Analisi degli errori per un modello di code fluide markoviane

Gian Maria Negri Porzio

8 Giugno 2016

Piano della presentazione

Il modello

Siamo interessati a fluidi che scorrono in un sistema a buffer singolo. I tassi di entrata e di uscita sono descritti da una Catena di Markov irriducibile $S(t)$ sullo spazio

$$S = \{1, 2, \ldots, M\}.$$

Il modello

Siamo interessati a fluidi che scorrono in un sistema a buffer singolo. I tassi di entrata e di uscita sono descritti da una Catena di Markov irriducibile $S(t)$ sullo spazio

$$S = \{1, 2, \dots, M\}.$$

Chiamiamo $A := (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{M \times M}$ il generatore infinitesimale di $S(t)$.

Il modello

Definiamo:

- $X(t)$ la quantità di fluido nel buffer a tempo t.
- $d(s)$ il tasso netto della variazione del fluido nello stato s.

La dinamica del processo è descritta dalle seguenti equazioni:

Il modello

Capacità del buffer infinita:

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} d(s)^+ & S(t) = s, \quad X(t) = 0 \\ d(s) & S(t) = s, \quad X(t) > 0 \end{cases}$$

Il modello

Capacità del buffer infinita:

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} d(s)^+ & S(t) = s, \quad X(t) = 0 \\ d(s) & S(t) = s, \quad X(t) > 0 \end{cases}$$

Capacità del buffer $B \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} d(s)^+ & S(t) = s, \quad X(t) = 0 \\ d(s) & S(t) = s, \quad 0 < X(t) < B \\ d(s)^- & S(t) = s, \quad X(t) = B \end{cases}$$

Alcune definizioni

- $F(s,x) := \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{S(t) = s, X(t) \leq x\}$.
- $F(x) = [F(1,x), \ldots, F(M,x)]$.
- $q(x) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{X(t) > x\} = 1 - F(x)e$.
- π vettore invariante, $\pi A = 0, \quad \pi e = 1$.
- Matrice del drift $E = \text{diag}[d(1), \ldots, d(M)]$.
- Drift $d = \langle \pi, \text{diag}\, E \rangle$.

Assunzioni

Assunzione (1)

E è invertibile, ovvero $d(s) \neq 0$ per ogni s.

Assunzione (2)

Se la capacità del buffer è infinita, allora $d < 0$.

L'equazione differenziale

Teorema

$F(x)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}E = F(x)A,$$

con $F(s,0) = 0$ se $d(s) > 0$. Se la capacità del buffer è B, si aggiunge l'ulteriore condizione $F(s,B) = \pi_s$ se $d(s) < 0$.

Spectral Divide-and-Conquer

Dato il pencil $\lambda E - A$, trovare due matrici ortonormali Q, Z tali che

$$Q^T(\lambda E - A)Z = \begin{bmatrix} \lambda E_{11} - A_{11} & \lambda E_{12} - A_{12} \\ 0 & \lambda E_{22} - A_{22} \end{bmatrix}$$

Spectral Divide-and-Conquer

Dato il pencil $\lambda E - A$, trovare due matrici ortonormali Q, Z tali che

$$Q^T(\lambda E - A)Z = \begin{bmatrix} \lambda E_{11} - A_{11} & \lambda E_{12} - A_{12} \\ 0 & \lambda E_{22} - A_{22} \end{bmatrix}$$

e che

1. lo spettro $\lambda E_{11} - A_{11} \subset \mathbb{C}^{+0}$
2. lo spettro $\lambda E_{22} - A_{22} \subset \mathbb{C}^{-}$

Additive Decomposition

Dato il pencil $\lambda E - A$, trovare due matrici U, V tali che

$$U^{-1}(\lambda E - A)V = \begin{bmatrix} \lambda E_{11} - A_{11} & 0 \\ 0 & \lambda E_{22} - A_{22} \end{bmatrix}$$

Additive Decomposition

Dato il pencil $\lambda E - A$, trovare due matrici U, V tali che

$$U^{-1}(\lambda E - A)V = \begin{bmatrix} \lambda E_{11} - A_{11} & 0 \\ 0 & \lambda E_{22} - A_{22} \end{bmatrix}$$

e che

1. lo spettro $\lambda E_{11} - A_{11} \subset \mathbb{C}^{-0}$
2. lo spettro $\lambda E_{22} - A_{22} \subset \mathbb{C}^{+}$

Capacità infinita: spettro

Consideriamo ora il caso di un buffer a capacità infinita.
Conosciamo a priori una parte della struttura spettrale dell'equazione differenziale.

