Brevi appunti sull'approsimazione uniforme di funzioni continue e teorema di Stone-Weierstrass

Gian Maria Negri Porzio

8 luglio 2014

1 Teorema di Stone-Weierstrass

1.1 Introduzione

In questi brevi appunti dimostreremo un importante risultato sull'approsimazione di funzioni continue, il teorema di Stone-Weierstrass. Di questo daremo tre dimostrazioni: due per il caso reale e una per uno spazio topologico in generale.

1.2 Teorema di Stone-Weierstrass su $\mathbb{R}$

Iniziamo con una definizione.

Definizione 1 (Polinomi di Bernstein). *Data una funzione $f \in C^0([0,1])$ indichiamo con $B_n f \in \mathbb{R}[x]$ il polinomio di bernstein di grado n, definito come:*

$$B_n f(x) \colon = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big) x^k (1-x)^{n-k}$$

Sarà utile per le dimostrazioni successive calcolare $B_n x^i$ per $i \in \{0, 1, 2\}$.
Per $i = 0$ otteniamo:

$$B_n 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1. \tag{1}$$

Per $i = 1$:

$$\begin{aligned} B_n x &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{k}{n}\Big) x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} = x. \end{aligned} \tag{2}$$

Per $i = 2$:

$$\begin{aligned} B_n x^2 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{k^2}{n^2}\Big) x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{k}{n^2}\Big) x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{k(k-1)}{n^2}\Big) x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \frac{x}{n} + \frac{(n-1)x^2}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} = \\ &= \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} x^2 = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Teorema 1 (Stone-Weierstrass). *Le funzioni polinomiali su $[a, b]$ sono dense rispetto alla norma infinito $\|\cdot\|_\infty$ in $C^0([a, b], \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Senza perdità di generalità possiamo considerare f definita su $[0,1]$. Affermo che:

$$B_n f \to f, \qquad n \to \infty$$

Infatti, detto ω il modulo di continuitá di f, vale $\forall \lambda > 0$ e $\forall x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
&\|B_n f(x) - f(x)\|_\infty = \|B_n f(x) - B_n 1 \cdot f(x)\|_\infty = \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|f\big(k/n\big) - f(x)\|_\infty x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \sum_{|k/n - x| < \lambda}^{n} \binom{n}{k} \|f\big(k/n\big) - f(x)\|_\infty x^k (1-x)^{n-k} + \\
&+ \sum_{|k/n - x| \geq \lambda}^{n} \binom{n}{k} \|f\big(k/n\big) - f(x)\|_\infty x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned} \tag{4}$$

Possiamo maggiorare la prima sommatoria con $\omega(\lambda)$. Invece per la seconda vale:

$$\begin{aligned}
&\sum_{|k/n - x| \geq \lambda}^{n} \binom{n}{k} \|f\big(k/n\big) - f(x)\|_\infty x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
&\leq 2\|f\|_\infty \sum_{|k/n - x| \geq \lambda}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&\leq 2\|f\|_\infty \lambda^{-2} \sum_{|k/n - x| \geq \lambda}^{n} \binom{n}{k} \big(\frac{k}{n} - x\big)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= 2\|f\|_\infty \lambda^{-2} \big(B_n x^2 - 2x B_n x + x^2 B_n 1\big) = \frac{2\|f\|_\infty x(1-x)}{\lambda^2 n}
\end{aligned} \tag{5}$$

in quanto abbiamo già calcolato quei polinomi di Bernstein. Dunque:

$$\|B_n f(x) - f(x)\|_\infty \leq \omega(\lambda) + \frac{2\|f\|_\infty x(1-x)}{\lambda^2 n}$$

e, per arbitrarietà di λ e continuità di w, ricaviamo finalmente:

$$\limsup_{n \to \infty} \|B_n f(x) - f(x)\|_\infty = 0$$

come desideravamo.

□

Diamo ora la dimostrazione di un teorema più generale, dovuto a Korovkin, da cui Stone-Weierstrass segue facilmente.

