cominciamo a studiare le rappresentazioni di gruppi infiniti.

Da questo momento noi cercheremo le rappresentazioni irriducibili di $\text{Gl}(V)$, nello specifico riusciremo a trovare una famiglia di $\text{Gl}(V)$ -moduli irriducibili che sono delle sotto-rappresentazioni dei $V^{\otimes d}$ visti come $\text{Gl}(V)$ -moduli con l'ovvia azione di tensore di $\text{Gl}(V)$ -moduli. Alla fine daremo anche un teorema, di cui non daremo la dimostrazione, che classificherà tutte le rappresentazioni irriducibili di $\text{Gl}(V)$.

Osservazione 15.5. Ovviamente per ogni spazio vettoriale V è un $\text{Gl}(V)$ -modulo. Da quanto visto nel capitolo 2 sappiamo anche che ogni spazio vettoriale $V^{\otimes d}$ ha un'ovvia struttura di $\text{Gl}(V)$ -modulo. In aggiunta a questa, $V^{\otimes d}$ ha anche un'altra ovvia azione, quella di S_d data dalla seguente mappa

$$\begin{aligned}
V^{\otimes d} \times S_d &\longrightarrow V^{\otimes d} \\
(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\sigma &= v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} ,
\end{aligned}$$

questa azione commuta con quella di sinistra di $\text{Gl}(V)$. Inoltre questa azione induce un anti-omomorfismo di gruppi da S_d in $\text{Gl}(V)$, ovvero un'applicazione

$$\rho: S_d \longrightarrow \text{Gl}(V)$$

tale che

$$\rho(\sigma \circ \tau) = \rho(\tau) \circ \rho(\sigma)$$

per ogni $\sigma, \tau \in S_d$. Tale applicazione è definita come

$$\rho(\sigma)(v) = v \cdot \sigma .$$

È facile far vedere che questa mappa dà a $V^{\otimes d}$ la struttura di un $\mathbb{C}[S_d]$ -modulo destro, quindi è possibile trattare $V^{\otimes d}$ come rappresentazione *destra* di S_d . In particolare possiamo applicare dei teoremi analoghi a quelli visti per le S_d -rappresentazioni (i $\mathbb{C}[S_d]$ -moduli sinistri) a $V^{\otimes d}$.

Ricordiamo che $S_\lambda = V_\lambda = \mathbb{C}[S_d]C_t^- R_t^+ \subseteq \mathbb{C}[S_d]$ per un qualsiasi λ -tableau t .

Notazione. Supponiamo di scegliere per ogni partizione λ un λ -tableau t , allora nel seguito denoteremo con c_λ l'elemento $C_t^- R_t^+$.

Questo elemento ci servirà per definire le rappresentazioni irriducibili di $\text{Gl}(V)$.

Osservazione 15.6. Nella definizione di c_λ come sopra la scelta del λ -tableau non è vincolante: le costruzioni che vederemo nel seguito risultano essere invarianti per il cambio dei tableau (a meno di isomorfismo).

Osservazione 15.7. Possiamo considerare il $\text{Gl}(V)$ -modulo $V^{\otimes d} \cdot c_\lambda$, questo a senso perché $c_\lambda \in \mathbb{C}[S_n]$ e $V^{\otimes d}$ è, come abbiamo detto, un S_d -modulo (destro), quindi un $\mathbb{C}[S_d]$ -modulo (destro).

Definizione 15.8. La mappa³

$$\begin{aligned} S_\lambda: \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \\ S_\lambda(V) &= V^{\otimes d} c_\lambda \end{aligned}$$

è detta funtore di Schur.

Il nome funtore deriva dal fatto che S_λ si estende a una mappa definita anche sui morfismi di $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ ponendo per ogni $\varphi: V \rightarrow W$

$$\begin{aligned} S_\lambda(\varphi): S_\lambda(V) &\longrightarrow S_\lambda(W) \\ S_\lambda(\varphi)((v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)c_\lambda) &= \varphi((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)c_\lambda) \\ &= (\varphi(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_d))c_\lambda . \end{aligned}$$

Esempio 15.9. Prendiamo $\lambda = (d, 0, \dots, 0)$ allora

$$\begin{aligned} S_\lambda(V) &= V^{\otimes d} \sum_{g \in S_d} g \\ &= \left\{ \sum_{g \in S_d} v_{g(1)} \otimes \cdots \otimes v_{g(d)} : v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in V^{\otimes d} \right\} \\ &= \text{Sym}^d(V) \end{aligned}$$

Esempio 15.10. Per $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_d, 0, 0, \dots)$ allora

$$\begin{aligned} S_\lambda(V) &= V^{\otimes d} \left(\sum_{g \in S_d} \text{sgn}(g)g \right) \\ &= \left\{ \sum_g \text{sgn}(g) v_{g(1)} \otimes \cdots \otimes v_{g(k)} : v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in V^{\otimes d} \right\} \\ &= \Lambda^d V \end{aligned}$$

³In realtà S_λ è anche un endofuntore di $\text{Gl}(V)$ -mod, la categoria dei $\text{Gl}(V)$ -moduli sinistri.

Esempio 15.11. Per $d = 3$ e $\lambda = (2, 1, 0, 0, \dots)$ allora preso un tableau

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} c_\lambda &= \underbrace{(\text{id} - (1, 3))}_{C_t^-} \underbrace{(\text{id} + (1, 2))}_{R_t^+} \\ &= \text{id} - (1, 3) + (1, 2) - (1, 2, 3) \end{aligned}$$

e quindi

$$S_\lambda(V) = V^{\otimes d} c_\lambda = V^{\otimes d} (e - (1, 3) + (1, 2) - (1, 2, 3))$$

è il sotto-spazio generato da tutti gli elementi della forma

$$v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 - v_2 \otimes v_3 \otimes v_1$$

al variare di v_1, v_2 e v_3 in V .

Osservazione 15.12. Vale che

$$\begin{aligned} V^{\otimes 3} &= \text{Sym}^3(V) \oplus \Lambda^3 V \oplus (S_{(2,1)}(V))^2 \\ &= S_{(3)}(V) \oplus S_{(1,1,1)}(V) \oplus S_{(2,1)}(V)^2 . \end{aligned}$$

Nel seguito vedremo che più in generale vale

$$V^{\otimes d} = \bigoplus_{\lambda} S_\lambda(V)^{\dim S^\lambda} .$$

Osservazione 15.13 (Calcolo del carattere di $S_\lambda(V)$ quando $\lambda = (d, 0, 0, \dots)$). Per quanto visto prima sappiamo che

$$S_\lambda(V) = \text{Sym}^d(V) .$$

Fissata una base v_1, \dots, v_n di V , un conto permette di mostrare che $\chi_{\text{Sym}^d(V)}(T)$ è una funzione polinomiale nei coefficienti della matrice che rappresenta T nella base scelta. L'idea è di sfruttare questa proprietà per calcolare il carattere.

Restringiamo per un attimo l'attenzione gli elementi $T \in \text{Gl}(V)$ che siano diagonalizzabili. Per ogni tale T abbiamo che esiste un $D \in \text{Gl}(V)$ diagonale nella base v_1, \dots, v_n , tale che T e D siano coniugati, e dato che i caratteri sono costanti sulle classi di coniugio vale

$$\chi_{\text{Sym}^d(V)}(T) = \chi_{\text{Sym}^d(V)}(D) .$$

Sia quindi D come sopra, allora per ogni i esiste un $x_i \in \mathbb{C}$ tale che

$$Dv_i = x_i v_i ,$$

quindi per ogni vettore della base canonica di $\text{Sym}^d(V)$, ovvero un elemento della forma $v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n}$, con α sequenza della forma $l(\alpha) \leq n$ e $|\alpha| = d$, abbiamo che

$$\begin{aligned} T(v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n}) &= (Tv_1)^{\alpha_1} \dots (Tv_n)^{\alpha_n} \\ &= x_1^{\alpha_1} v_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} v_n^{\alpha_n} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

ovvero l'applicazione $\rho(T)$, associata dalla rappresentazione $\text{Sym}^d(V)$ a T , è ancora diagonalizzabile con base di autovettori data dai vettori della base canonica. In particolare ne segue che

$$\begin{aligned} \chi_{\text{Sym}^d(V)}(D) &= \sum_{|\alpha|=d, l(\alpha) \leq n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \\ &= h_d(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

dove h_d era il d -esimo polinomio simmetrico completo e come sappiamo $h_d = p(e_1, \dots, e_n)$ per un opportuno $p \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. In particolare come visto nell'esempio 9.7 per ogni matrice $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C} \times n}(n)$, avente autovalori $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, abbiamo che

$$e_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = s_i(A),$$

dove gli s_i sono le funzioni polinomiali che associano ad ogni matrice A i coefficienti del suo polinomio caratteristico. Questo ci dice che

$$\begin{aligned} \chi_{\text{Sym}^d(V)}(D) &= h_d(x_1, \dots, x_n) \\ &= p(s_1(D), \dots, s_n(D)) \end{aligned}$$

per ogni applicazione diagonalizzata dalla base v_1, \dots, v_n . Ovviamente vale l'uguaglianza analoga anche nel caso di applicazioni diagonalizzabili, in quanto $\chi_{\text{Sym}^d(V)}$ è invariante per coniugio.

Quindi $\chi_{\text{Sym}^d(V)}$ e $p(s_1, \dots, s_n)$ sono due funzioni polinomiali nei coefficienti delle matrici che rappresentano le applicazioni lineari in $\text{Gl}(V)$, che coincidono sulle matrici diagonalizzabili, che ovviamente sono un denso in $\text{Gl}(V)$ ⁴ e quindi $\chi_{\text{Sym}^d(V)} = p(s_1, \dots, s_n)$. In particolare per ogni applicazione $T \in \text{Gl}(V)$, se $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono gli autovalori di T , abbiamo che

$$\chi_{\text{Sym}^d(V)}(T) = h_d(\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Esercizio 15.14. Trovare il carattere di $\Lambda^d V$.

Soluzione. Anche in questo caso, fissata una base v_1, \dots, v_n di V , è possibile dimostrare che il carattere $\chi_{\Lambda^d(V)}(D)$ è un polinomio nelle componenti della matrice associata a $D \in \text{Gl}(V)$ nella base v_1, \dots, v_n .

Anche questa volta iniziamo a concentrarci prima sulle applicazioni diagonalizzabili. Per ogni applicazione $D \in \text{Gl}(V)$ diagonalizzata dalla base $\{v_1, \dots, v_n\}$, e tale che $Dv_i = x_i v_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, abbiamo che

$$\begin{aligned} D(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d}) &= (Dv_{i_1}) \wedge \dots \wedge (Dv_{i_d}) \\ &= x_{i_1} \dots x_{i_d} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d} \end{aligned}$$

⁴Per lo stesso motivo per cui le diagonalizzabili (non necessariamente invertibili) sono un denso in $\text{Mat}_{\mathbb{C} \times n}(n)$.

dove possiamo supporre $i_1 < i_2 < \dots < i_d$. Da quanto detto segue che

$$\chi_{\Lambda^d(V)}(D) = \sum_{i_1 < \dots < i_d} x_{i_1} \dots x_{i_d} = e_d(x_1, \dots, x_n),$$

dove x_1, \dots, x_n sono gli autovalori di D , e quindi

$$\chi_{\Lambda^d(V)}(D) = s_d(D)$$

per ogni D diagonale. L'uguaglianza $\chi_{\Lambda^d(V)} = s_d$ vale ovviamente anche per tutte le applicazioni diagonalizzabili, perché $\chi_{\Lambda^d(V)}$ è invariante per coniugio. Quindi, per densità delle matrici diagonalizzabili, ne segue che $\chi_{\Lambda^d(V)} = s_d$ su tutte le applicazioni in $\text{Gl}(V)$. Da questo segue che

$$\chi_{\Lambda^d(V)}(T) = e_d(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

dove $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono gli autovalori dell'applicazione lineare $T \in \text{Gl}(V)$. □

Capitolo 16

$\mathbb{C}[G]$ -moduli destri e caratteri degli $S_\lambda(V)$

Lezione 16 (05/05/2016)

16.1 Proprietà dei $\mathbb{C}[G]$ -moduli destri

Teorema 16.1. *Se G è un gruppo finito allora*

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i \text{End}_{\mathbb{C}}(W_i)$$

dove W_i sono le rappresentazioni irriducibili di G .

Osservazione 16.2. In particolare il teorema ci dice che $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i \text{Mat}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$, dove $n_i = \dim W_i$.

Dimostrazione. Per quanto visto nel capitolo 1 sappiamo che ogni G -rappresentazione W è anche un $\mathbb{C}[G]$ -modulo e quindi ad esso è associato un omomorfismo \mathbb{C} -algebre $\varphi: \mathbb{C}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$, dove $\text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ è la \mathbb{C} -algebra degli endomorfismi \mathbb{C} -lineari su W . In particolare per ogni G -rappresentazione irriducibile W_i abbiamo quindi il morfismo di \mathbb{C} -algebre $\varphi_i: \mathbb{C}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W_i)$ e combinando questi possiamo ottenere

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C}[G] &\longrightarrow \bigoplus_i \text{End}_{\mathbb{C}}(W_i) \\ \varphi(g) &= (\varphi_i(g))_i \end{aligned}$$

che è ancora un omomorfismo di \mathbb{C} -algebre.

Osserviamo che se $h \in \mathbb{C}[G]$ è un elemento tale che

$$0 = \varphi(h) = (\varphi_i(h))_i$$

allora per ogni $w_i \in W_i$ abbiamo

$$hw_i = \varphi_i(h)(w_i) = 0$$

in particolare ne segue che per ogni $\mathbb{C}[G]$ -modulo, e quindi ogni G -rappresentazione, W abbiamo che

$$hw = 0 \text{ per ogni } w \in W.$$

Prendendo $W = \mathbb{C}[G]$ otteniamo che

$$h = h1 = 0.$$

Da questo segue che l'unico $h \in \mathbb{C}[G]$ tale che $\varphi(h) = 0$ è $h = 0$, ovvero φ è iniettivo. Sappiamo che $\dim \mathbb{C}[G] = \sum_i \dim W_i^2$ e similmente

$$\begin{aligned} \dim \bigoplus_i \text{End}_{\mathbb{C}}(W_i) &= \sum_i \dim \text{End}(W_i) \\ &= \sum_i \dim W_i^2 . \end{aligned}$$

Dunque φ , essendo un morfismo di \mathbb{C} -algebre, è un morfismo iniettivo, \mathbb{C} -lineare, tra spazi della medesima dimensione, quindi è biiettivo e quindi è un isomorfismo. \square

Osservazione 16.3. Sia G gruppo finito, U un $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro¹ e $B = \text{hom}_G[U, U]$ ².

In particolare U ha una struttura di B -modulo sinistro e l'azione di B commuta con l'azione destra di G .

Preso una decomposizione di U come $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro³

$$U \cong \bigoplus_i U_i^{m_i}$$

abbiamo

$$B \cong \text{hom}_G \left[\bigoplus_i U_i^{m_i}, \bigoplus_i U_i^{m_i} \right] \cong \bigoplus_{i,j} \text{hom}_G [U_i^{m_i}, U_j^{m_j}] .$$

Ma grazie al lemma di Schur parte 2 abbiamo

$$\begin{aligned} \text{hom}_G [U_i^{m_i}, U_j^{m_j}] &\cong (\text{hom}_G [U_i, U_j])^{m_i m_j} \\ &= \begin{cases} \mathbb{C}^{m_i^2} \cong \text{Mat}_{m_i \times m_i}(\mathbb{C}) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi

$$B = \text{hom}_G [U, U] \cong \bigoplus_i \text{Mat}_{m_i \times m_i}(\mathbb{C}) .$$

Proposizione 16.4. *Sia U un $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro di dimensione finita e $B = \text{hom}_G [U, U]$ allora per ogni $c \in \mathbb{C}[G]$ abbiamo un isomorfismo di B -moduli.*

$$U \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G]c \cong Uc .$$

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma seguente

$$\begin{array}{ccccc} U \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G] & \xrightarrow{\cdot c} & U \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G]c & \xrightarrow{i \otimes \mathbb{C}[G]} & U \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G] \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ U & \xrightarrow{\cdot c} & Uc & \xrightarrow{i} & U \end{array}$$

¹Quindi non una rappresentazione di G , quelli sono i moduli sinistri.

²Ovviamente $\psi \in \text{hom}_G [U, U]$ significa che ψ è \mathbb{C} -lineare e che valga $\psi(ug) = \psi(u)g$.

