Un paio di esempi su serie e successioni di funzioni

29 novembre 2010

1 Successione di funzioni

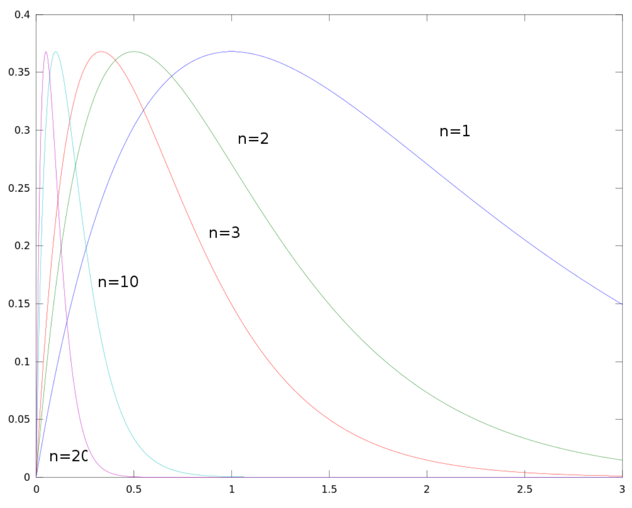
Ricordiamo innanzitutto un po' di definizioni.

Definizione 1. Una **successione di funzioni** è una corrispondenza che associa ad ogni numero intero $\mathbb{N}$ un funzione appartenente ad un determinato spazio funzionale. Indicheremo con $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni.

Un esempio di successione di funzioni che studieremo poi più in dettaglio è la seguente:

$$f_n(x) = nx \cdot e^{-nx}. \tag{1}$$

Questa scrittura non indica una funzione, ma una famiglia di funzioni che variano al variare dell'intero n. In figura potete trovare disegnati i grafici di alcuni elementi della successione; disegniamo i valori $n = 1, 2, 3, 10, 20$.



La domanda naturale che ci facciamo è la solita, possiamo dire qualcosa del comportamento della successione di funzioni per n che va a $+\infty$? Il problema ora è che mentre abbiamo una serie di strumenti molto potenti per lo studio dei limiti di successioni numeriche in spazi vettoriali di dimensione finita, al momento non abbiamo strumenti per studiare una successione di funzioni. Non abbiamo neppure chiara quale sia la definizione di limite di una successione di funzioni; le questioni che si pongono sono molte. La prima è che, prescindendo da ipotesi aggiuntive, ogni funzione definita su un intervallo è governata da un numero infinito di parametri, uno per ogni punto dell'intervallo. È quindi naturale cercare di studiare il comportamento della successione di funzioni punto per punto.

Definizione 2. Sia x_0 un punto dell'intervallo di definizione di una successione di funzioni (l'intersezione di tutti gli intervalli di definizione della successione); sia ora $\{f_n(x_0)\}$ la successione *numerica* ottenuta valutando ciascuna delle funzioni della nostra successione in x_0. Diremo che $\{f_n\}$ converge puntualmente in x_0 se converge la successione numerica $\{f_n(x_0)\}$.

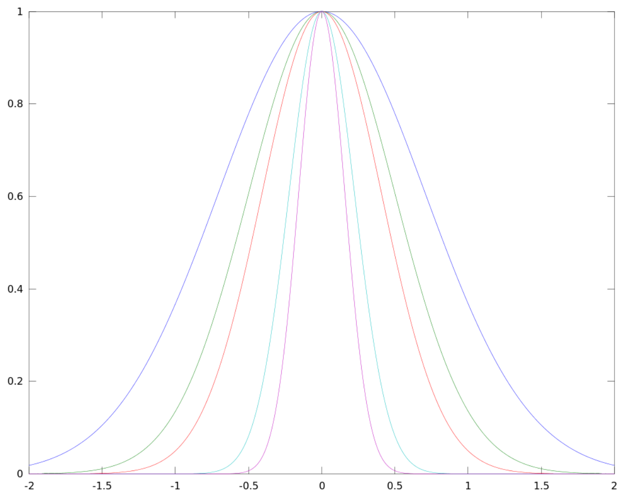
Studiamo la convergenza puntuale di (1) per $x_0 > 0$. Fissato x_0 studiamo dunque il limite della successione numerica $nx_0 \cdot e^{-nx_0}$.

