Donna o Tigre?

Alessandro Pinzi

4 agosto 2019

In questa sezione racconteremo una storia di 4 ragazzi, studenti di matematica, che si divertono a proporsi indovinelli a vicenda. Starà a voi però cercare di risolverli! In fondo al capitolo sono descritte tutte le soluzioni degli indovinelli proposti: l'ideale sarebbe, però, che le consultiate solo dopo averli risolti, o comunque dopo averci pensato un po' su.

Buon divertimento!

Francesca, Donald, Adamo e Alessandro sono cinque studenti di matematica, che si sono riuniti una sera in un luogo segreto per potersi proporre degli indovinelli senza essere disturbati (un po' come la setta dei poeti estinti in 'L'attimo fuggente', però senza fare niente contro le regole, semplicemente questa idea li stimolava). Partì Alessandro a proporre degli indovinelli: ci troviamo in un manicomio, dove tutte le persone (oltre a noi) sono o dottori o pazienti, inoltre possono essere tutti quanti sani o pazzi. Possono anche esserci dottori pazzi o pazienti sani, queste sono proprio le situazioni che cercheremo di scoprire. Sappiamo che chi è pazzo dice **solo cose che crede che siano false**, mentre chi è sano dice **solo cose che crede che siano vere**. Facciamo un esempio: se un pazzo afffermasse "quel muro davanti a me è blu", significherebbe che esso crede che quel muro sia blu, ma noi riusciamo a capire che è pazzo perché il muro che ha davanti è bianco, come tutti gli altri muri del manicomio. Arriviamo agli indovinelli:

1. *Uno degli abitanti afferma:"Sono un paziente". C'è qualcosa che non va? Cioè, siamo davanti ad un paziene sano o ad un dottore pazzo?*

2. *Uno degli abitanti dice una frase, dalla quale si può dedurre che esso sia un paziente sano. Cosa può avermi detto?*

3. *Uno degli abitanti dice una frase, dalla quale si può dedurre che esso sia un dottore pazzo. Cosa può avermi detto?*

4. *Uno degli abitanti afferma:"Credo di essere un paziente". C'è qualcosa che non va?*

5. *Ad uno degli abitanti chiedo:"Crede di essere un paziente". Lui risponde:"Credo di sì". C'è qualcosa che non va?*

Toccò adesso a Francesca proporre degli indovinelli: una leggenda narra che Cristoforo Colombo, nel viaggio che lo portò fino a scoprire l'America, si imbatté in una strana isola, che poi nessuno riuscì mai più a raggiungere. La chiamò *isola dei domandanti*, visto che tutti gli abitanti comunicavano solo ponendo delle domande. Scoprì che c'erano due tipi di persone: quelli di tipo A che ponevano solo domande la cui risposta fosse sì, e quelli di tipo B che ponevano solo domande la cui risposta fosse no. Ad esempio: un abitante di tipo A potrebbe chiedere "2+2 fa 4?", ma non "2+2 fa 5?". Ecco gli indovinelli che vi propongo:

6. *Colombo incontrò una persona di nome Bob che gli chiese: "sono di tipo B?" Cosa si può concludere? E se avesse chiesto "sono di tipo A?"?*

7. *Un abitante di nome Carl chiese: "sono del tipo che potrebbe fare la domanda che sto facendo?" Cosa sappiamo sul tipo di Carl?*

8. *Un abitante di nome John chiese: "sono del tipo che potrebbe chiedere se sono di tipo B?" Riusciamo a dire di che tipo è John?*

9. *Colombo si imbatté in una piacevole coppia, i signori Smith. Mrs. Smith chiese a Mr. Smith: "sei del tipo che potrebbe chiedermi se sono di tipo A?" Cosa riusciamo a dire sul tipo dei due amanti?*

A questo punto, Cristoforo Colombo capì che se fosse stato solo un altro minuto su quell'isola sarebbe diventato pazzo, così ripartì per il suo viaggio e quell'isola non fu mai più ritrovata da nessun navigatore.