³Questa decomposizione esiste per argomenti di dualità: un $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro è la stessa cosa che un $\mathbb{C}[G^{\text{op}}]$ -modulo sinistro, e quindi G^{op} -rappresentazione, dove G^{op} è il gruppo duale a G .

dove α è l'isomorfismo canonico $U \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G] \cong U$ di $\mathbb{C}[G]$ -moduli destri e i è l'embedding di Uc dentro U . Possiamo facilmente osservare che il morfismo

$$(\cdot c) \circ \alpha = \beta \circ (\cdot c)$$

è suriettivo, in quanto composizione di due morfismi suriettivi, e quindi anche β deve essere suriettivo:

$$\text{Im } \beta \supseteq \text{Im}(\cdot c) \circ \alpha = Uc .$$

In maniera analoga osservando che

$$i \circ \beta = \alpha \circ (i \otimes \mathbb{C}[G])$$

e che $\alpha \circ (i \otimes \mathbb{C}[G])$ è iniettivo, in quanto composizione di morfismi iniettivi, ne segue che anche β deve essere iniettivo. Quindi β deve essere un isomorfismo. \square

A breve vedremo un modo per costruire a partire da un $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro U una famiglia di $\text{hom}_G[U, U]$ -moduli (sinistri) irriducibili, questo risultato ci servirà per trovare una famiglia di $\text{Gl}(V)$ -moduli irriducibili.

Prima di proseguire diamo alcuni risultati sugli anelli prodotto e gli anelli di matrici che ci serviranno.

Osservazione 16.5. Sia data una famiglia finita di anelli unitari $(A_i)_i$, non necessariamente commutativi, e sia $A = \bigoplus_i A_i$ l'anello prodotto,⁴ valgono le seguenti proprietà.

1. Per ogni ideale sinistro I dell'anello prodotto $A = \bigoplus_i A_i$ esiste una famiglia $(I_i)_i$, dove I_i è un ideale sinistro di A_i per ogni indice i , tale che $I = \bigoplus_i I_i$.
2. Il risultato appena enunciato vale anche nel caso degli ideali destri: se J è un ideale destro di $A = \bigoplus_i A_i$ allora esistono una famiglia $(J_i)_i$, dove ogni J_i è un ideale destro di A_i , tali che $J = \bigoplus_i J_i$.
3. Dati un ideale sinistro $I = \bigoplus_i I_i$ e un ideale destro $J = \bigoplus_i J_i$ di $A = \bigoplus_i A_i$ allora abbiamo l'isomorfismo

$$J \otimes_A I \cong \bigoplus_i (J_i \otimes_{A_i} I_i) .$$

4. Ogni ideale sinistro I di A che sia irriducibile,⁵ è generato da un elemento $x = (x_i) \in A$ della forma

$$x_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ x_i \in A_i & \text{per } j = i \end{cases}$$

per un unico indice i . Il risultato analogo vale per gli ideali destri irriducibili.

Di questi fatti non diamo una dimostrazione.

Osservazione 16.6. Sia $A = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ un anello di matrici e sia $I \subseteq A$ un suo ideale sinistro irriducibile, allora I è generato da una matrice avente tutte le righe nulle tranne una sola, inoltre ogni coppia di ideali sinistri così fatti sono isomorfi come A -moduli.

Se invece $J \subseteq A$ è un ideale destro irriducibile allora J è generato da una matrice avete tutte le colonne nulle tranne una. Anche in questo caso due qualsiasi ideali destri irriducibili sono isomorfi ma come A -moduli destri.

⁴Ricordiamo che, per famiglie finite di anelli, prodotto diretto e somma diretta sono la stessa cosa.

⁵Ricordiamo che ideali sinistri e sotto A -moduli sono la stessa cosa per un anello A .

Dimostrazione. Sia I un ideale sinistro irriducibile, allora deve contenere una matrice M non nulla. Per l'irriducibilità segue che

$$\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})M = I$$

e dato che $M \neq 0$ deve avere almeno una riga non nulla. A meno di moltiplicare a sinistra per delle matrici di permutazione possiamo supporre che M abbia non nulla la prima riga⁶ a questo punto possiamo considerare la matrice E_1^1 data da

$$E_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e un conto ci mostra che

$$M' = E_1^1 M = \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero che M' è la matrice ottenuta da M azzerando tutte le righe tranne la prima.

Ovviamente $M' \neq 0$ e $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})M' \subseteq I$ è un sotto-ideale non banale. Per l'irriducibilità di I ne segue che $I = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})M'$, ovvero I è generato da M' che è appunto una matrice avente tutte le righe nulle tranne che la prima.

Dalle proprietà della matrici sappiamo che esiste almeno una matrice $G \in \text{Gl}_n(\mathbb{C}) \subseteq \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ tale che $G^t(M_1) = e_1$, ovvero tale che la matrice G mandi il vettore corrispondente alla prima riga di M nel vettore e_1 , dove e_1 è il primo vettore della base canonica, ovvero

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo allora considerare l'isomorfismo di $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ -moduli sinistri

$$\begin{aligned} \cdot^t G: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \\ A &\mapsto A^t G, \end{aligned}$$

che moltiplica a destra per la trasposta di G . Non è difficile che vedere che l'immagine tramite questo isomorfismo del sotto-modulo I è l'ideale

$$I \cdot {}^t G = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})M'^t G$$

e dato che

$$\begin{aligned} M^t G &= {}^t(G^t M) \\ &= {}^t(G^t(M_1) \ 0 \ \dots \ 0) \\ &= (e_1 \ 0 \ \dots \ 0) = E_1^1 \end{aligned}$$

⁶Le matrici di permutazione sono unità di $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ e quindi moltiplicare per essi non cambia l'ideale generato.

questo ci dice che

$$I \cong \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})E_1^1,$$

dove l'isomorfismo è un isomorfismo di $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ -moduli sinistri. Questo prova che tutti i sotto-moduli (ideali) sinistri di $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ irriducibili sono isomorfi a $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})E_1^1$.

In maniera del tutto analoga si prova il risultato per gli ideali/sotto-moduli destri, basta ripercorrere gli stessi passi fatti nella dimostrazione avendo cura di scambiare le moltiplicazioni sinistre e destre. \square

Proposizione 16.7. *Dato W un $\mathbb{C}[G]$ -modulo sinistro irriducibile e U un $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro irriducibile allora $U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ è isomorfo a \mathbb{C} oppure è il modulo nullo.*

Dimostrazione. Sia dunque U un $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro irriducibile. Dall'ipotesi di irriducibilità di W e U sappiamo che W e U sono isomorfi a dei sotto-moduli irriducibili, rispettivamente a uno sinistro e uno destro, di $\mathbb{C}[G]$. Inoltre sappiamo dal teorema 16.1 che vale l'isomorfismo di \mathbb{C} -algebre

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i \text{Mat}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$$

dove n_i sono le dimensioni dei sotto $\mathbb{C}[G]$ -moduli sinistri di $\mathbb{C}[G]$ (equivalentemente le rappresentazioni irriducibili di G).

Mettendo quanto detto con le osservazioni 16.6 e 16.5 ne segue che W e U devono essere isomorfi rispettivamente a un ideale sinistro irriducibile e a un ideale destro irriducibile di $\mathbb{C}[G]$, e quindi abbiamo degli isomorfismi di $\mathbb{C}[G]$ -moduli sinistri e destri

$$W \cong \bigoplus_i I_i \qquad U \cong \bigoplus_i J_i$$

$$I_i = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq k \\ I & \text{per } i = k \end{cases} \qquad J_i = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq l \\ J & \text{per } i = l \end{cases}$$

dove I è l'unico (a meno di isomorfismo) sotto-modulo sinistro irriducibile di $\text{Mat}_{n_k \times n_k}(\mathbb{C})$ e J è l'unico sotto-modulo destro irriducibile di $\text{Mat}_{n_l \times n_l}(\mathbb{C})$.

Da quanto enunciato nell'osservazione 16.6 sappiamo che vale l'isomorfismo

$$U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \cong \left(\bigoplus_i J_i \right) \otimes_{\mathbb{C}[G]} \left(\bigoplus_i I_i \right)$$

$$= \bigoplus_i (J_i \otimes_{M_i} I_i)$$

dove $M_i = \text{Mat}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$.

È chiaro che se $k \neq l$ allora per ogni i almeno uno tra I_i e J_i è un modulo nullo e quindi tutti i prodotti tensori $J_i \otimes_{M_i} I_i$ sono nulli. Quindi nel caso $k \neq l$ abbiamo che $U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W = (0)$ che ha dimensione 0.

Supponiamo ora che $k = l$ e quindi $W \cong (0)^{k-1} \oplus I \oplus (0)^{n-k}$ e $U = (0)^{k-1} \oplus J \oplus (0)^{n-k}$, allora

$$U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \cong \bigoplus_i (J_i \otimes_{M_i} I_i)$$

$$\cong (0)^{k-1} \oplus (J \otimes_{M_k} I) \oplus (0)^{n-k}.$$

Ricordiamo che per costruzione J e I sono isomorfi rispettivamente al sotto-modulo destro e sinistro generati dalla matrice $E_1^1 \in M_k = \text{Mat}_{n_k \times n_k}(\mathbb{C})$. Da questo segue che $J \otimes_{\mathbb{C}[G]} I$ è isomorfo

al sotto spazio di $M_k \otimes_{M_k} M_k$ generato dagli elementi della forma $(E_1^1 A) \otimes (BE_1^1)$ e restringendo l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{n_k \times n_k}(\mathbb{C}) \otimes_{M_k} \text{Mat}_{n_k \times n_k}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Mat}_{n_k \times n_k}(\mathbb{C}) = M_k \\ A \otimes B &\mapsto AB \end{aligned}$$

a $J \otimes_{\mathbb{C}[G]} I$ otteniamo l'isomorfismo

$$\begin{aligned} J \otimes_{\mathbb{C}[G]} I &\cong \{ E_1^1 A B E_1^1 : A, B \in \text{Mat}_{n_k \times n_k}(\mathbb{C}) \} \\ &= \{ (AB)_{1,1} E_1^1 : A, B \in \text{Mat}_{n_k \times n_k}(\mathbb{C}) \} \\ &= \{ \lambda E_1^1 : \lambda \in \mathbb{C} \} \cong \mathbb{C} \end{aligned}$$

che prova che $J \otimes_{\mathbb{C}[G]} I$ è uno spazio di dimensione 1, quindi irriducibile. □

Osservazione 16.8. Dalla dimostrazione precedente segue che per ogni G -rappresentazione irriducibile W esiste al più un unico $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro U irriducibile tale che $U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \neq (0)$: nello specifico se

$$W \cong (0)^{i-1} \oplus \mathbb{C}[G] E_1^1 \oplus (0)^{n-i}$$

allora il $\mathbb{C}[G]$ -modulo in questione è

$$U \cong (0)^{i-1} \oplus E_1^1 \mathbb{C}[G] \oplus (0)^{n-i} .$$

Osservazione 16.9. Osserviamo che se U è un $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro irriducibile allora per ogni n naturale abbiamo la seguente catena di isomorfismi:

$$\text{hom}_G[U^n, U^n] \cong \text{hom}_G[U, U]^{n^2} \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) ,$$

dove i vari isomorfismi sono date dalle *proprietà universali* dei prodotti e delle somme dirette, oltre che dal fatto che $\text{hom}_G[U, U] \cong \mathbb{C}$ per Schur.

Usando le definizioni di questi isomorfismi universali è facile vedere che l'isomorfismo

$$i: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{hom}_G[U^n, U^n]$$

è definito dalla seguente equazione:

$$i(A) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j A_{1,j} u_j \\ \vdots \\ \sum_j A_{n,j} u_j \end{pmatrix} .$$

Da teoremi generali sui moduli sappiamo che se W è un $\mathbb{C}[G]$ -modulo sinistro allora $U^n \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ è un $B = \text{hom}_G[U^n, U^n]$ -modulo sinistro con l'azione

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \times U^n \otimes_{\mathbb{C}[G]} W &\longrightarrow U^n \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \\ A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \otimes w &= \begin{pmatrix} \sum_j A_{1,j} u_j \\ \vdots \\ \sum_j A_{n,j} u_j \end{pmatrix} \otimes w . \end{aligned}$$

Tramite l'isomorfismo $U^n \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \cong (U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W)^n$ otteniamo l'azione

$$\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \times (U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W)^n \longrightarrow (U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W)^n$$

definita implicitamente dall'equazione

$$A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \otimes w \\ \vdots \\ u_n \otimes w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j A_{1,j} u_j \otimes w \\ \vdots \\ \sum_j A_{n,j} u_j \otimes w \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare in cui W sia un $\mathbb{C}[G]$ -modulo irriducibile sinistro e $U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \neq (0)$, quindi $U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \cong \mathbb{C}$, allora possiamo osservare che, indicando $u \otimes w$ un generatore di $U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ come \mathbb{C} -spazio vettoriale, ogni elemento di $(U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W)^n$ è della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 u \otimes w \\ \vdots \\ \lambda_n u \otimes w \end{pmatrix}$$

per opportuni coefficienti $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e quindi l'azione di $B \cong \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ su $(U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W)^n$ diventa

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 u \otimes w \\ \vdots \\ \lambda_n u \otimes w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j A_{1,j} \lambda_j u \otimes w \\ \vdots \\ \sum_j A_{n,j} \lambda_j u \otimes w \end{pmatrix}.$$

Usando l'isomorfismo

$$(U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W)^n \cong \mathbb{C}^n \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 u \otimes w \\ \vdots \\ \lambda_n u \otimes w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

l'azione di $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ su $(U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W)^n$ passa all'azione

$$\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j A_{1,j} \lambda_j \\ \vdots \\ \sum_j A_{n,j} \lambda_j \end{pmatrix},$$

cioè l'azione su \mathbb{C}^n data dalla moltiplicazione per matrice.

Rimettendo assieme tutti i passaggi visti questo ci dice che $U^n \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ come B -modulo è isomorfo a \mathbb{C}^n , dove \mathbb{C}^n è il naturale B -modulo con l'azione di $B \cong \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ data dalla moltiplicazione di matrice.

Teorema 16.10. *Dato un $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro irriducibile U e una G -rappresentazione (ovvero un $\mathbb{C}[G]$ -modulo sinistro) irriducibile, allora per ogni n , $U^n \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ è un $B = \text{hom}_G[U^n, U^n]$ -modulo (sinistro) irriducibile oppure è nullo.*

Dimostrazione. Da quanto detto nell'osservazione 16.9 segue che $B \cong \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ e che $U^n \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ come B -modulo è isomorfo a \mathbb{C}^n con l'azione di $B = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ data dalla moltiplicazione per matrice.

Chiaramente \mathbb{C}^n è un B -modulo sinistro irriducibile: ogni suo sotto-modulo non banale deve contenere tutti i vettori raggiungibili da un vettore non nullo tramite un'applicazione lineare, quindi deve contenere tutti i vettori, ovvero deve essere tutto \mathbb{C}^n .

Grazie all'anzidetto isomorfismo segue che $U^n \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ è un B -modulo irriducibile. \square

Teorema 16.11. *Sia U un $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro e W un $\mathbb{C}[G]$ -modulo sinistro irriducibile, allora, posto $B = \text{hom}_G[U, U]$, o $U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ è il modulo nullo oppure è un B -modulo irriducibile.*

Dimostrazione. Grazie ai teoremi di decomposizione sappiamo che esistono degli U_i sotto $\mathbb{C}[G]$ -moduli destri irriducibili di U tali che

$$U \cong \bigoplus_i U_i^{n_i}$$

per certi naturali n_i .

In particolare per ogni componente $U_i^{n_i}$, che è essenzialmente un sotto- $\mathbb{C}[G]$ -modulo destro di U , esiste un ovvio omomorfismo⁷

$$\begin{aligned} \text{hom}_G[U, U] &\longrightarrow \text{hom}_G[U_i^{n_i}, U_i^{n_i}] \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{U_i} . \end{aligned}$$

Tale omomorfismo da agli $U_i^{n_i}$ la struttura di B -sotto-moduli di U .

A questo punto tensorizzando con W otteniamo

$$\begin{aligned} U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W &\cong \left(\bigoplus_i U_i^{n_i} \right) \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \\ &\cong \bigoplus_i U_i^{n_i} \otimes_{\mathbb{C}[G]} W . \end{aligned}$$

Per quanto detto nell'osservazione 16.8 sappiamo che per al più una componente U_i si può avere che

$$U_i \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \neq (0) .$$

Dato che abbiamo

$$\begin{aligned} U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W &= \bigoplus_i U_i^{n_i} \otimes W \\ &= \bigoplus_i (U_i \otimes_{\mathbb{C}[G]} W)^{n_i} \end{aligned}$$

ne segue che:

- nel caso in cui $U_i \otimes_{\mathbb{C}[G]} W = (0)$ per ogni componente irriducibile U_i allora si ha

$$U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W = (0) ;$$

- nel caso in cui invece esista un U_i tale che $U_i \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \neq (0)$, e tale U_i è unico per quanto detto, allora si ha che

$$U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W \cong U_i^{n_i} \otimes_{\mathbb{C}[G]} W ,$$

dove l'isomorfismo è un isomorfismo di B -moduli.

