Index sum theorem e ℓ-ficazione di matrici polinomiali

Gian Maria Negri Porzio

17 Luglio 2015

Piano della presentazione

Il problema degli autovalori

Definizione

Data una matrice $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ e I la matrice identità chiamiamo problema agli autovalori la risoluzione dell'equazione $\det(\lambda I - A) = 0$

Questo concetto è stato generalizzato:

- *Linear Eigenvalues Problem*: $(\lambda A + B)v = L(\lambda)v = 0.$

Il problema degli autovalori

Definizione

Data una matrice $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ e I la matrice identità chiamiamo problema agli autovalori la risoluzione dell'equazione $\det(\lambda I - A) = 0$

Questo concetto è stato generalizzato:

- *Linear Eigenvalues Problem*: $(\lambda A + B)v = L(\lambda)v = 0$.
- *Polynomial Eigenvalues Problem*: $(\sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i)v = P(\lambda)v = 0$.

Metodi risolutivi

Teorema (Golub, Van Loan, 1983)

Siano $A, B \in \mathbb{F}^{m\times m}$. Allora esistono $Q, Z \in \mathbb{F}^{m\times m}$ unitarie tali che:

$$QAZ = T, \quad QBZ = S,$$

con T, S matrici triangolari superiori.

Metodi risolutivi

Teorema (Golub, Van Loan, 1983)

Siano $A, B \in \mathbb{F}^{m\times m}$*. Allora esistono* $Q, Z \in \mathbb{F}^{m\times m}$ *unitarie tali che:*

$$QAZ = T, \quad QBZ = S,$$

con T, S *matrici triangolari superiori.*

1. *Metodi diretti*: Iterazione di Bernoulli, algoritmo di Ehrlich-Aberth . . .

Metodi risolutivi

Teorema (Golub, Van Loan, 1983)

Siano $A, B \in \mathbb{F}^{m\times m}$. Allora esistono $Q, Z \in \mathbb{F}^{m\times m}$ unitarie tali che:

$$QAZ = T, \quad QBZ = S,$$

con T, S matrici triangolari superiori.

1. *Metodi diretti*: Iterazione di Bernoulli, algoritmo di Ehrlich-Aberth ...
2. *Linearizzazione*: $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times m} \longrightarrow L(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{km\times km}$

Il nostro fine

Obiettivo

Introdurre il concetto di ℓ-ficazione.

Il nostro fine

Obiettivo

Introdurre il concetto di ℓ-ficazione.

Quesiti:

1. Matrici rettangolari?
2. Come variano le dimensioni della ℓ-ficazione di un polinomio di matrici $P(\lambda)$?
3. È possibile scegliere un qualsiasi grado ℓ?

La forma di Smith

Teorema (Forma di Smith)

$P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times n} \Rightarrow \exists! r \in \mathbb{N}, E_1(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times m}, E_2(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{n\times n}$ matrici tali che $\det E_j(\lambda) \in \mathbb{F}^*$*:*

$$E_1(\lambda)P(\lambda)E_2(\lambda) = \operatorname{diag}(d_1(\lambda), \cdots, d_{\min\{m,n\}}(\lambda)) =: D(\lambda)$$

con

1. $d_i(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda], \qquad \forall i$
2. $d_i(\lambda)$ *monici e* $d_i \mid d_{i+1}, \qquad \forall i \leq r$
3. $d_i(\lambda) = 0, \qquad \forall i \quad r < i \leq \min\{m, n\}$

La forma di Smith

Teorema (Forma di Smith)

$P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times n} \Rightarrow \exists! r \in \mathbb{N}, E_1(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times m}, E_2(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{n\times n}$ *matrici tali che* $\det E_j(\lambda) \in \mathbb{F}^*$*:*

$$E_1(\lambda)P(\lambda)E_2(\lambda) = \mathrm{diag}(d_1(\lambda), \cdots, d_{\min\{m,n\}}(\lambda)) =: D(\lambda)$$

con

1. $d_i(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda], \qquad \forall i$
2. $d_i(\lambda)$ *monici e* $d_i \mid d_{i+1}, \qquad \forall i \leq r$
3. $d_i(\lambda) = 0, \qquad \forall i \quad r < i \leq \min\{m,n\}$

I polinomi non nulli $d_i(\lambda)$ sono detti *polinomi invarianti* di $P(\lambda)$.

