

# Appunti di Analisi 3

Appunti dalle Lezioni di M.S. Gelli e A. Pratelli

Rocca Andrea

Aggiornati al: 29 giugno 2023 d.C.

# Prefazione

Per chi ha deciso di studiare Matematica all'Università di Pisa il masochismo non è mai abbastanza e ho dunque deciso di cimentarmi in quest'opera enorme. Specifico che in queste dispense troverete non solo gli appunti del corso di Analisi 3 dell'anno accademico 2022/2023, ma anche una mia personale rielaborazione degli stessi, quindi procedete con molta cautela nella lettura.

Nel caso in cui doveste trovare qualche errore o per qualsiasi dubbio, chiarimento o suggerimento potete contattarmi a [a.rocca2@studenti.unipi.it](mailto:a.rocca2@studenti.unipi.it). Ogni tipo di aiuto è il benvenuto e in merito ci tengo particolarmente a ringraziare Francesca Rindi, la mia dattilografa di fiducia. Senza il suo aiuto questi appunti non esisterebbero.

Non mi resta che augurarvi una buona lettura e un buono studio!!

*Andrea Rocca*

## Indice

<b>1</b>	<b>Lezione 27/09 - Teoria</b>	<b>6</b>
1.1	Richiami di teoria della misura . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Lezione 28/09 - Teoria</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Lezione 03/10 - Esercitazione</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Lezione 04/10 - Teoria</b>	<b>23</b>
4.1	Convergenze su funzioni misurabili . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Lezione 05/10 - Teoria</b>	<b>29</b>
<b>6</b>	<b>Lezione 10/10 - Teoria</b>	<b>32</b>
6.1	Convoluzione . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Lezione 11/10 - Teoria</b>	<b>38</b>
7.1	Approssimazione per convoluzione . . . . .	39
7.2	Separabilità delle funzioni continue in $L^p(\mathbb{R}^d)$ . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Lezione 12/10 - Esercitazione</b>	<b>42</b>
8.1	Convoluzione . . . . .	42
<b>9</b>	<b>Lezione 17/10 - Teoria</b>	<b>45</b>
9.1	Spazi di Hilbert . . . . .	45
<b>10</b>	<b>Lezione 18/10 - Esercitazione</b>	<b>50</b>
10.1	Problemi di massimo e minimo . . . . .	50
10.2	Spazi $\ell^p$ . . . . .	52
<b>11</b>	<b>Lezione 19/10 - Teoria</b>	<b>54</b>
11.1	Sistemi ortonormali (completi) . . . . .	55
<b>12</b>	<b>Lezione 24/10 - Teoria</b>	<b>59</b>
12.1	Serie di Fourier . . . . .	62
<b>13</b>	<b>Lezione 25/10 - Esercitazione</b>	<b>64</b>
<b>14</b>	<b>Lezione 26/10 - Esercitazione</b>	<b>66</b>
<b>15</b>	<b>Lezione 31/10 - Teoria</b>	<b>68</b>
15.1	Teoria sulla serie di Fourier . . . . .	68
<b>16</b>	<b>Lezione 02/11 - Esercitazione</b>	<b>74</b>
16.1	Base di Fourier . . . . .	74
<b>17</b>	<b>Lezione 07/11 - Esercitazione</b>	<b>78</b>

<b>18 Lezione 08/11 - Teoria</b>	<b>82</b>
18.1 Convergenza puntuale della serie di Fourier . . . . .	82
18.2 Equazione del calore . . . . .	87
18.2.1 Risoluzione formale di (P) . . . . .	87
<b>19 Lezione 09/11 - Teoria</b>	<b>89</b>
<b>20 Lezione 14/11 - Teoria</b>	<b>95</b>
20.1 Equazione delle onde . . . . .	95
20.1.1 Risoluzione formale di (EO) . . . . .	95
<b>21 Lezione 15/11 - Esercitazione</b>	<b>101</b>
21.1 Equazione del calore . . . . .	102
21.1.1 Metodo risolutivo con condizione di Dirichlet . . . . .	104
<b>22 Lezione 16/11 - Teoria</b>	<b>106</b>
22.1 Operatori differenziali autoaggiunti . . . . .	106
22.2 Trasformata di Fourier . . . . .	109
<b>23 Lezione 21/11 - Teoria</b>	<b>110</b>
23.0.1 Calcoli diretti di trasformate . . . . .	114
23.1 Applicazioni a ODEs . . . . .	115
<b>24 Lezione 22/11 - Esercitazione</b>	<b>116</b>
24.1 Disuguaglianza isoperimetrica . . . . .	116
24.2 Operatori differenziali . . . . .	118
<b>25 Lezione 23/11 - Teoria</b>	<b>121</b>
25.1 L'antitrasformata di Fourier . . . . .	121
25.2 Trasformata di Fourier in $L^2$ . . . . .	123
<b>26 Lezione 28/11 - Teoria</b>	<b>126</b>
26.1 Applicazioni della Trasformata alla risoluzione di PDE . . . . .	129
26.2 Trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^d$ . . . . .	131
<b>27 Lezione 29/11 - Esercitazione</b>	<b>132</b>
27.1 Calcolo di trasformate . . . . .	133
27.1.1 Richiami di analisi complessa . . . . .	133
27.1.2 Calcolo di trasformate in più variabili . . . . .	135
<b>28 Lezione 30/11 - Teoria</b>	<b>137</b>
28.1 Funzioni armoniche . . . . .	137
28.2 Strumenti di integrazione su sfere $(d - 1)$ -dimensionali . . . . .	137
<b>29 Lezione 05/12 - Teoria</b>	<b>142</b>
29.1 Risoluzione dell'equazione di Laplace su $B_1(0)$ . . . . .	145
<b>30 Lezione 06/12 - Teoria</b>	<b>147</b>
30.1 Richiami di sottovarietà differenziali . . . . .	147
30.2 Nozione di integrazione su superficie . . . . .	151

<b>31 Lezione 07/12 - Esercitazione</b>	<b>152</b>
31.1 Funzioni armoniche . . . . .	152
<b>32 Lezione 12/12 - Teoria</b>	<b>156</b>
32.1 Richiami su applicazioni $k$ -lineari alternanti . . . . .	157
32.1.1 Base di $\Lambda^k(V)$ . . . . .	159
32.1.2 Caso $V = \mathbb{R}^d$ . . . . .	160
<b>33 Lezione 13/12 - Esercitazione</b>	<b>161</b>
33.1 Funzioni subarmoniche e superarmoniche . . . . .	161
<b>34 Lezione 14/12 - Teoria</b>	<b>164</b>
34.1 $k$ -covettori . . . . .	164
34.2 Pull-back di $k$ -covettori . . . . .	164
34.3 $k$ -forme in $\mathbb{R}^d$ . . . . .	168
<b>35 Lezione 19/12 - Teoria</b>	<b>169</b>
35.1 Nozione di integrale di una $k$ -forma in $\mathbb{R}^d$ su una $k$ superficie $S$ in $\mathbb{R}^d$ . . . . .	171
<b>36 Lezione 20/12 - Esercitazione</b>	<b>173</b>
36.1 Esercizi di esami passati . . . . .	173
<b>37 Appendice</b>	<b>177</b>
37.1 Fatti generali utili . . . . .	177
37.2 Sul Teorema di Stone-Weierstrass . . . . .	177
37.3 Punti di Lebesgue . . . . .	179

# 1 Lezione 27/09 - Teoria

## 1.1 Richiami di teoria della misura

È un corso di strumenti. Serve a dare basi per corsi successivi.

Iniziamo con un ripasso veloce di alcune nozioni di teoria della misura, così fissiamo le notazioni.

### Definizione 1.1 – Spazio misurabile

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  con  $X$  = spazio,  $\mathcal{A}$  =  $\sigma$  algebra e  $\mu$  misura

### Definizione 1.2

Una sigma algebra è:  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  con le proprietà:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- se  $A \in \mathcal{A}$  allora  $A^c \in \mathcal{A}$
- se  $E_i \in \mathcal{A}$  allora  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{A}$

### Definizione 1.3

$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  si dice misura se

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $E = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} E_i$  con  $E_i \in \mathcal{A}$

allora  $\mu(E) = \sum \mu(E_i)$ .

Queste proprietà bastano per dire:

- $\mu(A) \leq \mu(B) \forall A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$
- $E_i \nearrow$  successione crescente di misurabili allora  $\mu(\cup E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$
- $E_i \searrow$  misurabili e  $\mu(E_i) < +\infty$  allora  $\mu(\cap E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$

*Esempi:*

1. Delta di Dirac in  $x_0 \in X, \mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$   $\mu = \delta_{x_0}$  con  $\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

2. misura che conta i punti,  $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\mathcal{H}^0(E) = \#(E) = \mu(E) = \begin{cases} \text{numero di elementi di } E & \text{se } E \text{ è finito} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3. misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^d, \mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ed è (internamente/esternamente) regolare; ossia dato  $E$  misurabile secondo Lebesgue

$$\mathcal{L}^d(E) = \inf\{\mathcal{L}^d(A), A \supseteq E \text{ aperto}\} = \sup\{\mathcal{L}^d(K), K \text{ compatto } K \subseteq E\}$$

dà buone proprietà di approssimazione da interno/esterno.  
 Dato  $E$  misurabile secondo Lebesgue  $\forall \varepsilon \exists A$  aperto,  $C$  chiuso tale che

$$C \subseteq E \subseteq A$$

e  $\mathcal{L}^d(A \setminus C) < \varepsilon$

Domanda: perchè non ho chiesto  $C$  compatto? Perchè se  $C$  fosse illimitato, visti i contenimenti, avrei un assurdo.

#### Definizione 1.4

$\mu$  misura si dice *completa* se dato  $F \subseteq E$  con  $E \in \mathcal{A}$  e  $\mu(E) = 0$  allora anche  $F \in \mathcal{A}$  (e  $\mu(F) = 0$ ).

Dove si usa la completezza di misura di Lebesgue? In Beppo-Levi/ convergenza di Lebesgue.

Fondamentale: nel proseguo del corso le misure saranno complete. E se la applichiamo ad un insieme vuol dire che insieme è automaticamente misurabile.

#### Definizione 1.5 – Funzione misurabile

Dato  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  (anche  $\mathbb{R}^d$ ) o  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  si dice *misurabile* se  $\forall A$  aperto  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>attenzione: se sei in  $\bar{\mathbb{R}}$  da ben definire chi sono gli aperti

#### Proposizione 1.6

Sono ancora misurabili le seguenti:

- $f + g, f \cdot g$  se  $f, g$  misurabili.
- $h \circ f$  con  $f$  misurabile e  $h$  continua  $\bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$
- $\liminf f_n, \limsup f_n$  con  $f_n$  misurabili

**Teoria dell'integrazione** Le funzioni misurabili sono un primo passo per fare una teoria dell'integrale.

Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e sia  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  (misurabile). Ci chiediamo quando ha senso parlare di

$$\int_X f d\mu$$

1. Definizione dell'integrale per funzioni semplici.

$\varphi \in \mathcal{S}$  funzioni semplici se  $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$  con  $\alpha_i \in \mathbb{R}^+, E_i \in \mathcal{A}$ , da cui

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu(E_i)$$

2.  $f \geq 0$  misurabile. Definiamo

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{S} \\ \varphi \leq f}} \int_X \varphi d\mu$$

(idea è la stessa di somma inferiore di Riemann)

3.  $f$  misurabile qualsiasi.  $f$  si dice *integrabile* se almeno una tra  $f^+$  e  $f^-$  ha integrale finito.

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Notare: per una  $f$  positiva integrale ha sempre senso, per  $f$  generico no.

### Definizione 1.7

$f$  si dice *sommabile* se  $f^+$ ,  $f^-$  hanno integrale finito, i.e.

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu < +\infty$$

*Caveat*: non abbiamo l'integrale in senso improprio. Quello si ha solo quando si parla quando si studia l'integrazione alla Riemann.

**Idea** Ricordiamo che si studia in particolare il caso in cui  $|f|$  sia integrabile, poichè studiamo "approssimazioni con spezzettamenti" e dunque quando riordiniamo i pezzi, il valore non deve cambiare. Abbiamo quindi bisogno di una serie assolutamente sommabile.  $\lrcorner$

*Esempio*:

1. Se  $\mu = \delta_{x_0}$  allora  $\int_X f d\mu = f(x_0)$
2. Se  $\mu = \mathcal{H}^0$ ,  $X = \mathbb{N}$  allora  $f : \mathbb{N} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  integrabile  $\iff \sum_{i=0}^{\infty} f^+(n)$  e/o  $\sum_{i=0}^{\infty} f^-(n)$  sono finite. Dunque:  $f$  è sommabile  $\iff \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < +\infty$
3.  $\mu = \mathcal{L}^d$  misura di Lebesgue. Le funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili secondo Lebesgue e gli integrali coincidono, mentre l'esistenza dell'integrale in senso improprio secondo Riemann non implica sommabilità secondo Lebesgue.

*Notazione*: dato  $E \in \mathcal{A}$ ,  $f$  misurabile su  $E$  poniamo  $\int_E f d\mu := \int_X f \mathbf{1}_E d\mu$ .



**Teoremi di convergenza** Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  spazio misurale

**Teorema 1.8 – Teorema di Beppo-Levi/ convergenza monotona**

Siano  $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabili, con  $f_n \leq f_{n+1}$  per  $\mu$ -quasi ovunque<sup>a</sup>  $x \in X$ . Allora

$$\int_X \sup f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu$$

dove  $\sup f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$

<sup>a</sup>ossia la proprietà è vera a meno di un insieme di misura  $\mu$  nulla. Si dice anche a meno di un insieme trascurabile

**Teorema 1.9 – Lemma di Fatou**

Siano  $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabili, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu$$

*Esercizio:* Prova a fare esempi in cui in entrambi i casi togli l'ipotesi che  $f_n$  è positiva.

**Teorema 1.10 – Teorema di Lebesgue/convergenza dominata**

Siano  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{R}^d$ ) tali che

- $f_n \rightarrow f$  puntualmente  $\forall x \in X$
- $\exists g : X \rightarrow [0, +\infty]$  sommabile tale che  $|f_n(x)| \leq g(x)$   $\mu$ -q.o  $\forall n \in \mathbb{N}$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu$$

*Osservazione 1.1*

$\int_X f d\mu$  ha senso finito perchè  $|f|$  è dominata da una sommabile

*Osservazione 1.2*

Si può provare che (risultato più forte di teorema di Lebesgue)

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

se pongo  $f_n(x) - f(x) := g_n(x)$  uso il teorema di sopra e la disuguaglianza triangolare.

**Teorema 1.11 – Teorema di Fubini-Tonelli rispetto alla misura di Lebesgue**

Sia  $E = E_1 \times E_2$  con  $E \subseteq \mathbb{R}^d, E_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}, E_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$  misurabili, con  $d = d_1 + d_2$ . Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile secondo Lebesgue. Se  $f \geq 0$

(oppure sommabile) allora si ha, se  $f(x) = f(x_1, x_2)$  per q.o.  $x_2 \in E_2$  fissato, che sono misurabili  $x_1 \rightarrow f(x_1, x_2)$  e  $x_2 \rightarrow \int_{E_1} f(x_1, x_2) dx_1$ . Analogamente scambiando il ruolo di  $x_1$  e  $x_2$  e vale

$$\int_E f(x_1, x_2) dx = \int_{E_2} dx_2 \int_{E_1} f(x_1, x_2) dx_1 = \int_{E_1} dx_1 \int_{E_2} f(x_1, x_2) dx_2$$

### Teorema 1.12 – Teorema di Cambio di Variabile

Siano  $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^d$  aperti diffeomorfi e  $\Phi : \Omega' \rightarrow \Omega$  diffeomorfismo di classe  $C^1$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile  $\geq 0$ /integrabile. Allora vale

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega'} f(\Phi(x')) |\nabla \Phi(x')| dx'$$

*Nota:* Se in seguito non sarà specificato,  $f$  è misurabile  $\geq 0$  oppure è integrabile.

Viene naturale a questo punto di parlare di convergenza quasi ovunque.

## 2 Lezione 28/09 - Teoria

Il concetto di misurabilità di una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  richiede il controllo se  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \forall A$  aperto o meno. Questo è equivalente alla verifica  $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \forall \alpha \in \mathbb{R} \in \mathcal{A}$ . (vedi le semirette come base di  $\mathbb{R}$ .)

Misurabilità è stabile per passaggio al limite.

Cosa vuol dire  $f_n \rightarrow f$  in "distanza" integrale? Una buona distanza, che ha senso se le  $f_n$  sono almeno sommabili su  $X$ , è:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$$

Perchè si prende Lebesgue e non Riemann? Perchè le successioni di Cauchy prese con la distanza di sopra hanno un limite che non è integrabile secondo Riemann, manca dunque una proprietà di chiusura. Se si definisce

$$d(f, g) = \int_X |f - g| d\mu \rightarrow 0$$

con  $g, f$  sommabili, si ha un problema poichè è possibile che  $0 = d(f, g)$  con  $f \neq g$  per qualche  $x \in X$ , per questo si crea un quoziente successivamente.