Osserviamo adesso che i B -sotto-moduli di $U_i^{n_i} \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ sono tutti e soli i suoi $\text{hom}_G[U_i^{n_i}, U_i^{n_i}]$ -sotto-moduli. Ma per il teorema precedente $U_i^{n_i} \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ è un $\text{hom}_G[U_i^{n_i}, U_i^{n_i}]$ -modulo irriducibile e quindi è anche un B -modulo irriducibile.

Da quanto detto segue che o $U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ è il B -modulo nullo oppure è un B -modulo irriducibile. \square

⁷Questo segue dal fatto che $\varphi(U_i^{n_i}) \subseteq U_i^{n_i}$ per i motivi visti nella dimostrazione del teorema 2.19 sull'unicità della decomposizione delle rappresentazioni.

Proposizione 16.12. *Nelle ipotesi della precedente proposizione, se $W_i = \mathbb{C}[G]c_i$ sono, al variare di tutti gli i , tutti i $\mathbb{C}[G]$ -moduli sinistri irriducibili allora $U \cong_B \bigoplus_i (U \cdot c_i)^{\dim W_i}$ in cui gli Uc_i sono B -moduli irriducibili.*

Dimostrazione. Vale il seguente isomorfismo di B -moduli

$$U \cong U \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G]$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} U \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G] &\cong U \otimes_{\mathbb{C}[G]} \left(\bigoplus_i W_i^{\dim W_i} \right) \\ &\cong \bigoplus_i (U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W_i)^{\dim W_i} \\ &\cong \bigoplus_i (Uc_i)^{\dim W_i} \end{aligned}$$

l'ultimo isomorfismo segue dalla proposizione 16.4.

Dai teoremi precedenti sappiamo che i

$$(Uc_i)^{\dim W_i} \cong (U \otimes W_i)^{n_i}$$

sono nulli oppure sono dei B -moduli irriducibili. Quindi la decomposizione data è effettivamente una decomposizione in B -moduli irriducibili. □

Esempio 16.13. Sia $G = S_d$ sia $U = V^{\otimes d}$, allora

$$\begin{aligned} V^{\otimes d} &\cong \bigoplus_{\lambda} (V^{\otimes d} c_{\lambda})^{\dim S^{\lambda}} \\ &\cong \bigoplus_{\lambda} (S_{\lambda} V)^{\dim S^{\lambda}} \end{aligned}$$

dove $S_{\lambda} V$ è o un B -modulo irriducibile oppure 0.

16.2 Caratteri degli $S_{\lambda}(V)$

Teorema 16.14. *Sia $k = \dim V$ allora*

1. per ogni $g \in \text{Gl}(V)$ vale $\chi_{S_{\lambda}(V)}(g) = s_{\lambda}(x_1, \dots, x_k)$, dove gli x_i sono gli auto-valori g ;
2. se $l(\lambda) > k$ allora $S_{\lambda}(V) = 0$, se $l(\lambda) \leq k$ allora

$$\dim S_{\lambda}(V) = s_{\lambda}(1, 1, 1, \dots, 1)$$

Dimostrazione. La cosa difficile è far vedere che effettivamente per ogni partizione λ si ha che

$$\chi_{S_{\lambda}(V)}(g) = s_{\lambda}(x_1, \dots, x_k),$$

dove x_1, \dots, x_k sono gli autovalori di $g \in \text{Gl}(V)$.

Cominciamo con il ricordare che $M_\lambda \cong \mathbb{C}[S_d]R_t^+$, da questo segue che

$$\begin{aligned} V^{\otimes d}R_t^+ &\cong V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}[S_d]} M_\lambda \\ &\cong V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}[S_d]} \left(\bigoplus_{\mu \succeq \lambda} S_\mu^{k_{\lambda\mu}} \right) \\ &\cong \bigoplus_{\mu \succeq \lambda} (V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}[S_d]} S_\mu)^{k_{\lambda\mu}} \\ &\cong \bigoplus_{\mu \succeq \lambda} S_\mu(V)^{k_{\lambda\mu}} . \end{aligned}$$

Dunque vale la seguente uguaglianza di caratteri:

$$\chi_{V^{\otimes d}R_t^+} = \sum_{\mu \succeq \lambda} k_{\lambda\mu} \chi_{S_\mu(V)} .$$

D'altra parte abbiamo l'isomorfismo di $\text{Gl}(V)$ -moduli

$$\begin{aligned} V^{\otimes d}R_t^+ &\cong V^{\otimes \lambda_1}R_{t_1}^+ \otimes \dots \otimes V^{\otimes \lambda_l}R_{t_l}^+ \\ &\cong \text{Sym}^{\lambda_1}(V) \otimes \dots \otimes \text{Sym}^{\lambda_l}(V) \end{aligned}$$

dove $l = l(\lambda)$.

Abbiamo già visto nel capitolo precedente che

$$\chi_{\text{Sym}^k(V)}(g) = h_k(x_1, \dots, x_k)$$

dove gli x_i sono gli autovalori di $g \in \text{Gl}(V)$. Questo ci permette di concludere che

$$\begin{aligned} \chi_{V^{\otimes d}R_t^+}(g) &= \chi_{\text{Sym}^{\lambda_1}(V)}(g) \dots \chi_{\text{Sym}^{\lambda_k}(V)}(g) \\ &= h_{\lambda_1}(x_1, \dots, x_k) \dots h_{\lambda_l}(x_1, \dots, x_k) \\ &= h_\lambda(x_1, \dots, x_k) \\ &= \sum_{\mu \succeq \lambda} k_{\lambda\mu} s_\mu(x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

dove x_1, \dots, x_k sono gli autovalori di $g \in \text{Gl}(V)$.

Dunque abbiamo che per ogni λ vale l'uguaglianza

$$\sum_{\mu \succeq \lambda} k_{\lambda\mu} \chi_{S_\mu(V)}(g) = \sum_{\mu \succeq \lambda} k_{\lambda\mu} s_\mu(x_1, \dots, x_k) . \quad (16.1)$$

Nel caso in cui $\lambda = (n, 0, \dots)$ allora abbiamo che $k_{\lambda\mu} \neq 0$ solo quando $\mu = \lambda$ e quindi l'equazione di sopra diventa

$$\chi_{S_\lambda(V)}(g) = s_\lambda(x_1, \dots, x_k) .$$

Altrimenti supponiamo induttivamente di aver provato per tutti i $\mu \succ \lambda$ che

$$\chi_{S_\mu(V)}(g) = s_\mu(x_1, \dots, x_k) ,$$

dove gli x_i sono come sempre gli autovalori di $g \in \text{Gl}(V)$. Allora abbiamo che

$$\sum_{\mu \succeq \lambda} k_{\lambda\mu} \chi_{S_\mu(V)}(g) = \underbrace{k_{\lambda,\lambda}}_{=1} \chi_{S_\lambda(V)}(g) + \sum_{\mu \succ \lambda} k_{\lambda\mu} s_\mu(x_1, \dots, x_k)$$

e quindi usando l'equazione 16.1 abbiamo che

$$\chi_{S_\lambda(V)}(g) + \sum_{\mu \succ \lambda} k_{\lambda\mu} s_\mu(x_1, \dots, x_k) = s_\lambda(x_1, \dots, x_k) + \sum_{\mu \succ \lambda} k_{\lambda\mu} s_\mu(x_1, \dots, x_k)$$

che si semplifica a

$$\chi_{S_\lambda(V)}(g) = s_\lambda(x_1, \dots, x_k) .$$

Per induzione segue che $\chi_{S_\lambda(V)}(g) = s_\lambda(x_1, \dots, x_k)$ per ogni $g \in \text{Gl}(V)$, dove x_1, \dots, x_k sono gli autovalori di g .

L'altro punto del teorema è una banale conseguenza dell'uguaglianza provata. Cominciamo con il caso $k < l(\lambda)$, allora sappiamo che $s_\lambda = 0$ e quindi $S_\lambda(V)$ ha carattere nullo, che è possibile se e solo se $S_\lambda(V)$ è la rappresentazione nulla, ovvero

$$S_\lambda(V) = (0) .$$

Supponiamo che $k \geq l(\lambda)$ allora

$$\begin{aligned} \dim S_\lambda(V) &= \chi_{S_\lambda(V)}(\text{id}) \\ &= s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ volte}}) . \end{aligned}$$

□

Nel prossimo capitolo calcoleremo esplicitamente il valore di $s_\lambda(1, \dots, 1)$, e quindi il valore di $\dim S_\lambda(V)$.

Prima di concludere il capitolo diamo il seguente enunciato, di cui non diamo una dimostrazione, che mostra la piena importanza dei funtori di Schur nello studio dei $\text{Gl}(V)$ -moduli.

Enunciato. *Tutte le rappresentazioni irriducibili di $\text{Gl}(V)$, di dimensione finita, sono della forma $S_\lambda(V)$ o $S_\lambda(V) \otimes \det$.*

Capitolo 17

Ultime proprietà sugli $S_\lambda(V)$ e decomposizione dei $V^{\otimes d}$ come $Gl(V)$ -rappresentazioni

Lezione 17 (09/05/2016)

17.1 Dimensione degli $S_\lambda(V)$

Teorema 17.1. *Sia V un \mathbb{C} -spazio vettoriale e $k = \dim V$ allora*

$$\dim S_\lambda(V) = s_\lambda(1, \dots, 1) = \prod_{j < i} \frac{\lambda_j - \lambda_i + i - j}{i - j}.$$

Dimostrazione. Per definizione abbiamo che

$$s_\lambda(X_1, \dots, X_n) = \frac{a_{\delta+\lambda}(X_1, \dots, X_n)}{a_\delta(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\det(X_i^{\lambda_j+n-j})}{\det(X_i^{n-j})}.$$

Se poniamo $X_i = X^{i-1}$ allora abbiamo le seguenti uguaglianze di matrici

$$\begin{aligned} (X_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j} &= (X^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})_{i,j} \\ &= ((X^{\lambda_j+n-j})^{(i-1)})_{i,j} \end{aligned}$$

se poniamo $Y_j = X^{\lambda_j+n-j}$ inoltre abbiamo

$$((X^{\lambda_j+n-j})^{i-1})_{i,j} = (Y_j^{i-1})_{i,j}$$

e quindi

$$\det(X^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})_{i,j} = \det(Y_j^{i-1})_{i,j} = \prod_{j < i} (Y_i - Y_j) = \prod_{j < i} (X^{\lambda_i+n-i} - X^{\lambda_j+n-j}).$$

Da questo segue che

$$\begin{aligned}
s_\lambda(1, X, \dots, X^{n-1}) &= \frac{\det(X^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})}{\det(X^{(i-1)(n-j)})} \\
&= \frac{\prod_{j<i} (X^{\lambda_i+n-i} - X^{\lambda_j+n-j})}{\prod_{j<i} (X^{n-i} - X^{n-j})} \\
&= \frac{\prod_{j<i} X^{\lambda_i+n-i} (1 - X^{\lambda_j-\lambda_i+i-j})}{\prod_{j<i} X^{n-i} (1 - X^{i-j})} \\
&= \frac{\prod_{j<i} X^{\lambda_i} (X^{\lambda_j-\lambda_i+i-j} - 1)}{\prod_{j<i} (X^{i-j} - 1)}.
\end{aligned}$$

Per calcolare $s_\lambda(1, \dots, 1)$ basta sfruttare la continuità dei polinomi, rispetto alla topologia Euclidea, ottenendo che

$$\begin{aligned}
s_\lambda(1, \dots, 1) &= \lim_{X \rightarrow 1} s_\lambda(1, X, \dots, X^{n-1}) \\
&= \lim_{X \rightarrow 1} \frac{\prod_{j<i} X^{\lambda_i} (X^{\lambda_j-\lambda_i+i-j} - 1)}{\prod_{j<i} (X^{i-j} - 1)}
\end{aligned}$$

a questo punto usando la regola di *de l'Hôpital* è facile vedere che effettivamente

$$s_\lambda(1, \dots, 1) = \frac{\prod_{j<i} (\lambda_j - \lambda_i + i - j)}{\prod_{j<i} (i - j)}$$

e usando il fatto che

$$\dim S_\lambda(V) = \chi_{S_\lambda(V)}(\text{id}) = s_\lambda(1, \dots, 1)$$

segue la tesi. □

17.2 Decomposizione di $V^{\otimes d}$ come $gl(V)$ -modulo

Da quanto visto nel capitolo 16 sappiamo che vale la seguente proposizione.

Proposizione 17.2. *Si ha il seguente isomorfismo di B -moduli, dove $B = \text{hom}_{S_d}[V^{\otimes d}, V^{\otimes d}]$,*

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash d} S_\lambda(V)^{\dim S^\lambda}.$$

Tuttavia vale un risultato più forte: l'isomorfismo di sopra è in verità un isomorfismo di $Gl(V)$ -moduli. Per vedere questo risultato prima ci servirà il seguente lemma.

Lemma 17.3. *Dato B come sopra, esso è generato, come \mathbb{C} -spazio vettoriale, dagli elementi della forma $\varphi \otimes \dots \otimes \varphi$ dove $\varphi \in \text{End}(V)$.*

Osservazione 17.4. In particolare, per B come sopra, abbiamo l'embedding

$$\begin{aligned}
\text{End}(V) &\longrightarrow B \\
\varphi &\longmapsto \varphi^{\otimes d}
\end{aligned}$$

che dice che ogni B -modulo può essere visto in modo naturale come $\text{End}(V)$ -modulo,¹ e in maniera analoga si vede che può essere visto anche come $\text{Gl}(V)$ -modulo.

Il lemma ci dice che un B -modulo M è irriducibile se e solo se è un $\text{End}(V)$ -modulo irriducibile, e dato che $\text{Gl}(V)$ è denso in $\text{End}(V)$ questo ci dice che M è irriducibile come B -modulo (e quindi come $\text{End}(V)$ -modulo) se e solo se lo è come $\text{Gl}(V)$ -modulo.²

Non ci resta che provare il lemma.

Dimostrazione del lemma 17.3. Sia W uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia w_1, \dots, w_n una sua base.

Per dimostrare il nostro lemma ci serve prima il mostrare che $\text{Sym}^d(W)$ è generato dagli elementi della forma

$$w^d = w \cdots w$$

per fare ciò useremo la *cosiddetta tecnica del funzionale*: faremo vedere che per ogni $\varphi \in (\text{Sym}^d(W))^*$ se $\varphi(w^d) = 0$ per ogni $w \in W$ allora $\varphi = 0$, da cui, per risultati generali di algebra lineare, segue che

$$\text{Sym}^d(W) = \langle w^d : w \in W \rangle .$$

Sia quindi $\varphi \in (\text{Sym}^d(W))^*$. Per ogni famiglia di coefficienti $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C}$, posto $z = \sum_i \gamma_i w_i$, abbiamo

$$\varphi(z^d) = 0 ,$$

sviluppando il membro a sinistra si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi(z^d) &= \varphi\left(\left(\sum_i \gamma_i w_i\right)^d\right) \\ &= \varphi\left(\sum_{\alpha} \frac{d!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \gamma_1^{\alpha_1} \dots \gamma_n^{\alpha_n} w_1^{\alpha_1} \dots w_n^{\alpha_n}\right) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{d!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \varphi(w_1^{\alpha_1} \dots w_n^{\alpha_n}) \gamma_1^{\alpha_1} \dots \gamma_n^{\alpha_n} . \end{aligned}$$

Posto

$$Q(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\alpha} \frac{d!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \varphi(w_{\alpha(1)} \dots w_{\alpha(k)}) X^{\alpha}$$

allora da quanto detto segue che per ogni $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$ si ha che

$$\begin{aligned} Q(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= \sum_{\alpha} \frac{d!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \varphi(w_1^{\alpha_1} \dots w_n^{\alpha_n}) \gamma_1^{\alpha_1} \dots \gamma_n^{\alpha_n} \\ &= \varphi(z^d) = 0 , \end{aligned}$$

quindi $Q(X_1, \dots, X_n) = 0$. Da questo segue che i coefficienti di Q devono essere tutti nulli, ovvero

$$\frac{d!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \varphi(w_1^{\alpha_1} \dots w_n^{\alpha_n}) = 0$$

¹Più correttamente come un $\mathbb{C}[\text{End}(V)]$ -modulo.