Adesso è il turno di Adamo: una volta mentre dormivo, sognai dell'esistenza di una città, detta *città dei sogni*, i cui cittadini potevano essere di due tipi: diurni o notturni. Inoltre, lì nessuno dormiva nel senso in cui lo intendiamo noi, semplicemente c'erano momenti in cui erano svegli e altri in cui erano addormentati, ma visivamente non si poteva notare la differenza. Si ha però questa caratterizzazione: i diurni credono solo in cose vere quando sono svegli e solo in cose false quando sono addormentati, mentre i notturni credono solo in cose false quando sono svegli e solo in cose vere quando sono addormentati. Veniamo alla parte divertente:

10. *Un cittadino, in un certo momento crede di essere diurno. Cosa sappiamo dire su questa persona?*

11. *È vero che l'opinione di un abitante non cambia mai sul fatto che egli stesso sia diurno o notturno?*

12. *Due amici, Tim e Tom, sono entrambi cittadini. In un certo momento Tim crede che entrambi fossero notturni, mentre Tom crede che non siano entrambi notturni. Sappiamo che uno era sveglio e uno era addormentato, chi dei due era sveglio?*

13. *Un cittadino di nome Ned, in un certo momento, crede che lui e sua sorella, Bibi, fossero entrambi notturni, ma al tempo stesso crede che lui non sia notturno. Cosa possiamo dire su di loro?*

14. *Supponiamo che questa città esista davvero, e che io ne sia un abitante. Di che tipo sono?*

A questo punto prese parola Donald, che è senz'altro il più introverso tra i 5, e propose questo problema:

15. *Ho costruito una macchina che lavora con gli interi positivi $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e con dei sottoinsiemi di esso che possiamo numerare, cioè la macchina riconosce i numeri $\{1, 2, 3, \dots\}$ e i sottoinsiemi $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ di $\mathbb{N}_+$ (notiamo che $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ non potrà mai coincidere con $\mathcal{P}(\mathbb{N}_+)$, poiché il teorema di Cantor ci assicura che non esiste una funzione bigettiva tra X e $\mathcal{P}(X)$ per ogni insieme X, vedi capitoli 1 e 2 di [1]). Ora, lasciatemi definire n^*m come una sequenza di 1 lunga n e una sequanza di 0 lunga m (ad esempio 2*3=11000). Ora, la macchina stampa solo numeri di questo tipo, cioè una sequenza di 1 seguita da una sequenza di 0, ed ogni volta che stampa un numero di questa forma, che può essere riconosciuto come n^*m per qualche $n, m \in \mathbb{N}_+$, significa che la macchina ha dimostrato che $n \in A_m$ (si legge n appartiene ad A_m). Sono certo al 100% che la macchina è sicura, cioè se stampa, ad esempio, 1110, significa che davvero $3 \in A_1$. Chiameremo **dimostrabili** le proposizioni del tipo $n \in A_m$ che possono effettivamente essere dimostrate dalla macchina (cioè se la macchina è in grado di stampare n^*m). Notare che c'è una bella differenza tra dimostrabile e vera: una proposizione dimostrabile è senz'altro vera per quanto detto prima, ma non sappiamo se tutte le proposizioni vere sono dimostrabili dalla macchina. Definiamo infine per ogni $n > 0$ l'insieme $A_n^* = \{m > 0$ tale che $m^*m \in A_n\}$. Sappiamo le seguenti cose sugli insiemi A_i:*

1. *A_8 è l'insieme di tutti i numeri stampabili dalla macchinna*
2. *per ogni intero positivo n, $A_{3\cdot n}$ è il complementare di A_n, cioe $A_{3\cdot n} = \mathbb{N}_+ \setminus A_n$*
3. *per ogni intero positivo n, $A_{3\cdot n+1}$ è l'insieme A_n^**

Arriviamo quindi alle domande:

- *da queste proprietà degli insiemi si può dedurre che la macchina non può dimostrare ogni proposizione vera. Allora vi chiedo di trovare una proposizione del tipo $n \in A_m$ che sia vera, ma che non sia dimostrata dalla macchina.*
- ***LEGGERE SOLO DOPO AVER RISOLTO IL PRECEDENTE*** *Trovare un'altra coppia $n, m \leq 100$ tale che $n \in A_m$ sia vera ma non dimostrabile.*
- *quante di quelle proposizioni non sono riconosciute dalla macchina?*

Con questo scervellotico indovinello di Donald si chiude la loro sessione di indovinelli.

Facciamo una riflessione su quest'ultimo indovinello: esso racchiude tutto il senso della matematica, noi matematici siamo la macchina, che tramite i nostri studi cerchiamo di dimostrare teoremi, e ciò con cui lavoriamo non sono i numeri interi positivi, bensì tutte le strutture matematiche che siamo riusciti a definire nella nostra storia, e sappiamo come poter lavorare con essi grazie a degli assiomi definiti agli inizi del '900 da Zermelo e Fraenkel, che hanno appunto cercato di assiomatizzare la matematica così come la conosciamo e pensiamo (nel nostro indovinello gli assiomi sarebbero le proprietà che conosciamo degli insiemi). Abbiamo però alcuni problemi, così come la macchina dell'ultimo indovinello: siamo davvero in grado di saper dimostrare vere o false tutte le proposizioni che ci vengono in mente?