*Osservazione 2.1 - Conseguenze della nozione di integrale*

Sia  $f$  misurabile tale che  $f \geq 0$  (altrimenti usiamo il modulo), allora valgono:

1.  $\int_X f d\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \mu\text{-q.o. } x \in X$ .
2.  $c = \int_X f d\mu < +\infty \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R} \mu\text{-q.o. } x \in X$

*Dimostrazione.* Come si dimostrano? Tecnica standard: basta stimare i livelli:

*Dimostrazione (1):* Detto  $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$  devo dimostrare che  $\mu(E) = 0$ . Noto che  $E = \bigcup E_n$  con  $E_n = \{x : f(x) > \frac{1}{n}\}$ . L'idea è stimare

$$0 = \int_E f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n)$$

perchè l'integrale è lineare e mantiene le proprietà di ordinamento. Ma dunque  $\mu(E_n) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$

*Dimostrazione (2):* Definisco  $E = \{x : f(x) = +\infty\} = \bigcap \{x : f(x) > M\}$ .

$$c = \int_X f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq n\mu(E_n) \Rightarrow \mu(E_n) \leq \frac{c}{n} \xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty}} 0 = \mu(E)$$

infatti si ha  $\mu(E_n) \leq \frac{c}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \mu(E) = \lim_n \mu(E_n) = 0$ .

□

*Osservazione 2.2*

$d(f, g) = 0 \Rightarrow f = g \mu\text{-q.o. } x \in X$

Da qui segue la necessità di dover quozientare lo spazio delle funzioni  $L^p$ .

Per definire lo spazio  $L^p(X, \mu)$  per  $p \in \mathbb{R}$  (sarà poi  $p \geq 1$ ) prendiamo<sup>1</sup>  $\{f : X \rightarrow \mathbb{R}^d : \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$  e lo quozientiamo secondo la relazione di equivalenza:  $f \sim g \iff f(x) = g(x) \mu\text{-q.o. } x \in X$ .

<sup>1</sup>quindi sono funzioni finite in modulo

### Osservazione 2.3

Nella definizione di integrabilità stiamo considerando la misura di Lebesgue sulla sigma algebra dei misurabili e non su quella dei boreliani<sup>2</sup>, come mai? Ricordando che  $f$  si dice *boreliana* se  $\forall A$  aperto si ha  $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$ , se consideriamo  $E = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ , dove  $f$  è boreliana, è un boreliano tale che  $\mu(E) = 0$ , ma *non* è detto che  $g$  sia boreliana<sup>3</sup>.

*Controesempio:* Sia  $E \subseteq C = f^{-1}(A) \Delta g^{-1}(A)$ . Consideriamo l'insieme di Cantor  $C$ , il quale non è boreliano, e poniamo  $f \equiv k_1$  e  $g = \begin{cases} k_1 & x \in C \\ k_2 & x \notin C \end{cases}$ .

### Proposizione 2.1

Siano  $\mu$  misura completa,  $f$  misurabile,  $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}/\mathbb{R}^d$  tale che  $E := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$  misurabile con  $\mu(E) = 0$ , allora anche  $g$  è misurabile.

### Definizione 2.2 – Norma $L^p$

Definiamo ora su  $L^p(X, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$  la seguente quantità:

$$\|f\|_{L^p(X, \mu)} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Se invece  $p = +\infty$  poniamo  $L^\infty(X, \mu) = Y/\sim$ , con

$$Y = \{f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}/\mathbb{R}^d : \exists M > 0 : |f(x)| < M \mu - \text{q.o. } x \in X\}$$

e consideriamo il *sup-essenziale* di  $|f|$

$$\|f\|_{L^\infty(X, \mu)} = \inf\{M : |f(x)| \leq M \mu - \text{q.o. } x \in X\}$$

### Osservazione 2.4

In generale si ha che:

1.  $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$
2. Nella definizione di  $\|f\|_\infty$ , l'inf considerato è in realtà un minimo, ossia per  $\mu$  quasi ogni  $x$  vale  $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$
3.  $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$  quasi ovunque
4.  $f_1 = f_2$  quasi ovunque  $\implies \|f_1\|_p = \|f_2\|_p$

### Teorema 2.3

Si dimostra che  $\|f\|_{L^p(X, \mu)}$  è ben definita ed è una norma su  $L^p(X, \mu)$  e  $(L^p(X, \mu), d_p)$  con la distanza  $d_p$  indotta da questa norma è completa ed è uno spazio vettoriale reale (o complesso se a valori in  $\mathbb{C}, \mathbb{C}^d$ ).

<sup>2</sup>Ricorda: i boreliani  $\mathcal{B}(X)$  sono una sottoclasse dei misurabili secondo Lebesgue

<sup>3</sup>La boreliantà non è stabile se prendo una funzione boreliana e la modifico su un boreliano di misura nulla di punti

### Proposizione 2.4 – Disuguaglianza di Young

$\forall a_1, a_2$  e per  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  tali che  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  vale

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

e si ha l'uguaglianza se e solo se  $a_1 = a_2$

*Dimostrazione.* Se  $a_1$  o  $a_2 = 0$  allora ho la tesi, sennò deriva dalla concavità del logaritmo su  $(0, +\infty)$ . Infatti passando al logaritmo si ha

$$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)$$

che è vera per la concavità del logaritmo. Il resto segue dalla *stretta* concavità del logaritmo.  $\square$

### Proposizione 2.5 – Disuguaglianza di Hölder

Siano  $f, g$  misurabili e siano  $p, q \geq 1$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  con la convenzione che se  $p = 1, q = +\infty$  (esponenti coniugati). Allora vale

$$\int_X |f(x)| |g(x)| d\mu \leq \|f\|_{L^p(X, \mu)} \cdot \|g\|_{L^q(X, \mu)}$$

con la convenzione che se  $\|f\|_{L^p(X, \mu)} = 0$  e  $\|g\|_{L^q(X, \mu)} = +\infty$  vale  $0 \cdot \infty = 0$ .

*Dimostrazione.* caso  $p > 1$  (per esercizio fare  $p = 1, q = +\infty$ ) Si usa la disuguaglianza di Young e ci riduciamo al caso  $\|f\|_{L^p} = 1 = \|g\|_{L^q}$ .

Se una è 0 o  $+\infty$  è ovvia, dunque ci possiamo ridurre al caso  $f \in L^p, g \in L^q$ . Se proviamo la disuguaglianza per  $\frac{f}{\|f\|_{L^p}}$  e  $\frac{g}{\|g\|_{L^q}}$  la deriviamo  $\forall f \in L^p, \forall g \in L^q$ . Se prendiamo per vera la disuguaglianza di Hölder per  $\|h\|_{L^p} = \|w\|_{L^q} = 1$

$$\int_X \left| \frac{f}{\|f\|_{L^p}} \frac{g}{\|g\|_{L^q}} \right| d\mu \leq \|h\|_{L^p} \|w\|_{L^q} = 1$$

ma

$$\int_X |hw| d\mu \leq 1 \iff \int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

che è la tesi. Resta dunque da dimostrare la disuguaglianza di Hölder nel caso  $\|f\|_{L^p} = 1 = \|g\|_{L^q}$ . Per la Proposizione (2) vale che

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

dunque se passiamo all'integrale abbiamo

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)||g(x)| d\mu &\leq \int_X \frac{1}{p}|f(x)|^p d\mu + \int_X \frac{1}{q}|g(x)|^q d\mu \\ \int_X |f(x)g(x)| d\mu &\leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{L^q}^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \end{aligned}$$

□

*Osservazione 2.5*

Se  $\|f\|_p, \|g\|_q < +\infty$  allora si ha l'uguaglianza in (2) se e solo se  $\exists c \in (0, +\infty)$  tale che  $|f|^p = c|g|^q$  quasi ovunque. Infatti si ha l'uguaglianza quando

$$|f(x)g(x)| = \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \quad \mu - q.o.$$

Che equivale a

$$\ln(xy) = \ln(\lambda x^p + (1 - \lambda)y^q) \iff x^p = y^q$$

Poichè nella dimostrazione vengono usate funzioni normalizzate, abbiamo l'uguaglianza  $\iff \exists c > 0$  tale che  $x^p = cy^q$ .

*Osservazione 2.6*

Date  $f_1, \dots, f_n$  e  $p_1, \dots, p_n$  tali che  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$  allora vale

$$\int_X \prod_i |f_i| d\mu \leq \prod_i \|f_i\|_{p_i}$$

**Teorema 2.6 – Disuguaglianza di Minkowski**

Date  $f, g$  tali che  $f, g \in L^p(X, \mu)$  allora anche  $f + g \in L^p(X, \mu)$  e

$$\|f + g\|_{L^p(X, \mu)} \leq \|f\|_{L^p(X, \mu)} + \|g\|_{L^p(X, \mu)}$$

*Osservazione 2.7*

Il precedente teorema vale anche per somme infinite. Data una successione  $\{g_n\}$  di funzioni misurabili positive su  $X$  vale

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p$$

(segue per la disuguaglianza di Minkowski e per convergenza monotona)

**Corollario 2.7**

Si ha  $\|\lambda f\|_{L^p(X, \mu)} = |\lambda| \|f\|_{L^p(X, \mu)}$

**Corollario 2.8**

$L^p(X, \mu)$  è uno spazio vettoriale normato

*Dimostrazione.* Segue dalla disuguaglianza di Hölder. Consideriamo

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &= |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \end{aligned}$$

e se chiamiamo  $h(x) = |f(x) + g(x)|^{p-1}$  allora

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \leq \int_X |f(x)|h(x) d\mu + \int_X |g(x)|h(x) d\mu$$

visto che  $f(x), g(x) \in L^p, h(x) \in L^q$  per Hölder si ha

$$\leq \left[ \left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left( \int_X h^q(x) d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

e visto che gli esponenti sono coniugati si ha  $p = (p-1)q$  e dunque

$$h^q(x) = |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} = |f(x) + g(x)|^p$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left( \int_X h^q(x) d\mu \right)^{\frac{1}{q}} &= \left( \int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{1 - \frac{1}{p}} = \|f + g\|_{L^p}^{p(1 - \frac{1}{p})} \\ &= \|f + g\|_{L^p}^{p-1} \end{aligned}$$

Notiamo che la quantità  $\|f + g\|_{L^p} < +\infty$  infatti, poichè per  $p > 1$   $(0, +\infty) \ni t \rightarrow t^p$  abbiamo

$$2^p \left( \frac{|f(x) + g(x)|}{2} \right)^p \leq (\|f(x)\|^p + \|g(x)\|^p)$$

dato che

$$\left| \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2}(t_1^p + t_2^p)$$

da cui

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p = \int_X 2^p \left| \frac{f(x)}{2} + \frac{g(x)}{2} \right|^p \leq 2^{p-1} \left( \int_X |f(x)|^p + \int_X |g(x)|^p \right)$$

□

### Teorema 2.9

$(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$  per  $p \geq 1, p = \infty$  è completo

*Dimostrazione.* Se  $p = +\infty$  usiamo la completezza della norma del sup. Data  $\{f_n\}$  di Cauchy in  $L^\infty$ , costruiamo  $N$  tale che  $\mu(N) = 0$  e  $\{f_n\}$  di Cauchy rispetto alla norma del sup su  $X \setminus N$ .

Per il caso  $p$  reale usiamo il criterio di completezza per serie, vedasi (37.1). Sia  $\{f_n\}$  una successione di Cauchy in  $L^p$ , ossia  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall m, n > n_\varepsilon \|f_n - f_m\|_{L^p(X, \mu)} < \varepsilon$ . Se  $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$  selezioniamo  $n_k$  e troviamo una sottosuccessione

$f_{n_k}$  tale che  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$ . Definiamo<sup>4</sup>  $g_N(x) = \sum_{k=1}^{N-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ .

Notiamo che

$$\|g_N\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{N-1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2^k} \leq 1$$

dunque  $g_N(x)$  è limitata in  $L^p$  ed è positiva, crescente come funzione di  $n$ . Analogamente  $g_N^p(x)$ . Applicando Beppo-Levi a  $g_N^p(x)$  otteniamo che  $\sup g_N(x) = g(x) \geq 0$  misurabile e verifica

$$\int_X g^p(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_N^p(x) d\mu \leq 1$$

*Osservazione 2.8*

Deduciamo quindi che  $g^p(x)$  è finito  $\mu$ -q.o. perchè ha integrale finito.

Dunque  $g(x)$  è una serie convergente  $\Rightarrow$  converge se togliamo i moduli (la dimostrazione continua a valere se in arrivo si ha uno spazio vettoriale completo). Ma dunque

$$f_{n_N}(x) - f_{n_1}(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$$

converge quasi ovunque. ( $f_{n_1}$  è fissata). Chiamiamo  $f(x) = \lim f_n(x)$   $\mu$ -q.o. e otteniamo che

$$|f(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + |g(x)|$$

La stima vale anche per la somma totale della serie

$$|f_{n_N}(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + |g(x)|$$

dove  $f_{n_1}(x), g(x) \in L^p$ , dunque applicando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ha che

$$\int_X |f_{n_N}(x) - f(x)|^p d\mu \rightarrow 0$$

□

### Corollario 2.10

Data  $\{f_n\}$  di Cauchy in  $L^p(X, \mu)$  si dimostra che  $\exists f_{n_k}$  convergente  $\mu$ -q.o. a  $f(x) \in L^p$  ed  $\exists g \in L^p$  tale che  $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$   $\mu$ -q.o.  $x \in X$ .

<sup>4</sup>Non è facile da ricordare, bisogna tenere a mente che vogliamo una serie telescopica con modulo.



### 3 Lezione 03/10 - Esercitazione

Ricordiamo cosa vuol dire fare  $\|\cdot\|_{L^p}$

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_X |u(x)|^p dx$$

Perchè è interessante? Perchè è norma, misura in un certo senso la funzione ed è definita  $1 \leq p < +\infty$ . Se  $p = +\infty$  si ha

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup\{|u(x)|, x \in X\}$$

dove il sup è *essenziale*: è inteso come sup a meno di insiemi di misura nulla, ossia

$$\begin{aligned} \text{ess-sup } |u| &= \max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\{u > \lambda - \varepsilon\}| > 0 \forall \varepsilon\} \\ &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\{u > \lambda\}| > 0\} \end{aligned}$$

*Esercizio 3.1*

È vero che  $\|u\|_{L^p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^\infty}$ ?

**Idea** se ragioniamo con misura di Dirac abbiamo paragone con media  $p$ -esima. ┘

$$\int_X |u(x)|^p \leq \int_X \|u\|_{L^\infty}^p = \|u\|_{L^\infty}^p \int_X 1$$

qui abbiamo due possibilità:

1. Se  $|\{u \neq 0\}| < +\infty$  si ha che  $\int_X 1 < \infty$  e dunque possiamo procedere nel conto

$$\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^\infty} \left( \int_X 1 \right)^{\frac{1}{p}}$$

quindi

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^\infty}$$

Attenzione: non si usa lim perchè non si sa se esiste, ragiona con lim sup, lim inf, dove in questo caso è più ragionevole usare lim sup

2. Se  $|\{u \neq 0\}| = \infty$  lo vediamo dopo

Al momento si ha  $\limsup \|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^\infty}$ , vediamo l'altra disuguaglianza.

Sia  $0 < \lambda < \|u\|_{L^\infty}$ . Allora  $|\{u > \lambda\}| = a > 0, < +\infty$  poichè  $\lambda$  non è il *ess-sup*.

$$\|u\|_{L^p}^p \geq \int_{\{|u| > \lambda\}} |u|^p \geq \lambda^p |\{u > \lambda\}|$$

quindi

$$\|u\|_{L^p} \geq \lambda a^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \liminf_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^p} \geq \lambda \Rightarrow \liminf_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^p} \geq \|u\|_{L^\infty}$$

dove  $\liminf a^{\frac{1}{p}} = 1$  e l'ultima implicazione segue poichè siamo passati al  $\sup_{\lambda \leq \|u\|_\infty}$ .  
 Dunque abbiamo dimostrato che, se  $|\{u \neq 0\}| < +\infty$  si ha  $\|u\|_{L^p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|u\|_{L^\infty}$ .

Se invece questo insieme avesse misura infinita?

La  $\geq$  resta valida, infatti  $\|u\|_{L^p} = \infty$ . Per l'altra? Salta, basta infatti considerare una funzione  $\equiv 1$ . Però vale che  $\liminf \|u\|_{L^p} \geq \|u\|_{L^\infty}$ .

Cerchiamo di giocare un po' con le funzioni  $L^p$  ora:

*Esercizio 3.2*

Esiste un esempio di funzione tale che  $\liminf \|u\|_{L^p} > \|u\|_{L^\infty}$ , ma con  $\liminf \|u\|_{L^p} < \infty$ ?