Forma di Smith: esempio

Una matrice quadrata, in un campo algebricamente chiuso, avrebbe forma di Smith:

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \prod_{i=0}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{a_{i,1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \prod_{i=0}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{a_{i,r}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Forma di Smith: esempio

Una matrice quadrata, in un campo algebricamente chiuso, avrebbe forma di Smith:

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \prod_{i=0}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{a_{i,1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \prod_{i=0}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{a_{i,r}} \end{bmatrix}$$

1. $(a_{i,1}, \dots, a_{i,r})$ è la *sequenza delle molteplicità parziali* dell'autovalore λ_i.
2. $\delta_{\text{fin}} := \sum_{i=1}^{r} \deg d_i(\lambda)$ è la *molteplicità algebrica totale*.

Struttura spettrale all'infinito

Definiamo la *j-rovesciata* di una matrice $P(\lambda)$, con $j \geq \operatorname{gr} P(\lambda)$:

$$\operatorname{rev}_j P(\lambda) = \lambda^j P\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Struttura spettrale all'infinito

Definiamo la *j-rovesciata* di una matrice $P(\lambda)$, con $j \geq \operatorname{gr} P(\lambda)$:

$$\operatorname{rev}_j P(\lambda) = \lambda^j P\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

L'*autovalore all'infinito* ∞ di $P(\lambda)$ corrisponde all'*autovalore nullo* della sua rovesciata. Valgono le analoghe definizioni:

1. $(a_1, \ldots, a_r)$ è la *sequenza delle molteplicità all'infinito*.
2. $\delta_\infty := \sum_{i=1}^{r} a_i$ è la *molteplicità totale all'infinito*.

Struttura singolare

Definizione

Dato $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times n}$ chiamiamo *autospazi nulli destro e sinistro* rispettivamente i sottospazi vettoriali di $\mathbb{F}(\lambda)^n$ e $\mathbb{F}(\lambda)^m$:

$$\mathcal{N}_r(P) = \{x(\lambda) \in \mathbb{F}(\lambda)^{n\times 1} \colon P(\lambda)x(\lambda) = 0\}$$
$$\mathcal{N}_l(P) = \{y(\lambda)^T \in \mathbb{F}(\lambda)^{1\times m} \colon y(\lambda)^T P(\lambda) = 0\}$$

Struttura singolare

Definizione

Dato $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$ chiamiamo *autospazi nulli destro e sinistro* rispettivamente i sottospazi vettoriali di $\mathbb{F}(\lambda)^n$ e $\mathbb{F}(\lambda)^m$:

$$\mathcal{N}_r(P) = \{x(\lambda) \in \mathbb{F}(\lambda)^{n\times 1} \colon P(\lambda)x(\lambda) = 0\}$$
$$\mathcal{N}_l(P) = \{y(\lambda)^T \in \mathbb{F}(\lambda)^{1\times m} \colon y(\lambda)^T P(\lambda) = 0\}$$

È sempre possibile trovare una base formata da vettori polinomiali.

Struttura singolare

Definizione

Dato $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$ chiamiamo *autospazi nulli destro e sinistro* rispettivamente i sottospazi vettoriali di $\mathbb{F}(\lambda)^n$ e $\mathbb{F}(\lambda)^m$:

$$\mathcal{N}_r(P) = \{x(\lambda) \in \mathbb{F}(\lambda)^{n \times 1} \colon P(\lambda)x(\lambda) = 0\}$$
$$\mathcal{N}_l(P) = \{y(\lambda)^T \in \mathbb{F}(\lambda)^{1 \times m} \colon y(\lambda)^T P(\lambda) = 0\}$$

È sempre possibile trovare una base formata da vettori polinomiali.