Come detto prima, sono universalmente accettati gli assiomi di Zermelo-Fraenkel per descrivere la matematica. Prendiamo come proposizione l'ipotesi del continuo: essa afferma che non esistono insiemi A tale che $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$, cioè ogni insieme che possa essere immerso in $\mathbb{R}$ (cioe esiste una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ iniettiva), allora o esso può essere messo in bigezione con $\mathbb{R}$ o con $\mathbb{N}$. Questo fatto è stato dimostrato indecidibile a partire dagli assiomi: infatti Godel e Cohen hanno dimostrato che non si può dimostrare né che sia vera né che sia falsa. Questo, per Godel, significava che il sistema di assiomi assunto era incompleto per descrivere il nostro mondo, infatti esistono più 'universi matematici' diversi tra loro che soddisfano tali assiomi, e in certi di questi l'ipotesi del continuo può essere vera, in altri può essere falsa. (fonte https://it.wikipedia.org/wiki/Ipotesi_del_continuo)

SOLUZIONI

1. Il parlante crede di essere un paziente: se fosse sano sarebbe davvero un paziente, quindi dovrebbe essere dimesso; se fosse pazzo, allora sarebbe un dottore, e quindi non dovrebbe comunque essere lì.

2. Una soluzione possibile è che possa aver detto 'non sono un dottore sano'. Infatti: un dottore pazzo ci starebbe dicendo che è un dottore sano, il che è falso; un dottore sano non potrebbe certo affermare quella frase; un paziente pazzo ci starebbe dicendo che è un dottore sano. Quindi deve essere per forza un paziente sano.

3. Una possibile affermazione è 'sono un paziente pazzo'. Analizzando i casi come sopra si può facilmente vedere che effettivamente ci troviamo davanti ad un dottore pazzo.

4. Questa situazione è diversa da quella del primo indovinello: infatti in questo caso il parlante crede di credere di essere un paziente. Se fosse pazzo, allora tutto ciò che crede è falso che creda di essere un paziente e quindi crede di essere un dottore. Quindi, essendo pazzo, è un paziente. Se fosse sano, sarebbe vero che crede di essere un paziente, e quindi, poiché è sano è eun paziente sano. Osserviamo, che in entrambi i casi (sano o pazzo) il credere di credere di essere un paziente, porta alla conclusione che è un paziente. Questo perché è come se i due credere si cancellassero.

5. In questo caso, il parlante afferma di credere di credere di essere un paziente, quindi lui crede di credere di credere di essere un paziente. Per quanto osservato nell'indovinello precedente, i due credere iniziali si annullano, ed è come se stesse credendo di essere un paziente, quindi ricadiamo sul caso del primo indovinello e concludiamo che è o un paziente sano o unn dottore pazzo.

6. Nel primo caso è facile dire che la persona che abbiamo incontrato non può essere un abitante dell'isola, mentre nel secondo caso potrebbe essere di tipo A o di tipo B.

7. Poiché ha effettivamente effettuato la domanda, la risposta è sì, quindi è di tipo A.

8. Ricordandoci la risposta al primo indovinello, se la risposta fosse sì, allora lui potrebbe chiedere se è di tipo B, e quindi non sarebbe un abitante. Quindi la risposta è no e quindi è di tipo B.

9. Sulla signora Smith non sappiamo nulla, sul signor Smith sappiamo che è di tipo A. Infatti: supponiamo che la signora sia di tipo A, allora lui potrebbe chiedere se lei è di tipo A, quindi lui sarebbe di tipo A perché la risposta sarebbe sì. Se lei fosse di tipo B, allora lui non può chiedere se lei è di tipo A, quindi lui non può fare una domanda la cui risposta sarebbe no, quindi deve essere di tipo A.

10. Se fosse stato diurno, allora doveva essere sveglio perché credeva una cosa vera. Se fosse stato notturno, allora doveva essere sveglio perché stava credendo una cosa falsa. Quindi non sappiamo dire di che tipo era, ma sappiamo per certo che era sveglio.

11. Se un abitante è diurno, allora da sveglio crederà di essere diurno, ma da addormentato deve credere una cosa falsa, quindi crederà di essere notturno. La stessa cosa, invertita per quanto riguarda lo stato della persona, vale per i notturni.