²Vederemo questa cosa un pochino più in dettaglio dopo aver dimostrato il lemma.

da cui segue che

$$\varphi(w_1^{\alpha_1} \dots w_n^{\alpha_n}) = 0 .$$

Ma i $w_1^{\alpha_1} \dots w_n^{\alpha_n}$, al variare di α tra le sequenze con $|\alpha| = d$ e $l(\alpha) \leq n$, formano una base di $\text{Sym}^d(W)$ e quindi questo ci dice che $\varphi = 0$. Questo prova che l'unico funzionale φ che si annulli su tutti i vettori della forma z^d è il funzionale nullo e che quindi

$$\text{Sym}^d(W) = \langle w^d : w \in W \rangle .$$

Siamo ora pronti a dimostrare il lemma. Abbiamo che

$$\begin{aligned} B &\cong \text{hom}_{S_d}[V^{\otimes d}, V^{\otimes d}] \\ &\cong (\text{hom}[V^{\otimes d}, V^{\otimes d}])^{S_d} \\ &\cong ((V^{\otimes d})^* \otimes V^{\otimes d})^{S_d} \\ &\cong ((V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d})^{S_d} \\ &\cong ((V^* \otimes V)^{\otimes d})^{S_d} \\ &\cong (\text{hom}[V, V]^{\otimes d})^{S_d} \\ &\cong \text{Sym}^d(\text{hom}[V, V]) , \end{aligned}$$

dove gli isomorfismi sono quelli noti di S_d -moduli. Seguendo esplicitamente questi isomorfismi, ovvero tramite conti, si riesce a far vedere che l'omomorfismo

$$\varphi \otimes \dots \otimes \varphi \in \text{hom}_{S_d}[V^{\otimes d}, V^{\otimes d}]$$

viene mandato in

$$\varphi^d \in \text{Sym}^d(\text{hom}[V, V]) .$$

Dato che i φ^d sono dei generatori di $\text{Sym}^d(\text{hom}[V, V])$, per quanto visto prima, ne segue che i $\varphi \otimes \dots \otimes \varphi$ generano $\text{hom}_{S_d}[V^{\otimes d}, V^{\otimes d}]$, come \mathbb{C} -spazi vettoriale. \square

Teorema 17.5. *Dal lemma segue che la decomposizione*

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash d} S_\lambda(V)^{\dim S^\lambda} .$$

è una decomposizione in componenti irriducibili di $\text{Gl}(V)$ -moduli.

Dimostrazione. Il teorema richiede essenzialmente di provare due cose:

1. che gli $S_\lambda(V)$ sono dei $\text{Gl}(V)$ -moduli irriducibili
2. che l'isomorfismo dato sia un isomorfismo di $\text{Gl}(V)$ -moduli.

Iniziamo con l'osservare che la struttura di $\text{Gl}(V)$ -moduli su $V^{\otimes d}$ e sui $S_\lambda(V)$ è quella indotta dall'omomorfismo di gruppi

$$\begin{aligned} r : \text{Gl}(V) &\longrightarrow \text{hom}[V^{\otimes d}, V^{\otimes d}]^* = B^* \\ \varphi &\mapsto \varphi \otimes \dots \otimes \varphi , \end{aligned}$$

dove B^* è il gruppo delle unità di B , non il duale. Tale omomorfismo estende come ben sappiamo a un omomorfismo di \mathbb{C} -algebre

$$\bar{r} : \mathbb{C}[\text{Gl}(V)] \longrightarrow B$$

che, essendo un applicazione lineare tra spazi vettoriali finito dimensionali, risulta anche essere continuo per le ovvie topologie Euclidee sui i relativi \mathbb{C} -spazi.

In particolare la chiusura di $\text{Im } \bar{r}$ contiene l'insieme degli elementi della forma $\varphi \otimes \dots \otimes \varphi$ al variare di $\varphi \in \text{End}(V)$ e per il lemma 17.3 questi formano un sistema di generatori per B . Dunque \bar{r} ha immagine densa in B , ovvero la chiusura di $\text{Im } \bar{r}$ è tutto B , e questo ci dice due cose:

1. ogni applicazione lineare tra due B -moduli è un omomorfismo di B -moduli se e solo se è un omomorfismo di $\text{Gl}(V)$ -rappresentazioni³
2. (banale conseguenza di quanto sopra) un sotto-spazio vettoriale di un B -modulo è un B -sotto-modulo se e solo se è una sotto- $\text{Gl}(V)$ -rappresentazione.⁴

Da quanto detto segue che:

1. gli $S_\lambda(V)$ sono $\text{Gl}(V)$ -moduli irriducibili, infatti non hanno sotto- B -moduli non banali e quindi non hanno neppure sotto- $\text{Gl}(V)$ -rappresentazioni non banali
2. l'isomorfismo noto

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash d} S_\lambda(V)^{\dim S_\lambda}$$

è un isomorfismo di $\text{Gl}(V)$ -moduli

che è appunto quello che volevamo dimostrare. \square

Le costruzioni sin qui fatte si possono fare in modo uguale per $\text{SL}(V)$ e altri gruppi lineari noti. Si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema (di Weyl). *Ogni rappresentazione di dimensione finita di $\text{Gl}(V)$ o $\text{SL}(V)$ si spezza come somma diretta di rappresentazioni irriducibili.*

Tuttavia noi non daremo una dimostrazione di questo teorema ma ci accontentiamo di enunciarlo.

Esercizio 17.6. Calcolare $S_\lambda V \otimes S_\mu V$ visti come $\text{Gl}(V)$ -moduli.

Soluzione. Posto $n = |\lambda|$ e $m = |\mu|$ allora abbiamo che

$$\begin{aligned} S_\lambda V \otimes S_\mu V &\cong V^{\otimes n} c_\lambda \otimes V^{\otimes m} c_\mu \\ &\cong (V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m}) c_\lambda \otimes c_\mu \end{aligned}$$

dove gli isomorfismi sono di $S_n \times S_m$ -moduli. A questo punto dato che $c_\lambda \times c_\mu$ è un elemento di $\mathbb{C}[S_n \times S_m] \hookrightarrow \mathbb{C}[S_{n+m}]$ sappiamo che esiste un $c \in \mathbb{C}[S_{n+m}]$ tale che $c_\lambda \otimes c_\mu = c$, e quindi

$$S_\lambda V \otimes S_\mu V = V^{\otimes n+m} c .$$

Cerchiamo una formula del tipo

$$\chi_{S_\lambda V \otimes S_\mu V} = \sum N_{\lambda, \mu}^\nu \chi_{S_\nu V} .$$

Noi sappiamo che per la formula di Littlewood-Richardson $s_\lambda s_\mu = \sum c_{\lambda, \mu}^\nu s_\nu$ e $\chi_{S_\lambda(V)}(g) = s_\lambda(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, per ogni $g \in \text{Gl}(V)$ i cui autovalori siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Quindi abbiamo

$$\chi_{S_\lambda(V) \otimes S_\mu(V)}(g) = \chi_{S_\lambda(V)}(g) \chi_{S_\mu(V)}(g) = s_\lambda(\gamma_1, \dots, \gamma_n) s_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \chi_{S_\lambda(V) \otimes S_\mu(V)}(g) &= \sum_\nu c_{\lambda, \mu}^\nu s_\nu(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \\ &= \sum_\nu c_{\lambda, \mu}^\nu \chi_{S_\nu(V)}(g) \end{aligned}$$

che appunto ci dà la formula cercata. \square

³Il solo se segue dal fatto che l'azione di $\text{Gl}(V)$ è indotta dall'omomorfismo r , mentre il se segue dal fatto che $\text{Im } \bar{r}$ è denso in B .

⁴Ricordiamo che per un anello unitario A e due A -moduli M e N , con $N \subseteq M$, N è un A -sotto-modulo di M se e solo se l'immersione è A -lineare.

Osservazione 17.7. Ricordiamo che $S_\lambda \subseteq M_\lambda$, dove M_λ è la sotto-rappresentazione di $\mathbb{C}[S_n]$ generata dagli elementi della forma $\{t\} = R_t^+ t$ e S_λ è la sotto-rappresentazione generata dagli elementi della forma e_t dove $e_t = C_t^- \{t\}$.

Capitolo 18

Basi di S_λ e una breve introduzione ai gruppi di riflessione

Lezione 18 (16/05/2016)

18.1 Un lungo esercizio: il calcolo di una base per S_λ

Nella prima parte di questo capitolo cercheremo di provare il seguente teorema.

Teorema 18.1. *Gli e_t con t tableau standard¹ danno una base di S_λ : ovvero, posto t un λ -tableau, gli elementi della forma $C_\gamma^- R_\gamma^+$, al variare di γ tra i tableau standard di forma λ , sono una base di $\mathbb{C}[S_n]C_t^- R_t^+$.*

Prima di passare alla dimostrazione del teorema ci serviranno alcune osservazioni e dei lemmi. Richiamiamo una definizione già vista in precedenza.

Definizione. Una serie di composizione di n è una successione di naturali $\gamma = (\gamma_n)_n$ che sia definitivamente nulla, ovvero $\theta_k = 0$ per ogni k maggiore di un certo n , e tale che $\sum_i \gamma_i = n$.

Esempio 18.2. Le seguenti sono composizioni di 6: $(1, 3, 2, 0, \dots)$ ma anche $(1, 0, 3, 2, 0, \dots)$.

Definizione 18.3. Sulle composizioni si estende l'ordine di dominanza definito per le partizioni: presi $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l, 0, \dots)$ e $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s, 0, \dots)$ allora $\gamma \succeq \theta$ se e solo se per ogni i vale $\sum_{\zeta=1}^i \gamma_\zeta \geq \sum_{\zeta=1}^i \theta_\zeta$.

Osservazione 18.4. Il (\preceq) è effettivamente un ordinamento sulle serie di composizione:

- banalmente vale $\theta \preceq \theta$;
- se $\theta \preceq \gamma$ e $\gamma \preceq \theta$ allora per definizione questo vuol dire che per ogni k si ha

$$\sum_{i=1}^k \theta_i \leq \sum_{i=1}^k \gamma_i \leq \sum_{i=1}^k \theta_i$$

da cui segue che

$$\sum_{i=1}^k \theta_i = \sum_{i=1}^k \gamma_i$$

e con una facile induzione si fa vedere che quindi $\theta_k = \gamma_k$ per ogni k , ovvero che $\theta = \gamma$;

¹Ricordiamo che un tableau standard è un tableau in cui gli elementi sono disposti in modo tale da essere crescenti su ogni riga e su ogni colonna.

- infine se $\theta \preceq \gamma$ e $\gamma \preceq \eta$ allora questo vuol dire che per ogni k

$$\sum_{i=1}^k \theta_i \leq \sum_{i=1}^k \gamma_i \qquad \sum_{i=1}^k \gamma_i \leq \sum_{i=1}^k \eta_i$$

e quindi per transitività

$$\sum_{i=1}^k \theta_i \leq \sum_{i=1}^k \eta_i$$

che appunto prova che $\theta \preceq \eta$.

Ricordiamo che nell'osservazione 6.16 avevamo dato una caratterizzazione dei tabloid come delle famiglie di insiemi, nel dettaglio avevamo detto che dato un tableau t il tabloid ad esso associato $\{t\}$ può essere identificato con la famiglia $(T_k)_k$ di sotto-insiemi di $\{1, \dots, n\}$ definita come

$$T_k = \{t_{k,j} : j \leq \lambda_i\}.$$

In quello che segue dovremmo considerare una generalizzazione di questa nozione.

Definizione 18.5. Data una partizione λ chiameremo λ -tabloid parziali le famiglie $(T_k)_k$ di sotto-insiemi di $\{1, \dots, |\lambda|\}$, che soddisfino le seguenti condizioni:

- per ogni coppia $i \neq j$ si deve avere $T_i \cap T_j = \emptyset$
- per ogni i deve valere $|T_i| \leq \lambda_i$.

In generale per rappresentare i tabloid parziali useremo lo stesso tipo di diagramma usati per i tabloid normali, con la differenza che in questo caso non abbiamo più garanzia che le righe di tali diagrammi siano di lunghezza decrescente.

Osservazione 18.6. Dal fatto che una partizione λ è definitivamente nulla segue che per ogni tabloid parziale $(T_n)_n$ esiste un n tale che $T_k = \emptyset$ per ogni $k \geq n$.

Osservazione 18.7. Ovviamente tutti i λ -tabloid sono dei λ -tabloid parziali. D'altra parte ogni λ -tabloid può essere pensato come un λ -tabloid a cui siano stati rimossi degli elementi.

Prima di procedere proviamo a vedere qualche esempio di tabloid parziale.

Esempio 18.8. Sia $\lambda = (4, 3, 1, 0, \dots)$ i seguenti sono tutti dei λ -tabloid parziali

$$(\{2, 3\}, \{1, 4, 8\}, \{6\}, \emptyset, \dots) = \begin{array}{c} \hline 2 \quad 3 \\ 1 \quad 4 \quad 8 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}$$

$$(\{1\}, \{2, 3, 4\}, \emptyset, \dots) = \begin{array}{c} \hline 1 \\ 2 \quad 3 \quad 4 \\ \hline \end{array}$$

$$(\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4\}, \emptyset, \dots) = \begin{array}{c} \hline \\ 1 \quad 2 \quad 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

Ci teniamo a far osservare come in alcuni casi i tabloid parziali possano anche avere delle righe vuote, come nel caso dell'ultimo esempio mostrato.

Definizione 18.9. Dato un tabloid parziale $T = (T_n)$ chiameremo *serie di composizione* associata a T la serie di composizione (θ_n) tale che per ogni n si abbia $\theta_n = |T_n|$.

Definizione 18.10. Supponiamo che $\{t\}$ sia un tabloid di forma $\lambda \vdash n$. Per ogni indice $k = 1, \dots, n$ indichiamo con $\{t\}^k$ il tabloid parziale ottenuto da $\{t\}$ rimuovendo tutti gli elementi maggiori strettamente di k , ovvero $\{t\}^k = (T_i)_i$ con

$$T_i = \{t_{i,j} : j \leq \lambda_i\} \cap \{1, \dots, k\}.$$

Esempio 18.11. Prendiamo per esempio $\{t\} = \frac{\overline{2 \ 4}}{1 \ 3}$. Allora

$$\begin{aligned} \{t\}^1 &= \frac{\overline{\quad}}{1} & \{t\}^2 &= \frac{\overline{2}}{1} \\ \{t\}^3 &= \frac{\overline{2}}{1 \ 3} & \{t\} &= \{t\}^4 = \frac{\overline{2 \ 4}}{1 \ 3}. \end{aligned}$$

Definizione 18.12. Siano $\{t\}$ e $\{s\}$ due tabloid e siano $(\{t\}^k)_k$ e $(\{s\}^k)_k$ le successioni di tabloid parziali associate ad essi. Posto di indicare con θ^k la serie di composizione associata a $\{t\}^k$ e con γ^k la serie di composizione associata a $\{s\}^k$, diremo che $\{t\}$ *domina* $\{s\}$, e scriveremo $\{s\} \preceq \{t\}$ se per ogni k si ha $\gamma^k \preceq \theta^k$.

Osservazione 18.13. La dominanza tra tabloid definisce un ordinamento sui tabloid, infatti

- è banale vedere che $\{t\} \preceq \{t\}$;
- se $\{t\} \preceq \{s\}$ e $\{s\} \preceq \{t\}$ questo vuol dire che per ogni i si deve avere $\theta^i = \gamma^i$, dove θ^i è la serie di composizione di $\{t\}^i$ mentre γ^i è quella di $\{s\}^i$, in particolare con un induzione si fa vedere che da questo segue che $\{t\}^i = \{s\}^i$ per ogni i e che quindi $\{t\} = \{s\}$;
- se $\{t\} \preceq \{s\}$ e $\{s\} \preceq \{u\}$ allora, posto di indicare con $(\theta^i)_i$, $(\gamma^i)_i$ e $(\eta^i)_i$ le famiglie di serie di composizione associate ai tre tabloid, abbiamo che per ogni i

$$\theta^i \preceq \gamma^i \preceq \eta^i,$$

e dunque, per la transitività del raffinamento su serie di composizione, da questo segue che $\theta^i \preceq \eta^i$ per ogni i , ovvero che $\{t\} \preceq \{u\}$.