Capacità infinita: spettro

Consideriamo ora il caso di un buffer a capacità infinita.
Conosciamo a priori una parte della struttura spettrale dell'equazione differenziale.

Siano S_-, S_+ gli insiemi degli stati tali che $d(s) < 0$ e $d(s) < 0$ e M_-, M_+ le rispettive cardinalità. Allora l'equazione ha M_+ autovalori in $\mathbb{C}^-$, uno all'origine e $M_- - 1$ in $\mathbb{C}^+$.

Condizioni al contorno

Traduciamo le condizioni al contorno del teorema.

1. $\lim_{x \to \infty} F(x) = \pi$.
2. Per $s \in S_+$, $F(s, 0) = 0$.

Approccio tradizionale

Un'idea molto intuitiva consiste in

1. Calcolare gli autovalori λ_i e gli autovettori sinistri ϕ_i del pencil $\lambda E - A$.
2. Normalizzare $\phi_{M_+ + 1} = \pi$.
3. $F(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i e^{\lambda_i x} \phi_i$.

Approccio tradizionale

Un'idea molto intuitiva consiste in

1. Calcolare gli autovalori λ_i e gli autovettori sinistri ϕ_i del pencil $\lambda E - A$.
2. Normalizzare $\phi_{M_+ +1} = \pi$.
3. $F(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i e^{\lambda_i x} \phi_i$.

Dalle condizioni al contorno segue:

1. $a_{M_+ +1} = 1$ e $a_i = 0$ per $i > M_+ + 1$.
2. $\sum_{i=1}^{M_+ +1} a_i \phi_{ij} = 0$ per $j \in S_+$.

Una nuova idea

1. $W(x) := F(x) - \pi$.

Una nuova idea

1. $W(x) := F(x) - \pi$.
2. Calcolo di Q, Z, estrazione di E_{11}, A_{11} e E_{22}, A_{22}.

Una nuova idea

1. $W(x) := F(x) - \pi$.
2. Calcolo di Q, Z, estrazione di E_{11}, A_{11} e E_{22}, A_{22}.
3. Definiamo $[\underbrace{u(x)}_{M_-}, \underbrace{v(x)}_{M_+}] := W(x)Q,\ Q = [L_1^T L_2^T]$.

Una nuova idea

1. $W(x) := F(x) - \pi$.
2. Calcolo di Q, Z, estrazione di E_{11}, A_{11} e E_{22}, A_{22}.
3. Definiamo $[\underbrace{u(x)}_{M_-}, \underbrace{v(x)}_{M_+}] := W(x)Q$, $Q = [L_1^T L_2^T]$.
4. $u(x) = u(0)e^{G_1 x}$, $G_1 = A_{11}E_{11}^{-1}$.

Una nuova idea

1. $W(x) := F(x) - \pi$.
2. Calcolo di Q, Z, estrazione di E_{11}, A_{11} e E_{22}, A_{22}.
3. Definiamo $[\underbrace{u(x)}_{M_-}, \underbrace{v(x)}_{M_+}] := W(x)Q$, $Q = [L_1^T L_2^T]$.
4. $u(x) = u(0)e^{G_1 x}$, $G_1 = A_{11}E_{11}^{-1}$.
5. $v(x) = u(0)e^{G_2 x}$, $G_2 = A_{22}E_{22}^{-1}$.

Una nuova idea

1. $W(x) := F(x) - \pi$.
2. Calcolo di Q, Z, estrazione di E_{11}, A_{11} e E_{22}, A_{22}.
3. Definiamo $[\underbrace{u(x)}_{M_-}, \underbrace{v(x)}_{M_+}] := W(x)Q$, $Q = [L_1^T L_2^T]$.
4. $u(x) = u(0)e^{G_1 x}$, $G_1 = A_{11}E_{11}^{-1}$.
5. $v(x) = u(0)e^{G_2 x}$, $G_2 = A_{22}E_{22}^{-1}$.
6. $u(0) = 0$ e calcolo di $v(0)$.