$$\lim_{n\to+\infty} nx_0 \cdot e^{-nx_0} = x_0 \lim_{n\to+\infty} n(e^{x_0})^{-n} = 0.$$

Quindi, per ogni $x_0 > 0$ la successione di funzioni converge puntualmente a 0. Valutiamo ora la successione di funzione in 0; lì $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per ogni x in $[0, +\infty)$ la successione converge puntualmente a 0. Un grosso problema, però, quando si parla di convergenza puntuale è il fatto che la convergenza puntuale non rispetta alcune proprietà fondamentali della funzioni. Ad esempio, funzioni continue possono convergere puntualmente a funzioni discontinue; prendiamo ad esempio la successione di funzioni

$$g_n(x) = e^{-nx^2}; \tag{2}$$

in figura sono rappresentati i grafici per $n = 1, 2, 3, 10, 20$.



Se ne calcoliamo ora il limite puntuale vediamo che è la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Vogliamo che il nostro concetto di limite conservi tutta una serie di proprietà come la continuità e la derivabilità. La risposta a queste questioni è la nozione di convergenza uniforme.

Definizione 3. Diremo che una successione di funzioni $\{f_n\}$ **converge uniformemente** ad una funzione limite f su un intervallo I se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Sviscieriamo un po' questa definizione: la prima cosa che possiamo notare è che mentre la convergenza puntuale è una proprietà che può essere vera per un punto ma non per i punti vicini, la convergenza uniforme è una proprietà globale della successione di funzioni su tutto l'intervallo I. La seconda cosa che possiamo notare è che anche in questo caso ci siamo ricondotti al caso delle successioni numeriche. Se infatti definiamo

$$s_n := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

la successione degli s_n è una successione numerica; la convergenza uniforme è equivalente al fatto che questa successione converga a 0. La terza cosa che possiamo notare è che per ogni x_0 in I

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

e quindi se una serie converge uniformemente converge anche puntualmente. Se f è la funzione limite data dalla convergenza uniforme per il teorema di unicità del limite vediamo che questa è la funzione limite data dalla convergenza puntuale. Questo ci da un "metodo" per studiare la convergenza uniforme; studiamo prima di tutto la convergenza puntuale, questa ci darà una funzione candidata per studiare la convergenza uniforme. Proviamo a studiare la convergenza uniforme della serie (1) sull'intervallo $[0, +\infty)$; dalla convergenza puntuale abbiamo che la funzione candidata è la funzione costante uguale a 0. Innanzitutto possiamo notare che per ogni n abbiamo che $f_n(x) \geq 0$ per $x \geq 0$. Per ogni n deriviamo le f_n, ottenendo

$$f_n'(x) = -n(nx-1)e^{-nx};$$

il segno di questa derivata è positivo se $x < 1/n$ e negativo da $1/n$ in poi; inoltre il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Abbiamo quindi che per ogni n

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e}.$$

Chiaramente,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e},$$

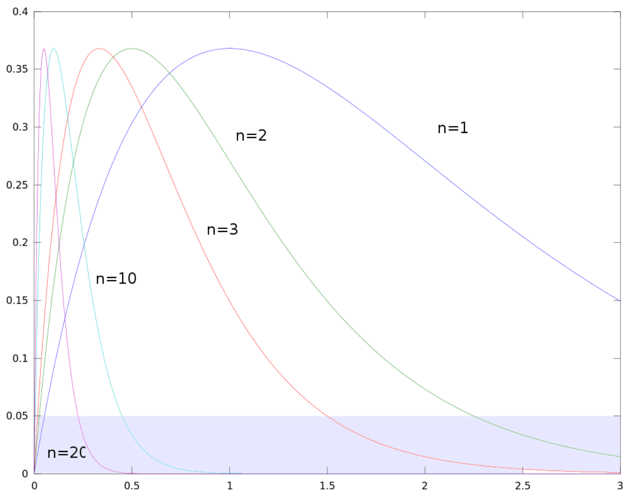
quindi la successione non converge uniformemente su $[0, +\infty)$. Studiamo ora la convergenza uniforme su un insieme più piccolo; scegliamo un numero $r > 0$ e studiamo la convergenza uniforme su $[r, +\infty)$. La cosa che possiamo notare è che, per quanto r sia piccolo, esiste un $N > 0$ tale che per ogni $n > N$ abbiamo che $1/n < r$. Quindi, per $n > N$ abbiamo che le funzioni f_n sono decrescenti nell'intervallo $[r, +\infty)$ e quindi, sempre per $n > N$:

$$\sup_{x \in [r,+\infty)} |f_n(x) - 0| = f_n(r) = nr \cdot e^{-nr}.$$

Abbiamo quindi che la successione dei sup, si comporta (è asintotica, è definitivamente...) come la successione numerica $\{nr \cdot e^{-nr}\}_n$; poiché

$$\lim_{n \to +\infty} nr \cdot e^{-nr} = 0$$

abbiamo che per qualsiasi $r > 0$ la successione di funzioni delle f_n converge uniformemente su $[r, +\infty)$. Torniamo ora alla definizione di convergenza uniforme; un'altra interpretazione che possiamo darne è che, fissato un $\epsilon > 0$ esiste un $N > 0$ tale che per ogni $n > 0$la distanza massima tra la funzione candidato e la funzione f_n è più piccola di ϵ (il sup della differenza misura proprio questa distanza). Questo significa che per $n > N$ il grafico della funzione sopra l'intervallo dove stiamo facendo il sup è contenuto in un tubo di raggio ϵ. Ad esempio, se fissiamo $\epsilon = 0.05$ ed $r = 2$, dalla figura che segue potete notare che già per da $N = 3$ in poi le funzioni stanno in un tubicino di raggio 0.05. Se ad esempio scegliamo $r = 0.5$ vediamo che da $N = 10$ in poi le funzioni stanno nel tubicino. L'ostruzione alla convergenza uniforme su tutta la semiretta positiva è quella serie di picchi ad altezza costante che si muove verso lo 0; per quanto io scelga n grande, sulla semiretta positiva, qualsiasi funzione della mia successione ha un picco ad altezza costante che non posso schiacciare nel tubicino.



2 Serie di funzioni

Definizione 4. Data una successione di funzioni $\{f_n\}$ la **serie di funzioni** ad esse associata è (formalmente)

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f_i.$$

Ricordiamoci un attimo come avevamo studiato le serie numeriche; avevamo definito la successione delle somme parziali; facciamo lo stesso con le serie di funzioni:

$$s_k = \sum_{i=0}^{k} f_i.$$

La successione $\{s_k\}$ è una successione di funzioni e possiamo utilizzare gli strumenti sviluppati nella sezione precedente per studiarne il comportamento. Diremo quindi che la serie di funzioni converge puntualmente se converge puntualmente la successione delle sue somme parziali e converge uniformemente su un intervallo I se converge uniformemente sull'intervallo I la successione delle sue somme parziali. La prima cosa che possiamo notare è la seguente; perché vi sia convergenza puntuale di questa serie in un punto x è condizione necessaria che $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Infatti, quando studiamo la convergenza puntuale stiamo a tutti gli effetti studiando delle serie numeriche e condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica è che il termine generale tenda a 0 per n che tende a $+\infty$. Per completezza ricordiamo, in modo informale, alcuni criteri di convergenza delle *serie numeriche.*

Proposizione 1 (Criteri di convergenza per le serie numeriche)**.** *I seguenti risultati sono veri per serie a termini positivi:*

1. *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni numeriche tali che esista un numero N tale per cui, per ogni $n > N$ sia $a_n \leq b_n$. Allora, se $\sum b_n$ converge, converge anche $\sum a_n$; se invece $\sum a_n$ diverge, diverge anche $\sum b_n$.*

2. *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni numeriche tali $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, i.e. $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = 1$. Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.*