**Idea** Ricorda: se abbiamo un sopralivello tale che  $\mu(\{|u| > \lambda\}) = +\infty$  allora  $\forall p, \|\cdot\|_{L^p} = +\infty$ . Quindi quando cerchiamo di costruire una funzione tale che  $\|u\|_{L^\infty} = 1$  ci interessa la misura dei sopralivelli. Come deve essere? Devono essere tutte finite, sennò tutte le norme sono infinite. D'altra parte se il livello tende a zero, la misura deve andare all'infinito, perchè se non ci va vuol dire che il supporto ha misura finita, ma allora ricadremmo nel caso precedente. Dobbiamo inventarci delle misure di sopralivelli, più il sopralivello è piccolo più questo ha misura grande. Vogliamo che questa misura esploda all'infinito, ma resti finita. ┘

Se prendiamo una funzione che vale  $\varepsilon$  su insieme di misura  $\frac{1}{\varepsilon^p}$  allora  $\|\cdot\|_{L^p} = 1$ . Ma allora se la consideriamo su insieme di misura  $\frac{2}{\varepsilon^p}$  ha  $\|\cdot\|_{L^p} = 2$ .

Consideriamo allora la funzione lineare a tratti rappresentata in Figura 1, dove osserviamo che, visto che vogliamo  $\|u\|_{L^\infty} = 1$ , non possiamo far andare la funzione sopra a 1 su un insieme di misura non nulla.

Ma allora con questa costruzione abbiamo che, con  $p = 2^n$ ,  $\|\cdot\|_{L^p} \geq 2 \Rightarrow \liminf \|u\|_{L^p} \geq 2$ , non è che abbiamo esagerato? Controlliamo la  $\|\cdot\|_2$  di questo oggetto

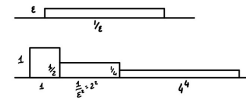


Figura 1: Il pezzo  $p$  considerato ha  $\|\cdot\|_{L^p} = 1$

$$\int |u|^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4^2} 4^4 + \frac{1}{8^2} 8^8$$

e quindi  $\rightarrow +\infty$ , non va bene. Notiamo che  $\|\cdot\|_{L^2} \geq \|\cdot\|_{L^4}$  sul pezzo 4, il che fa saltare tutto. Ci chiediamo se sia possibile migliorare questo ragionamento. (Spoiler: No!).

Prima di continuare questo esercizio, ragioniamo un attimo meglio su come  $\|\cdot\|_{L^p}$  sono legate, sfruttando le funzioni costanti a tratti/funzioni a scala (usiamo la disuguaglianza di Hölder).

Preso una funzione a scala che vale  $a$  su insieme di larghezza  $k$ . Questa ha  $\|u\|_{L^p} = ak^{\frac{1}{p}}$ . Dunque

- *Osservazione che si basa su larghezza:* se  $p > q$  vale  $\|u\|_{L^p} > \|u\|_{L^q} \iff k < 1$ . Quindi se ho una funzione a scala non mi interessa quanto sia alta.
- *Osservazione che si basa su altezza:* Se  $\|u\|_{L^p} = 1 \iff ak^{\frac{1}{p}} = 1 \iff \|u\|_{L^q} = ak^{\frac{1}{q}} = a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{1-\frac{p}{q}} > 1$  se  $a < 1$ .

Ossia: se la funzione è piccola si ha  $\|\cdot\|_{L^q} > \|\cdot\|_{L^p}$  con  $q < p$ . (se sei basso la norma più piccola è grossa)

Dunque possiamo dire che:

Una funzione stretta e alta ha norme grandi più grandi.  
Una funzione larga e bassa ha norme grandi più piccole.

**Idea** Questo fa rivedere sotto un altro punto di vista che se abbiamo misura finita allora dati  $p > q$  vale  $\|u\|_{L^q} \leq c \cdot \|u\|_{L^p}$  ossia che  $L^q \supseteq L^p$ . Altrimenti, usando quanto detto, è possibile esibire una funzione a scala che faccia da controesempio.<sup>5</sup> Questa è un'ovvia conseguenza di Hölder, però è importante averlo ben chiaro in testa con questa idea di alto/stretto e basso/largo.  $\lrcorner$

Quando è che, se  $p > q$ , vale  $L^p \subseteq L^q$ ? Se  $u \in L^\infty$ , ossia se la funzione è limitata infatti l'idea è quella di prendere la situazione precedente e scambiare altezza e larghezza. (se la misura non fosse finita, salterebbero tutte le inclusioni: infatti non avremmo controllo su quanto la funzione si possa allargare/alzare)

*Esercizio 3.3*

Esibire una funzione  $\varphi$  che stia in  $L^2$ , ma non in  $L^p$  con  $p > 2$ . Se invece chiedessimo che  $\varphi \notin L^p$  per  $p \neq 2$ ?

*Risoluzione:* Consideriamo  $\varphi(s) := \int_X f^s dx$  con  $f = \frac{1}{x \log^2(x)}$  e  $X := ]0, \frac{1}{e}[ \cup ]e, +\infty[$ . Vale che  $\varphi(s) < +\infty \iff s = 1$ .

Volendo generalizzare la richiesta, quindi se volessimo esibire una funzione  $\varphi$  tale che  $\varphi \in L^p$  e  $\notin L^q \forall q \neq p$ , ci basterebbe considerare  $\varphi(s) = \int_X f^s dx$  con  $f := \frac{1}{x^{\frac{1}{p}} \log^{\frac{2}{p}}(x)}$ .  $\square$

Come possiamo dimostrare che se  $u \in L^q$  e  $u \in L^\infty$  allora  $u \in L^p$ ?

Si potrebbe fare utilizzando la disuguaglianza di Hölder, ma, per fini didattici, continuiamo a usare le idee introdotte fino ad ora. Infatti la condizione imposta non è altro che un modo di dire che  $u$  viene schiacciata, ossia: Affinchè  $u \notin L^p$  dovrei avere  $\int |u|^p = \infty$ , ma questo è possibile solo se:

- $u$  è alta e stretta, ossia grande su un insieme piccolo, che è impedito da  $u \in L^\infty$
- $u$  è bassa e larga, ossia piccola su un insieme largo, che è impedito da  $u \in L^q$ .

Formalmente:

$$\begin{aligned} \int_X |u(x)|^p &= \int_{\{|u|>1\}} |u(x)|^p + \int_{\{|u(x)|\leq 1\}} |u(x)|^p \\ &\leq \|u\|_{L^\infty} |\{u > 1\}| + \int_{\{|u|\leq 1\}} |u(x)|^q < +\infty \end{aligned}$$

dove  $\|u\|_{L^\infty} < +\infty$  poichè  $u \in L^\infty$  e  $\int_{\{|u|\leq 1\}} |u(x)|^q < \infty$  perchè  $\leq \|u\|_{L^q}$   $\square$

<sup>5</sup>Hint: si consideri un'unione numerabile di funzioni a scala che abbia norma 4 finita, e norma 2 che diverge

Notiamo che l'ipotesi  $u \in L^\infty$  può essere indebolita: basta avere  $u \in L^r$  con  $r > p$  così

$$\int |u(x)|^p \leq \int_{\{|u|>1\}} |u(x)|^r + \int_{\{|u|\leq 1\}} |u(x)|^q < \infty$$

Dunque se  $q < p < r$  e  $u \in L^q, \in L^r \Rightarrow u \in L^p$ . Inoltre vale

$$\|u\|_{L^p}^p \leq \|u\|_{L^q}^q + \|u\|_{L^r}^r$$

Dunque, data una qualsiasi funzione  $u$ , si ha che  $\{p|u \in L_p\}$  è un intervallo.

#### Esercizio 3.4

Trovare  $u$  tale che  $u \in L^p \forall p \in (3, 5)$  ma  $u \notin L^3, \notin L^5$ ?

Se invece avessimo utilizzato la disuguaglianza di Hölder?

$$\|u\|_{L^p} = \|u^\alpha u^{1-\alpha}\|_{L^p}$$

Riscriviamo<sup>6</sup> la prima in modo da avere  $\|\cdot\|_{L^1}$  (abbiamo quindi una versione di Hölder generalizzato):

$$\|u^{p\alpha} u^{p(1-\alpha)}\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \leq \|u^{p\alpha}\|_{L^s}^{\frac{1}{p}} \|u^{p(1-\alpha)}\|_{L^{s'}}^{\frac{1}{p}}$$

e poichè  $q < p < r$  posso scrivere  $p = \alpha r + (1 - \alpha)q$ , vale quindi

$$\leq \|u\|_{L^q}^{1-\alpha} \|u\|_{L^r}^\alpha$$

e questa ci dà una *stima di interpolazione* :

- $u \in L^q$  e  $\in L^r$  allora  $u \in L^p \forall p \in [q, r]$
- Preso  $p = \alpha r + (1 - \alpha)q$  vale

$$\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^q}^{1-\alpha} \|u\|_{L^r}^\alpha$$

- è lineare
- se  $p \rightarrow q : \alpha \rightarrow 0$  e dunque mi avvicino a  $\|\cdot\|_{L^q}$ , ossia la norma è continua rispetto a  $p$ . Se  $p \rightarrow q$  l'effetto di  $\|\cdot\|_{L^r}$  è sempre meno importante.

#### Esercizio 3.5

Mostrare che se  $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2$ , presa una combinazione convessa  $\frac{1}{p} = \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}$  con  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  allora

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^{\lambda_1} \|f\|_{p_2}^{\lambda_2}$$

*Risoluzione:* Visto che  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  possiamo scrivere

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p = \int_X |f|^{(\lambda_1 + \lambda_2)p} dx = \int_X |f|^{\lambda_1 p} |f|^{\lambda_2 p} dx$$

<sup>6</sup>suggerimento generale: riportarsi a questa versione aiuta ad evitare di sbagliare, è più semplice

Detti  $q_1 = \frac{p_1}{\lambda_1 p}$  e  $q_2 = \frac{p_2}{\lambda_2 p}$  notiamo che sono esponenti coniugati, infatti

$$\frac{\lambda_1 p}{p_1} + \frac{\lambda_2 p}{p_2} = \frac{(\lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_1)p}{p_1 p_2} = 1$$

Allora per Hölder

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{\lambda_1 p} |f|^{\lambda_2 p} dx &\leq \left( \int_X |f|^{p_1} dx \right)^{\frac{\lambda_1 p}{p_1}} \left( \int_X |f|^{p_2} dx \right)^{\frac{\lambda_2 p}{p_2}} \\ &= \|f\|_{p_1}^{\lambda_1 p} \|f\|_{p_2}^{\lambda_2 p} \end{aligned}$$

□

### Esercizio 3.6

Se lo spazio  $X$  ha misura finita,  $p \rightarrow \|u\|_{L^p}$  è continua in  $[1, +\infty]$ .  
Se ha misura infinita,  $p \rightarrow \|u\|_{L^p}$  è continua solo in  $[1, +\infty)$

Torniamo all'esercizio di prima. Ci stavamo chiedendo:

$$\exists u : \|u\|_{L^\infty} < \liminf_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^p} < +\infty ?$$

*Risoluzione:* Supponiamo  $\|u\|_{L^\infty} = 1$  per comodità, ovviamente non cambia nulla. Scrivo lo spazio come  $A \cup B$ , dove

$$A = \left\{ x : |u(x)| > \frac{1}{2} \right\} \quad B = \left\{ x : |u(x)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$A$  ha misura finita o no? Se  $|A| = +\infty$ , allora  $\|u\|_{L^p} = +\infty \forall p < +\infty$  quindi non è un esempio che vogliamo noi. Perciò  $|A| < +\infty$  e allora

$$p \rightarrow \|u\|_{L^p(A)} \text{ è continua in } [1, +\infty]$$

Che succede in  $B$ ? Se  $\limsup \|u\|_{L^p(B)}^p < 1$ , allora  $\|u\|_{L^p} \rightarrow 1$  per  $p \rightarrow +\infty$ . Infatti:

$$\|u\|_{L^p} = \left( \|u\|_{L^p(A)}^p + \|u\|_{L^p(B)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Visto che  $\|u\|_{L^p(A)} \rightarrow 1$  se  $\limsup \|u\|_{L^p(B)} < 1$  allora abbiamo  $\|u\|_{L^p} \rightarrow 1$ , quindi non è controesempio.

Un controesempio, insomma, dovrebbe avere  $\limsup \|u\|_{L^p} \geq 1$ . Sia allora  $q$  qualsiasi, dimostriamo  $\|u\|_{L^q} = +\infty$ .

Sia  $p \gg q$  tale che  $\|u\|_{L^p(B)}^p > \frac{2}{3}$ . Allora

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &\leq \|u\|_{L^p(B)}^p = \int_B |u(x)|^p \leq \left( \frac{1}{2} \right)^{p-q} \int_B |u(x)|^q = \left( \frac{1}{2} \right)^{p-q} \|u\|_{L^q}^q \\ &\implies \|u\|_{L^q}^q \geq \frac{2}{3} \frac{2^p}{2^q} \gg 1 \end{aligned}$$

il pezzo dipendente da  $q$  è fissato e quello da  $p$  può essere grosso quanto vogliamo. Cioè, se  $\|u\|_{L^\infty} \neq \lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^p}$  allora  $\|u\|_{L^\infty}$  è finito, e  $\|u\|_{L^q} = +\infty \forall q \in [1, +\infty)$ .

*Esercizio 3.7*

Sia  $u(x) = |x|^\alpha$  in  $B_1 \subseteq \mathbb{R}^N$ . In che  $L^p$  sta?

*Soluzione:*  $u \in L^\infty \iff \alpha \geq 0$  e dunque  $u \in L^p \forall p$ . Se invece  $\alpha < 0$ :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_p^p &= \int_{B_1} |u(x)|^p = \int_{B_1} |x|^{\alpha p} dx = N\omega_n \int_0^1 \rho^{\alpha p} \rho^{N-1} d\rho \\ &= N\omega_n \int_0^1 \rho^{\alpha p + N - 1} d\rho < \infty \iff \alpha p + N - 1 > -1 \end{aligned}$$

ossia<sup>7</sup>  $p < -\frac{N}{\alpha}$ .

*Esercizio 3.8 - Variante di Esercizio 3.7*

Se considerassimo  $|y| \leq x^2$  sulla palla unitaria?

*Risoluzione:* Controlliamo la funzione nella zona colorata in Figura 2: ossia

$$\int_{B \cap \{|y| \leq x^2\}} |x|^{\alpha p} = \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^{\alpha p} \rho \chi_{(\{\rho, \theta \in Dom\})} d\theta d\rho$$

ma in realtà io ci limitiamo a punti piccoli, in cui "altezza assomiglia a  $\rho$ " e quindi  $\chi = \rho$ .

Se volessimo precisare il "altezza assomiglia a  $\rho$ ": allora dato  $\rho$ , vale  $\rho^2 \cos^2(\theta) = \rho \sin(\theta)$  e quindi  $\theta = \arcsin(\rho \cos^2(\theta))$

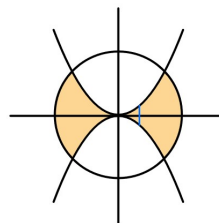
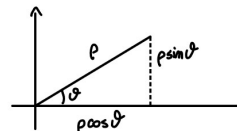


Figura 2:  $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Stimma altezza blu con  $\rho$



Tornando alla domanda iniziale:  $\exists u$  tale che  $\|u\|_{L^\infty} = 1$  e  $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^p} = 2$ ?

*Risoluzione:* Supponiamo che per un certo  $p$  enorme sia  $\|u\|_{L^p} = 2$ :

$$\int |u(x)|^p dx = \int_{\{|u| > \frac{1}{2}\}} |u|^p + \int_{\{|u| < \frac{1}{2}\}} |u|^p = 2^p$$

dunque l'unica speranza per creare controesempio è che tutto il  $2^p$  stia nel primo addendo. Ora se  $|u| > \frac{1}{2}$ , bisogna che l'insieme  $\{|u| > \frac{1}{2}\}$  sia limitato, ma in insiemi limitati  $\|\cdot\|_{L^p}$  è continua in  $p$ , dunque non funziona.

<sup>7</sup>La costante  $\frac{N}{p}$  tornerà spesso per chi vedrà gli spazi di Sobolev

## 4 Lezione 04/10 - Teoria

### 4.1 Convergenze su funzioni misurabili

Ricordiamo i diversi tipi di convergenze possibili:

1. Si dice che  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -q.o. su  $E$ , dove  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{R}^d$ , se  $\exists F$  di misura nulla tale che  $f_n|_{F^c} \rightarrow f|_{F^c} \forall x$ , ossia se avviene la convergenza a meno di insieme di misura nulla. Possiamo dunque pensare che questa sia una classe di equivalenza e che quindi possiamo cambiare le  $f_n$  su insieme di misura nulla.
2. Si dice che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(X, \mu)$ ,  $1 \leq p < +\infty$  se  $\|f_n - f\|_{L^p(X, \mu)} \rightarrow 0$  ed è indipendente dalla scelta dei rappresentanti.
3. Si dice che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^\infty(X, \mu)$  se  $\|f_n - f\|_{L^\infty(X, \mu)} \rightarrow 0$  vale a dire  $\exists F, \mu(F) = 0$  e  $f_n|_{F^c} \rightarrow f|_{F^c}$  uniformemente.
4. Si dice che  $f_n \rightarrow f$  in misura se

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Notiamo che per tutti i tipi di convergenza che verranno affrontati in questo corso verrà la proprietà di Urysohn<sup>8</sup>.