Definizione

L'*ordine* di una base polinomiale è data dalla somma dei gradi dei vettori polinomiali che la compongono.

Indici minimali

Definizione (Indici minimali)

Siano $\mathcal{N}_r(P)$ e $\mathcal{N}_l(P)$ gli autospazi nulli associati ad una matrice $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times n}$ e $(y_1(\lambda)^T, \dots, y_q(\lambda)^T)$, $(x_1(\lambda), \dots, x_p(\lambda))$ le loro basi minimali tali che $\deg x_i \leq \deg x_{i+1}$ e $\deg y_i \leq \deg y_{i+1}$. Chiamiamo $\eta_i = \deg y_i(\lambda)$ e $\varepsilon_i = \deg x_i(\lambda)$ gli *indici minimali sinistri e destri* di $P(\lambda)$.

Indici minimali

Definizione (Indici minimali)

Siano $\mathcal{N}_r(P)$ e $\mathcal{N}_l(P)$ gli autospazi nulli associati ad una matrice $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$ e $(y_1(\lambda)^T, \dots, y_q(\lambda)^T)$, $(x_1(\lambda), \dots, x_p(\lambda))$ le loro basi minimali tali che $\deg x_i \leq \deg x_{i+1}$ e $\deg y_i \leq \deg y_{i+1}$. Chiamiamo $\eta_i = \deg y_i(\lambda)$ e $\varepsilon_i = \deg x_i(\lambda)$ gli *indici minimali sinistri e destri* di $P(\lambda)$.

Denotiamo inoltre:

$$\mu(P) := \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{q} \eta_i.$$

Equivalenze unimodulari

Definizione (Equivalenza unimodulare)

Due matrici $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ sono *unimodularmente equivalenti* se esistono due matrici unimodulari $E(\lambda)$ e $F(\lambda)$ per cui

$$P(\lambda) \sim Q(\lambda) \Leftrightarrow E(\lambda)P(\lambda)F(\lambda) = Q(\lambda).$$

Definizione (Equivalenza unimodulare estesa)

Due matrici $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ sono *unimodularmente equivalenti in senso esteso* se esistono due naturali r, s tali che

$$P(\lambda) \smile Q(\lambda) \Leftrightarrow \mathrm{diag}(P, I_r) \sim \mathrm{diag}(Q, I_s).$$

Equivalenze unimodulari

Definizione (Equivalenza spettrale)

Due matrici $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ rispettivamente di grado g e h sono *equivalenti in senso spettrale* se

$$P(\lambda) \asymp Q(\lambda) \Leftrightarrow P(\lambda) \smile Q(\lambda) \wedge \operatorname{rev}_g P(\lambda) \smile \operatorname{rev}_h Q(\lambda).$$

Equivalenze unimodulari

Definizione (Equivalenza spettrale)

Due matrici $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ rispettivamente di grado g e h sono *equivalenti in senso spettrale* se

$$P(\lambda) \asymp Q(\lambda) \Leftrightarrow P(\lambda) \smile Q(\lambda) \wedge \operatorname{rev}_g P(\lambda) \smile \operatorname{rev}_h Q(\lambda).$$

1. $P(\lambda) \smile Q(\lambda) \Leftrightarrow \dim \mathcal{N}_{l,r}(P) = \dim \mathcal{N}_{l,r}(Q)$ e uguali polinomi invarianti finiti.
2. $P(\lambda) \asymp Q(\lambda) \Leftrightarrow \dim \mathcal{N}_{l,r}(P) = \dim \mathcal{N}_{l,r}(Q)$ e uguali polinomi invarianti elementari.