3. *Sia $\{a_n\}_n$ una successione numerica, se esiste $0 < l < 1$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq l$ per ogni $n > K$, dove K è un intero fissato, allora $\sum a_n$ converge. Se esistono infiniti indici n tali che $\sqrt[n]{a_n} > 1$ allora $\sum a_n$ diverge.*

4. *Sia $\{a_n\}_n$ una successione numerica se esiste un K intero ed un l tale che $0 < l < 1$ tale che per ogni $n > K$ si ha $a_{n+1}/a_n < l$ allora $\sum a_n$ converge.*

5. *Sia $\{a_n\}_n$ una successione numerica e sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $f(n) = a_n$ per ogni n. Allora $\sum a_n$ converge se e solo se $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ è finito.*

Ed ora un criterio per le serie alternanti. Sia $\{v_n\}_n$ una successione numerica, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0^+$, allora $\sum(-1)^n v_n$ è convergente.

Studiamo ora la convergenza della serie

$$s(x) = \sum_{0}^{+\infty} e^{nx}. \tag{3}$$

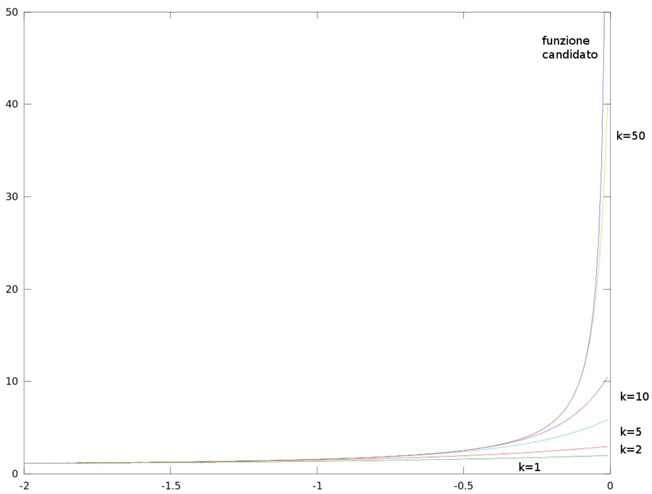
Come dicevamo prima, perché vi sia almeno la convergenza puntuale, dobbiamo richiedere che il termine generale della serie valutata in un punto tenda a 0. Sia quindi x_0 un numero reale

$$\lim_{n\to+\infty} e^{nx_0} = \begin{cases} 0 & x_0 < 0 \\ 1 & x_0 = 0 \\ +\infty & x_0 > 0, \end{cases}$$

quindi vi può essere convergenza puntuale solo per $x_0 < 0$. Supponiamo quindi che $x_0 < 0$ e studiamo la convergenza puntuale:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{x_0})^n = \frac{1}{1-e^{x_0}},$$

per le proprietà della serie geometrica. Abbiamo quindi trovato un candidato per studiare la convergenza uniforme della serie delle somme parziali sull'intervallo $(-\infty, 0)$. Nell'immagine seguente, la funzione candidato e le somme parziali per $k = 1, 2, 5, 10, 50$.



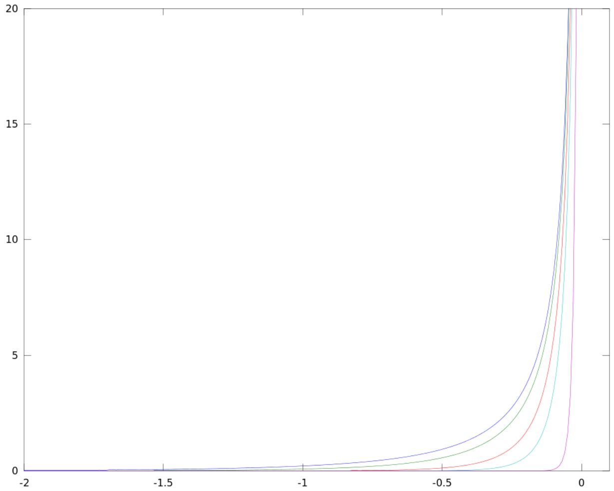
Dobbiamo quindi studiare:

$$\sup_{(-\infty,0)} \left| s_k(x) - \frac{1}{1-e^{x_0}} \right| = \sup_{(-\infty,0)} \left| \frac{1-(e^x)^{k+1}}{1-e^x} - \frac{1}{1-e^x} \right| = \sup_{(-\infty,0)} \left| \frac{(e^x)^{k+1}}{1-e^x} \right|.$$