Una nuova idea

1. $W(x) := F(x) - \pi$.
2. Calcolo di Q, Z, estrazione di E_{11}, A_{11} e E_{22}, A_{22}.
3. Definiamo $[\underbrace{u(x)}_{M_-}, \underbrace{v(x)}_{M_+}] := W(x)Q$, $Q = [L_1^T L_2^T]$.
4. $u(x) = u(0)e^{G_1 x}$, $G_1 = A_{11}E_{11}^{-1}$.
5. $v(x) = u(0)e^{G_2 x}$, $G_2 = A_{22}E_{22}^{-1}$.
6. $u(0) = 0$ e calcolo di $v(0)$.
7. $W(x) = v(0)e^{G_2 x}L_2$.

Capacità finita: spettro

La struttura spettrale cambia leggermente quando la capacità del buffer è finita.

Capacità finita: spettro

La struttura spettrale cambia leggermente quando la capacità del buffer è finita.
Siano n gli autovalori con parte reale negativa, p gli autovalori con parte reale positiva, allora

	$d < 0$	$d > 0$
n	M_+	$M_+ - 1$
p	$M_- - 1$	M_-

Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno non differiscono troppo dal caso di capacità infinita:

1. Per $s \in S_-$, $F(s, B) = \pi_s$
2. Per $s \in S_+$, $F(s, 0) = 0$

Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno non differiscono troppo dal caso di capacità infinita:

1. Per $s \in S_-$, $F(s, B) = \pi_s$
2. Per $s \in S_+$, $F(s, 0) = 0$

In analogia col caso infinito, possiamo ottenere:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i e^{\lambda_i x} \phi_i.$$

Approccio tradizionale

I coefficienti a_i della soluzione tradizionale soddisfano:

$$F(s,B) = \pi_s \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{M} a_i e^{\lambda_i B} \phi_{ij} = \pi_j, \qquad j \in S_-$$

$$F(s,0) = 0 \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{M} a_i \phi_{ij} = 0, \qquad j \in S_+$$

Approccio tradizionale

I coefficienti a_i della soluzione tradizionale soddisfano:

$$F(s,B) = \pi_s \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{M} a_i e^{\lambda_i B} \phi_{ij} = \pi_j, \qquad j \in S_-$$

$$F(s,0) = 0 \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{M} a_i \phi_{ij} = 0, \qquad j \in S_+$$

Osservazione

Il sistema associato agli a_i è molto mal condizionato per la presenza di termini esponenziali di segno opposto.

L'algoritmo FB

Calcoliamo le matrici U, V tali che:

$$U^{-1}EV = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & E_{22} \end{bmatrix}, \quad U^{-1}AV = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

L'algoritmo FB

Calcoliamo le matrici U, V tali che:

$$U^{-1}EV = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & E_{22} \end{bmatrix}, \quad U^{-1}AV = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

1. I blocchi hanno taglia rispettivamente $1, n, p$.
2. Gli spettri di $\lambda E_{11} - A_{11}$ e $\lambda E_{22} - A_{22}$ sono contenuti in $\mathbb{C}^-$ e $\mathbb{C}^+$

L'algoritmo FB

Definiamo

$$F(x) = t(x)\underbrace{L_1}_{1} + u(x)\underbrace{L_2}_{n} + v(x)\underbrace{L_p}_{p}, \quad \text{dove } U^{-1} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

L'algoritmo FB

Definiamo

$$F(x) = t(x)\underbrace{L_1}_{1} + u(x)\underbrace{L_2}_{n} + v(x)\underbrace{L_p}_{p}, \quad \text{dove } U^{-1} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

Segue facilmente che

$$\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}E_{11} = u(x)A_{11}, \qquad \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}E_{22} = v(x)A_{22},$$
$$\frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

L'algoritmo FB

Siano $G_1 = A_{11}E_{11}^{-1}$, $G_2 = A_{22}E_{22}^{-1}$. Ricaviamo

$$\begin{aligned} F(x) &= cL_1 + u(0)e^{G_1 x}L2 + v(0)e^{G_2 x}L_3 \\ &= cL_1 + u(0)e^{G_1 x}L2 + v(B)e^{-G_2(B-x)}L_3 \end{aligned}$$

L'algoritmo FB

Siano $G_1 = A_{11}E_{11}^{-1}$, $G_2 = A_{22}E_{22}^{-1}$. Ricaviamo

$$\begin{aligned} F(x) &= cL_1 + u(0)e^{G_1 x}L2 + v(0)e^{G_2 x}L_3 \\ &= cL_1 + u(0)e^{G_1 x}L2 + v(B)e^{-G_2(B-x)}L_3 \end{aligned}$$

Osservazione

Scegliere $v(B)$ invece di $v(0)$ permette di ottenere un sistema ben condizionato.