$\mathcal{L}$-ficazioni

Definizione ($\mathcal{L}$-ficazioni)

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$ di grado g. Una matrice $Q(\lambda)$ di grado $\ell \leq g$:

1. è una *ℓ-ficazione* di $P(\lambda)$ se $Q(\lambda) \smile P(\lambda)$

$\mathcal{L}$-ficazioni

Definizione ($\mathcal{L}$-ficazioni)

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$ di grado g. Una matrice $Q(\lambda)$ di grado $\ell \leq g$:

1. è una *ℓ-ficazione* di $P(\lambda)$ se $Q(\lambda) \smile P(\lambda)$
2. è una *ℓ-ficazione forte* di $P(\lambda)$ se $Q(\lambda) \asymp P(\lambda)$

Un esempio e alcuni invarianti

Consideriamo

$$P(\lambda) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} =: Q(\lambda)$$

Risulta $\alpha_\infty(P) = (0, 1, 1) \neq (0, 0, 2) = \alpha_\infty(Q)$.

Un esempio e alcuni invarianti

Consideriamo

$$P(\lambda) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} =: Q(\lambda)$$

Risulta $\alpha_\infty(P) = (0, 1, 1) \neq (0, 0, 2) = \alpha_\infty(Q)$.
Si può dimostrare che, per matrici della stessa taglia, l'altro invariante è:

$$\delta_\infty + \mu.$$

Teorema

Data $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$ *di rango* r*, siano* $p := m - r$ *e* $q := n - r$ *le dimensioni di* $\mathcal{N}_l(P)$ *e* $\mathcal{N}_r(P)$*. Allora:*

1. *Esiste una linearizzazione di* $P(\lambda)$ $s_1 \times s_2$ *se e solo se*

$$\begin{aligned} s_1 &\geq \delta_{\text{fin}}(P) + q, \\ s_2 &\geq \delta_{\text{fin}}(P) + p, \quad \text{con } s_1 - s_2 = q - p = m - n. \end{aligned}$$

Teorema

Data $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times n}$ *di rango* r, *siano* $p := m - r$ *e* $q := n - r$ *le dimensioni di* $\mathcal{N}_l(P)$ *e* $\mathcal{N}_r(P)$. *Allora:*

1. *Esiste una linearizzazione di* $P(\lambda)$ $s_1 \times s_2$ *se e solo se*

$$\begin{aligned} s_1 &\geq \delta_{\mathrm{fin}}(P) + q, \\ s_2 &\geq \delta_{\mathrm{fin}}(P) + p, \quad \text{con } s_1 - s_2 = q - p = m - n. \end{aligned}$$

2. *Scelti gli indici minimali sinistri e destri* $(\eta_i)_{1,\dots,q}$, $(\varepsilon_i)_{1,\dots,p}$ *e le molteplicità parziali all'infinito* $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_l$, *esiste una linearizzazione* $s_1 \times s_2$ $\tilde{L}(\lambda)$ *di* $P(\lambda)$, *con*

$$s_1 = \delta_{\mathrm{fin}}(P) + q + \tilde{\mu} + \tilde{\delta}_\infty, \quad s_2 = \delta_{\mathrm{fin}}(P) + p + \tilde{\mu} + \tilde{\delta}_\infty$$

dove $\tilde{\mu} := \sum \eta_i + \sum \varepsilon_i$ *e* $\tilde{\delta}_\infty := \sum t_i$.

Funzione template

Definizione (Template)

Sia $\mathbb{F}[\lambda]_g^{m\times n}$ lo spazio dei polinomi di matrici di grado g. Un *template* è una funzione

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{F}[\lambda]_g^{m\times n} & \to & \mathbb{F}[\lambda]_\ell^{p\times q}. \\ & (x_1, \dots, x_{(g+1)mn}) & \mapsto & C(\lambda) = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda^i X_i, \end{array}$$

in cui ogni entrata di ogni coefficiente X_i è una funzione a valori scalari delle variabili x_j.

Forma companion

Definizione (Matrice companion)

Una *forma ℓ-companion* per matrici $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]_g^{m\times n}$ è un template:

$$\Psi : \mathbb{F}[\lambda]_g^{m\times n} \rightarrow \mathbb{F}[\lambda]_\ell^{p\times q},$$

tale che $\Psi(P(\lambda)) \asymp P(\lambda)$ per ogni $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]_g^{m\times n}$.