Vogliamo ora capire che legami esistono tra queste convergenze (definite su classi di equivalenza):

1.  $f_n \rightarrow f$  quasi ovunque e  $\mu(X) < +\infty \Rightarrow f_n \rightarrow f$  in misura.
2.  $f_n \rightarrow f$  quasi ovunque e  $\mu(X) < +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$  esiste  $E \in \mathcal{A}$  tale che  $\mu(E) < \varepsilon$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus E$ .
3.  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p, p < +\infty \Rightarrow f_n \rightarrow f$  in misura.
4.  $f_n \rightarrow f$  in  $L^\infty \Rightarrow \exists E$  tale che  $\mu(E) = 0$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus E$ .
5.  $f_n \rightarrow f$  in misura  $\Rightarrow \exists n_k$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -quasi ovunque.

*Osservazione 4.1*

Se  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$  allora  $\exists n_k$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -quasi ovunque.

In 1. e in 2. l'ipotesi  $\mu(X) < +\infty$  è necessaria: un controesempio è  $X = \mathbb{R}$  e  $f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$  che va sempre a zero ma il suo limite va a  $+\infty$ .

*Dimostrazione di 1.*

**Idea** Fissato  $\varepsilon > 0$ , vogliamo dire che abbia misura nulla il seguente insieme:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon &:= \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ per infiniti indici } n\} \\ &= \{x \in X : x \in A_n^\varepsilon \text{ frequentemente}\} \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Ricordiamo che *non* vale per la convergenza quasi certa.

A tal fine si considera la sua relazione con  $A_n^\varepsilon = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$  così che  $N_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^\varepsilon$  dove  $B_m^\varepsilon$  decrescente con  $B_1^\varepsilon \subseteq X$  di misura finita, ma allora

$$0 \leftarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \mu(A_m^\varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n^\varepsilon) = \mu(N_\varepsilon) = 0$$

dove l'ultimo uguale segue per l'ipotesi di convergenza puntuale  $\mu$ -q.o.x. Visto che  $\mu(X) < +\infty \Rightarrow f_n \rightarrow f$  in misura.  $\square$

*Dimostrazione di 3. Caso  $p = 1$ :* Sia  $A_n^\varepsilon = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)|^p \geq \varepsilon^p\}$  si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu(A_n^\varepsilon) &\stackrel{*}{\leq} \int_{A_n^\varepsilon} |f_n - f|^p \leq \int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \\ &= \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

in cui in \* usiamo la *disuguaglianza di Markov*:  
Data  $g : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile e  $> 0$  vale che

$$\mu(\{x \in X : g(x) \geq m\}) \leq \frac{1}{m} \int_X g d\mu$$

Chiaramente vale anche per  $p \neq 1$ .  $\square$

*Dimostrazione di 4.* Se  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(X, \mu)$  con  $p \in [1, +\infty)$  allora  $\exists f_{n_k}$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -q.o. (questa è una conseguenza della dimostrazione della completezza degli spazi  $L^p$ ).

Se invece  $p = +\infty$  vale  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -q.o.  $\square$

*Osservazione 4.2*

I due viceversa sono in generale falsi: ad esempio  $g_n(x) = \mathbb{1}_{[n, \infty]}$  oppure  $f_n(x) = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$  convergono puntualmente, ma in nessun  $L^p$  (la prima è meno significativa essendo un insieme di misura infinita). Vale che  $f_n \rightarrow 0$   $\mathcal{L}^1$ -q.o., ma  $\int f_n d\mu = 1$ , il che è un assurdo, perchè se avvenisse si avrebbe  $\int |f_n - 0| d\mu \rightarrow 0$ . Altro esempio è  $f_n(x) = e^{nx}$  su  $[0, 1]$  che converge puntualmente, ma non uniformemente.

### Teorema 4.1 – Teorema di Severini-Egoroff

Se  $\mu(X) < +\infty$  e  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -q.o.  $x \in X$ , con  $f_n$  misurabili, allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists E$  misurabile con  $\mu(E) < \varepsilon$  tale che  $f_n|_{E^c} \rightarrow f|_{E^c}$  uniformemente. ( $f_n \rightarrow f$  quasi uniformemente).

La sua dimostrazione è molto profonda e fa fare riflessioni utili in generale.

*Dimostrazione.* Visto che la convergenza  $\mu$ -q.o.x. implica la convergenza in misura, abbiamo che, prese le notazioni della dimostrazione precedente, abbiamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n^\varepsilon) = 0$ . Dunque  $\forall k \exists n_k$  tale che  $\mu(B_{n_k}^{\frac{1}{2k}}) \leq \frac{\varepsilon}{2k}$ .



Consideriamo  $E = \cup_k B_{n_k}^{\frac{1}{k}}$ . Chiaramente vale  $\mu(E) \leq \varepsilon$  e

$$\begin{aligned} x \in X \setminus E &\Rightarrow x \notin B_{n_k}^{\frac{1}{k}} \forall k \iff x \notin A_m^{\frac{1}{k}} \forall k, m \geq n_k \\ &\Rightarrow |f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall k, m \geq n_k \\ &\Rightarrow \sup_{x \in X \setminus E} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k, m \geq n_k \\ &\Rightarrow f - f_n \text{ uniformemente su } X \setminus E \end{aligned}$$

□

*Osservazione 4.3*

L'ipotesi  $\mu(X) < +\infty$  è essenziale altrimenti  $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, +\infty]} \rightarrow 0$ , ossia non avrei convergenza uniforme nel complementare.

*Osservazione 4.4*

Non valgono:

- $f_n \rightarrow f$  in misura  $\not\Rightarrow f_n \rightarrow f$  quasi ovunque.
- $f_n \rightarrow f$  in  $L^p, p < +\infty \not\Rightarrow f_n \rightarrow f$  quasi ovunque.

*Controesempio:* in  $X = [0, 1], \mu = \mathcal{L}^1$  prendiamo  $[0, 1]$  e ogni volta lo bisechiamo:

$$\mathbb{1}_{[0,1]}, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2})}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4}]}, \dots$$

**Idea** Così  $\forall h \in \mathbb{N}$  dividiamo  $[0, 1]$  in  $2^h$  intervalli di ampiezza  $\frac{1}{2^h}$ . Ossia  $\forall k = 0, \dots, 2^h - 1$  consideriamo  $f_{h,k}(x) = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^h}, \frac{k+1}{2^h}]}$ .  $f_{h,k}$  va a zero in misura e in  $L^p, p < +\infty$  infatti  $0 \xleftarrow[k \rightarrow \infty]{h \rightarrow \infty} \int |f_{h,k}|^p = \frac{1}{2^h} \forall k = 0, \dots, 2^h - 1$ . Ma  $f_{h,k}$  non converge puntualmente a 0, infatti fissato  $x \in (0, 1)$  si ha  $f_{h,k}(x) = 1$  per infiniti indici ma

$$\liminf f_{h,k} = 0 \quad \text{e} \quad \limsup f_{h,k}(x) = 1$$

è esempio tipico di "ondine".

┘

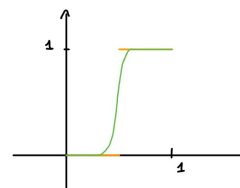
*Osservazione 4.5*

È possibile sostituire nelle ipotesi dei teoremi di convergenza dominata l'ipotesi con  $f_n \rightarrow f$  in misura.

*Dubbio:* se prendiamo una funzione discontinua in  $L^p$ , esiste una funzione  $g$  in quella classe di equivalenza che coincide con lei quasi ovunque ed è continua? Notiamo che in  $L^\infty$  è facile costruire un esempio di  $f$  limitata che però è distante da ogni funzione continua. Questa domanda giustifica il *Teorema di Lusin* (che vedremo nella prossima lezione).

Controesempio: Con  $\mu = \mathcal{L}^1, X = [0, 1]$ , sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Allora  $f(x) \in L^p(X, \mu) \forall p \geq 1, p = +\infty$ . Domanda:  
 $\exists g \in C^0([0, 1])$  tale che  $\|g - f\|_{L^\infty(X, \mu)} = 0 \iff g = f$   
 a meno di un insieme di misura nulla.

Figura 3: In arancione  $f(x)$ , in verde  $g(x)$

Viene da dire di no, che in effetti è la risposta, infatti si ha

$$\inf_{g \in C^0([0, 1])} \|g - f\|_{L^\infty(X, \mu)} > 0$$

Ma la domanda è: quanto vale questo inf? Provate a pensarci. Esempio è molto significativo, provate a fare calcolo pulito. (la risposta è  $\frac{1}{2}$ ).

Se valesse  $\|g - f\|_{L^\infty} = 0$ , ci deve essere un insieme di misura positiva in cui  $g(x)$  vale 0 e vale 1 e, per continuità, questi devono essere raccordati.

Ulteriore domanda:  $\exists g$  continua che dista 0 da  $f$  in  $L^p$ ?

#### Definizione 4.2 – Funzione a supporto compatto

Una funzione  $f$  si dice *a supporto compatto* se la chiusura dell'insieme dei punti in cui è diversa da 0 è compatto<sup>a</sup>. Si indica  $f \in C_C^0$ .

<sup>a</sup>Ricordiamo che l'insieme dei punti in cui è diversa da zero è sempre aperto.

#### Teorema 4.3

Le funzioni continue  $C_C^0(\mathbb{R}^d)$  sono dense in  $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d) \forall 1 \leq p < +\infty$ . In realtà il risultato segue anche se il supporto non è compatto.

#### Osservazione 4.6

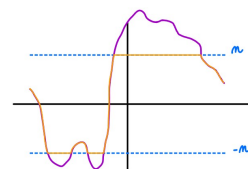
L'esempio precedente mostra che la tesi non vale con  $p = +\infty$ .

*Dimostrazione.* L'idea di questo risultato è di ridursi a step, caso di  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  (vale anche a valori in  $\mathbb{R}^k$ )

1. Ci si riduce a dimostrare che basta **approssimare una funzione  $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)$  con funzioni limitate e a supporto limitato.**

Infatti data  $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)$  consideriamo  
 $f_n(x) = (-n) \vee (f(x) \wedge n)$ . Notiamo che  
 $|f_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$  e che  $f_n(x) \rightarrow f(x) \mu$ -q.o.  
 $x \in \mathbb{R}$ . Da questo si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int |f_n - f|^p \mathcal{L}^d = 0$$



Per ora abbiamo detto che una funzione in  $L^p$  è sempre limite di una successione di funzioni limitate.  
 Figura 4: In viola  $f(x)$ , in arancione  $f_n(x)$

Dunque  $f$  è limitata su  $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)$ . Definiamo  $\tilde{f}_n(x) = f(x)\mathbb{1}_{B(0,n)}(x)$ . Segue che  $\tilde{f}_n(x) \rightarrow f(x)$   $\mu$ -q.o. e  $|\tilde{f}_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$ , da cui per il teorema di Lebesgue  $\tilde{f}_n \rightarrow f$  in  $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)$

2. Dimostriamo ora che ogni  $f \in L^p$  limitata e a supporto compatto è **approssimabile con una somma finita di funzioni semplici definite su insiemi di misura finita**. Per definizione di integrale  $f$  è limite puntuale di funzioni semplici a supporto compatto e  $\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{N_n} \alpha_{in} \mathbb{1}_{E_n^i}$  con  $E_n^i$  misurabili, senza perdita di generalità disgiunti e  $\mathcal{L}^d(E_n^i)$  finita con  $0 \leq \varphi_n(x) \leq |f(x)|$ . Dunque le  $\alpha_i$  sono equilimitate e  $\varphi_n(x) \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)} f(x)$

2.1. In realtà, per  $p < +\infty$ , le  $f \in L^p$  con supporto limitato sono dense<sup>9</sup>. Infatti: fissati  $f \in L^p(X)$ ,  $x_0 \in X$  e  $\forall r > 0$  poniamo  $f_r := f\mathbb{1}_{B(x_0,r)}$ . Allora

$$f_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} f(x) \quad \forall x \in X$$

ma dunque, per il teorema di convergenza dominata,

$$\|f_r - f\|_p^p = \int_X |f_r - f|^p = \int_X |f|^p \mathbb{1}_{X \setminus B(x_0,R)} d\mu \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

3. Vogliamo ora approssimare una **funzione semplice con pezzi finiti di misura finita**, ossia

$$\varphi(x) = \alpha_1 \mathbb{1}_{E^1} + \dots + \alpha_N \mathbb{1}_{E^N}$$

con  $E^i \subseteq B(0, M)$ . Ma allora mi basta approssimare  $\mathbb{1}_E$  con  $E$  misurabile limitato. Ricordando la regolarità della misura di Lebesgue<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^d(E) &= \inf\{\mathcal{L}^d(A) : A \supseteq E \text{ } A \text{ aperto } \mu\text{-q.o.}\} \\ &= \sup\{\mathcal{L}^d(K) : K \subset E \text{ } K \text{ compatto } \mu\text{-q.o.}\} \end{aligned}$$

Ma allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon$  compatto,  $\exists A_\varepsilon$  aperto tali che  $K_\varepsilon \subset E \subset A_\varepsilon$  e  $\mathcal{L}^d(A_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ .

Sia  $r_\varepsilon = d(K_\varepsilon, A_\varepsilon^c)$ . Vogliamo esibire  $h \in C^0 : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  tale che

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{su } K_\varepsilon \\ 0 & \text{su } \mathbb{R}^d \setminus A_\varepsilon \end{cases}. \text{ Consideriamo allora } h(x) = 1 - \frac{d(x, K_\varepsilon \wedge r_\varepsilon)}{r_\varepsilon}$$

che rispetta quanto richiesto. Ma allora

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi - h|^p dx = \int_{A_\varepsilon} |\mathbb{1}_E - h|^p dx \leq 2^p \mathcal{L}^d(A_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)$$

in cui  $h(x) \equiv 1$  su  $K_\varepsilon$  e  $\mathbb{1}_E \equiv 1$  su  $K_\varepsilon$

□

<sup>9</sup>Nel caso  $p = \infty$  funziona se e solo se  $\exists X'$  limitato tale che  $\mu(X \setminus X') = 0$

<sup>10</sup>usiamo anche il fatto che  $E$  è limitato

<sup>11</sup>dove dividiamo per  $r_\varepsilon$  perchè vogliamo evitare di allontanarci all'infinito. Un'altra espressione valida è  $h(x) = \frac{d(x, K_\varepsilon)}{d(x, \mathbb{R}^d \setminus A_\varepsilon) + d(x, K_\varepsilon)}$

*Osservazione 4.7*

Nel caso in cui non volessimo scrivere un'espressione esplicita per  $h(x)$  potremmo usare il seguente:

**Lemma 4.4** – Lemma di Urysohn

Se  $X$  è uno spazio normale ( $T_1 + T_4$ ) allora per ogni coppia di chiusi disgiunti  $(E, F)$  esiste una funzione continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in E \\ 1 & x \in F \end{cases}$$

## 5 Lezione 05/10 - Teoria

Siamo in  $L^p(X, \mu), C^0(X)$  con  $X \subseteq \mathbb{R}^d, \mu = \mathcal{L}^d$ . Ci siamo chiesti se c'è un rappresentante continuo, ossia se data  $f \in L^p(X, \mu) \exists g \in C^0(X)$  tale che  $f = g$   $\mu$ -q.o.

### Esercizio 5.1

Calcolare  $\inf_{g \in C^0([0,1])} \|h - g\|_{L^p((0,1))}$  per  $1 \leq p \leq +\infty$ , dove

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Nel Teorema Theorem 4.3 si è aggiunta l'ipotesi di essere a supporto compatto perchè così siamo sicuri di stare in spazio  $L^p$ . (esempio: funzione costante, è continua ma non in  $L^p$ ). Quest'ultimo è uno strumento utile. Osserviamo che, poichè la misura di Lebesgue su un intervallo è nota a tutti, il conto dell'esercizio precedente possa essere fatto esplicitamente, ma si può fare usando il teorema? Sì: costruendo una funzione di successioni continue che annichila la distanza da quella  $h$ . Dunque si aggiunge il seguente

### Esercizio 5.2

se  $p < +\infty$  esibire  $g_n \in C^0([0,1])$  tale che  $\|g_n - h\|_{L^p} \rightarrow 0$

### Teorema 5.1 – Teorema di Lusin

Sia  $f : X \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{R}^k$ ) misurabile. Allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon$  aperto tale che

- $\mathcal{L}^d(A_\varepsilon) < \varepsilon$
- $f|_{X \setminus A_\varepsilon}$  è continua

### Osservazione 5.1

Visto che  $X \setminus A_\varepsilon$  ha parte interna vuota si ha che  $A_\varepsilon \cap X$  è denso, esiste dunque  $g$  estensione continua di  $f$  tale che  $g = f$  su  $X \setminus A_\varepsilon$ . Inoltre se  $f \in L^p(X)$  con  $p < +\infty$  possiamo scegliere  $g$  tale che  $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$ .

*Dimostrazione.* Dimostrazione sempre a passi, usiamo i Teoremi ?? e Theorem 4.3.