Lemma 18.14 (Di dominanza per i tabloid). *Se $k < l$ e k appare in una riga più in alto di quella di l in $\{t\}$ (ovvero l'indice di riga di k è minore di quello di l) allora $(k, l)\{t\} \prec \{t\}$ ².*

Dimostrazione. Chiaramente $(k, l)\{t\} = \{(k, l)t\}$ e $\{t\}$ sono due tabloid diversi, quindi per provare che $\{(k, l)t\} \prec \{t\}$ ci basta solo provare che $\{(k, l)t\} \preceq \{t\}$. Quindi dobbiamo provare che le successioni di serie di composizione $(\theta^i)_i$ e $(\gamma^i)_i$ associate rispettivamente a $\{t\}$ e $(k, l)\{t\} = \{(k, l)t\}$ sono tali che $\gamma^i \preceq \theta^i$ per ogni i .

Prima di cominciare chiamiamo i_1 e i_2 le righe in cui rispettivamente k e l compaiono in $\{t\}$. Per l'ipotesi che k stia in una riga superiore a quella di l ne segue che deve essere $i_1 < i_2$.

A questo punto osserviamo che

- per ogni $i < k$ i tabloid parziali $\{t\}^i$ e $\{(k, l)t\}^i$ sono uguali e quindi vale l'uguaglianza $\gamma^i = \theta^i$ tra le loro serie di composizione;

²Dove (k, l) è la trasposizione.

- per $k \leq i < l$ i tabloid $\{t\}^i$ e $\{(k, l)t\}^i$ differiscono solo per la posizione dell'elemento k che in $\{t\}^i$ compare nella riga i_1 mentre in $\{(k, l)t\}^i$ compare nella riga i_2 , questo fa sì che

$$\theta_m^i = \begin{cases} \gamma_m^i & \text{per } m \neq i_1, i_2 \\ \gamma_m^i + 1 & \text{per } m = i_1 \\ \gamma_m^i - 1 & \text{per } m = i_2 \end{cases},$$

e quindi facendo il conto si vede che $\gamma^i \prec \theta^i$;

- infine per $i \geq l$ i due tabloid $\{t\}^i$ e $\{(k, l)t\}^i$ differiscono solo per lo scambio di k e l , in particolare tutte le righe hanno lo stesso numero di elementi, quindi anche in questo caso $\gamma^i = \theta^i$.

Riassumendo quanto fin qui detto abbiamo che $\gamma^i \preceq \theta^i$ per ogni i e quindi per definizione $(k, l)\{t\} \preceq \{t\}$, ovvero la tesi. \square

Definizione 18.15. Sia $v = \sum_i c_i \{t_i\}$ un generico elemento di M_λ . Diremo che $\{t_i\}$ appare in v se $c_i \neq 0$.

Proposizione 18.16. Se t è un tableau standard allora per ogni permutazione $\pi \in C_t$ vale $\{\pi t\} \preceq \{t\}$.

Dimostrazione. Per provare la nostra tesi sfruttiamo il fatto che ogni $\pi \in C_t$ si può fattorizzare come prodotto di trasposizioni che agiscono colonna per colonna su t e procediamo per induzione sulla lunghezza k di tale fattorizzazione.

Se $k = 0$ allora π è l'identità e quindi $\pi\{t\} \preceq \{t\}$. Supponiamo che la tesi valga per le permutazioni che si fattorizzano con meno k trasposizioni e sia $\pi \in C_t$ una permutazione che si fattorizzi come prodotto di k trasposizioni in C_t . Per proprietà dei gruppi di permutazione non è restrittivo supporre che $\pi = (k, l) \circ \pi'$ dove $k < l$ e k compare in una riga superiore rispetto a l nel tableau $\pi't$. A questo punto abbiamo che

- per ipotesi induttiva $\pi'\{t\} \preceq \{t\}$
- per il lemma di dominanza per tabloid $(k, l) \circ \pi'\{t\} \prec \pi'\{t\}$

da questo segue che

$$\pi\{t\} = (k, l) \circ \pi'\{t\} \prec \{t\}.$$

Per induzione segue la tesi. \square

Lemma 18.17. Siano v_1, \dots, v_m elementi di M_μ e supponiamo che per ogni v_i possiamo scegliere un tabloid $\{t_i\}$ che appare in v_i e tale che

- $\{t_i\}$ è massimo tra i tabloid che appaiono in v_i
- i $\{t_i\}$ siano distinti tra loro.

Allora i v_1, \dots, v_m sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. L'idea è di procedere per induzione su m .

Ovviamente la tesi è vera a vuoto per $m = 1$: ogni vettore non nullo è linearmente indipendente e v_1 è non nullo dato che ci compaiono dei tabloid.

Supponiamo che la tesi sia vera per famiglie di $m - 1$ vettori che soddisfino le ipotesi del teorema. A meno di permutazioni degli indici dei v_i possiamo supporre che $\{t_1\}$ sia un tabloid massimale tra i $\{t_i\}$. Supponiamo di avere una combinazione lineare della forma

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0.$$

Cominciamo con l'osservare che $\{t_1\}$ può comparire solo in v_1 : per ogni altro i , se per assurdo dovesse comparire $\{t_1\}$ in v_i allora, per la prima ipotesi sui $\{t_i\}$, si dovrebbe avere $\{t_1\} \preceq \{t_i\}$, quindi per l'ipotesi di massimalità di $\{t_1\}$ si dovrebbe anche avere $\{t_i\} = \{t_1\}$, che però va contro la seconda ipotesi del teorema (che i $\{t_i\}$ siano distinti), siamo giunti quindi ad un assurdo dobbiamo concludere che $\{t_1\}$ può comparire solo in v_1 .

Dall'osservazione appena fatta, e dal fatto che i tabloid sono una base per M_μ , segue che $\{t_1\}$ compare in $\sum_i c_i v_i$ con coefficiente c_1 , e dato che per costruzione $\sum_i c_i v_i = 0$ ne segue che $c_1 = 0$.

A questo punto abbiamo quindi che

$$\sum_{i=2}^m c_i v_i = 0$$

e una combinazione lineare nulla di $m - 1$ vettori che verificano le ipotesi del teorema, quindi per ipotesi induttiva ne segue che per ogni $i \geq 2$ si deve avere $c_i = 0$. Questo appunto prova che i v_i sono linearmente indipendenti.

Per induzione segue la tesi. \square

Teorema 18.18. *Per ogni partizione λ i politableau e_t , al variare di t tra i tableau standard, formano una base di S_λ .*

Dimostrazione. Non è difficile provare che se t_1 e t_2 sono due λ tableau standard e distinti allora $\{t_1\}$ e $\{t_2\}$ sono distinti. Inoltre grazie all'ipotesi di essere standard dalla proposizione 18.16 abbiamo che per ogni t il tabloid $\{t\}$ domina ogni altro tabloid che appaia in e_t .

Dunque la famiglia degli $(e_t)_t$, con i t tableau standard, verifica le ipotesi del lemma 18.17 e quindi gli e_t sono indipendenti.

Un conto di combinatoria ci mostra che i tableau standard sono proprio pari a $\dim S_\lambda$, e quindi gli e_t formano una base di S_λ perché sono linearmente indipendenti e nel numero giusto. \square

18.2 Gruppi di riflessioni (complesse)

Definizione 18.19. Dato V un \mathbb{C} -spazio vettoriale un $s \in \text{Gl}(V)$ è detta essere una riflessione se ha ordine finito e se i suoi punti fissi formano un iperpiano.

Osservazione 18.20. Per la definizione segue che se s è una riflessione allora per un opportuna base si può mettere nella forma

$$s = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta \end{pmatrix}$$

dove ζ è una radice r -esima dell'unità, con r pari all'ordine di s .

Più nel dettaglio abbiamo che per ipotesi esiste un r naturale tale che $s^r = \text{id}$. Da questo segue che il polinomio minimo di s divide $t^r - 1$, e dato che questo polinomio non ha radici multiple (per il criterio della derivata) questo ci dice che s è diagonalizzabile. A questo punto per ipotesi sappiamo che $\dim \ker(s - \text{id}) = n - 1$, dove $n = \dim V$, e quindi è chiaro s ha un altro autovalore ζ , ovvero s può essere messa nella forma indicata sopra.

Il fatto che ζ sia una radice r -esima dell'unità segue dal fatto che $s^r = \text{id}$ e quindi deve valere l'uguaglianza matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Definizione 18.21. Sia V \mathbb{C} -spazio vettoriale allora $G \leq \text{Gl}(V)$ è un *complex-reflexion-group* (CRG), più brevemente detto gruppo di riflessioni, se è finito e generato da riflessioni.

Osservazione 18.22. È possibile classificare tutti i gruppi di riflessione, tale classificazione è stata fatta nel 1944 da Shepard e Todd. Per ogni CRG G si ha una delle seguenti possibilità:

- o $G = G(r, p, n)$ con $r, p, n \in \mathbb{N}$ e $p \mid r$
- oppure G è uno dei cosiddetti 34-casi eccezionali.

Con $G(r, p, n)$ viene indicato il prodotto semi-diretto $H \rtimes_{\varphi} S_n$ dove

$$H = \{ (\zeta_r^{a_1}, \dots, \zeta_r^{a_n}) : \forall i \ a_i \equiv 0 \pmod{p} \} \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$$

e l'azione di S_n su H è data dall'omomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi: S_n &\longrightarrow \text{Aut}(H) \\ \varphi(\sigma)(\zeta_r^{a_1}, \dots, \zeta_r^{a_n}) &= (\zeta_r^{a_{\sigma(1)}}, \dots, \zeta_r^{a_{\sigma(n)}}) . \end{aligned}$$

Esempio 18.23. Nel caso $p = 1$ $G(r, 1, n) = \mathbb{Z}_r^n \rtimes S_n$ che è scritto anche come $\mathbb{Z}_r \wr S_n$ e in questo caso si parla di *wreath product*³ di \mathbb{Z}_r con S_n .

Esempio 18.24. Un'altra famiglia di gruppi interessanti è data dai gruppi $G(2, 1, n)$ detti gruppi iperottaedrali, tali gruppi sono gruppi di riflessioni che fissano degli ipercubi, da cui il nome. In generale si usa indicare con B_n il gruppo $G(2, 1, n)$.

Osservazione 18.25. Ogni $G(r, p, n)$ si può anche vedere come un sotto-gruppo di $\text{Gl}(\mathbb{C}^n)$ i cui elementi sono le applicazioni lineari $g(\epsilon, \sigma)$, parametrizzate dai $\sigma \in S_n$ e $\epsilon: \{1, \dots, n\} \rightarrow C_r$ (dove C_r è il sotto-gruppo moltiplicativo di \mathbb{C}^* generato da ζ_r), definite dalla seguente equazione:

$$g(\epsilon, \sigma)e_i = \epsilon(i)e_{\sigma i} .$$

Ci teniamo a precisare che i $g(\epsilon, \sigma)$ sono *tutti gli elementi di* $G(r, p, n)$, non solo le riflessioni.

Nello specifico un conto mostra che per una coppia (ϵ_1, σ_1) e (ϵ_2, σ_2)

$$\begin{aligned} (g(\epsilon_1, \sigma_1) \circ g(\epsilon_2, \sigma_2))e_i &= g(\epsilon_1, \sigma_1)(\epsilon_2(i)e_{\sigma_2(i)}) \\ &= \epsilon_1(\sigma_2(i))e_{(\sigma_1 \circ \sigma_2)(i)} \end{aligned}$$

e quindi, identificando ogni ϵ_i con la tupla $(\epsilon_i(1), \dots, \epsilon_i(n)) \in H$, questo si dice che

$$g(\epsilon_1, \sigma_1) \circ g(\epsilon_2, \sigma_2) = g((\epsilon_1, \sigma_1) \cdot (\epsilon_2, \sigma_2))$$

dove il (\cdot) del secondo membro rappresenta la composizione del gruppo $H \rtimes S_n$: in sostanza abbiamo appena fatto vedere che

$$g: H \rtimes S_n \longrightarrow \text{Gl}(\mathbb{C}^n)$$

è un omomorfismo di gruppi, non è difficile vedere che è iniettivo.

Non è difficile trovare le riflessioni che generano questo gruppo, si tratta di tutte le riflessioni che fissano i piani della forma

$$H = \{ X_i = 0 \}$$

o della forma

$$H_{i,j} = \{ X_i - \zeta^\alpha X_j = 0 \} .$$

³Per chi fosse interessato alla teoria generale dei wreath product ($G^n \rtimes S_n = G \wr S_n$) la può trovare in [Mac98], la teoria è simile a quella delle funzioni simmetriche.

Nel seguito supponiamo di aver fissato un V spazio vettoriale su \mathbb{C} (anche se quello che diremo vale più in generale su ogni campo \mathbb{K} con $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$).

Notazione. Prendiamo $S(V^*) = \text{Sym}(V^*)$, dove

$$\text{Sym}(W) = \bigoplus_k \text{Sym}^k(W) ,$$

tale spazio vettoriale ha naturale struttura di \mathbb{K} -algebra graduata, con prodotto commutativo.

L'algebra $\text{Sym}(W)$ è caratterizzabile come il quoziente della \mathbb{C} -algebra (non commutativa) $T(W) = \bigoplus_n W^{\otimes n}$ per le relazioni commutatività. In particolare se $\dim_{\mathbb{C}} W = n$ allora $S(W^*) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Sia G un gruppo che agisce in modo lineare su V , ovvero V è una G -rappresentazione. Allora sappiamo che G agisce anche su V^* , con l'azione vista nel capitolo 2, e questa azione induce su $\text{Sym}(V^*) = S(V^*)$ la struttura di G -rappresentazione descritta dalla seguente equazione

$$g(s_1 \cdots s_n) = s_1(g^{-1} -) \cdots s_n(g^{-1} -) ,$$

dove $s_1 \cdots s_n$ è un generico generatore di $S(V^*)$.

Per non appesantire troppo la notazione denoteremo con S l'algebra $S(V^*)$.

Definizione 18.26. Nelle notazioni di sopra si indica con S^G lo spazio degli elementi G -invarianti in S , ovvero l'insieme degli elementi $s \in S$ tali che per ogni $g \in G$ valga $gs = s$.

Esempio 18.27. Se $G = S_n$ e $S = \text{Sym}(\mathbb{C}^n) = \text{Sym}(\mathbb{C}^{n*})$ allora S^G è lo spazio dei polinomi simmetrici in n -variabili, ovvero $\mathbb{C}[e_1, \dots, e_n]$ con gli e_i polinomi simmetrici elementari.

Esempio 18.28. Se $G = B_n = (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n)$ su \mathbb{R}^n allora $S = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ e posto

$$\bar{e}_i = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1}^2 \cdots x_{i_k}^2$$

allora $S^G = \mathbb{K}[\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n]$.

Più in generale vale il seguente teorema.

Teorema (Chevalley-Shepard-Todd). *Sia V una G -rappresentazione, con $G \leq \text{Gl}(V)$ sotto-gruppo finito, allora sono equivalenti i seguenti tre fatti*

1. $R = S(V^*)^G$ è una \mathbb{C} -algebra di polinomi
2. $S(V^*)$ è un R -modulo libero
3. G è un gruppo finito generato da riflessioni.

Esempio 18.29. Come contro-esempio per vedere che se non vale 3 non vale 1 possiamo considerare $V = \mathbb{C}^2$ e $G = \mathbb{Z}_2 = \{\text{id}, -\text{id}\}$. Allora S^G non è un'algebra di polinomi.

Infatti $S^G = \mathbb{C}[x^2, y^2] \oplus (x, y)\mathbb{C}[x^2, y^2]$ che non può essere generato polinomialmente.

Capitolo 19

Il teorema di Chevalley Shepard Todd

Lezione 19 (19/05/2016)

Richiamiamo il seguente teorema, già enunciato precedentemente.

Teorema 19.1 (Chevalley-Shepard-Todd). *Sia V una G -rappresentazione, con $G \leq \text{Gl}(V)$ e G finito, allora sono equivalenti i seguenti tre fatti*

1. $R = S(V^*)^G$ è una \mathbb{C} -algebra di polinomi
2. $S(V^*)$ è un R -modulo libero
3. G è un gruppo finito generato da riflessioni.

Nel seguito dimostreremo una delle implicazioni del teorema, nello specifico la (3) \Rightarrow (1).

Invece di fare la dimostrazione in un unico blocco la spezzeremo in una serie di lemmi che tutti assieme proveranno l'implicazione a cui siamo interessati.

Nel seguito denoteremo con R_+ l'ideale $\ker v_0 \cap R$ dove v_0 è l'omomorfismo di valutazione in 0,

$$v_0: S(V^*) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$v_0(p) = p(0) ,$$

e quindi

$$R_+ = \{ p \in R: p(0) = 0 \} .$$

Siano $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq R_+$ un insieme minimale di generatori omogenei per SR_+ , l'estensione di R_+ in S , quello che faremo vedere è che questo costituisce un insieme di generatori algebricamente indipendenti per R .