Calcolo dei coefficienti

Costruiamo le matrici di permutazione $T \in \mathbb{R}^{M \times M_+}$ e $N \in \mathbb{R}^{M \times M_-}$ tali che

$$ET = E^+, \qquad EN = E^-$$

Calcolo dei coefficienti

Costruiamo le matrici di permutazione $T \in \mathbb{R}^{M \times M_+}$ e $N \in \mathbb{R}^{M \times M_-}$ tali che

$$ET = E^+, \qquad EN = E^-$$

Siano $\bar{L}_i = L_i T$ e $\tilde{L}_i = L_i N$. Le condizioni al contorno si leggono:

$$\begin{aligned}
[0 \ \dots \ 0] &= c\bar{L}_1 + u(0)\bar{L}_2 + v(B)e^{-G_2 B}\bar{L}_3 \\
\pi N &= c\tilde{L}_1 + u(0)e^{G_1 B}\tilde{L}_2 + v(B)\tilde{L}_3
\end{aligned}$$

Calcolo dei coefficienti

Otteniamo infine il sistema:

$$[0\ \pi N] = [c\ u(0)\ v(B)] \begin{bmatrix} \bar{L}_1 & \tilde{L}_1 \\ \bar{L}_2 & e^{G_1 B}\tilde{L}_2 \\ e^{-G_2 B}\bar{L}_3 & \tilde{L}_3 \end{bmatrix}$$

Osservazione

I termini esponenziali hanno autovalori con parte reale negativa, dunque il sistema è ben condizionato.

Errori considerati

Per valutare la stabilità del metodo abbiamo valutato le quantità

$$\varepsilon_\infty := \left\| [F(0)T, F'(0)E - F(0)A] \right\|_1$$
$$\varepsilon_{\text{fin}} := \left\| [F(0)T, F'(0)E - F(0)A, F(B)N - \pi N, F'(B)E - F(B)A] \right\|_1$$

Tutti gli algoritmi sono stati implementati con Julia 0.4.5.

Casi esaminati

Abbiamo analizzato tre diversi scenari:

1. A tridiagonale Toeplitz $[0.7 \quad -0.8 \; 0.1]$

Casi esaminati

Abbiamo analizzato tre diversi scenari:

1. A tridiagonale Toeplitz $[0.7\ \ -0.8\ 0.1]$
2. A =

$$\begin{bmatrix} -\lambda^{-1} & \lambda^{-1} & & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\lambda^{-2}) & \lambda^{-2} & \\ & \ddots & \ddots & \lambda^{-(n-1)} \\ 0 & & \lambda^{n-1} & -\lambda^{n-1} \end{bmatrix}$$

Casi esaminati

Abbiamo analizzato tre diversi scenari:

1. A tridiagonale Toeplitz $[0.7 \ -0.8\ 0.1]$
2. $A =$

$$\begin{bmatrix} -\lambda^{-1} & \lambda^{-1} & & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\lambda^{-2}) & \lambda^{-2} & \\ & \ddots & \ddots & \lambda^{-(n-1)} \\ 0 & & \lambda^{n-1} & -\lambda^{n-1} \end{bmatrix}$$

3. A uniformemente distribuita in $[0, 1]$.

Figura: Capacità infinita, errore ε_∞ al variare della dimensione dello spazio.