1. Supponiamo  $f \in L^1(X)$  con  $\mathcal{L}^d(X) < +\infty$ . Vista la regolarità della misura di Lebesgue ci basta trovare  $C$  misurabile per poi ottenere  $A_\varepsilon$  aperto. (vogliamo usare Egoroff + densità di  $C^0$ ). Allora per densità  $\exists \{f_n\} \subseteq C^0(X)$  tale che<sup>12</sup>  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1(X)$  e  $f_n(x) \rightarrow f$   $\mathcal{L}^d$ -q.o. $x$  Fissato  $\varepsilon > 0 \exists C$  misurabile tale che  $\mathcal{L}^d(C) < \varepsilon$  e  $f_n|_{X \setminus C} \xrightarrow{\text{unif.}} f|_{X \setminus C}$  e dunque  $f$  è continua su  $X \setminus C$  con  $\mathcal{L}^d(C) < \varepsilon$ . Poichè questo insieme lo vorremmo aperto, consideriamo la regolarità della misura di Lebesgue,

<sup>12</sup>ho già estratto una sottosuccessione, che servirà per poter applicare il Teorema 4.1

infatti sappiamo che  $\forall C$  insieme misurabile vale

$$\mathcal{L}^d(C) = \inf\{\mathcal{L}^d(A) : A \supset C \text{ } \mathcal{L}^d\text{-q.o.}, A \text{ aperto}\}$$

Poichè  $C$  di misura finita  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon : \mathcal{L}^d(A_\varepsilon \setminus C) < \varepsilon$ . Quindi preso  $A_\varepsilon$  sotto posso dire che  $\mathcal{L}^d(A_\varepsilon \setminus C) + \mathcal{L}^d(C) = 2\varepsilon$  e  $f|_{X \setminus A_\varepsilon}$  resta continua.

2. Vogliamo togliere l'ipotesi  $f \in L^1(X)$ .

**Idea** Trovare una troncatura di  $f$  a meno di un insieme di misura piccola. Ossia data  $f$  misurabile esiste  $F \subseteq X$  tale che  $\mu(F) \leq \varepsilon$  e  $f$  è limitata su  $X \setminus F$ .  $\lrcorner$

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  solo misurabile e  $\mathcal{L}^d(X) < +\infty$ . Consideriamo<sup>13</sup>  $B_k = \{x \in X : |f(x)| > k\}$  insiemi misurabili. Allora

$$\bigcap B_k = B = \{x \in X : |f| = +\infty\} \text{ ha misura nulla}$$

Possiamo dunque trovare  $\forall \varepsilon > 0 \bar{k}$  tale che<sup>14</sup>  $\mathcal{L}^d(B_{\bar{k}}) < \varepsilon$ . Consideriamo  $f|_{X \setminus B_{\bar{k}}}$ . Questa mi risulta essere limitata su  $X \setminus B_{\bar{k}}$ ,  $\|f\|_\infty \leq \bar{k}$   $\mathcal{L}^d$ -q.o.  $\Rightarrow f|_{X \setminus B_{\bar{k}}} \in L^1(X)$  e concludiamo per il punto precedente.

3. Vogliamo togliere l'ipotesi  $\mathcal{L}^d(X) < +\infty$ .

**Idea** Vogliamo lavorare con insiemi di misura finita in modo da poter ricadere nel caso precedente.  $\lrcorner$

Consideriamo  $X_n := X \cap B(0, n)$ . Allora il teorema vale per  $f|_{X_n}$ , ossia: per  $\varepsilon > 0$  fissato,  $\forall n$  fissato troviamo  $A_n^\varepsilon$  tale che<sup>15</sup>  $\mathcal{L}^d(A_n^\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$  con  $f|_{X_n \setminus A_n^\varepsilon}$  continua. Allora definiamo  $A^\varepsilon = \bigcup_{n \geq 1} A_n^\varepsilon$  è aperto, infatti  $X_n \setminus A_\varepsilon$  è

aperto in  $X \setminus A_\varepsilon$ , e essendo la misura di Lebesgue  $\sigma$ -additiva si ha  $\mathcal{L}^d(A^\varepsilon) \leq \sum \mathcal{L}^d(A_n^\varepsilon) = (\sum \frac{1}{2^n}) \varepsilon$  e  $f|_{X \setminus A^\varepsilon}$  è continua.  $\square$

**Notazione:** Cosa intendiamo  $A \supset E$   $\mu$ -q.o.? Semplicemente  $\mu(E \setminus A) = 0$ . (da notare quando si definisce la regolarità della misura di Lebesgue)

### Proposizione 5.2

Siano  $X, Y$  spazi vettoriali normati e sia  $T : X \rightarrow Y$  lineare. Allora sono equivalenti:

1.  $T$  continua
2.  $T$  continua in 0
3.  $T$  limitata, ossia  $\exists c > 0$  tale che  $\|T(u)\|_Y \leq c\|u\|_X \forall u \in X$
4.  $\exists c > 0$  tale che  $\|T(u)\|_Y \leq c \forall u \in X, \|u\|_X = 1$
5.  $T$  uniformemente continua

<sup>13</sup>stiamo usando  $|\cdot|$  per fare troncatura globale

<sup>14</sup>stiamo già togliendo a  $X$  questo  $B_{\bar{k}}$  in modo da avere una funzione limitata

<sup>15</sup>dove la stima vale per quanto visto al punto precedente

*Osservazione 5.2*

$T$  lineare e limitata implica  $T$  Lipschitz  $\Rightarrow T$  uniformemente continua  $\Rightarrow T$  continua, in particolare in  $\underline{0}$ , infatti

$$\|T(u) - T(v)\|_Y = \|T(u - v)\|_Y \leq c\|u - v\|_X$$

*Dimostrazione.* (3)  $\Rightarrow$  (4): Se  $T$  lineare e  $u \neq \underline{0}$  vale

$$\left\| T \left( \frac{u}{\|u\|} \right) \right\|_Y = \left\| \frac{1}{\|u\|_X} T(u) \right\|_Y = \frac{1}{\|u\|_X} \|T(u)\|_Y$$

(4)  $\Rightarrow$  (3): Se  $\|v\| = \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1$  vale

$$\begin{aligned} \|T(v)\| \leq c &\Rightarrow \frac{1}{\|u\|} \|T(u)\|_Y \leq c \\ &\Rightarrow \|T(u)\|_Y \leq c\|u\|_X \quad \forall u \neq \underline{0} \end{aligned}$$

Per concludere ci basta notare che  $T$  continua in  $u = 0 \Rightarrow$  (4). Per la nozione di continuità in spazi normati  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|u\|_X = \|u - 0\|_X < \delta \Rightarrow \|T(u) - T(0)\|_Y = \|T(u)\|_Y < \varepsilon$ . In particolare se  $\|v\|_X = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \|T(v)\| \leq \varepsilon$ . Preso un  $w$  qualsiasi  $\neq 0$  allora  $\frac{w}{\|w\|_X} \frac{\delta}{2} = v$  verifica

$$\|v\| = \left\| \frac{w}{\|w\|} \frac{\delta}{2} \right\|_X = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \|T(v)\|_Y < \varepsilon$$

Poichè  $\|T(v)\|_Y = \left\| T \left( \frac{w}{\|w\|_X} \frac{\delta}{2} \right) \right\|_Y = \frac{\delta}{2} \frac{1}{\|w\|_X} \|T(w)\|_Y$  possiamo concludere  $\|T(w)\|_Y < \varepsilon \frac{2}{\delta} \|w\|_X \Rightarrow T$  limitata.  $\square$

*Osservazione 5.3*

La proprietà (3) è la proprietà fondamentale da verificare per avere la continuità di applicazioni lineari.

*Esercizio 5.3*

Sia  $X = L^1(0, 1), Y = \mathbb{R}$  definisco  $T(u) = \int_0^1 u dx$ . Dire se

1.  $\{u \in L^1 : T(u) = 2\}$  è chiuso
2.  $\{u \in L^p(0, 1) : \int_0^1 u dx \leq 2\}$  è chiuso  $p > 1$  anche  $p = +\infty$ .
3.  $\{u \in L^1(0, +\infty) : \int_0^{+\infty} u dx \leq 2\}$  è chiuso
4.  $\{u \in L^p(0, +\infty), u$  a supporto finito<sup>a</sup>,  $\int_0^{+\infty} u dx = 2\}$  è chiuso.

<sup>a</sup>ossia  $u$  a supporto limitato

*Esercizio 5.4*

Sia  $h(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}$  definita su  $\mathbb{R} \forall r > 0$  calcolare  $h_r(x)$  definita in ogni punto  $x$  come  $h_r(x) = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} h(t) dt$  (la vuole analitica, disegna)

## 6 Lezione 10/10 - Teoria

### 6.1 Convoluzione

#### Definizione 6.1 – Convoluzione

Date  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  misurabili  $\mu$  misura di Lebesgue<sup>a</sup>. Definiamo, sarà operatore lineare, la *convoluzione* tra  $f$  e  $g$  come

$$x \longrightarrow f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

<sup>a</sup>fondamentale, sennò perde di significato

#### Osservazione 6.1

Non è detto che questa abbia sempre senso  $\mu$ -quasi ovunque. Lo ha se:

1.  $f, g \geq 0$
2. Date  $f, g$  tali che  $|f| * |g|(x) < +\infty$   $\mu$ -q.o. $x$  allora  $f * g(x)$  è ben definito e vale

$$|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x)$$

Infatti siamo nel caso precedente  $|f|, |g| \geq 0$  e misurabili

$$x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |f|(x-y)|g|(y)dy < +\infty \quad \mu - q.o.x$$

$\Rightarrow$  La funzione di  $y \rightarrow f(x-y)g(y)$  è assolutamente integrabile e quindi anche integrabile  $\Rightarrow f * g$  è ben definita, finita, e  $|f * g|(x) \leq |f| * |g|(x)$   $\mu$ -q.o. $x$

3. Se  $|f| * |g| \in L^p(\mathbb{R}^d)$  allora  $f * g(x)$  è ben definito quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\|f * g\|_p \leq \| |f| * |g| \|_p$  e quindi  $f * g \in L^p$ .

#### Osservazione 6.2 - Commutatività convoluzione

Se  $f, g$  misurabili e  $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$  ha senso, allora vale

$$f * g(x) = g * f(x) = \int g(x-y)f(y)dy$$

Infatti, poichè l'integrale è invariante per le mappe  $y \rightarrow -y$ ,  $y \rightarrow y-x$ , abbiamo

$$\begin{aligned} g * f(x) &= \int g(x-y)f(y)dy = \int g(x+y)f(-y)dy \\ &= \int g(y)f(x-y)dy = f * g(x) \end{aligned}$$

*Esempi di uso:*

1. Distribuzione di massa in  $\mathbb{R}^3$  con densità  $\rho(y)$ . Questa genera un campo gravitazionale, il cui potenziale è dato da  $V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \rho(y)dy$



2. La funzione  $x \rightarrow \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt$  è un particolare caso di convoluzione (ed ha effetto "regolarizzante" su  $f$ ). Chi è il nucleo di convoluzione<sup>16</sup>?

$$\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

se si considera  $g(y) = \frac{1}{2r} \mathbf{1}_{[-r,r]}(y)$ .  $g(y) \neq 0 \iff -r < -y < r \forall x$  ossia  $x-r < x-y < x+r$ .

### Teorema 6.2 – Teorema di interpolazione di Young

Dati  $p_1, p_2, r \in [0, +\infty]$  tali che  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{r}$  allora  $\forall f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$  si ha che<sup>a</sup>

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^d)} < +\infty$$

<sup>a</sup>in particolare la convoluzione ha senso

*Dimostrazione.* Omessa, se non per due casi specifici che seguono:

1.  $p_1 = 1, p_2 = r = p$ .
2.  $r = +\infty, p_1, p_2$  coniugati

□

*Osservazione 6.3*

Domanda:  $r$  è l'unico esponente per cui si può sperare che  $\|f * g\|_{L^r}$  sia stimata da una potenza di  $\|\cdot\|_{L^{p_1}}$  e  $\|\cdot\|_{L^{p_2}}$ ?

Dati  $p_1, p_2$  e  $f \in L^{p_1}, g \in L^{p_2}, r$  dato dall'uguaglianza  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{r}$  è l'unico esponente per cui vale

$$\|f * g\|_{L^r} \leq c \|f\|_{L^{p_1}}^{\alpha_1} \|g\|_{L^{p_2}}^{\alpha_2}$$

con  $c, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ . Infatti, sia  $k > 0$ , consideriamo  $kf$  e  $g$

$$\begin{aligned} k \|f * g\|_r &= \|(kf) * g\|_r \leq c \|kf\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g\|_{p_2}^{\alpha_2} \\ &= ck^{\alpha_1} \|f\|_{p_1}^{\alpha_1} \|g\|_{p_2}^{\alpha_2} \end{aligned}$$

Si deduce che  $c, \alpha_1 = 1$ . Similmente con  $\alpha_2$ .

### Teorema 6.3

$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p \leq +\infty$  allora

- $f * g(x)$  è ben definita q.o.  $x \in \mathbb{R}^d$
- $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$
- $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$

<sup>16</sup>per capire cosa si intende vedere proposizione più avanti. Varrà che  $f * g$  sarà o  $f$  o  $g$ . E se convoluzioni hanno buon nucleo di convoluzioni avranno buone proprietà

*Dimostrazione.*  $p = +\infty$  è ovvia, facciamo prima  $p = 1$  che darà l'idea per fare caso di  $p > 1$  reale.

**Caso  $p = 1$ :** possiamo limitarci<sup>17</sup> a  $f, g \geq 0$ . Poichè lavoriamo con quantità positive non dobbiamo verificare la sommabilità e per Fubini abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)dy \int_{\mathbb{R}^d} f(x')dx' = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

con  $x' = x - y$ , è semplice traslazione.

Dunque con funzioni positive vale che  $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ .

**Caso  $p > 1$ :** consideriamo sempre  $f, g \geq 0$  e dal caso di prima segue che  $f * g^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\|f * g^p\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g^p\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}^p$ . Preso  $q$  il coniugato di  $p$  notiamo che

$$f(x-y)g(y) = f^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}(x-y)g(y) = f^{\frac{1}{q}}(x-y)f^{\frac{1}{p}}(x-y)g(y)$$

dove  $f^{\frac{1}{q}}(x-y) \in L^q_{dy}(\mathbb{R}^d)$ ,  $f^{\frac{1}{p}} \in L^p_{dy}(\mathbb{R}^d)$ .

Quindi, integrando in  $\mathbb{R}^d dy$

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)^{\frac{1}{q}} f(x-y)^{\frac{1}{p}} g(y) dy \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p dx \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g^p(y) dy \end{aligned}$$

Dunque

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^p \leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{L^1} \|g^p\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q} + 1} \|g\|_{L^1}^p$$

ma quindi elevando alla  $\frac{1}{p}$ , ricordando che  $\left(\frac{p}{q} + 1\right) \frac{1}{p} = 1$ , si ha

$$\left( \int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}^{\left(\frac{p}{q} + 1\right) \frac{1}{p}} \|g\|_{L^p} = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$$

□

<sup>17</sup>per quanto visto sopra  $f * g(x)$  è ben definita se  $|f| * |g|(x)$  ben definita e  $|f| * |g| \in L^p \Rightarrow f * g \in L^p$

### Teorema 6.4

Siano  $p, q$  esponenti coniugati e  $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$  allora si ha

1.  $|f * g(x)| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \text{ q.o. } x$
2.  $f * g$  è uniformemente continua
3. se  $p, q$  sono reali (no  $p = 1, q = +\infty$  e viceversa)

$$f * g(x) \rightarrow 0 \text{ per } |x| \rightarrow +\infty$$

*Osservazione 6.4*

Vediamo che  $p, q$  devono essere reali, infatti se  $p = +\infty$  allora si ha che, prese  $f \equiv 1$  e  $g \in L^1$  con  $\int g = 1, f * g = 1$ .

Prima di vedere questa dimostrazione vediamo qualche altro utile risultato. Vediamo un enunciato più generale per la continuità di  $f * g$

### Proposizione 6.5

Sia<sup>a</sup>  $g \in C_C^0(\mathbb{R}^d)$  e<sup>b</sup>  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ . Allora  $f * g \in C^0(\mathbb{R}^d)$ .

<sup>a</sup>continua, a supporto compatto  $\Rightarrow$  sta in tutti gli  $L^p, p < +\infty$   
<sup>b</sup>ossia  $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$  insieme limitato,  $f \in L^1(A)$

*Osservazione 6.5*

Non è in generale a supporto compatto!!

*Osservazione 6.6*

Vista la commutatività dell'operatore di convoluzione possiamo anche avere  $f \in C_C^0(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ .

### Definizione 6.6 – Supporto di una funzione misurabile $f$

Sia  $A = \cup A_i$  tale che  $f = 0$  q.o. su  $A_i$ . Dico che  $spt f = A^c$  e questa nozione non cambia se  $g = f$  q.o. su  $A$ , questo perchè  $\mathbb{R}$  è a base numerabile. (Attenzione a differenza di nozione di supporto tra funzioni continue e misurabili)

*Osservazione 6.7*

Se  $f, g$  misurabili a supporto compatto, allora  $f * g$  è ben definita e vale

$$spt(f * g) \subseteq \overline{spt(f) + spt(g)}$$

dove con  $+$  si intende la somma diretta di insiemi.