Teorema 2 (Korovkin)**.** *Siano $L_n \colon C^0(K, \mathbb{R}) \to C^0(K, \mathbb{R})$ operatori lineari definiti positivi, dove $K \subset \mathbb{R}$ è un sottoinsieme compatto. Se la successione $(L_n x^i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a x^i per $i \in \{0, 1, 2\}$, allora $(L_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f per qualsiasi $f \in C^0(K, \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Per linearità degli L_n, $L_n P \to P$ per ogni P polinomio quadratico. Sia f una funzione continua; per il teorema di Heine-Cantor questa ammette un modulo di continuità ω ed è uniformemente continua. Dunque per ogni punto x del dominio esistono p_x e q_x due funzioni polinomiali di secondo grado tali che:

$$p_x(x) < f(x) + \epsilon, \quad q_(x) > f(x) - \epsilon$$

e

$$p_x(y) > f(y), \quad q_x(y) < f(y) \qquad \forall y \in K \setminus \{x\}$$

Inoltre in ogni punto x_0 esiste un intorno U_{x_0} in cui per ogni $t \in U_{x_0}$ vale:

$$p_x(t) - 2\epsilon < f(t) < q_x(t) - 2\epsilon$$

Per la compattezza di K esiste una sottofamiglia finita di aperti U_{x_j}, $j \in J$ che lo ricoprono. Quindi ricaviamo:

$$\max_{j \in J} q_{x_j} < f < \min_{j \in J} p_{x_j}$$

e conseguentemente:

$$\|\max_{j \in J} q_{x_j} - \min_{j \in J} p_{x_j}\|_\infty < 4\epsilon \tag{6}$$

Per la positività degli L_n segue che per ogni $j \in J$:

$$L_n q_{x_j} < L_n f < L_n p_{x_j}$$

e, fissato δ, per ogni n maggiore di un certo N:

$$q_{x_j} - \delta < L_n f < p_{x_j} + \delta$$

Sostituendo p_{x_j} grazie alla 6:

$$q_{x_j} - \delta < L_n f < q_{x_j} + 4\epsilon + \delta \tag{7}$$

La tesi segue dall'arbitrarietà di ϵ e δ.

□

1.3 Teorema di Stone-Weierstrass per uno spazio topologico di Hausdorff

Anche in questo caso conviene iniziare con alcune definizioni.

Notazione 1. *Indichiamo con* $\mathbb{R}^S$ *l'insieme delle funzioni dall'insieme* S *a* $\mathbb{R}$*, mentre con* $f \vee g$ *e rispettivamente* $f \wedge g$ *le applicazioni* $\max\{f(x), g(x)\}$ *e* $\min\{f(x), g(x)\}$.

Definizione 2 (Algebra di funzioni)**.** *Un'algebra di funzioni su* S *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^S$ *chiuso rispetto al prodotto.*

Definizione 3 (Reticolo)**.** *Un reticolo* R *di funzioni su* S *è un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^S$ *chiuso per le operazioni di massimo e minimo.*

Una piccola osservazione. Dati due numeri reali a e b possiamo scrivere $a+b=\max\{a,b\}+\min\{a,b\}$ e $|a-b|=\max\{a,b\}-\min\{a,b\}$. Dunque:

$$f\vee g(x)=\frac{f+g+|f-g|}{2}$$

e

$$f\wedge g(x)=\frac{f+g-|f-g|}{2}$$

Abbiamo dimostrato la

Proposizione 1. *Un sottospazio vettoriale R di $\mathbb{R}^S$ è un reticolo se e solo se $f\in R$ implica $|f|\in R$.*

Definizione 4 (Algebra separante)**.** *Un'algebra $\mathcal{F}\subseteq\mathbb{R}^S$ si dice separante se per ogni coppia di punti x, y in S esiste una funzione $f\in\mathcal{F}$ tale che $f(x)\neq f(y)$.*

Possiamo ora enunciare il teorema di Stone-Weierstrass nella sua generalità. Per non appesantire eccessivamente la notazione poniamo $C^0(X,\mathbb{R})=C(X)$.

Teorema 3 (Stone-Weierstrass, versione topoplogica)**.** *Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff contenente almeno due punti e A un'algebra separante di funzioni continue da X in $\mathbb{R}$. Allora vale una e una sola delle seguenti affermazioni:*

1. *$\bar{A}=C(X)$, ovvero A è denso in $C(X)$*
2. *Esiste $x_0\in X$ per cui $\bar{A}=\{f\in C(X)\colon f(x_0)=0\}$*

La tesi seguirà da alcuni lemmi che dimostrano fatti di per loro interessanti. Se non diversamente specificato X è uno spazio topologico compatto di Hausdorff.