Questo sup è sempre $+\infty$ e quindi non abbiamo convergenza uniforme sull'intervallo $(-\infty, 0)$. Per rendere il ragionamento più chiaro studiamo il resto k-esimo k cioèla funzione

$$r_k(x) = \frac{(e^x)^{k+1}}{1-e^x},$$

che è data dalla differenza tra la k-esima somma parziale e la funzione candidato. Disegniamo ora le funzioni resto per $k = 1, 2, 5, 10, 50$.



Queste funzioni resto esplodono quando ci avviciniamo a 0; il problema deve essere lì. Se guardiamo al comportamento della funzione candidato, ci accorgiamo che questa funzione tende a $+\infty$ per x che tende a 0. Qual è il comportamento delle somme parziali? Proviamo a studiarne illimite:

$$\lim_{x\to 0} s_k(x) = \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{k} e^{kx} = \sum_{n=0}^{k} \lim_{x\to 0} e^{kx} = k,$$

poiché per ogni k e^{kx} è continua in 0. Quindi, come già si vedeva dalla figura che rappresentava le somme parziali e la funzione candidato, le somme parziali hanno un valore finito in 0, mentre la funzione candidato non lo è. Chiaramente, questo rende impossibile la convergenza uniforme, perché, fissato un qualsiasi $\epsilon > 0$ non può esistere un numero intero N per cui la funzione data da una somma parziale di ordine $k > N$ è contenuta in un tubo di raggio ϵ attorno alla funzione candidata; da un certo punto in poi, infatti, qualsiasi somma parziale tende ad un valore finito, mentre la funzione candidata ha un asintoto a 0. Cosa succede se invece studiamo la convergenza uniforme su un intervallo $(-\infty, r]$ con $r < 0$? In quel caso abbiamo che

$$\sup_{(-\infty,r]} \left| s_k(x) - \frac{1}{1-e^{x_0}} \right| = \sup_{(-\infty,r]} |r_k(x)| = \sup_{(-\infty,r]} \left| \frac{(e^x)^{k+1}}{1-e^x} \right| = \frac{(e^r)^{k+1}}{1-e^r},$$

poiché la funzione resto è crescente. Ora, abbiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(e^r)^{k+1}}{1-e^r} = 0$$

se $r < 0$ e quindi abbiamo convergenza uniforme su $(-\infty, r]$ con $r < 0$.

Facciamo un'ultima osservazione: nel nostro caso la discussione del problema è stata molto tangibile in quanto la funzione candidato aveva una buona rappresentazione. Nel caso la funzione candidato non sia così trattabile possiamo sempre studiarne facilmente la convergenza uniforme su un intervallo I; infatti

$$\sup_I \left| s_k(x) - \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x) \right| = \sup_I \left| \sum_{i=0}^{k} f_i(x) - \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x) \right| = \sup_I \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} f_i(x) \right|.$$

Ma le funzioni

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} f_i(x)$$

sono quelli che abbiamo chiamato i resti di ordine k. Cioè, una serie converge uniformemente su un intervallo I se e soltanto se la successione dei resti converge uniformemente a 0 sull'intervallo I.

Un altro importante strumento, la cui dimostrazione potete trovare sul vostro libro di testo è il criterio di Weierstrass. Il criterio di Weierstrass dice che, data una serie di funzioni $\sum f_n$, questa serie di funzioni converge uniformemente su un intervallo I se converge la serie dei valori assoluti dei sup delle funzioni su questo intervallo, cioè la serie numerica che ha come termine generale $\sup_I |f_n(x)|$. È importante però notare che questo criterio è sufficiente ma non è necessario; nel caso questo non venga soddisfatto, la serie potrebbe ancora convergere uniformemente; ciò che sappiamo è che se questo criterio è soddisfatto la serie è sicuramente uniformemente convergente.