*Dimostrazione.* Provare a fare per esercizio □

*Dimostrazione.* (di Proposizione 6.1) Si ha che

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

è ben definito ed è lineare. Dimostriamo che è continuo per successioni. Sia  $x_n \rightarrow x_0$  in  $\mathbb{R}^d$  e  $K$  compatto che definitivamente contiene  $x_n - spt f$ , allora

$$\begin{aligned} |f * g(x_n) - f * g(x_0)| &= \left| \int_K [f(x_n - y) - f(x_0 - y)]g(y)dy \right| \\ &\leq \int_K |f(x_n - y) - f(x_0 - y)||g(y)|dy \xrightarrow{q.o.y} 0 \end{aligned}$$

poichè  $\int_K |f(x_n - y) - f(x_0 - y)||g(y)|dy$  è dominata da  $|g|\mathbb{1}_K \cdot 2\|f\|_\infty$   $\square$

**Proposizione 6.7** – Continuità delle traslazioni in  $L^p$  per  $p$  finito

Sia  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $p < +\infty$ .  $\forall h \in \mathbb{R}^d$  definiamo  $\tau_h f(x) = f(x - h) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Si ha

$$\lim_{h_j \rightarrow h} \|\tau_{h_j} f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

*Controesempio per la continuità della traslazione:*  
 $f = \mathbb{1}_{[1, +\infty]}$  è tale che  $\|\tau_h f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 1, \forall h \neq 0 \Rightarrow$  la traslazione non sarà quindi mai infinitesima per  $h$  infinitesima.

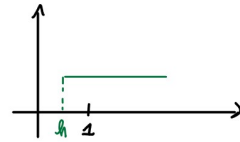


Figura 5: Qui  $\|\tau_h f - f\|_\infty = 1$

*Dimostrazione.* Poichè  $\tau_{h_1} + \tau_{h_2} f = \tau_{h_1}(\tau_{h_2} f)$ , basta dimostrarlo per  $h \rightarrow 0$

Step 1: lo dimostriamo per  $f \in C_C(\mathbb{R}^d)$

Step 2: estendiamo il risultato per densità. (fallisce per  $p = +\infty$  perchè non vale il Teorema ??).

Step 1: Sia  $f \in C_C(\mathbb{R}^d)$  ed  $h$  fissato,  $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - h) - f(x)|^p dx \\ &\leq \int_K |f(x - h) - f(x)|^p dx \xrightarrow{\text{Teo 1.1}} 0 \end{aligned}$$

con  $K$  compatto  $\supset spt f, spt f - h$ .

Step 2: Per densità, data  $f \in L^p, \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in C_C(\mathbb{R}^d)$  t.c.  $\|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$ . Poichè  $\|\cdot\|_{L^p}$  è invariante per traslazione, si ha che  $\forall h \|\tau_h f - \tau_h \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\tau_h g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 < 3\varepsilon \text{ per } h : |h| < \delta = \delta_\varepsilon \end{aligned}$$

con  $\|\tau_h g - g\|_{L^p} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

Abbiamo quindi che lo spazio  $C_0(\mathbb{R}^d)$  delle  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continue tali che  $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$  è chiuso rispetto alla convergenza uniforme.  $\square$

*Dimostrazione di Teorema 6.1.* Vogliamo stimare  $\|f * g\|_\infty$ . Fissato  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \right| \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |g|^q(y)dy \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Per dimostrare l'uniforme continuità si usa la Proposizione 6.1.

Dobbiamo dimostrare che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, z : |h| = |x - z| < \delta$

$$|f * g(x) - f * g(x-h)| < \varepsilon$$

Ma

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(x-h)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-h-y)g(y)dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [f(x-y) - f(x-h-y)]g(y)dy \right| \\ &\leq \|g\|_{L^q} \|\tau_x f - \tau_{x+h} f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} \|f - \tau_h f\|_{L^p} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

poichè  $\tau_{-x} f - \tau_{-x+h} f = \tau_x (f - \tau_h f)$ .

Mostriamo che è infinitesima all'infinito. Vediamolo prima per  $f, g$  continue e a *spt* compatto e poi lo estendiamo per densità, infatti<sup>18</sup>  $f * g \in C_C(\mathbb{R}^d)$  dunque la proprietà è ovvia.

Se  $f, g$  a supporto compatto, esiste  $R$  tale che  $spt(f), spt(g) \subseteq [-R, R]$ , ma allora

$$|f * g(x)| = 0 \quad \text{se } |x| > R$$

Facciamo ora il caso generale

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq |(f - f_n) * g(x)| + |f_n * g(x)| \\ &\leq |(f - f_n) * g(x)| + |f_n * (g - g_n)(x)| + |f_n * g_n(x)| \\ &\leq \|f - f_n\|_{L^p} \|g\|_{L^q} + \|f_n\|_{L^p} \|g - g_n\|_{L^p} + |f_n * g_n| \end{aligned}$$

sono tutte maggiorazioni puntuali. Fissiamo  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$  in  $L^p$  con  $f_n, g_n \in C_C(\mathbb{R}^d)$ . Dunque  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tale che

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^p} &< \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \\ \|g_n - g\|_{L^q} &< \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Per  $n = n_0$ ,  $f_{n_0} * g_{n_0}$  è a supporto compatto

$$\exists R > 0 \quad |f_{n_0} * g_{n_0}(x)| = 0 \quad \text{se } |x| > R$$

allora se  $|x| > R$

$$|f * g(x)| \leq \varepsilon \|g\|_{L^q} + \|f_n\|_{L^p} \varepsilon + 0 \leq \varepsilon c + \varepsilon c_1 \leq c_1$$

dove l'ultimo  $\leq$  vale perchè  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ , dunque limitata.  $\square$

<sup>18</sup>somma diretta di compatti è compatta

## 7 Lezione 11/10 - Teoria

### Esercizio 7.1

Consideriamo la funzione  $f(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ . Per  $r > 0$  calcolare  $\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt$ . Notare che questa è una convoluzione in cui il nucleo è essa stessa una funzione caratteristica. Vale

$$\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)}{2r} \mathbb{1}_{[-r,r]}(t)dt$$

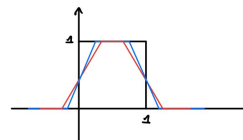


Figura 6: Per  $r$  sempre più piccolo la funzione "risale" lungo il quadrato

### Osservazione 7.1

Abbiamo visto alcune proprietà riguardanti la continuità di  $f * g$ , che riassumiamo di seguito:

- Se  $f \in C_C(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  allora  $f * g \in C_0(\mathbb{R}^d)$
- Se  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  allora  $f * g \in C_0(\mathbb{R}^d)$  ed è uniformemente continua
- Se  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  reali allora  $f * g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ , continua e infinitesima all'infinito.

Ci chiediamo ora come sono legate la derivabilità e la convoluzione, si ha:

### Teorema 7.1

Siano  $f \in C^k_C(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  allora  $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$  e vale  $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  con  $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_d| \leq k$ , allora  $\exists \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} (f * g)$  dove  $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} = D^\alpha (f * g) = (D^\alpha f) * g$ .

### Teorema 7.2

Se  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v} \in L^p(\mathbb{R}^d)$  ed è continua,  $g \in L^q$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Allora  $f * g$  è continua, derivabile con continuità nella direzione  $v$  e vale

$$\frac{\partial}{\partial v} (f * g) = \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) * g$$

*Dimostrazione.* Solo per  $d = 1$ . In questo caso  $\frac{\partial f}{\partial v} = f'$ . Dunque si ha<sup>19</sup>  $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ . Dobbiamo provare che se  $f' \in L^p(\mathbb{R})$  allora  $f' * g$ , che è continua, è la derivata di  $f * g$ , ossia basta vedere che  $\forall a < b$  vale<sup>20</sup>

$$\int_a^b (f' * g)(x)dx = f * g(b) - f * g(a)$$

<sup>19</sup>serve la continuità di  $f'$ , ma questo si può avere anche se  $f'$  non è continua

<sup>20</sup>dove l'integrale ha senso anche se  $f'$  non continua grazie a (2) dell'osservazione.

Poichè  $\int_a^b (f' * g)(x) dx < +\infty$ , infatti:

$$\int_a^b (f' * g)(x) dx = \int_a^b \int_{\mathbb{R}} f'(x-y)g(y) dy dx \leq \|f'\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})} |b-a|$$

dove l'ultima disuguaglianza vale poichè  $f'(x-y) \in L^p, g(y) \in L^q$ , possiamo usare Fubini-Tonelli e abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_{\mathbb{R}} f'(x-y)g(y) dy &= \int_{\mathbb{R}} dy \int_a^b g(y)f'(x-y) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy g(y)[f(b-y) - f(a-y)] \\ &= f * g(b) - f * g(a) \end{aligned}$$

L'integrale di  $f' * g$  tra due punti qualunque  $a$  e  $b$  è l'oscillazione della funzione  $f * g \Rightarrow f' * g$  è la sua derivata.  $\square$

*Osservazione 7.2 - Idea dimostrazione Teorema 7*

Notiamo che  $\tau_h(f_1 * f_2) = (\tau_h f_1) * f_2 = f_1 * (\tau_h f_2)$  e ricordando che  $\frac{\partial}{\partial v} h(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(x+tv) - h(x)}{t}$  vediamo che

$$\begin{aligned} \frac{f * g(x+tv) - f * g(x)}{t} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(f(x+tv-y) - f(x-y))g(y)}{t} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial v}(x-y)g(y) dy \end{aligned}$$

$\square$

## 7.1 Approssimazione per convoluzione

Sia ora  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , allora definiamo per  $\delta > 0$   $\varphi_\delta(x) = \frac{1}{\delta^d} \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$  dove  $\frac{1}{\delta^d}$  è un fattore di normalizzazione, mentre  $\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$  riscalda/ridilata lo spazio<sup>21</sup>. Se  $\varphi \in L^1$ , allora anche  $\varphi_\delta \in L^1$ .

Stringendo il supporto aumenta l'altezza della funzione, per il fattore di normalizzazione. Possiamo dunque supporre, a meno di riscalare, che  $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(x) dx = 1$ . Ad esempio consideriamo

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \\ &= \frac{1}{2r} \mathbf{1}_{[-r,r]}(x) \end{aligned}$$

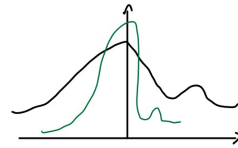


Figura 7: Funzione a campana

### Teorema 7.3

Sia  $f \in L^p(\mathbb{R}^d), p \neq +\infty$ . Allora  $f * \varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$  e verifica che  $f * \varphi_\delta \rightarrow cf$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  dove  $c = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx$ .

<sup>a</sup>l'integrale è finito per come è definita  $\varphi$

<sup>21</sup>In generale viene anche usato il termine "mollificatore"

*Osservazione 7.3*

Con  $p = +\infty$  non va bene! Infatti è possibile approssimare funzioni continue con funzioni non continue, basta pensare all'Esempio 4.1 (Ricordiamo che le funzioni continue non costituiscono un denso in  $L^\infty$ ).

*Dimostrazione.* Dimostriamo il risultato per  $f \in C_C(\mathbb{R}^d)$ . Infatti, preso per vero il risultato su  $C_C(\mathbb{R}^d)$ , data  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ , fissato  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists f_\varepsilon \in C_C(\mathbb{R}^d)$  tale che  $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$ . Allora vale la seguente stima:

$$\begin{aligned} \|f - f * \varphi_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leq \|f - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f_\varepsilon - f_\varepsilon * \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|(f_\varepsilon - f) * \varphi_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|f - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f_\varepsilon - f_\varepsilon * \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|\varphi_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

dove  $\|\varphi_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ , infatti  $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1$ .

Ricordando che  $f * \varphi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi_\delta(y)dy$  e  $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta dy = 1$ , se  $f \in C_C(\mathbb{R}^d)$  si ha

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_\delta - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi_\delta(y)dy - 1 \cdot f(x) \right|^p dx \\ &= \int_K \left| \int_{\mathbb{R}^d} [f(x-y) - f(x)]\varphi_\delta(y)dy \right|^p dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_K \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left[ f\left(x - \frac{y}{\delta}\right) - f(x) \right] \varphi_\delta\left(\frac{y}{\delta}\right) \frac{dy}{\delta^d} \right|^p dx \\ &= \int_K \left| \int_{\mathbb{R}^d} [f(x-z\delta) - f(x)]\varphi(z)dz \right|^p dx \end{aligned}$$

dove si ha  $K$  compatto che contiene tutti gli  $x$  tranne quelli del supporto di  $f$  e in (\*) vogliamo far intervenire la "piccolezza" di  $\delta$ , facciamo dunque un cambio di variabile in  $\frac{y}{\delta}$ . Possiamo ora sfruttare o la disuguaglianza di Hölder o l'uniforme continuità di  $f$ . Per uniforme continuità  $|f(x-z\delta) - f(x)| \leq \varepsilon$  per  $\delta < \delta_0, z \in K$ , dunque

$$\int_K \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-z\delta) - f(x))\varphi(z)dz \right|^p dx \longrightarrow \varepsilon \int_K \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \right|^p dx$$

dove  $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi$  è una costante. □

**Corollario 7.4**

Data  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $p \neq +\infty$ , presa  $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ , allora  $f * \varphi_\delta$  è di classe  $C^\infty$  ed approssima  $f$  in norma  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

**Corollario 7.5**

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  tale che  $\int_\Omega u f \forall f \in C_C^\infty(\Omega)$ . Allora  $u \equiv 0$  su  $\Omega$ .



## 7.2 Separabilità delle funzioni continue in $L^p(\mathbb{R}^d)$

Vediamo ora come la densità delle funzioni continue (a supporto compatto) in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  implichi la *separabilità* di  $L^p(\mathbb{R}^d)$ , ossia l'esistenza di un insieme numerabile e denso rispetto a  $\|\cdot\|_{L^p}$ .

Fissiamo  $\{K_n\}$  successione di compatti che invade  $\mathbb{R}^d$ , ossia tale che:

- $\mathbb{R}^d = \cup_n K_n$
- $K_n \subset K_{n+1}^\circ \forall n$

e su ogni  $K_n$  selezioniamo i polinomi a coefficienti razionali. Ossia stiamo considerando il denso che è costituito dai polinomi troncati in  $K_n$ . (utilizziamo Stone-Weierstrass<sup>22</sup>).

*Osservazione 7.4*

Vale lo stesso se  $\mathbb{R}^d$  viene sostituito da un qualsiasi  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  misurabile. Si ha che le funzioni continue sono dense in  $L^p(E)$  con  $p \neq \infty$  e  $L^p(E)$  è separabile per  $p \neq \infty$ .

Dunque  $L^\infty(E)$ , con  $E \subseteq \mathbb{R}^d$ , non è separabile.

**Idea** : Costruiamo un insieme di funzioni limitate di cardinalità più che numerabile tali che  $\forall f, g \in \mathcal{F}, f \neq g, \|f - g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \geq 1$ . ┘

*Esercizio 7.2*

Dimostrare che questa proprietà equivale alla separabilità.

Selezioniamo una successione  $\mathcal{A}_n$  di insiemi misurabili di misura positiva e disgiunti in  $\mathbb{R}^d$ .  $\forall j \in \mathbb{N}$  definiamo  $f_j(x) = \mathbb{1}_{A^j}(x)$ , con  $A^j = \bigcup_{m \in J} A_m$ . Prese

due funzioni  $f_j$  e  $f_{j'}$ ,  $f_j \neq f_{j'}$  ( $\iff j \neq j'$ ) si ha  $\|f_j - f_{j'}\| \geq 1$  perchè  $A^j$  e  $A^{j'}$  sono unione di cubetti numerabili diversi: c'è un  $\bar{n}$  tale che  $A_{\bar{n}} \in A^j$  e  $A_{\bar{n}} \notin A^{j'}$  (o viceversa):  $\mathcal{L}^d(A^j \Delta A^{j'}) > 0$ .

*Esercizio 7.3*

Come definire la convoluzione su  $(X, \mu)$  con  $X = \mathbb{N}$  e  $\mu =$  conta i punti  
 $\Rightarrow L^p(X, \mu) = \ell^p = \{ \text{successioni } f = \{f_n\}_0^{+\infty} \text{ tali che } \sum_{m=1}^{\infty} |f_n|^p < +\infty \}$

<sup>22</sup>Nel caso si volesse rivedere questo risultato rimando a "Guida Galattica per gli Analisti" al Capitolo 5 reperibili qui <https://poisson.phc.dm.unipi.it/~rocca/>

## 8 Lezione 12/10 - Esercitazione

### 8.1 Convoluzione

Ragioniamo ora un po' sulla convoluzione. Ricordiamo:

*Proprietà belle:*

- è un operatore simmetrico
- regolarizza. Infatti: Per  $f + g, f \cdot g, \max f, g, \dots$ , la sua regolarità è la peggiore di quelle di  $f$  e di  $g$ . Mentre per  $f * g$  è la migliore di quelle di  $f$  e  $g$ . Anche di più: se  $f \in C^h, g \in C^k$  si ha  $f * g \in C^{h+k}$
- Si comporta "bene" con le operazioni:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

$$D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g$$

e questo è molto comodo

- Permette di approssimare! Data  $f \in L^p, f * p_\varepsilon \in C^\infty$  e approssima  $f$  in  $L^p$  (questo in realtà lo sapevamo già fare con il teorema di Stone-Weierstrass, che mi dice che i polinomi approssimano uniformemente le funzioni). Cos'è meglio però? Stone-Weierstrass o convoluzione?