Lemma 1. *Un ideale di $C(X)$ è massimale se e solo se è nella forma*
$M_{\bar{x}}=\{f\in C(X)\colon f(\bar{x})=0\}$

Dimostrazione. $\Leftarrow$) Una via elegante consiste nel considerare l'omomorfismo di valutazione:

$$\begin{array}{rccc}\pi_{\bar{x}}\colon & C(X) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & f & \longrightarrow & f(\bar{x})\end{array}$$

e osservare che $M_{\bar{x}}$ coincide con il suo nucleo, concludendo con il teorema di omormofismo di anelli.
$\Rightarrow$) Sia I il nostro ideale massimale e supponiamo per assurdo che per ogni $x\in X$ esista una f_x per cui $f_x(x)\neq 0$. Senza perdere generalità poniamo $f_x(x)>0$. Per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno U_x in cui f è strettamente positiva. Gli U_x sono un ricoprimento aperto di X, e per compattezza di X possiamo estrarvi un sottoricoprimento finito $\{U_{x_1},...,U_{x_n}\}$: dette $f_1,\dots,f_n$ le funzioni a questi corrispondenti la mappa:

$$f=f_1+\cdots+f_n$$

risulta ben definita e strettamente positiva, dunque è un'unità dell'anello, da cui $I=C(X)$, assurdo. $\square$

Lemma 2. *Sia X uno spazio compatto T2 e R un'algebra*

1. *di funzioni limitate,*
2. *chiusa rispetto alla norma uniforme in $C(X)$*

Allora R è un reticolo.

Dimostrazione. Utilizzeremo l'equivalenza della proposizione 1. Consideriamo $f \in R$: senza perdere generalità possiamo supporre $\|f\|_\infty \leq 1$, poichè $|f|= \frac{|f|}{\|f\|_\infty} \cdot \|f\|_\infty$. Sia $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di polinomi uniformemente convergente a $g(x)\colon = \sqrt{x}$ da $[0,1]$ in sé. Affermo che $p_n \circ f^2 \in R$ e che $p_n \circ f^2 \to |f|$ in norma uniforme. Difatti:

$$\|p_n \circ f^2 - |f|\|_\infty = \sup_{x\in X} \left|p_n(f^2(x)) - |f(x)|\right| \leq$$
$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \left|p_n(t) - \sqrt{t}\right| = \|p_n - g\|_\infty$$

e per ipotesi R è chiusa in norma uniforme, dunque $|f|\in R$, come volevamo. □

Lemma 3. *Sia X uno spazio compatto T2 e R un reticolo di funzioni continue tale che ogni problema di interpolazione tra due punti ammette soluzione.* * *Allora R è denso in norma uniforme in $C(X)$*

Dimostrazione. Questa dimostrazione è un'astrazione di quella presentata per il teorema 2 (Korovkin). Data $f \in C(X)$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$, per ogni $x \in X$ vogliamo trovare una funzione $p_x \in R$ tale che $p(\cdot) \geq f(\cdot)$ e $p_x(x) \leq f(x) + \epsilon$. Per fare questo consideriamo per ogni $y \in X$ le funzioni definite da $p_{xy}(x) \leq f(x) + \epsilon$ e $p_{xy}(y) > f(y)$. Per la continuità delle p_{xy} esistono degli intorni $(U_{y_i})_{i\in I}$ che ricoprono X in cui $p_{xy_i}(\cdot) > f(\cdot)$ e $p_{xy_i}(x) \leq f(x) + \epsilon$; per l'ipotesi di compattezza possiamo estrarne un sottoricoprimento finito $U_{y_j}, j \in \{1, 2 \ldots n\}$. Dunque:

$$p_x(\cdot) := \max_{h\in J} p_{xy_j}$$

è ben definita e rispetta le condizioni che avevamo richiesto. Ora siamo nelle condizioni dell'enunciato del teorema di Korovkin e, ripercorrendo gli stessi passi di quella dimostrazione, costruiamo $p(\cdot) \in R$ tale che $f(\cdot) \leq p(\cdot) \leq f(\cdot) + \epsilon$. Dunque $\|f - p\|_\infty \leq \epsilon$, ovvero $f \in \bar{R}$, come da tesi. □

Lemma 4. *Sia $V \subseteq \mathbb{R}^2$ una sottoalgebra rispetto alle operazioni coordinata per coordinata, cioè (a, b) e $(c, d) \in V$ implica $(ac, bd) \in V$. Allora V può solamente essere:*

1. $\{0\}$
2. $\{0\} \times \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{R} \times \{0\}$
3. $\Delta := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a = b\}$
4. $\mathbb{R}^2$

* $\forall x, y \in X, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists f \in R\colon f(x) = a, f(y) = b$

Dimostrazione. Chiaramente gli spazi $1, 2, 3$ verificano le proprietà delle ipotesi. Altrimenti esiste in V un elemento (a, b) tale che $ab \neq 0$ e (a, b) e (a^2, b^2) linearmente indipendenti, in quanto il determinante della matrice associata $ab(b - a) \neq 0$ per le nostre ipotesi. Dunque $\mathbb{R}^2 = \langle (a, b), (a^2, b^2) \rangle \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^2$. □

Ora possiamo dimostrare Stone-Weierstrass, di cui, per chiarezza, riscriviamo l'enunciato:

Teorema 4. *Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff contenente almeno due punti e A un'algebra separante di funzioni continue da X in $\mathbb{R}$. Allora vale una e una sola delle seguenti affermazioni:*

1. *$\bar{A} = C(X)$, ovvero A è denso in $C(X)$*
2. *Esiste $x_0 \in X$ per cui $\bar{A} = \{f \in C(X) \colon f(x_0) = 0\}$*

Dimostrazione. Sia X il nostro spazio topologico come da ipotesi e A l'algebra separante contenuta in $C(X)$. Per semplicità di notazione supponiamo che A sia chiusa in norma infinito. Dunque per il lemma 2 A è un reticolo. Dividiamo la dimostrazione in due casi.
1) Per ogni $x \in X$ esiste una funzione $f \in A$ tale che $f(x) \neq 0$. Affermo che $A = X$, in quanto ci basta vericare le ipotesi del lemma 3. Sia $S = \{x, y\} \subset X$ contenente solo due elementi distinti: l'insieme $A_{|S} = \{(f(x), f(y)) \colon f \in A\}$ rispetta le ipotesi del lemma 4 e:

1. $A_{|S} \neq \{(0, 0)\}$ in quanto abbiamo richiesto che le funzioni non abbiamo zeri in comune.
2. $A_{|S} \neq \{\text{costanti}\}$ in quanto per ipotesi l'algebra è separante.

Perciò $A_{|S} \simeq \mathbb{R}^2$, come volevamo.
2) Esiste $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$ per ogni $f \in A$.
Affermo che $A = M_{\bar{x}} = \{f \in C(X) \colon f(\bar{x}) = 0\}$. Un contenimento è triviale, per l'altro consideriamo $A' := A \cup \mathbb{R}$, dove con $\mathbb{R}$ indichiamo le funzioni costanti. Si verifica che A' è un'algebra ed è separante perché contiene A, quindi densa. Dunque per ogni $f \in M_{\bar{x}}$ esistono $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tali che:

$$g_n + c_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$$

ma da $f(\bar{x}) = 0$ segue che $c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ e quindi:

$$g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$$

da cui $M_{\bar{x}} \subseteq \bar{A} = A \subseteq M_{\bar{x}}$, come volevasi dimostrare. □

1.4 Una piccola e veloce generalizzazione

Prima di concludere vorremmo aggiungere ancora qualcosa. Cosa potremmo dire nel caso in cui l'algebra A non goda dell'ipotesi di *separabilità*?
Come in molti altri contesti matematici cerchiamo di ricondurci alla situazione precedente. Dati X uno spazio topologico compatto e A un'algebra di funzioni

continue da X in $\mathbb{R}$ possiamo considerare la seguente relazione di equivalenza su X:

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y) \quad \forall f \in A$$

Si verica facilmente che quanto scritto è ben definito. Sia ora $Y := X/\sim$ e q la mappa di proiezione da X in Y:

1. È compatto perché quoziente di uno spazio compatto.
2. È T2: per ogni coppia di punti $(s,t) \in X$ che non soddisfano le ipotesi di Hausdorff si avrà $f(s) = f(t) \quad \forall f \in A$, poichè $A \subseteq C(X,\mathbb{R})$. Dunque $q(s) = q(t)$. †

Consideriamo qundi il diagramma di funzioni:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ Y & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

È commutativo per come è stata definita la relazione d'equivalenza e l'algebra $\mathcal{A} = \{g \in C(Y,\mathbb{R}) \mid g \circ q \in A\}$ è separante. Si verifica inoltre che la funzione:

$$\begin{array}{cccc} \Phi\colon & C(Y,\mathbb{R}) & \longrightarrow & C(X,\mathbb{R}) \\ & g & \longrightarrow & g \circ q \end{array} \tag{8}$$

è un'isometria rispetto alla distanza indotta dalla norma uniforme: ne segue che se A è chiusa in norma uniforme, allora anche $\mathcal{A} = \Phi^{-1}(A)$ lo è.
Per Y e $\mathcal{A}$ valgono le ipotesi di Stone-Weierstrass e ci siamo quindi ricondotti al caso precedente, come volevamo.

Esempio. *Sia X un intervallo $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ e A la famiglia dei polinomi che si annulla nei punti distinti $x_1 \dots x_n$. A non è separante, ma se come prima definiamo $Y = X/\{x_1 \dots x_n\}$ e $\mathcal{A}$ l'algebra indotta da A ricaviamo che $\mathcal{A}$ è densa in $C(Y,\mathbb{R})$.*

†Si noti che non viene richiesto che X sia di Hausdorff