Forma companion

Definizione (Matrice companion)

Una *forma ℓ-companion* per matrici $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]_g^{m\times n}$ è un template:

$$\Psi : \mathbb{F}[\lambda]_g^{m\times n} \quad \to \quad \mathbb{F}[\lambda]_\ell^{p\times q},$$

tale che $\Psi(P(\lambda)) \asymp P(\lambda)$ per ogni $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]_g^{m\times n}$.

Consideriamo ora $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_k \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times n}$ e definiamo:

Matrici companion di Frobenius

$$X_1 := \begin{bmatrix} A_k & & & \\ & I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_n \end{bmatrix}, \quad X_0 := \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \dots & A_0 \\ -I_n & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} A_k & & & \\ & I_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \end{bmatrix}, \quad Y_0 := \begin{bmatrix} A_{k-1} & -I_m & & 0 \\ A_{k-2} & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & -I_m \\ A_0 & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix}$$

Chiamiamo *prima companion di Frobenius* $C_1(\lambda) := \lambda X_1 + X_0$, mentre *seconda companion di Frobenius* $C_2(\lambda) := \lambda Y_1 + Y_0$.

Proprietà

Si può dimostrare che valgono le seguenti proprietà:

1. $C_1(\lambda) \asymp P(\lambda)$.
2. $\varepsilon_i(C_1) = \varepsilon_i(P) + k - 1, \qquad$ per $i = 1, \ldots, p$
3. $\eta_i(C_1) = \eta_i(P), \qquad$ per $i = 1, \ldots, q$

L'index sum theorem

L'index sum theorem rivela una relazione molto elegante tra la struttura spettrale e singolare di un polinomio matriciale.

Teorema (Index sum theorem)

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$ un polinomio matriciale di grado $\operatorname{gr} P(\lambda) = k$. Allora vale l'uguaglianza:

$$\delta_{fin}(P) + \delta_{\infty}(P) + \mu(P) = \operatorname{rank} P(\lambda) \cdot \operatorname{gr} P(\lambda)$$

L'index sum theorem

L'index sum theorem rivela una relazione molto elegante tra la struttura spettrale e singolare di un polinomio matriciale.

Teorema (Index sum theorem)

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$ un polinomio matriciale di grado $\operatorname{gr} P(\lambda) = k$. Allora vale l'uguaglianza:

$$\delta_{fin}(P) + \delta_{\infty}(P) + \mu(P) = \operatorname{rank} P(\lambda) \cdot \operatorname{gr} P(\lambda)$$

Vediamo un veloce schema della dimostrazione.

Dimostrazione: traccia

- Matrice a rango pieno $Q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times m}$: $\delta_{\mathsf{fin}}(Q) + \delta_{\infty}(Q) = m \cdot \operatorname{gr} Q(\lambda)$.

Dimostrazione: traccia

- Matrice a rango pieno $Q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times m}$:
  $\delta_{\mathrm{fin}}(Q) + \delta_{\infty}(Q) = m \cdot \operatorname{gr} Q(\lambda)$.
- Matrice di grado uno $L(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$:
  $\delta_{\mathrm{fin}}(L) + \delta_{\infty}(L) + \mu(L) = \operatorname{rank}(L)$.

Dimostrazione: traccia

- Matrice a rango pieno $Q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times m}$:
  $\delta_{\text{fin}}(Q) + \delta_\infty(Q) = m \cdot \operatorname{gr} Q(\lambda)$.
- Matrice di grado uno $L(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$:
  $\delta_{\text{fin}}(L) + \delta_\infty(L) + \mu(L) = \operatorname{rank}(L)$.
- In generale $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$:
  $\delta_{\text{fin}}(P) + \delta_\infty(P) + \mu(P) = \operatorname{rank}(P) \cdot \operatorname{gr}(P)$.