*Proprietà brutte:*

- Non sempre ha senso (serve sommabilità messa bene, magari supporto compatto)
- Si fa solo su  $\mathbb{R}^n$ ! Mentre tutto il resto finora andava bene su spazi di misura qualsiasi<sup>23</sup>.

Infatti, come abbiamo fatto a dire che  $C^\infty$  è denso in  $L^p(\Omega)$ ? Abbiamo preso  $u \in L^p(\Omega)$ , estesa a zero fuori... Questo non è sempre gratis: se mi interessano funzioni derivabili, ad esempio (tipo: funzioni  $L^p$  con "derivata"  $L^p$ ) non posso estendere a zero!

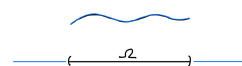


Figura 8: estensione, in blu, non è neppure continua!

Cioè: per  $L^p$  va bene fare estensioni, per altri spazi no.

*Domanda:* Preso uno spazio generale  $X$  con una misura. Non per forza  $\mathbb{R}^n$  con Lebesgue. È vero (senza convoluzione) che le  $C^\infty$  sono dense in  $L^p$ ?

*Domanda trabocchetto!* Infatti la domanda non vuol dire nulla,  $C^\infty$  lo abbiamo solo su  $\mathbb{R}^n$  (o ad esempio su varietà, ma in quelle faccio anche convoluzione sulle carte). Quindi

*Domanda:* È vero (senza convoluzione) che le continue sono dense in  $L^p$ ? Purchè  $X$  sia uno spazio almeno topologico... . Su  $X$  ho una misura e una topologia, se non si "parlano" non c'è speranza...

*Esempio:* Presa la topologia indiscreta, le continue sono solo le costanti.

Caso più semplice: se  $X$  è uno spazio metrico? Gli spazi metrici hanno una funzione continua molto semplice: la distanza! La convoluzione usa la struttura euclidea.

<sup>23</sup>non solo devo essere in  $\mathbb{R}^n$ , ma nemmeno va bene  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto

Come la possiamo usare? Vogliamo mostrare che data  $u \in L^p$ , esiste  $\tilde{u}$  continua<sup>24</sup> con  $\|u - \tilde{u}\|_{L^p} < \varepsilon$ .

Una funzione  $L^p$  qualsiasi è un po' scomoda, ma cosa c'è vicino alla  $L^p$  quanto voglio? Le funzioni semplici! Data  $u$ , esiste  $U = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$  con  $A_i$  aperto e  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ , tale che  $\|U - u\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Questa è una delle molte definizioni di  $L^p$ . Allora ci basta approssimare una funzione a scala<sup>25</sup>.

Sia  $u = \chi_A$  con  $A$  aperto. Come le approssimiamo con continue?

Cerchiamo di raccordare: definiamo

$$u_n(x) = (1 - \text{dist}(x, A)) \cdot n^+$$

su  $A$ ,  $\text{dist} = 0$ , per cui  $u_n = (1 - 0 \cdot n)^+ = 1$ . Se  $\text{dist}(x, A) > \frac{1}{n}$ , allora  $u_n = 0$  perchè  $1 - \text{dist}(x, A) \cdot n < 0$ , cioè  $u_n$  è continua e

$$u - u_n = \begin{cases} 0 & \text{su } A \\ \in [0, 1] & \text{altrimenti} \\ 0 & \text{su } A_{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

con  $A_{\frac{1}{n}} = \{x : \text{dist}(x, A) > \frac{1}{n}\}$ . Bene:  $\|u - u_n\|_{L^p}^p \rightarrow 0$ ? Vale

$$\|u - u_n\|_{L^p}^p = \int_{R_{\frac{1}{n}}} |u(x) - u_n(x)|^p dx \leq \mu(R_{\frac{1}{n}})$$

Domanda: è vero che  $\mu(R_{\frac{1}{n}}) \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow +\infty$ ? Per quali insiemi  $A$  è vero che

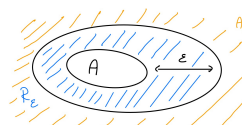
$$\mu(A \cup R_{\frac{1}{n}}) = \mu\left(\left\{x : \text{dist}(x, A) < \frac{1}{n}\right\}\right) \rightarrow 0 \quad ?$$

Quando abbiamo visto la teoria della misura, abbiamo notato *subito* che se gli  $E_n$  sono inscatolati,  $E_n \subseteq E_{n+1}$ , allora  $\mu(E_\infty) = \sup \mu(E_n)$  dove  $E_\infty = \bigcup E_n$ . Per quando riguarda l'intersezione, se gli  $F_n$  sono  $F_n \supseteq F_{n+1}$  e  $F_\infty = \bigcap F_n$ , è vero che  $\mu(F_\infty) = \lim \mu(F_n)$ ? Sì, se qualche  $F_*$  ha misura finita.

Tornando al nostro caso abbiamo  $A$  un insieme ed  $A_n = A \cup R_{\frac{1}{n}}$ . È vero che  $A = \bigcap A_n$ ? Per usare il fatto delle intersezioni richiamato, serve:

1. che  $\mu(A_n) < +\infty$  per qualche  $n$
2. che  $A = \bigcap A_n$

È vero il 2.? NO!! Basta pensare ai razionali ingrossati. I punti a distanza zero da  $A$  sono i punti di  $A$  e di  $\partial A$ . Dunque funziona *solo se*  $A$  è chiuso. Quindi quando consideriamo  $u = \chi_A$  prendiamo  $A$  *chiuso*, così il 2. è vero. Per l'1.? Sappiamo che  $A$  ha misura finita perchè è un pezzo di una funzione semplice e allora? Basta rimpicciolirlo! Al posto di  $A$  prendiamo  $\{x : \text{dist}(x, A^c) \geq \varepsilon\}$  è chiuso, e se lo ingrossiamo meno di  $\varepsilon$  stiamo in  $A$  e quindi abbiamo misura finita!



<sup>24</sup>sappiamo già che deve essere  $p < +\infty$ , sennò è banalmente falso

<sup>25</sup>notiamo che abbiamo una somma finita in  $U$

Riassumendo: se abbiamo uno spazio metrico di misura, sappiamo approssimare in  $L^p$  ( $p < +\infty$ ) con funzioni continue senza passare per Stone-Weierstrass o per la convoluzione.  $\square$

*Esercizio 8.1*

$$C = \{u \in L^p([0, 1]) : \int_0^1 u \leq 1\}$$

è chiuso in  $L^p$ ? ( $1 \leq p \leq +\infty$ ).

$$D = \{u \in L^p([1, +\infty)) : \int_1^{+\infty} u \leq 1\}$$

è chiuso in  $L^p$ ?

*Risoluzione:* Se  $u \in C$  (o  $D$ ) e  $v \in L^p$  è generico

$$\left| \int_0^1 v - \int_0^1 u \right| = \left| \int_0^1 v - u \right| \leq \int_0^1 |v - u| = \|u - v\|_{L^1}$$

Quindi se  $p = 1$  la risposta è sì, sia per  $C$  che per  $D$ .  
 Ricordiamo che, essendo  $L^p$  uno spazio metrico, vale chiuso  $\iff$  chiuso per successioni. Nel nostro caso se  $u_n \in C, u_n \xrightarrow{L^1} u, \|u - u_n\|_{L^1} \rightarrow 0$ . Allora  $\int u_n \rightarrow \int u \Rightarrow \int u \leq 1 \Rightarrow u \in C$ . L'argomentazione per  $D$  è analoga.  
 E se  $p > 1$ ? Vale sempre che

$$\left| \int_0^1 u - \int_0^1 v \right| \leq \|u - v\|_{L^1} \leq \|u - v\|_{L^p} \cdot \|1\|_{L^{p'}} = \|u - v\|_{L^p}$$

visto che su  $[0, 1], \|1\|_{L^{p'}} = (\int_0^1 1^{p'})^{\frac{1}{p'}} = 1$ , non abbiamo problemi. Quindi se  $\{u_n\} \subseteq C_n, u_n \rightarrow u, u \in C$ .

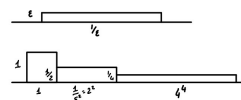
Per  $D$ ? Cioè, in  $[1, +\infty)$ ? Prendiamo  $u_n = \chi_{[1, n]} \cdot \frac{1}{n}$

$$\int_1^{+\infty} u_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow u_n \in D$$

Ma  $\|u_n\|_{L^p}$ ? Non funziona, riproviamo!  
 Cerchiamo un controesempio. Ci serve che:

$$\|u - u_n\|_{L^p} \ll 1 \Rightarrow \|u - u_n\|_{L^1} \gg 1$$

Ritornando all'idea di prima,  $g_n = \frac{1}{n} \chi_{[1, n]}$  si può aggiustare?  $\|g_n\|_{L^1} = 1, \|g_n\|_{L^p} = \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}} \ll 1$ .  
 È facile: prendiamo  $u_n$  come nel disegno



Ci si riesce? i pezzi lontani hanno  $\|\cdot\|_{L^p} \ll 1$ , quindi possono convergere in  $L^p$ . Però, potremmo costruire  $u$  in modo che  $\int_1^\infty u$  esploda. Cercate di scriverlo per bene, utilizzando le funzioni a scala di qualche tipo.

## 9 Lezione 17/10 - Teoria

### 9.1 Spazi di Hilbert

#### Definizione 9.1 – Prodotto scalare

Sia  $H$  spazio vettoriale su<sup>a</sup>  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Diciamo che  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  è un prodotto scalare se

- $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$  ed  $\geq 0$ ,  $= 0 \iff x = 0$
- $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \langle \lambda_1 x_1, y \rangle + \langle \lambda_2 x_2, y \rangle$  per ogni  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  e  $x_i, y \in H$ .
- è sesquilineare:  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

<sup>a</sup>nel caso in cui  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  è più corretto parlare di *prodotto hermitiano*

#### Osservazione 9.1

Ogni prodotto scalare induce una *norma*:  $\forall x \in H$  si definisce  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ . Le norme così definite verificano la seguente:

#### Proposizione 9.2 – Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$\forall x, y \in H$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

L'uguaglianza vale se  $\exists \lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $x = \lambda y$

*Dimostrazione.* Vediamo che per  $x, y$  fissati si ha  $\|x + \lambda y\|^2 \geq 0$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$\|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \overline{\langle x, \lambda y \rangle}$$

dove  $\langle x, \lambda y \rangle + \overline{\langle x, \lambda y \rangle} = 2\Re \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$ .

1. se  $\langle x, y \rangle = 0$  la disuguaglianza è ovvia
2. se  $\langle x, y \rangle \neq 0$  scegliamo  $\lambda : \bar{\lambda} \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| \Rightarrow \lambda_0 = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\langle x, y \rangle}$  e prendiamo  $\lambda = t \lambda_0$ . Così

$$\begin{aligned} \|x + t \lambda_0 y\|^2 &= \|x\|^2 + t^2 |\lambda_0|^2 \|y\|^2 + 2\Re t \bar{\lambda}_0 \langle x, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + t^2 \|y\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  imponendo  $\leq 0$  nel  $\Delta$  si ottiene  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

□

#### Osservazione 9.2

La norma indotta da un prodotto scalare verifica l'*identità del parallelogramma*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

disuguaglianza geometrica molto utile. Ad esempio ci dice che la palla in presenza del prodotto scalare è uniformemente convessa. (vedi a modo ad analisi funzionale). Vale anche l'identità di polarizzazione

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

### Corollario 9.3

$x \rightarrow \|x\|$  è una norma su  $H$ . Inoltre, visto che  $\|\cdot\|$  è continua e per l'identità di polarizzazione, si ha che  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è continua.

*Dimostrazione.* Esercizio per casa □

### Corollario 9.4

$\forall y \in H$  possiamo definire  $Ty : H \rightarrow \mathbb{C}$  come  $Ty(x) = \langle x, y \rangle$ .  $T$  è lineare e limitata (dunque continua).

*Dimostrazione.* La linearità segue dalle proprietà di prodotto scalare. Per la limitatezza si usa  $|Ty(x)| \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall x \in H$  □

### Definizione 9.5 – Spazio di Hilbert

$H$  si dice *spazio di Hilbert* se è dotato di prodotto scalare ed è completo rispetto a  $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$  indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

*Esempi di spazi di Hilbert:*

1. in dimensione algebrica finita  $H \approx \mathbb{C}^n$  o  $\mathbb{R}^n$ . Su  $\mathbb{C}^n \ni x, y$  allora  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$  (si ha il teorema di diagonalizzazione)
2. *Non esempio:*  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  con il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$C^0([a, b], \mathbb{C}) \Rightarrow \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(\bar{x})dx$ . Questo non è completo, non si riescono a fare i *teoremi di proiezione*.

3.  $L^2((a, b); \mathbb{R})$  con  $\mu$  misura di Lebesgue (va bene qualsiasi misura)

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\mu$$

$L^2((a, b), \mathbb{C})$  con  $\mu$  misura di Lebesgue  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}d\mu$ .

4.  $\ell^2$  a valori "R" =  $\{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \forall n \text{ e } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ .

$\ell^2$  a valori "C" =  $\{\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} : z_n \in \mathbb{C} \forall n \text{ e } \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|^2 < +\infty\}$ . Analogamente  
 =  $\{\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \forall n \text{ e } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z_n|^2 < +\infty\}$  che sarebbero  $L^2(X, \mu)$  con  
 $X = \mathbb{N}$  o  $X = \mathbb{Z}$  e  $\mu$  misura che conta i punti

L'ipotesi di completezza è *essenziale* per i risultati seguenti:

**Teorema 9.6** – Teorema di proiezione su un convesso chiuso

Sia  $H$  hilbert,  $K$  **sottoinsieme** convesso chiuso proprio di  $H$ . Allora  
 $\forall y \in H$  fissato  $\exists! \bar{x} \in K$  tale che

$$\|\bar{x} - y\| = \min_{z \in K} \|z - y\|$$

$\bar{x}$  realizza la minima distanza del vettore  $y$  dal convesso.

*Osservazione 9.3*

$\bar{x}$  è caratterizzato dalla seguente proprietà:  $\bar{x} \in K$  e

$$\langle y - \bar{x}, z - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall z \in K$$

*Dimostrazione. Esistenza:* Ricordiamo che la distanza, la chiusura e la convessità sono invarianti per traslazione. Supponiamo quindi  $y = 0$ . Data  $\{z_n\}$  successione minimizzante, vogliamo vedere che l'inf è realizzato, quindi che in realtà questo sia un minimo. Poniamo  $\delta = \inf_{z \in K} \|z\| \geq 0$  e consideriamo  $\{z_n\} \subseteq K$  tale che  $\delta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|z_n\|$ . Se  $z_n$  fosse di Cauchy avremmo finito essendo  $K$  chiuso, vediamo:

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - \|z_n + z_m\|^2$$

per l'identità del parallelogramma. Poichè  $K$  è convesso  $\Rightarrow \frac{z_n + z_m}{2} \in K$  e quindi  $\|\frac{z_n + z_m}{2}\| \geq \delta$  poichè  $\delta = \inf_{z \in K} \|z\|$ . Ora notiamo che  $\|z_n - z_m\|^2 = \|\frac{z_n + z_m}{2}\|^2$ , infatti:

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - 4 \left\| \frac{z_n + z_m}{2} \right\|^2 \leq 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - 4\delta^2$$

poichè  $\|z_n\|^2 \rightarrow \delta^2$  allora  $2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - 4\delta^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$ .

Poichè  $K$  chiuso  $\Rightarrow$  completo  $\exists \bar{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$ . Siccome  $K$  chiuso  $\bar{x} \in K$ :

$$\|\bar{x}\| = \lim_n \|z_n\| = \delta$$

dove il primo uguale segue perchè la norma è continua.

*Unicità:* Vediamo che  $\bar{x}$  è unico: se per assurdo  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  in  $K$  verificassero  $\|\bar{x}_1\| = \|\bar{x}_2\| = \delta$  allora

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2 &= 2\|\bar{x}_1\|^2 + 2\|\bar{x}_2\|^2 - 4 \left\| \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \right\|^2 \\ &\leq 4\delta^2 - 4\delta^2 \Rightarrow \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \end{aligned}$$

□

*Osservazione 9.4*

Dato che  $\emptyset \neq M \subseteq H$  possiamo definire

$$M^\perp = \{y \in H : \langle x, y \rangle = 0 \forall x \in M\} = \bigcap_{x \in M} x^\perp$$

Questo è un sottospazio chiuso (per continuità del prodotto scalare).