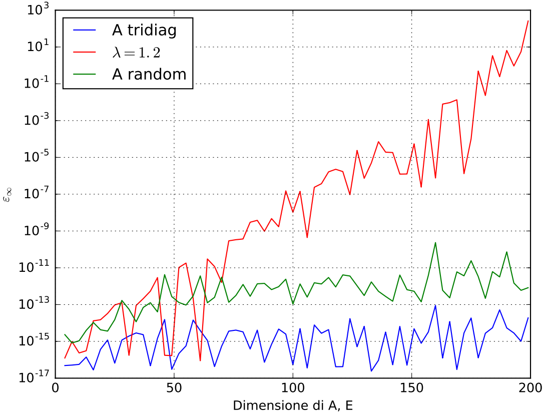
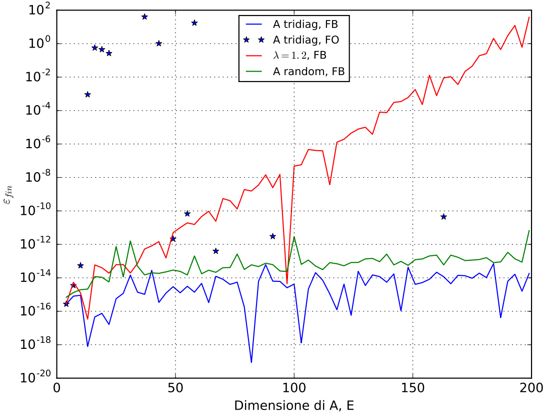


Figura: Capacità finita, errore ε_{fin} al variare della dimensione dello spazio.



Variazione del drift

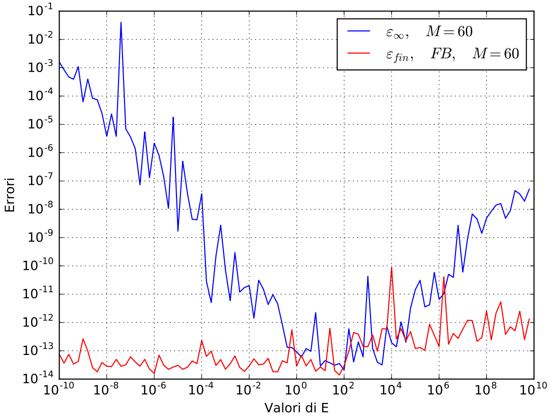
Abbiamo anche analizzato come si comporta questo metodo modificando i valori di E, la matrice del drift.

Variazione del drift

Abbiamo anche analizzato come si comporta questo metodo modificando i valori di E, la matrice del drift.

In questo modo influenziamo gli autovalori del pencil $\lambda E - A$ e il drift $d = \langle \pi, \operatorname{diag} E \rangle$

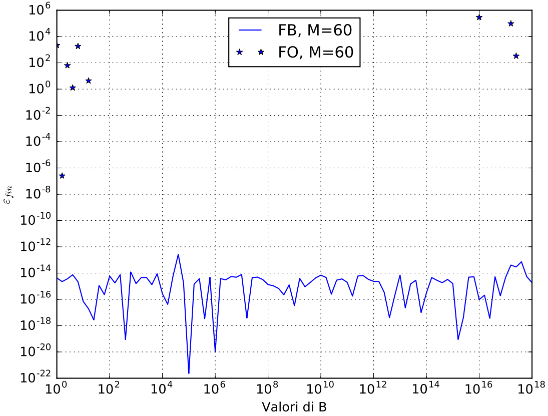
Figura: Errori al variare del drift $d = \langle \pi, \mathrm{diag}\, E \rangle$, A random.



Variazione della capacità del buffer

L'ultima sperimentazione riguarda il parametro B, ovvero la capacità del buffer nel caso finito.

Figura: Errore ε_{fin} al variare della capacità del buffer, A random.



Considerazioni finali

- Abbiamo descritto un algoritmo stabile per un modello di coda per fluidi.

Considerazioni finali

- Abbiamo descritto un algoritmo stabile per un modello di coda per fluidi.
- Nel caso finito la stabilità si preserva anche in situazioni estreme.

Considerazioni finali

- Abbiamo descritto un algoritmo stabile per un modello di coda per fluidi.
- Nel caso finito la stabilità si preserva anche in situazioni estreme.
- Non è stato testato su dati reali.

Considerazioni finali

- Abbiamo descritto un algoritmo stabile per un modello di coda per fluidi.
- Nel caso finito la stabilità si preserva anche in situazioni estreme.
- Non è stato testato su dati reali.
- Si potrebbero ottenere ulteriori incrementi della precisione migliorando SDC e AD.