Proposizione 19.2. *Dato $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq R_+$, un insieme di generatori omogenei per SR_+ , allora $R = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$.*

Dimostrazione. Vogliamo far vedere che per ogni $f \in R$ esiste un $h \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ tale che $f = h(f_1, \dots, f_r)$. Per farlo cominciamo a provarlo per gli f che siano omogenei, procedendo per induzione sul grado di f .

Sia dunque $f \in R$ un polinomio omogeneo. Se $f = 0$ o $\deg f = 0$ allora $f \in \mathbb{C}$ e quindi chiaramente $f \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$.

Supponiamo adesso che f sia un polinomio omogeneo con $\deg f > 0$ e supponiamo inoltre, come ipotesi induttiva, che per ogni polinomio $g \in R$ omogeneo di grado strettamente minore di $\deg f$ si abbia che $g \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$.

Dato che f ha grado strettamente maggiore di 0 ed è omogeneo chiaramente si ha $f(0) = 0$ e quindi $f \in \ker v_0 \cap R = R_+$. Quanto detto implica che $f \in SR_+$ e quindi esistono $g_1, \dots, g_r \in S$ tali che

$$f = \sum_i g_i f_i,$$

inoltre per l'omogeneità di f e degli f_i possiamo supporre che anche i g_i siano omogenei, di gradi rispettivamente $\deg f - \deg f_i$, o zero per quegli indici i per cui $\deg f < \deg f_i$.

A questo punto usiamo l'ipotesi di G -invarianza di f e degli f_i ,

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gf = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \left(\sum_i g_i f_i \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_i (gg_i)(gf_i) \\ &= \sum_i \left(\frac{\sum_{g \in G} gg_i}{|G|} \right) f_i \end{aligned}$$

dato che l'azione di g preserva l'omogeneità abbiamo che chiaramente gli elementi

$$\tilde{g}_i = \frac{\sum_{g \in G} gg_i}{|G|}$$

sono tutti omogenei (perché combinazioni lineari dei gg_i che sono tutti omogenei di grado $\deg g_i$) e sono G -invarianti (gli elementi di G agiscono sui \tilde{g}_i permutando i termini della somma $\sum_g gg_i$).

Dunque abbiamo che

$$f = \sum_i \tilde{g}_i f_i$$

dove i \tilde{g}_i sono polinomi omogenei G -invarianti che sono nulli oppure hanno grado pari a $\deg g_i$, che ricordiamo essere pari a $\deg f - \deg f_i$, quindi strettamente minore di $\deg f$.

Per ipotesi induttiva allora abbiamo $\tilde{g}_i \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$ per ogni i e quindi abbiamo anche che

$$f = \sum_i \tilde{g}_i f_i \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r].$$

Per induzione segue che per ogni $f \in R$ che sia omogeneo si deve avere che $f \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r] \subseteq R$.

Per $f \in R$ polinomio generico invece, detta $f = \sum_r f^{(r)}$ la sua decomposizione in componenti omogenee, dove quindi ogni $f^{(r)}$ è la componente omogenea di grado r di f , abbiamo che gli $f^{(r)} \in R$ e quindi per quanto appena dimostrato $f^{(r)} \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$, da questo concludiamo che anche f è in $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$. □

Osservazione 19.3. Notiamo che la proposizione 19.2 ci dice che $R = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$ ovvero che R è un'algebra finitamente generata su \mathbb{C} . Resta da far vedere che si possono trovare dei generatori algebricamente indipendenti.

Per trovare il nostro sistema di polinomi algebricamente indipendenti ci serviranno alcuni lemmi.

Lemma 19.4. Dato un polinomio $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ e un polinomio lineare $l \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tali che

$$V(l) = \{x \in \mathbb{C}^n : l(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) = 0\} = V(f) ,$$

allora esiste un polinomio $h \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tale che $f = lh$.

Dimostrazione. A meno di permutazioni nelle variabili possiamo supporre che in l compaia la variabile X_n , ovvero che $\deg_{X_n}(l) > 0$.¹ Dalle proprietà dei polinomi sappiamo che esistono $h \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ e $r \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ tali che

$$f = hl + r .$$

Dobbiamo far vedere che $r = 0$.

Supponiamo per assurdo che $r \neq 0$ allora, per il *principio di identità dei polinomi*, esistono $z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ tali che

$$r(z_1, \dots, z_{n-1}) \neq 0 .$$

D'altra parte l'algebra lineare ci dice che esiste un (unico) $z_n \in \mathbb{C}$ tale che

$$l(z_1, \dots, z_n) = 0 ,$$

e quindi posto $z = (z_1, \dots, z_n)$ avremmo che

$$f(z) = h(z) \underbrace{l(z)}_{=0} + r(z) = r(z) ,$$

ma da una parte

$$r(z) = r(z_1, \dots, z_{n-1}) \neq 0$$

mentre dall'altra, dato che $z \in V(l) \subseteq V(f)$, si dovrebbe avere

$$f(z) = 0 .$$

Siamo dunque giunti ad un assurdo, dobbiamo concludere che $r = 0$ e che quindi $f = lh$. □

Lemma 19.5. Siano $g_1, \dots, g_r \in R$ un insieme di polinomi omogenei tali che $g_1 \notin S(g_2, \dots, g_r)$, ovvero g_1 non sta nell'ideale generato dagli altri g_i , e supponiamo inoltre che esistano $a_1, \dots, a_r \in S$ tali che

$$\sum a_i g_i = 0$$

allora $a_1 \in SR_+$.

Dimostrazione. Per cominciare restringiamoci al caso in cui gli a_i siano omogenei.

Abbiamo due possibilità:

- a_1 è una costante;
- a_1 è un polinomio di grado diverso da 0.

¹È in particolare si deve avere $\deg_{X_n}(l) = 1$, visto che l è lineare.

Nel primo caso o $a_1 = 0$ e quindi sta in SR_+ oppure $a_1 \in \mathbb{C}^*$ e in tal caso si avrebbe

$$g_1 = \sum_{i=2}^r a_1^{-1} a_i g_i ,$$

e quindi $g_1 \in S(g_2, \dots, g_r)$, contro l'ipotesi del teorema.

Passiamo al secondo caso e procediamo per induzione. Supponiamo che per ogni polinomio a'_1 omogeneo con $\deg a'_1 < \deg a_1$ e tale che esistano a'_i per cui

$$\sum_i a'_i g_i = 0$$

si abbia che $a'_1 \in SR_+$. Ricordiamo che G è un gruppo generato da delle riflessioni² e sappiamo che per ogni riflessione $s \in G$ possiamo trovare un polinomio lineare $l_s \in S$ tale che

$$V(l_s) = \{ x \in \mathbb{C}^n : l_s(x) = 0 \} = \{ x \in \mathbb{C}^n : sx = x \} = \ker(s - \text{id}) .$$

Per ogni a_i abbiamo che, preso $x \in V(l_s)$, si ha

$$(sa_i - a_i)(x) = sa_i(x) - a_i(x) = a_i(s^{-1}x) - a_i(x) = a_i(x) - a_i(x) = 0 ,$$

quindi in particolare $V(l_s) \subseteq V((sa_i) - a_i)$. Dal lemma 19.4 allora abbiamo che esistono degli h_i^s , che possiamo supporre omogenei, tali che

$$sa_i - a_i = l_s h_i^s$$

e quindi per ogni i

$$sa_i = a_i + l_s h_i^s .$$

Da quanto detto segue che

$$\begin{aligned} 0 &= s \left(\sum_i a_i g_i \right) \\ &= \sum_i (sa_i)(sg_i) \\ &= \sum_i (sa_i)g_i \quad (g_i \in R = S(V^*)^G \text{ per ogni } i) \\ &= \sum_i (a_i + l_s h_i^s) g_i \\ &= \underbrace{\sum_i a_i g_i}_{=0} + \sum_i l_s h_i^s g_i \\ &= l_s \sum_i h_i^s g_i , \end{aligned}$$

e dato che questa uguaglianza vale nel dominio $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, e che l_s non è un polinomio nullo, otteniamo che

$$\sum_i h_i^s g_i = 0 .$$

²Questo è il punto chiave dove si usa l'ipotesi che G è un gruppo di riflessioni.

A questo punto per ipotesi induttiva sappiamo che per ogni s riflessione $h_1^s \in SR_+$ e quindi per ogni riflessione s

$$sa_1 - a_1 = l_s h_i^s \in SR_+ .$$

Supponiamo che per ogni stringa di lunghezza n di riflessioni (s_1, \dots, s_n) in G si abbia che

$$s_1 \dots s_n a_1 - a_1 \in SR_+ ,$$

allora per una stringa di riflessioni (s_0, s_1, \dots, s_n) abbiamo che

$$s_1 \dots s_n a_1 - a_1 \in SR_+ \qquad s_0 a_1 - a_1 \in SR_+$$

usando il fatto che SR_+ è G invariante³

$$s_0 s_1 \dots s_n a_1 - s_0 a_1 = s_0 (s_1 \dots s_n a_1 - a_1) \in SR_+$$

da cui segue che

$$s_0 s_1 \dots s_n a_1 - a_1 = s_0 s_1 \dots s_n a_1 - s_0 a_1 + s_0 a_1 - a_1 \in SR_+ .$$

Per induzione segue che $s_1 \dots s_n a_1 - a_1 \in SR_+$ per ogni stringa (s_1, \dots, s_n) di riflessioni, ovvero che per ogni $s \in G$ abbiamo che $sa_1 - a_1 \in SR_+$. Da questo possiamo dedurre che

$$\sum_{s \in G} sa_1 - |G|a_1 = \sum_{s \in G} (sa_1 - a_1) \in SR_+$$

e quindi che

$$a_1 + SR_+ = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} sa_1 + SR_+$$

a questo punto dato che a_1 è omogeneo di grado strettamente positivo, e quindi lo sono anche degli sa_1 , otteniamo che

$$\frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} sa_1 \in \ker v_0 ,$$

inoltre $\frac{1}{|G|} \sum_s sa_1$ è chiaramente un elemento di $S(V^*)^G$ e quindi di $S(V^*)^G \cap \ker v_0 = R_+$. Da questo segue che $\frac{1}{|G|} \sum_s sa_1 \in SR_+$ e quindi

$$\frac{1}{|G|} \sum_s sa_1 + SR_+ = SR_+ ,$$

ma avevamo visto che

$$a_1 + SR_+ = \frac{1}{|G|} \sum_s sa_1 + SR_+$$

e quindi si deve avere $a_1 \in SR_+$.

Nel caso in cui gli a_i non siano omogenei si procede considerando una decomposizione

$$a_i = \sum_d a_i^{(d)} ,$$

³Per vederlo basta osservare che ogni elemento in SR_+ è della forma $\sum_i a_i f_i$, con gli $f_i \in R_+$ e $a_i \in S$, e quindi per ogni $s \in G$ abbiamo che $s(\sum_i a_i f_i) = \sum (sa_i) f_i$ che è un elemento di SR_+ .

dove ogni $a_i^{(d)}$ è la componente omogenea di grado d di a_i , a questo punto abbiamo che⁴

$$\sum_d \left(\sum_i a_i^{(d-d_i)} g_i \right) = \sum_i a_i g_i = 0$$

dove ogni $\sum_i a_i^{(d-d_i)} g_i$ è il termine omogeneo di grado d di $\sum_i a_i g_i$. Per ogni grado d si deve avere

$$\sum_i a_i^{(d-d_i)} g_i = 0$$

e quindi da quanto fatto per il caso omogeneo ne segue che $a_1^{(d-d_i)} \in SR_+$ per ogni grado d . Quindi $a_1 = \sum_d a_1^{(d-d_i)} \in SR_+$, come volevamo provare. \square

Proposizione 19.6. *Dato un sistema minimale $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq R$ di elementi omogenei che generino SR_+ essi sono algebricamente indipendenti su \mathbb{C} .*

Dimostrazione. La dimostrazione procederà per assurdo. Siano f_1, \dots, f_r come da ipotesi e supponiamo che esista un $h \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ tale che

$$h(f_1, \dots, f_r) = 0 ,$$

supponiamo inoltre che h sia un polinomio di grado minimale con tale proprietà.

Allora per ogni $k = 1, \dots, n$ abbiamo le uguaglianze

$$\frac{\partial}{\partial X_k} (h(f_1, \dots, f_r)) = 0$$

che si sviluppano in

$$\sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial}{\partial X_i} h \right) (f_1, \dots, f_r) \frac{\partial}{\partial X_k} f_i = 0 .$$

Indichiamo con h_i i polinomi

$$h_i = \left(\frac{\partial}{\partial X_i} h \right) (f_1, \dots, f_r) \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n] \subseteq R ,$$

e quindi abbiamo

$$\sum_i h_i \frac{\partial}{\partial X_k} f_i = 0 .$$

Osserviamo che i polinomi $\frac{\partial}{\partial X_i} h \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ non possono essere tutti nulli, altrimenti h dovrebbe essere una costante che si annulla negli f_i , ma l'unica costante che si annulla è il polinomio 0 e per ipotesi $h \neq 0$. D'altra parte possiamo osservare che per quegli i tali che

$$\frac{\partial}{\partial X_i} h \neq 0$$

non si può avere

$$h_i = \left(\frac{\partial}{\partial X_i} h \right) (f_1, \dots, f_r) = 0 ,$$

⁴Ovviamente nel seguito quando $d - d_i < 0$ il termine $a_i^{(d-d_i)}$ è nullo.

altrimenti $\frac{\partial}{\partial X_i} h$ darebbe un polinomio non nullo, di grado strettamente minore di h , che si annulla sugli f_j , ma questo contraddirebbe l'ipotesi di minimalità del grado di h . Da questo segue che per almeno qualche i abbiamo che $h_i \neq 0$, e quindi in particolare esisterà un certo grado d tale che $h_i^{(d)}$, la componente omogenea di grado di d di h_i , sia non nulla.

Osserviamo che abbiamo la seguente decomposizione in componenti omogenee

$$\sum_i h_i \frac{\partial}{\partial X_k} f_i = \sum_n \left(\sum_i h_i^{n-(\deg f-1)} \frac{\partial}{\partial X_k} f_i \right),$$

poiché gli f_i per ipotesi sono omogenei e quindi i loro polinomi derivati sono omogenei, di grado $\deg f - 1$, oppure sono polinomi nulli. A questo punto per la componente di grado $d + (\deg(f) - 1)$ abbiamo

$$\sum_i h_i^{(d)} \frac{\partial}{\partial X_k} f_i = 0,$$

dove la relazione vale per ogni k . Da questo segue che, a meno di rimpiazzare gli h_i con gli $h_i^{(d)}$ possiamo supporre che nelle relazioni

$$\sum_i h_i \frac{\partial}{\partial X_k} f_i = 0$$

gli h_i siano omogenei.

A meno di permutazioni possiamo supporre che per un $m \leq r$ si abbia che $\{h_1, \dots, h_m\}$ sia un insieme minimale di generatori per l'ideale $S(h_1, \dots, h_r)$ e quindi per i $j > m$ esisteranno certi $(g_{j,l})_{j,l}$ tali che

$$h_j = \sum_{l=1}^m g_{j,l} h_l,$$

dove al solito possiamo supporre che i $g_{j,l}$ siano omogenei. A questo punto abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r h_i \frac{\partial}{\partial X_k} f_i &= \sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial}{\partial X_k} f_i + \sum_{j=m+1}^r \sum_{l=1}^m g_{j,l} h_l \frac{\partial}{\partial X_k} f_j \\ &= \sum_{i=1}^m h_i \left(\frac{\partial}{\partial X_k} f_i + \sum_{j=m+1}^r g_{j,i} \frac{\partial}{\partial X_k} f_j \right). \end{aligned}$$

Grazie al fatto che gli h_1, \dots, h_m sono un insieme minimale di generatori dell'ideale $S(h_1, \dots, h_r)$, in particolare $h_i \notin S(h_1, \dots, h_{i-1}, h_{i+1}, \dots, h_m)$, e che sono elementi omogenei di R possiamo applicare il lemma 19.5 all'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^m h_i \left(\frac{\partial}{\partial X_k} f_i + \sum_{j=m+1}^r g_{j,i} \frac{\partial}{\partial X_k} f_j \right) = \sum_{i=1}^r h_i \frac{\partial}{\partial X_k} f_i = 0$$

ottenendo che per ogni i vale

$$\frac{\partial}{\partial X_k} f_i + \sum_{j=m+1}^r g_{j,i} \frac{\partial}{\partial X_k} f_j \in SR_+.$$

Ma allora abbiamo che

$$\sum_k X_k \left(\frac{\partial}{\partial X_k} f_1 + \sum_{j=m+1}^r g_{j,1} \frac{\partial}{\partial X_k} f_j \right) \in SR_+$$

e quindi sviluppando otteniamo⁵

$$\begin{aligned} & \sum_k X_k \frac{\partial}{\partial X_k} f_1 + \sum_{j=m+1}^r g_{j,1} \sum_k X_k \frac{\partial}{\partial X_k} f_j = \\ & = \deg(f_1) f_1 + \sum_{j=m+1}^r g_{j,1} \deg(f_j) f_j \in SR_+ . \end{aligned}$$

Da questa relazione seguirebbe che

$$f_1 = -\frac{1}{\deg f_1} \sum_{j=m+1}^r g_{j,1} \deg(f_j) f_j$$

ma per ipotesi $f_1 \notin S(f_2, \dots, f_r)$. Siamo dunque giunti ad un assurdo, dobbiamo concludere che un h come sopra non può esistere. Da questo segue che gli f_1, \dots, f_r sono algebricamente indipendenti. \square

A questo punto siamo già in grado di provare la freccia (3) \Rightarrow (1) del teorema di Chevalley Shepard Todd.