Dimostrazione: traccia

- Matrice a rango pieno $Q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times m}$:
  $\delta_{\text{fin}}(Q) + \delta_{\infty}(Q) = m \cdot \text{gr}\, Q(\lambda)$.
- Matrice di grado uno $L(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$:
  $\delta_{\text{fin}}(L) + \delta_{\infty}(L) + \mu(L) = \text{rank}(L)$.
- In generale $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$:
  $\delta_{\text{fin}}(P) + \delta_{\infty}(P) + \mu(P) = \text{rank}(P) \cdot \text{gr}(P)$.
  - rank $C_1(\lambda) = \delta_{\text{fin}}(C_1) + \delta_{\infty}(C_1) + \mu(C_1) =$
    $\delta_{\text{fin}}(P) + \delta_{\infty}(P) + \mu(P) + \dim \mathcal{N}_r(P) \cdot (k-1)$

Dimostrazione: traccia

- Matrice a rango pieno $Q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times m}$:
  $\delta_{\text{fin}}(Q) + \delta_\infty(Q) = m \cdot \operatorname{gr} Q(\lambda)$.
- Matrice di grado uno $L(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times n}$:
  $\delta_{\text{fin}}(L) + \delta_\infty(L) + \mu(L) = \operatorname{rank}(L)$.
- In generale $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times n}$:
  $\delta_{\text{fin}}(P) + \delta_\infty(P) + \mu(P) = \operatorname{rank}(P) \cdot \operatorname{gr}(P)$.
  - $\operatorname{rank} C_1(\lambda) = \delta_{\text{fin}}(C_1) + \delta_\infty(C_1) + \mu(C_1) = \delta_{\text{fin}}(P) + \delta_\infty(P) + \mu(P) + \dim \mathcal{N}_r(P) \cdot (k-1)$
  - $C_1(\lambda) \sim \operatorname{diag}(P(\lambda), I_{n(k-1)}) \Rightarrow \operatorname{rank} C_1(\lambda) = \operatorname{rank} P(\lambda) + n(k-1)$

Una conseguenza importante

Teorema (Possibili gradi ℓ-ficazioni)

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times m}$ una matrice regolare di grado k:

- $Q(\lambda)$ *forte ℓ-ficazione di* $P(\lambda) \Rightarrow km = \ell s, \quad Q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{s\times s}$.

Una conseguenza importante

Teorema (Possibili gradi ℓ-ficazioni)

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times m}$ *una matrice regolare di grado* k*:*

- $Q(\lambda)$ *forte* ℓ*-ficazione di* $P(\lambda) \Rightarrow km = \ell s, \quad Q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{s\times s}$.
- $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}, \quad \ell \leq k, \quad \ell \mid km \Rightarrow \exists$ *forte* ℓ*-ficazione* $Q(\lambda)$ *di* $P(\lambda)$.

Una conseguenza importante

Teorema (Possibili gradi ℓ-ficazioni)

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m\times m}$ una matrice regolare di grado k:

- *$Q(\lambda)$ forte ℓ-ficazione di $P(\lambda) \Rightarrow km = \ell s, \quad Q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{s\times s}$.*
- *$\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}, \quad \ell \leq k, \quad \ell \mid km \Rightarrow \exists$ forte ℓ-ficazione $Q(\lambda)$ di $P(\lambda)$.*

Problema aperto: $\mathbb{F} \subsetneq \overline{\mathbb{F}}$?