12. Se si volessere analizzare tutti i casi, si dovrebbero considerare 4 casi per Tim e 4 per Tom, quindi 16 in totale. Ma esiste un approccio più intelligente. Osserviamo che devono essere dello stesso tipo: se fossero di tipi diversi, allora le due frasi dovrebbero essere o entrambe vere o entrambe false, poiché sappiamo che uno era sveglio e l'altro addormentato, ma se fossero entrambe vere allora dovrebbero essere entrambi diurni (assurdo!), se fossero entrambe false allora dovrebbero essere entrambi notturni (assurdo!). Ora ci sono rimasti due casi: se fossero entrambi notturni, allora Tom rederebbe una cosa falsa, quindi dovrebbe essere sveglio; se fossero entrambi diurni, allora Tom crederebbe una cosa vera, e quindi dovrebbe essere sveglio. In ogni caso quello sveglio è Tom.

13. Poiché Ned crede quelle cose nello stesso momento, devono essere entrambe false, perché incompatibili tra loro. Quindi lui è notturno e sveglio (perché crede qualcosa di falso), e poiché non sono entrambi notturni, Bibi è diurna.

14. All'inizio Adamo dice di aver sognato l'esistenza di questa città, quindi se esistesse veramente Adamo dovrebbe essere notturno, perché ha creduto dell'esistenza di questa città mentre dormiva.

15.

- Una soluzione possibile è la proposizione $75 \in A_{75}$. Vediamo intanto che è vera: se fosse falsa significherebbe che $75 \in A_{25}$, quindi $75^*75 \in A_8$, quindi la macchina dimostrerebbe il falso dicendo che $75 \in A75$, e questo è assurdo. Quindi la proposizione è vera. Quindi $75 \notin A_{25}$, e quindi $75^*75 \notin A_8$, sennò 75 apparterrebbe ad A_{25}. Quindi la proposzione è vera ma siamo sicuri che la macchina non può essere in grado di dimostrarlo perché $75^*75 \notin A_8$.

- Un'altra possibile è $73 \in A_{73}$. Supponiamo sia falsa, allora $7^3 * 73 \notin A_{24}$, quindi $73^*73 \in A_8$, assurdo. Quindi è vera, quindi $73^*73 \in A_{24}$ e quindi $73^*73 \notin A_8$.

- $\forall n \in \mathbb{N}_+$ si ha che $A_n = A_{9 \cdot n}$, quindi $A_{75} = A_{675}$, e si ha che un'altra soluzione è $675 \in A_{675}$. Quindi le soluzioni possibili sono: $9 \cdot 75 \in A_{9 \cdot 75}$, oppure $9 \cdot 73 \in A_{9 \cdot 73}$.

Arrivati a questo punto, spero che tutti quanti si siano chiesti il perché questo paragrafo si intitoli 'Donna o tigre?'. Il motivo principale è che tutti gli indovinelli scritti sono presi da un libro intitolato appunto 'Donna o tigre?' (vedi [2]). Voglio quindi lasciarvi un ultimo indovinello (senza soluzione!):

Un re imprigionò un suo nemico. Dopo giorni di prigionia, lo mise in una stanza con 9 porte numerate {1,2,...,9} e gli disse: "dietro ad una sola di queste c'è una bellissima donna, se la troverai sarai libero di andartene e di sposarla, mentre le altre 8 porte o sono vuote o vi è una tigre all'interno. Se aprirai la porta con la tigre sarai probabilmente sbranato vivo, mentre se apri la porta vuota dovrai rimanere lì dentro per il resto dei tuoi giorni". Sulle porte c'erano degli indizi, che potevano essere veri o falsi. Sapevamo per certo che l'indizio sulla porta dove c'era la donna era vero, gli indizi sulle porte dove ci sono delle tigri sono falsi, mentre gli indizi sulle porte di stanze vuote possono essere veri o falsi. Gli indizi sono i seguenti:

1. *la donna è in una stanza dispari*
2. *questa stanza è vuota*
3. *il cartello 5 è vero o il cartello 7 è falso*
4. *il cartello 1 è falso*
5. *uno dei due cartelli 2 e 4 è vero*
6. *il cartello 3 è falso*

7. *la donna non è nella stanza 1*

8. *questa stanza contiene una tigre e la stanza 9 è vuota*

9. *questa stanza contiene una tigre e il cartello 6 è falso*

Il prigioniero ci pensò su e alla fine disse: "Il problema non è risolvibile. Non è leale." Allora il re rispose: "Lo so", scoppiando a ridere. Allora il prigioniero replicò: "Non è divertente, permettetemi di chiedere un indizio. La stanza 8 è vuota o no?" Allora il re gli rispose, e così il prigioniero fu in grado di trovare la donna e di fuggire. ***In quale stanza si trova la donna?***

Riferimenti bibliografici

[1] *Marco Manetti.* Topologia*, volume 78. Springer Science & Business Media, 2014.*

[2] *Raymond M Smullyan.* Donna o tigre?:–e altri indovinelli logici, compreso un racconto matematico sul teorema di Gödel*. Zanichelli, 1985.*