Teorema. Dato un gruppo finito $G \leq \text{Gl}(V)$, se G è un gruppo di riflessioni allora

$$R = S^G = S(V^*)^G$$

è un anello polinomiale.

Dimostrazione. Basta considerare $R_+ = \ker v_0 \cap R$, dove $v_0: S \rightarrow \mathbb{C}$ è il morfismo di valutazione in 0, e prendere un insieme minimale $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq R$ di generatori omogenei per l'ideale SR_+ . Per la proposizione 19.2 sappiamo che $R = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$ mentre per la proposizione 19.6 gli f_i sono algebricamente indipendenti. Da questo segue che

$$S^G \cong \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r] \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r] .$$

\square

Per chiudere diamo anche un teorema che ci dica il grado di trascendenza di S^G .

Teorema 19.7. Sia V uno spazio di dimensione n e G un gruppo finito generato da riflessioni di V . Allora $S^G = S(V^*)^G$ ha grado di trascendenza n .

Dimostrazione. Da teoremi di algebra sappiamo che una base di trascendenza su S^G è anche una base di trascendenza sul suo campo delle frazioni $Q(S^G)$, quindi il grado di trascendenza di S^G (sotto-inteso sempre su \mathbb{C}) è pari al grado di trascendenza di $Q(S^G)$.

Osserviamo che per i teoremi sulla localizzazione abbiamo il seguente diagramma commutativo di anelli

$$\begin{array}{ccc} S^G & \xrightarrow{i} & S \\ j^G \downarrow & & \downarrow j \\ Q(S^G) & \xrightarrow{\bar{i}} & Q(S) \end{array}$$

dove i è l'immersione di S^G in S , j e j^G sono le immersioni di S e S^G nei loro campi di frazioni e \bar{i} è l'unico omomorfismo che faccia commutare il diagramma.

⁵Qui usiamo il fatto l'identità di Eulero che ci dice che per ogni polinomio omogeneo f vale $(\deg f)f = \sum_k X_k \frac{\partial}{\partial X_k} f$.

In particolare dalle proprietà di \bar{i} sappiamo che per ogni coppia $p, q \in S^g$, con $g \neq 0$, si deve avere che

$$\bar{i} \left(\frac{p}{q} \right) = \frac{\bar{i}(p)}{\bar{i}(q)} = \frac{p}{q}$$

dove $\frac{p}{q}$ a sinistra è un elemento di $Q(S^G)$ mentre quello a destra è in $Q(S)$. Questo ci dice che $\text{Im } \bar{i}$ è il sotto-anello (in verità si può parlare di sotto-campo in quanto è isomorfo a $Q(S^G)$)

$$\left\{ \frac{p}{q} : p \in S^G, q \in S^G \setminus \{0\} \right\} .$$

Vediamo che questo sotto-anello è proprio l'insieme degli elementi G -invarianti per la naturale struttura di G -modulo su $Q(S)$: quella dove per ogni $g \in G$ e $p, q \in S$ si ha⁶

$$g \frac{p}{q} = \frac{gp}{gq} .$$

Supponiamo di prendere $p, q \in S$, con $q \neq 0$, p e q coprimi e tali che si abbia

$$g \frac{p}{q} = \frac{gp}{gq} = \frac{p}{q} .$$

A questo punto abbiamo che vale l'uguaglianza

$$\frac{p}{q} = \frac{\prod_{g \in G} gp}{q \prod_{g \in G \setminus \{1\}} gp}$$

da questo segue che

$$q \prod_{g \in G \setminus \{1\}} gp = \frac{q}{p} \prod_{g \in G} gp$$

e dato che sia $\frac{q}{p}$ che $\prod_{g \in G} gp$ sono elementi G -invarianti anche $q \prod_{g \in G \setminus \{1\}} gp$ è G -invariante, in particolare è un elemento di S^G . Da quanto detto segue che $\frac{p}{q} \in \text{Im } \bar{i}$ in quanto rapporto di $\prod_{g \in G} gp$ e $q \prod_{g \in G \setminus \{1\}} gp$ che stanno in S^G .

E adesso entra in scena la teoria di Galois. Per costruzione è facile vedere che l'azione di G su $Q(S) = \mathbb{C}(X_1, \dots, X_n)$ è \mathbb{C} -lineare, in particolare ci dà un omomorfismo

$$\rho: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(Q(S))$$

che va da G nel gruppo degli automorfismi di \mathbb{C} -algebre su $Q(S)$. In particolare ogni $\rho(g)$ fissa gli elementi di \mathbb{C} e quindi $\rho(g) \in \text{Aut}(Q(S)/\mathbb{C})$. Per la corrispondenza di Galois sappiamo allora che l'estensione di campi

$$Q(S)^G \subseteq Q(S)$$

(dove $Q(S)^G$ è il sotto-campo fissato da G , che per quanto visto prima è $Q(S^G)$), è un'estensione di Galois, in particolare è algebrica.

Questo ci dice in particolare che $Q(S^G) = Q(S)^G$ ha lo stesso grado di trascendenza di $Q(S)$, ma

$$S = S(V^*) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] ,$$

dove $n = \dim V$, e quindi

$$Q(S) = \mathbb{C}(X_1, \dots, X_n) ,$$

per cui $Q(S)$ ha grado di trascendenza n , quindi anche $Q(S^G)$, e dunque anche S^G , ha grado di trascendenza $n = \dim V$. \square

⁶Non diamo una dimostrazione del fatto che in effetti questa azione di G sia ben definita, ovvero che non dipenda dalla scelta di p e q per rappresentare la frazione in $Q(S)$.

Rimettendo tutto assieme abbiamo che:

Corollario 19.8. *Per G gruppo di riflessioni su V abbiamo che*

$$S(V^*)^G \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{\dim V}] .$$

Dimostrazione. Sappiamo che $S(V^*)^G$ è polinomiale, in particolare $S^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$ per certi f_i elementi di S^G omogenei e algebricamente indipendenti, e che $n = \dim V$ è il grado di trascendenza di S^G .

Ricordiamo che il grado di trascendenza è la cardinalità di ogni base di trascendenza, ovvero di ogni insieme di elementi algebricamente indipendenti (sul campo base, in questo caso \mathbb{C}) che sia massimale. Da questo segue che $r = n$ poiché gli f_i sono chiaramente un insieme di elementi algebricamente indipendenti, per costruzione, e massimale, visto che ogni altro elemento di S^G è una combinazione polinomiale degli f_i . \square

Capitolo 20

Un lungo esercizio: la decomposizione delle S_n -rappresentazioni delle coomologie degli spazi di configurazione

Lezione 20 (23/05/2016)

Quest'ultimo capitolo sarà un lungo esercizio per il calcolo della decomposizione di una famiglia di rappresentazioni: la coomologia degli spazi di configurazioni.

Proprietà interessanti di questi spazi vengono dallo studio della loro coomologia e, come vedremo, un modo per ottenere informazioni su questa coomologia, in particolare trovarne una decomposizione, viene dall'uso della teoria delle rappresentazioni.

Prima di entrare nel vivo del problema diamo una piccola introduzione che spieghi gli aspetti geometrici.

20.1 Una breve introduzione geometrica al problema

In questa prima parte supponiamo che il lettore sia familiare con alcuni concetti di topologia, in particolare con l'omologia e la coomologia singolare di uno spazio topologico. Come referenza per questi concetti consigliamo le parti iniziali dei capitoli 3 e 4 dal libro di Hatcher [\[Hat\]](#).

20.1.1 Un po' di topologia

Lo spazio delle n -configurazioni in \mathbb{R}^d , denotato con $C_n(d)$, è il sotto-spazio di $(\mathbb{R}^d)^n$ definito come

$$C_n(d) = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}^d)^n : \forall i, j \ i \neq j \rightarrow p_i \neq p_j \right\} .$$

Esiste un'ovvia azione di S_n su $C_n(d)$, l'azione che permuta le componenti di ogni punto, ovvero

$$\begin{aligned} S_n \times C_n(d) &\longrightarrow C_n(d) \\ \sigma \cdot (p_1, \dots, p_n) &= (p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)}) . \end{aligned}$$

Questa azione ovviamente estende a un'azione

$$\begin{aligned} S_n \times \mathbf{Top}[\Delta^k, C_n(d)] &\longrightarrow \mathbf{Top}[\Delta^k, C_n(d)] \\ (\sigma, f) &\mapsto \sigma f \end{aligned}$$

dove σf è definito dall'equazione

$$(\sigma f)(p) = \sigma(f(p)) ,$$

per ogni $p \in \Delta^k$.

È chiaro che questa azione può essere estesa a un'azione lineare su $C_k(C_n(d))$, ovvero sul \mathbb{C} -spazio vettoriale liberamente generato dalle funzioni continue dai Δ^k in $C_n(d)$.¹ Quindi abbiamo una mappa

$$\begin{aligned} S_n \times C_k(C_n(d)) &\longrightarrow C_k(C_n(d)) \\ (\sigma, \sum_i \lambda_i f_i) &\mapsto \sum_i \lambda_i \sigma f_i \end{aligned}$$

dove i $f_i: \Delta^k \rightarrow C_n(d)$ sono mappe continue, ovvero elementi di $\mathbf{Top}[\Delta^k, C_n(d)]$, e i λ_i sono coefficienti in \mathbb{C} . Dalla linearità dell'azione segue che abbiamo un omomorfismo

$$\rho: S_n \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(C_k(C_n(d)))$$

ovvero che $C_k(C_n(d))$ è una S_n -rappresentazione.

Non è difficile far vedere che le mappe di bordo del complesso singolare, le $\delta_k: C_k(C_n(d)) \rightarrow C_{k-1}(C_n(d))$, sono in realtà degli omomorfismi di S_n -moduli e che quindi il complesso $(C_*(C_n(d)), \delta)$ è un complesso di S_n -moduli.

Da questo segue che anche il complesso duale $(C^*(C_n(d)), \delta^*)$, formato dai \mathbb{C} -spazi vettoriali $C^k(C_n(d)) = (C_k(C_n(d)))^*$ e dalle mappe di (co)bordo

$$\begin{aligned} \delta^k &= (\delta_k)^*: C^{k-1}(C_n(d)) \longrightarrow C^k(C_n(d)) \\ c &\in (C_{k-1}(C_n(d)))^* \mapsto c \circ \delta_k \in (C_k(C_n(d)))^* , \end{aligned}$$

è un complesso di S_n -moduli. Usando quanto visto nel capitolo 1 questo ci dice che:

- i $\ker \delta^{k+1}$ sono delle sotto-rappresentazioni dei $C^k(C_n(d))$
- gli $\text{Im } \delta^k$ sono delle sotto-rappresentazioni dei $C^k(C_n(d))$ e quindi anche dei $\ker \delta^{k+1}$
- e quindi che i quozienti $H^k(C_n(d)) = \ker \delta^{k+1} / \text{Im } \delta^k$, ovvero i moduli di coomologia, sono anche essi degli S_n -moduli.

Quindi da quanto detto segue che $H^*(C_n(d)) = \bigoplus_k H^k(C_n(d))$ è effettivamente un S_n -modulo. Con un po di lavoro si riesce ulteriormente a far vedere che la struttura di anello che esiste su $H^*(C_n(d))$ ² è compatibile con la struttura di S_n -modulo.

20.1.2 Alcuni risultati sul $H^*(C_n(d))$

In questa sezione diamo alcuni enunciati, senza dimostrazione, di alcune proprietà della coomologia di $C_n(d)$.

Enunciato. Per ogni coppia d e n la coomologia $H^*(C_n(d))$ è isomorfa alla \mathbb{C} -algebra A_n data dalla seguente presentazione: è generata da un insieme di elementi della forma $\omega_{i,j}$ con $1 \leq i, j \leq n$ e quozientata per le relazioni

$$\begin{aligned} \omega_{i,i} &= 0 \\ \omega_{i,j} &= (-1)^d \omega_{j,i} \\ \omega_{i,j} \omega_{h,k} &= (-1)^{d-1} \omega_{h,k} \omega_{i,j} \text{ per } i \neq h \\ \omega_{i,j} \omega_{i,k} &= \omega_{k,j} (\omega_{i,k} - \omega_{i,j}) . \end{aligned}$$

¹Ovvero sul complesso singolare di $C_n(d)$.

²Il prodotto indotto dal cup-product dei co-cicli.

Tale algebra prende il nome di algebra di Arnold, dal nome del matematico che per primo le studiò nel caso $d = 2$.

Ovviamente la A_n ha una struttura di algebra graduata in cui gli $\omega_{i,j}$, con $i \neq j$ sono gli elementi di grado 1, e gli elementi di grado k sono combinazioni \mathbb{C} -lineari di prodotti di k -uple di $\omega_{i,j}$.

In verità vale il seguente fatto:

Enunciato. Data $A_n = \bigoplus_k A_n^k$, la decomposizione di A_n in componenti omogenee, abbiamo che ogni A_n^k come \mathbb{C} -spazio vettoriale ha come base l'insieme

$$\{ \omega_{i_1, j_1} \dots \omega_{i_k, j_k} : \forall l = 1, \dots, k-1 \ (i_l, j_l) < (i_{l+1}, j_{l+1}) \} ,$$

dove l'ordinamento sulle coppie (i_l, j_l) è quello lessico-grafico inverso: ovvero

$$(a, b) < (c, d) \iff b < d \text{ o } (b = d \text{ e } a < c) .$$

Ogni elemento di A_n^k si può scrivere in modo canonico (unico) come combinazione lineare di prodotti della forma $\prod_l \omega_{i_l, j_l}$ a patto di prendere solo quei prodotti ordinati.

Ovviamente A_n ha la struttura di S_n -modulo, essendo isomorfa a $H^*(C_n(d))$, e ogni $\sigma \in S_n$ agisce come l'unica applicazione lineare tale che

$$\sigma \omega_{i,j} = \omega_{\sigma(i), \sigma(j)} ,$$

per ogni i e j con $i \neq j$.

Prima di procedere ulteriormente vediamo qualche esempio di A_n .

Esempio 20.1. Consideriamo il caso $n = 2$. In tal caso abbiamo la decomposizione

$$A_2 = A_2^0 \oplus A_2^1 ,$$

dove $A_2^0 \cong \mathbb{C}$ e A_2^1 è il \mathbb{C} -spazio generato dall'elemento $\omega_{1,2}$.

Esempio 20.2. Per $n = 3$ abbiamo la decomposizione

$$A_3 = A_3^0 \oplus A_3^1 \oplus A_3^2$$

dove

- A_3^0 è \mathbb{C} ,
- A_3^1 è il \mathbb{C} -spazio generato da $\omega_{1,2}$, $\omega_{1,3}$ e $\omega_{2,3}$,
- A_3^2 è il \mathbb{C} -spazio generato dai prodotti $\omega_{1,2}\omega_{1,3}$, $\omega_{1,2}\omega_{2,3}$, $\omega_{1,3}\omega_{2,3}$.

In particolare abbiamo che

$$A_3^1 \cong A_3^2 \cong \mathbb{C}^3$$

come \mathbb{C} -spazi vettoriali.

Chiudiamo questa sezione con un risultato che servirà nel seguito e risulta essere interessante.

Enunciato. La \mathbb{C} -algebra A_n ha una struttura di S_{n+1} -rappresentazione. Inoltre se vediamo S_{n+1} come il gruppo di permutazioni $S(\{0, \dots, n\})$ e quindi vediamo $S_n = S(\{1, \dots, n\})$ come l'ovvio sotto-gruppo con la naturale immersione, allora si può vedere che l'azione di S_{n+1} estende l'azione di S_n vista precedentemente.