$\mathcal{L}$-companion tipo Frobenius

Dato $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$ di grado $k = \ell s$, definiamo:

$$B_1(\lambda) = \lambda^\ell A_\ell + \lambda^{\ell-1} A_{\ell-1} + \cdots + A_0,$$
$$B_j(\lambda) = \lambda^\ell A_{\ell j} + \lambda^{\ell-1} A_{\ell j-1} + \cdots + \lambda A_{\ell(j-1)+1}, \quad \text{per } j = 2, \ldots, s.$$

$\mathcal{L}$-companion tipo Frobenius

Dato $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$ di grado $k = \ell s$, definiamo:

$$B_1(\lambda) = \lambda^\ell A_\ell + \lambda^{\ell-1} A_{\ell-1} + \cdots + A_0,$$
$$B_j(\lambda) = \lambda^\ell A_{\ell j} + \lambda^{\ell-1} A_{\ell j-1} + \cdots + \lambda A_{\ell(j-1)+1}, \quad \text{per } j = 2, \ldots, s.$$

Vale

$$P(\lambda) = \lambda^{\ell(s-1)} B_s(\lambda) + \lambda^{\ell(s-2)} B_{s-1}(\lambda) + \cdots + \lambda^\ell B_2(\lambda) + B_1(\lambda).$$

Possiamo ora definire le matrici *ℓ-companion tipo Frobenius* $C_1^\ell(\lambda)$ e $C_2^\ell(\lambda)$:

$\mathcal{L}$-companion tipo Frobenius

$$C_1^{\ell}(\lambda) := \begin{bmatrix} B_s(\lambda) & B_{s-1}(\lambda) & B_{s-2}(\lambda) & \cdots & B_1(\lambda) \\ -I_n & \lambda^{\ell} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ & -I_n & \lambda^{\ell} I_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & -I_n & \lambda^{\ell} I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[\lambda]^{(m+(s-1)n)\times sn}$$

$$C_2^{\ell}(\lambda) := \begin{bmatrix} B_s(\lambda) & -I_m & & & 0 \\ B_{s-1}(\lambda) & \lambda^{\ell} I_m & -I_m & & \\ B_{s-2}(\lambda) & 0 & \lambda^{\ell} I_m & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -I_m \\ B_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{\ell} I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[\lambda]^{sm\times(n+(s-1)m)}$$

Proprietà delle ℓ-companion

1. $C_1^\ell(\lambda) \asymp P(\lambda)$
2. $\varepsilon_i(C_1^\ell) = \varepsilon_i(P) + k - \ell, \qquad$ per $i = 1, \ldots, p$
3. $\eta_i(C_1^\ell) = \eta_i(P), \qquad$ per $i = 1, \ldots, q$

Concludendo

1. Generalizzazione delle matrici companion rettangolari.
2. Introduzione del concetto di ℓ-ficazione.
3. Dimostrazione dell'index sum theorem e sue conseguenze.

Un'altra ℓ-ficazione

È la vera generalizzazione delle companion di Frobenius, ma non è una forte ℓ-ficazione.

$$W_1^\ell(\lambda) := \begin{bmatrix} P_\ell(\lambda) & A_{k-\ell-1} & \cdots & A_1 & A_0 \\ -I_n & \lambda I_n & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & -I_n & \lambda I_n & 0 \\ 0 & & & -I_n & \lambda I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[\lambda]^{(m+n(k-\ell))\times n(k-\ell+1)}$$

$$W_2^\ell(\lambda) := \begin{bmatrix} P_\ell(\lambda) & -I_m & & & 0 \\ A_{k-\ell-1} & \lambda I_m & -I_m & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ A_1 & 0 & \cdots & \lambda I_m & -I_m \\ A_0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[\lambda]^{m(k-\ell+1)\times(n+m(k-\ell))}.$$

Linearizzazione classica

Definizione (Linearizzazione classica)

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{n \times n}$ un matrice di polinomi di grado k. Diciamo che una matrice $L(\lambda)$ di taglia $kn \times kn$ è una linearizzazione classica per $P(\lambda)$ se hanno la medesima struttura spettrale.

Controesempio

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ la matrice singolare $\mathrm{diag}(\lambda^2, 0)$ e siano $L_1(\lambda)$ e $L_2(\lambda)$ le due matrici pencil

$$L_1(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le due matrici hanno le dimensioni richieste, ma per questioni di rango solo $L_2(\lambda)$ è una linearizzazione forte.