Tale azione inoltre rispetta le componenti graduate di A_n , ovvero gli A_n^k sono invarianti rispetto a questa azione.

Non diamo una definizione esplicita dell'azione di S_{n+1} ma come curiosità puntualizziamo il fatto che questa azione, a differenza di quella di S_n , non è indotta da un'azione di S_{n+1} su $C_n(d)$.

20.2 L'esercizio: capire che rappresentazione è A_n .

Cominciamo qui il nostro esercizio, lo scopo che ci poniamo è il seguente:

Esercizio. Trovare una decomposizione di A_n come somma di S_n -sotto-rappresentazioni irriducibili.

Per raggiungere questo scopo ci servirà il fatto che A_n ha una struttura di $S(\{0, \dots, n\})$ -rappresentazione, la cui azione di $S(\{0, \dots, n\})$ estende quella naturale del sotto-gruppo $S_n = S(\{1, \dots, n\})$.

Dentro $S_{n+1} = S(\{0, \dots, n\})$ abbiamo due sotto-gruppi

- $H = S(\{0, \dots, n-1\})$
- $K = S(\{1, \dots, n\})$

entrambi isomorfi a S_n e dove $\text{Res}_K^{S_{n+1}}(A_n^k)$ è proprio A_n^k con la struttura naturale di S_n -modulo descritta nella precedente sezione. A questo punto consideriamo la permutazione $\sigma \in S(\{0, \dots, n\})$ definita come

$$\sigma = (n-1, n)(n-2, n-1) \dots (0, 1)$$

la cui azione è descritta dalla seguente equazione

$$\sigma(i) = \begin{cases} i-1 & \text{se } 1 \leq i \leq n \\ n & \text{se } i = 0. \end{cases}$$

Non è difficile far vedere che posto di indicare con $\tau_i = (i, i+1)$, per ogni $i = 0, \dots, n-1$,

$$\sigma\tau_i\sigma^{-1} = \tau_{i-1}$$

e dato che $H = \langle \tau_0, \dots, \tau_{n-2} \rangle$ e $K = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle$ quanto detto sopra ci dice che

$$\sigma K \sigma^{-1} = H .$$

A questo punto possiamo riscrivere l'equazione tra i τ_i in

$$\sigma\tau_i = \tau_{i-1}\sigma ,$$

posto di indicare con $\rho: S_{n+1} \rightarrow \text{Aut}(A_n^k)$ la rappresentazione di $S(\{0, \dots, n\})$ su A_n^k , dall'equazione abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A_n^k & \xrightarrow{\rho(\sigma)} & A_n^k \\ \rho(\tau_i) \downarrow & & \downarrow \rho(\tau_{i-1}) \\ A_n^k & \xrightarrow{\rho(\sigma)} & A_n^k \end{array} ,$$

indicando con $\rho^H: S_n \cong H \rightarrow \text{Aut}(A_n^k)$ e $\rho^K: S_n \cong K \rightarrow \text{Aut}(A_n^k)$ le due restrizioni della ρ ai sotto-gruppi H e K il diagramma di sopra può essere riscritto come

$$\begin{array}{ccc} A_n^k & \xrightarrow{\rho(\sigma)} & A_n^k \\ \rho^K(\tau_i) \downarrow & & \downarrow \rho^H(\tau_{i-1}) \\ A_n^k & \xrightarrow{\rho(\sigma)} & A_n^k \end{array}$$

che esprime il fatto che $\rho(\sigma)$ è un omomorfismo di S_n rappresentazioni: dalla $\text{Res}_K^{S_{n+1}}(A_n^k)$ alla $\text{Res}_H^{S_{n+1}}(A_n^k)$. Quindi abbiamo che le due restrizioni di A_n^k sono isomorfe come S_n -moduli.

L'idea che adotteremo nel seguito è di sfruttare questo isomorfismo nel seguente modo: troveremo una decomposizione di A_n^k come H -modulo in termine di alcuni suoi sotto- H -moduli naturali, quindi, usando l'isomorfismo appena trovato, questa decomposizione ci darà una decomposizione di A_n^k come K -modulo, ovvero come S_n -modulo con l'azione naturale di S_n su A_n^k . In questo modo troveremo una decomposizione in S_n -moduli irriducibili di A_n visto come H -modulo ma tramite l'isomorfismo questa decomposizione si prova essere anche una decomposizione di A_n come K -modulo, ovvero come S_n -rappresentazione con l'azione naturale.

Cominciamo con la seguente osservazione.

Osservazione 20.3. Per A_n^1 abbiamo i seguenti sotto-spazi vettoriali

$$\begin{aligned} A_{n-1}^1 &= \langle \omega_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n-1 \rangle \\ N &= \langle \omega_{i,n} : 1 \leq i \leq n-1 \rangle \end{aligned}$$

che soddisfano le seguenti condizioni:

- $A_{n-1}^1 \cap N = (0)$
- $A_{n-1}^1 + N = A_n^1$
- e quindi $A_n^1 \cong A_{n-1}^1 \oplus N$.

Le proprietà di sopra sono conseguenza del fatto che A_{n-1}^1 e N sono generati da due insiemi che formano una partizione della base di A_n^1 . Non è difficile osservare che preso $S_{n-1} = S(\{1, \dots, n-1\})$, sotto-gruppo di $S(\{0, \dots, n\})$, gli A_{n-1}^1 e N risultano essere dei sotto-spazi S_{n-1} -invarianti, dove vediamo A_n^1 come S_{n-1} -modulo con l'azione data dalla restrizione dell'azione di $S(\{0, \dots, n\})$ (e quindi anche di $K = S(\{1, \dots, n\})$). Da questo segue che l'isomorfismo

$$A_n^1 \cong A_{n-1}^1 \oplus N$$

è anche un isomorfismo di S_{n-1} -rappresentazioni (non solo di spazi vettoriali), più precisamente abbiamo l'isomorfismo

$$\text{Res}_{S_{n-1}}^H A_n^1 \cong_{S_{n-1}} \text{Res}_{S_{n-1}}^H (A_{n-1}^1) \oplus N .$$

Osservazione 20.4. D'altra parte abbiamo che A_{n-1}^1 è anche un sotto- H -modulo di A_n^1 ³ e quindi per il teorema di Maschke sappiamo che esiste un'altra sotto- H -rappresentazione $T \leq A_n^1$ tale che

- $A_{n-1}^1 \cap T = (0)$
- $A_{n-1}^1 + T = A_n^1$

e quindi $A_n^1 \cong A_{n-1}^1 \oplus T$ come H -modulo.

Usando il fatto che $S_{n-1} = S(\{1, \dots, n-1\})$ è sotto-gruppo di H possiamo passare l'isomorfismo alle restrizioni ottenendo

$$\text{Res}_{S_{n-1}}^H (A_n^1) \cong_{S_{n-1}} \text{Res}_{S_{n-1}}^H (A_{n-1}^1) \oplus \text{Res}_{S_{n-1}}^H (T) .$$

Ma per quanto visto nell'osservazione 20.3 ne segue che dobbiamo avere l'isomorfismo

$$\text{Res}_{S_{n-1}}^H (A_{n-1}^1) \oplus \text{Res}_{S_{n-1}}^H (T) \cong_{S_{n-1}} \text{Res}_{S_{n-1}}^H (A_{n-1}^1) \oplus N ,$$

che per l'unicità delle decomposizioni delle componenti irriducibili ci permette di estrarre un isomorfismo⁴

$$\text{Res}_{S_{n-1}}^H (T) \cong_{S_{n-1}} N .$$

³Non dimostriamo questo fatto, che richiederebbe di conoscere esplicitamente l'azione di $S(\{0, \dots, n\})$, ma chiediamo al lettore di fidarsi.

⁴Dato che gli $\text{Res}_{S_{n-1}}^H (A_{n-1}^1)$ hanno le stesse componenti irriducibili, $\text{Res}_{S_{n-1}}^H (T)$ deve contenere tutte e sole le componenti irriducibili di N .

Osservazione 20.5. Ricordiamo che per ogni $\sigma \in S_{n-1}$ e per ogni $i = 1, \dots, n-1$ abbiamo che

$$\sigma\omega_{i,n} = \omega_{\sigma(i),n} ,$$

da questo segue facilmente che la mappa seguente

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^{n-1} &\longrightarrow N \\ f(e_i) &= \omega_{i,n} \end{aligned}$$

è un isomorfismo di S_{n-1} -moduli, dove \mathbb{C}^{n-1} lo vediamo con l'ovvia struttura di S_{n-1} -rappresentazione, quella di permutazione.

Da questo segue che

$$N \cong \overbrace{\square \square \square \square}^{n-2} \oplus \overbrace{\square \square \square \square}^{n-1}$$

e questa ci dà la decomposizione di N in S_{n-1} -rappresentazioni irriducibili. Ma allora per quanto visto nell'osservazione 20.4

$$\text{Res}_{S_{n-1}}^H(T) \cong \overbrace{\square \square \square \square}^{n-2} \oplus \overbrace{\square \square \square \square}^{n-1} ,$$

dove $H \cong S_n$. Per uno dei corollari alla regola di Pieri sappiamo che esiste un'unica S_n -rappresentazione la cui restrizione a S_{n-1} sia uguale a

$$\overbrace{\square \square \square \square}^{n-2} \oplus \overbrace{\square \square \square \square}^{n-1} ,$$

la rappresentazione

$$\overbrace{\square \square \square \square}^{n-1} ,$$

e quindi

$$T \cong \overbrace{\square \square \square \square}^{n-1} ,$$

dove l'isomorfismo è di H -moduli.

In particolare questo ci dice che

$$A_n^1 \cong A_{n-1}^1 \oplus \overbrace{\square \square \square \square}^{n-1} ,$$

che ci dà una decomposizione di A_n^1 in H -sotto-moduli.

Proposizione 20.6. *Abbiamo che per ogni n e per ogni k vale*

$$A_n^k \cong A_{n-1}^k \oplus A_{n-1}^{k-1}T$$

dove A_n^k è visto come H -modulo e A_{n-1}^k , A_{n-1}^{k-1} e T come suoi sotto-spazi H -invarianti: questo ci dà una decomposizione di A_n^k come H -modulo.

Dimostrazione. Sappiamo che gli A_{n-1}^k , A_{n-1}^{k-1} e T sono dei sotto-spazi H -invarianti, ovvero degli H -sotto-moduli, di A_n^k . A questo punto se riuscissimo a far vedere che vale la seguente uguaglianza tra spazi vettoriali

$$A_n^k = A_{n-1}^k + A_{n-1}^{k-1}T ,$$

tramite argomenti di dimensione si può concludere che $A_{n-1}^k \cap A_{n-1}^{k-1}T = (0)$ e che quindi

$$A_n^k \cong A_{n-1}^k \oplus A_{n-1}^{k-1}T$$

dove l'isomorfismo è H -moduli.

Per provare la nostra uguaglianza a questo punto osserviamo che vale l'uguaglianza

$$A_n^k = A_{n-1}^{k-1}A_n^1$$

che è dovuta al fatto che entrambi gli spazi sono generati come \mathbb{C} -spazi vettoriali dagli elementi della forma $(\prod_{l=1}^{k-1} \omega_{i_l, j_l} \omega_{i_k, j_k})$, dove la sequenza $(i_l, j_l)_l$ è monotona rispetto all'ordinamento lessicografico inverso e $i_l < j_l$ per ogni l . A questo punto ci ricordiamo che per quanto visto nell'osservazione 20.4 che $A_n^1 = A_{n-1}^1 + T$ e quindi

$$\begin{aligned} A_n^k &= A_{n-1}^{k-1}(A_{n-1}^1 + T) \\ &= A_{n-1}^{k-1}A_{n-1}^1 + A_{n-1}^{k-1}T \\ &= A_{n-1}^k + A_{n-1}^{k-1}T, \end{aligned}$$

che ci dà l'uguaglianza cercata. □

In particolare dalla proposizione 20.6 segue che:

Osservazione 20.7. Abbiamo la seguente decomposizione di A_n^k come H -modulo:

$$\begin{aligned} A_n^k &\cong A_{n-1}^k \oplus A_{n-1}^{k-1}T \\ &\cong A_{n-1}^k \oplus A_{n-1}^{k-1} \overbrace{\square \square \square \square \square}^{n-1} \\ &\cong A_{n-1}^k \oplus \left(A_{n-1}^{k-1} \otimes \overbrace{\square \square \square \square \square}^{n-1} \right), \end{aligned}$$

da questa sommando su tutti i k otteniamo

$$\begin{aligned} A_n &= \bigoplus_k A_{n-1}^k \cong \bigoplus_k \left(A_{n-1}^k \oplus A_{n-1}^{k-1} \otimes \overbrace{\square \square \square \square \square}^{n-1} \right) \\ &\cong A_{n-1} \oplus \left(A_{n-1} \otimes \overbrace{\square \square \square \square \square}^{n-1} \right) \end{aligned}$$

che è ancora un isomorfismo di H -moduli.

In particolare possiamo riscrivere l'isomorfismo come

$$\begin{aligned} A_n &\cong A_{n-1} \otimes \left(\overbrace{\square \square \square \square \square}^n \oplus \overbrace{\square \square \square \square \square}^{n-1} \right) \\ &\cong A_{n-1} \otimes \text{Ind}_{S_{n-1}}^H \left(\overbrace{\square \square \square \square \square}^{n-1} \right) \end{aligned}$$

e usando l'isomorfismo, che vale in generale per ogni coppia di gruppi $H \leq G$,

$$U \otimes \text{Ind}_H^G(W) \cong \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(U)),$$

dove W è la H -rappresentazione banale, otteniamo

$$A_n \cong \text{Ind}_{S_{n-1}}^H(\text{Res}_{S_{n-1}}^H(A_{n-1})),$$

ma la restrizione di A_{n-1} a S_{n-1} è proprio A_{n-1} con la naturale struttura di S_{n-1} -modulo, quindi

$$A_n \cong \text{Ind}_{S_{n-1}}^H(A_{n-1}),$$

dove adesso A_{n-1} è visto semplicemente con la struttura di S_{n-1} -rappresentazione.

Proposizione 20.8. *Vale l'isomorfismo di S_n -rappresentazioni*

$$A_n \cong \text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(A_{n-1}) ,$$

dove A_n e A_{n-1} sono visti con le naturali strutture rispettivamente di S_n e S_{n-1} -moduli.

Dimostrazione. Abbiamo visto che vale l'isomorfismo

$$A_n \cong \text{Ind}_{S_{n-1}}^H(A_{n-1})$$

o più correttamente

$$\text{Res}_H^{S_{n+1}}(A_n) \cong \text{Ind}_{S_{n-1}}^H(A_{n-1}) .$$

A questo punto ricordandoci l'isomorfismo

$$\text{Res}_K^{S_{n+1}}(A_n) \cong \text{Res}_H^{S_{n+1}}(A_n)$$

di S_n -moduli, e usando il fatto che $\text{Res}_K^{S_{n+1}}(A_n)$ è proprio A_n visto con la naturale struttura di S_n -rappresentazione otteniamo che

$$A_n = \text{Res}_K^{S_{n+1}}(A_n) \cong \text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(A_{n-1}) .$$

□

Corollario 20.9. *Per ogni n abbiamo che*

$$A_n = \text{Ind}_{S_1}^{S_n} \square .$$

Dimostrazione. Si procede per induzione su n .

Il caso $n = 1$ è banale: sappiamo che $A_1 \cong \mathbb{C}$ l'unica S_1 -rappresentazione, quella banale.

Supponiamo, come ipotesi induttiva, che $A_n \cong \text{Ind}_{S_1}^{S_n}(\square)$. Allora per la proposizione 20.8 abbiamo

$$\begin{aligned} A_{n+1} &\cong \text{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}}(A_n) \\ &\cong \text{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}}(\text{Ind}_{S_1}^{S_n}(\square)) \\ &\cong \text{Ind}_{S_1}^{S_{n+1}}(\square) . \end{aligned}$$

Per induzione segue la tesi.

□

Come fatto conclusivo ci teniamo a dire che in generale il problema di trovare la decomposizione degli A_n^k in componenti irriducibili è ancora un problema aperto, si sa dire qualcosa per alcuni k ma in generale non esiste alcuna formula nota che dia tale decomposizione.

Bibliografia

- [FH91] W. Fulton e J. Harris. *Representation Theory: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1991.
- [Hat] Allen Hatcher. *Algebraic topology*.
- [Mac98] I.G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1998.