- Possiamo iterare l'operazione e considerare  $(M^\perp)^\perp \supseteq M$ . (coincide con  $M$  solo se  $M$  chiuso).
- Vale  $M \cap M^\perp = \{0\}$

**Teorema 9.7 – Teorema di proiezione su sottospazio chiuso**

Sia  $H$  hilbert e sia  $M$  **sottospazio** chiuso proprio allora  $\exists! P : H \rightarrow M, Q : H \rightarrow M^\perp$  lineari e continue tali che  $\forall x \in H$  si ha  $x = P(x) + Q(x)$  e  $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$ . Vale quindi  $H = M \oplus M^\perp$ .

*Dimostrazione.* Notiamo che, poichè  $M$  è un convesso chiuso, fissato  $x \in H$  esiste unica  $P(x)$  la proiezione di  $x$  su  $M$ , che chiaramente è a valori in  $M$ . Definiamo  $Q(x) = x - P(x)$  e vediamo che è ben definito, cioè  $Q(x) \in M^\perp$ , ossia  $\langle Q(x), y \rangle = 0 \forall y \in M$ . Poichè  $Q(x) = x - P(x)$  e

$$\|x - P(x)\| = \min_{z \in M} \|x - z\| = \min_{z \in M} \|x - P(x) - z\|$$

l'ultima uguaglianza segue poichè  $M$  è un sottospazio. Allora ponendo  $z = \lambda y$  abbiamo<sup>26</sup>

$$\begin{aligned} \|x - P(x)\|^2 &\leq \|x - (P(x) - \lambda y)\|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \\ \|x - P(x)\|^2 &\leq \|x - P(x)\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 - 2\Re \bar{\lambda} \langle x - P(x), y \rangle \end{aligned}$$

Definiamo  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  tale che  $\bar{\lambda}_0 \langle x - P(x), y \rangle = |\langle x - P(x), y \rangle|$  dunque si danno i casi:

- $\langle Q(x), y \rangle = 0$  e non c'è nulla da dimostrare.
- $\langle Q(x), y \rangle \neq 0$  e quindi  $\lambda = t\lambda_0$  con  $|\lambda_0| = 1$ , allora

$$t^2 \|y\|^2 - 2t |\langle Q(x), y \rangle| \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se fosse  $|\langle Q(x), y \rangle| \neq 0$  allora esisterebbe  $t$  tale che  $t^2 \|y\|^2 - 2t |\langle Q(x), y \rangle| < 0$  il che sarebbe un assurdo. Basta infatti considerare  $t < \frac{2|\langle Q(x), y \rangle|}{\|y\|^2}$ .

Vediamo che  $P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2)$  e  $Q(x_1 + x_2) = Q(x_1) + Q(x_2)$   $\forall x_1, x_2 \in H$ . Poichè per ogni spazio  $V$  vettoriale abbiamo, detto  $W \subset V$  sottospazio, che  $V = W \oplus W^\perp$  allora, dette  $P, Q$  le rispettive proiezioni,  $\forall x \in V$  vale  $x = P(x) + Q(x)$ . Quindi scriviamo

$$\begin{aligned} x_1 &= P(x_1) + Q(x_1) \\ x_2 &= P(x_2) + Q(x_2) \end{aligned}$$

<sup>26</sup>tecnica è stessa di Cauchy-Schwartz



E guardando  $x_1 + x_2$  segue che

$$P(x_1) + Q(x_1) + P(x_2) + Q(x_2) = (x_1 + x_2) = P(x_1 + x_2) + Q(x_1 + x_2) \Rightarrow$$

$$P(x_1) + P(x_2) - P(x_1 + x_2) = Q(x_1 + x_2) - Q(x_1) - Q(x_2)$$

Visto che il termine di sinistra sta in  $M$  e quello di destra in  $M^\perp$  allora sono entrambi<sup>27</sup> 0. Analogamente si fa per  $P(\lambda x) = \lambda P(x)$  e  $Q(\lambda x) = \lambda Q(x)$ .  
 $x = P(x) + Q(x)$  e  $\langle P(x), Q(x) \rangle = 0$

$$\|x\|^2 = \|P(x) + Q(x)\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2 + \langle P(x), Q(x) \rangle + \langle Q(x), P(x) \rangle$$

con ultimi due che sono = 0. Poichè  $P, Q$  lineari basta vedere che sono limitate, ma dalla precedente si ha  $\forall x \in H$

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &\leq \|x\| \\ \|Q(x)\| &\leq \|x\| \end{aligned}$$

Vediamo che  $P$  e  $Q$  sono uniche. Supponiamo che  $\exists \tilde{P}, \tilde{Q}$  tali che  $\tilde{P} : H \rightarrow M$  lineare,  $\tilde{Q} : H \rightarrow M^\perp$  e  $\forall x$  valga  $P(x) + Q(x) = x = \tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x)$ . Segue che

$$P(x) + Q(x) = \tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x) \quad \forall x \in H$$

ma quindi  $P(x) - \tilde{P}(x) = \tilde{Q}(x) - Q(x)$ . Visto che  $P(x) - \tilde{P}(x) \in M$  e  $\tilde{Q}(x) - Q(x) \in M^\perp$ , questi necessariamente devono essere nulli  $\forall x \in H$ .  $\square$

### Corollario 9.8

Dato  $M$  sottospazio chiuso proprio  $\subset H$  hilbert,  $\exists x \in H \setminus \{0\}$  tale che  $x \in M^\perp$  (l'ortogonale non è banale)

### Corollario 9.9

Utile per esercizi.  $M$  sottospazio. Allora  $M$  chiuso  $\iff M = (M^\perp)^\perp$ .  
 Dimostralo per esercizio

### Corollario 9.10

$H = M \oplus M^\perp$  se  $M$  sottospazio chiuso proprio.

#### Esercizio 9.1

Difficile. Sia  $X = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  con  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ . trovare controesempio a teorema di proiezione con chiuso.

<sup>27</sup>visto che  $M \cap M^\perp = \{0\}$

## 10 Lezione 18/10 - Esercitazione

### 10.1 Problemi di massimo e minimo

- Sia  $u \in L^1$  fissata.

Ci chiediamo se  $\max\{\int uv : \|v\|_{L^\infty} = 1\}$  sia effettivamente un massimo o se sia un sup. Esso viene realizzato, ad esempio, considerando la funzione

$$v = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases}. \text{ Dunque questo è effettivamente}$$

un massimo realizzato dalla  $v$  descritta.

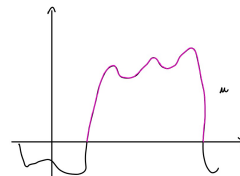


Figura 9: in rosa funzione positiva

- Se  $u \in L^2$ . Consideriamo  $u$  positiva<sup>28</sup> e ci chiediamo nuovamente se  $\max\{\int uv : \|v\|_{L^2} = 1\}$  sia max o sup. Per la disuguaglianza di Hölder sappiamo che  $\int uv = \|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$ . Vale quindi che  $\sup\{\int uv : \|v\|_{L^2} = 1\} \leq \|u\|_2$ . Vediamo ora se esiste  $v$  tale che  $\sup = \|u\|_2$ . Proviamo a considerare  $v = \frac{u}{\|u\|} \Rightarrow \int uv = \int \frac{u^2}{\|u\|} = \|u\|_{L^2}$  quindi abbiamo raggiunto l'uguaglianza e abbiamo effettivamente un massimo.
- Se  $u \in L^p$ ,  $\max\{\int uv : \|v\|_{p'} = 1\}$  con  $p'$  esponente coniugato di  $p$ ? La stima dall'alto di prima vale ancora e abbiamo quindi  $\sup\{\int uv : \|v\|_{p'} = 1\} \leq \|u\|_p$ . Supponiamo<sup>29</sup>  $\|u\|_{L^p} = 1$ . Notiamo che  $v$  deve essere una funzione crescente di  $u$ , proviamo  $v = u^\alpha$ . Proviamo a porre  $\alpha = p - 1$ : Poichè  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \iff \frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$

$$\Rightarrow v = u^{\frac{p}{p'}} \iff v^{p'} = u^p$$

$$\int uv = \int uu^{p-1} = \int u^p = 1$$

e si ha quindi il massimo. Se invece  $\|u\| \neq 1$ , rinormalizziamo e consideriamo  $v^{p'} = \frac{u^p}{\|u\|_{L^p}^p}$

$$\Rightarrow v = \frac{u^{\frac{p}{p'}}}{\|u\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}} \Rightarrow \int uv = \int \frac{uu^{p-1}}{\|u\|_{L^p}^{p-1}} = \|u\|_{L^p}$$

Sia  $X$  spazio, dotato di norma, allora definiamo il duale di  $X$  = funzionali lineari e continui<sup>30</sup> su  $X$ . Allora

$$L^{p'} \ni v \longrightarrow \int uv \in \mathbb{R}$$

è un funzionale che da  $L^{p'}$  in  $\mathbb{R}$ . Questo è continuo perchè è lineare e limitato<sup>31</sup>.

<sup>28</sup>possiamo farlo senza perdita di generalità dal momento che poi ne consideriamo il modulo

<sup>29</sup>per non dover normalizzare

<sup>30</sup>cioè limitato

<sup>31</sup>Con questo ragionamento si è data un'idea di un risultato molto forte: il duale di  $L^p$  è  $L^{p'}$ , ossia "tutti gli spazi  $L^p$  sono in dualità". Per la dimostrazione di questo fatto si rimanda alle dispense del corso *Spazi di Sobolev* reperibili [qui](#).

Consideriamo:  $u \in L^4$ ,  $\max\{\int uv \mid \|v\|_{L^4} = 1\}$ . Qui non possiamo applicare Hölder visto che non abbiamo esponenti coniugati. Per massimizzare cerchiamo sempre una funzione crescente in  $u$ , positiva dove è positiva<sup>32</sup>.

**Idea** Vediamo la situazione con qualche disegno. Supponiamo di porre interamente la  $v$  nel rettangolo grande. È sensato o è meglio mettere un po' da una parte e un po' dall'altra? Detta  $\varepsilon$  la variazione di altezza, notiamo che se aumentiamo l'altezza di  $v$  di  $\varepsilon$  allora anche  $\int uv$  aumenta di  $\varepsilon$ . Questa operazione ha però un costo infatti, dovendo mantenere  $\| \cdot \|_{L^4}$  costante, se aumentiamo di  $\varepsilon$  a sinistra, dobbiamo scendere di  $\varepsilon^4$ , che è poco! Così abbiamo capito che la cosa migliore non è mettere tutta la *massa della funzione* da una parte, ma è meglio spezzare.  $\square$

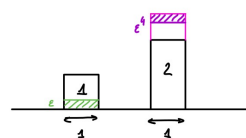


Figura 10: I rettangoli rappresentano  $\int uv$ .

Dunque conviene mettersi a sinistra, ma allora la prima ipotesi non funziona.

Se  $v$  fosse costante, come la gestiamo? Deve valere  $a^4 + b^4 = 1$ , norma  $L^4$ . Otteniamo la seconda equazione imponendo che la derivata sia la stessa.

Per aumentare di  $\varepsilon \int_{sx} uv$ ,  $v$  deve passare da  $a$  a  $a + \varepsilon$ . Questa operazione, in norma  $L^4$  ha un costo di  $4a^3\varepsilon$ , infatti l'integrale  $\int_{sx} u^4$  aumenta di  $4a^3\varepsilon$ . Ora *sviluppando al primo ordine*,  $(a + \varepsilon)^4 = a^4 + 4a^3\varepsilon$ .

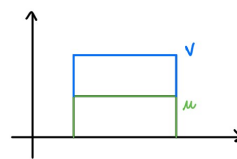
Per aumentare di  $\varepsilon \int_{dx} uv$  dobbiamo passare da  $b$  a  $b + \frac{\varepsilon}{2}$ . Allora  $\int_{dx} u^4$  è aumentato di  $4b^3 \frac{\varepsilon}{2}$ .

Per ottimizzare serve che  $4a^3\varepsilon = 4b^3 \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow b^3 = 2a^3$ . Dunque le equazioni fondamentali che definiscono  $a$  e  $b$  sono  $\begin{cases} a^4 + b^4 = 1 \\ b^3 = 2a^3 \end{cases}$ .

Notiamo che 1, 2 erano valori arbitrari. Generalizzando sull'altezza degli scalini si ha che, se fossere di ampiezza  $\alpha, \beta$  basterebbe sostituire come segue:  $a \rightarrow \frac{\varepsilon}{\alpha}$  e  $b \rightarrow b + \frac{\varepsilon}{\beta}$ . Se l'altezza fosse più alta a sinistra e più bassa a destra il ragionamento è speculare.

Dunque sappiamo che  $\frac{v^3}{u} = \text{costante}$ <sup>33</sup>. Consideriamo  $v \rightarrow v + \frac{\varepsilon}{4}$ , allora:

$$\begin{aligned} \int uv &\text{ aumenta di } \varepsilon \\ \int v^4 &\text{ aumenta di } \frac{4v^3}{u} \varepsilon \end{aligned}$$



dove  $\frac{4v^3}{u}$  è detto il costo unitario.

La cosa ottimale è che il prezzo sia uguale dappertutto, quindi  $\frac{4v^3}{u}$  deve essere costante. Ma allora  $v = cu^{\frac{1}{3}} \Rightarrow v^4 = c'u^{\frac{4}{3}}$ . Se  $u \in L^{\frac{4}{3}}$  e  $c' = \frac{u}{\|u\|_{L^{\frac{4}{3}}}}^{\frac{4}{3}}$  altrimenti

non c'è soluzione  $\Rightarrow$  il sup va a  $+\infty$ . In generale:

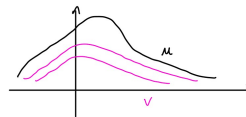
$u \in L^p, v \in L^q$  con  $p, q$  qualunque.  $\int uv$  aumenta di  $\varepsilon$  con un "pagamento", che è solo sulla  $v$ , di  $q \frac{v^{q-1}}{u} \varepsilon$ .

<sup>32</sup>per convessità del funzionale si massimizza il prodotto mettendo "grande con grande e piccolo con piccolo".

<sup>33</sup>Stiamo usando gli scalini

Abbiamo visto con  $u \in L^q$ . Se invece  $u \notin L^q$ ?  $u$  deve essere "molto piccola in insiemi grossi".

Nel nostro caso:  $u$  è una funzione che non arriva mai a zero e scende molto lentamente. Per mantenere la norma  $L^4$  di  $v$  bisogna ridurre sempre di più la costante  $c$ , dunque le  $v$  si allarga sempre di più, tendendo a zero (effetto mostrato in figura con curve rosa, c'è una successione minimizzante). Ma allora  $\int uv$  va all'infinito e dunque il massimo non c'è.



Abbiamo capito che  $u$  deve stare in  $L^q$ . Questo quindi è condizione sufficiente e necessaria per poter massimizzare.

Con questo esercizio si è voluto introdurre l'idea che *problemi di massimi e di minimi corrispondono ad equazioni*.

## 10.2 Spazi $\ell^p$

Definiamo lo spazio  $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, H^0)$ , dove  $H^0$  è la misura che conta i punti. Si ha che  $\{x_n\} \in \ell^p \iff \int_{\mathbb{N}} |x_n|^p dH^0(n) < +\infty \iff \sum |x_n|^p < +\infty$ . Dunque in  $\ell^p$  ci sono le successioni che sono sommabili in potenza  $p$ .

- $\ell^p$  è uno spazio normato, dove  $\|x_n\|_{\ell^p} = (\sum |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$  per  $p \in [1, \infty)$ . Se  $p = \infty$  consideriamo il sup, ossia:  $\|x_n\|_{\ell^\infty} = \sup |x_n|$ . Notiamo che le successioni in  $\ell^\infty$  sono quelle limitate, infatti  $\|x_n\|_{\ell^\infty}$  è il sup delle norme delle successioni.
- Lati negativi: lavorare con tante successioni (conti complicati).
- Lati positivi:
  - sono spazi semplici. le successioni sono determinate, non abbiamo tanti gradi di libertà  $\Rightarrow$  è già tutto "a scala".
  - sono il *prototipo*: scopriremo che ogni spazio di Hilbert a base numerabile è isomorfo isometricamente  $\ell^2$ .

Ricordiamo che una base di successioni è fatta di successioni che valgono zero ovunque eccetto che in un indice prescelto.

### Esercizio 10.1

Sia<sup>a</sup>  $A = \{x \in \ell^1 \mid \exists \bar{n} \text{ t.c. } x_n = 0 \text{ per } n \geq \bar{n}\}$ . È chiuso? Aperto? Compatto? Convesso?

<sup>a</sup>sono le successioni sommabili definitivamente nulle

*Risoluzione:* Sia  $x \in \ell^1$ . Con successione ennessima  $e^n \in A$  indichiamo  $e^n = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ . Sia ora  $x \notin A$ , ossia  $x \in \ell^1 \setminus A$  e indichiamo  $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in A$ . Ci aspettiamo che  $x^n \rightarrow x$  e  $x \notin A$ , infatti

$$\|x - x^n\|_{\ell^1} = \sum_{j \geq n} |x_j| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

perchè la serie è convergente (sta in  $\ell^1$ ), dunque *non è chiuso e nemmeno compatto*.

Non è nemmeno aperto, perchè non è intorno di nessun punto. Infatti sia  $x \in A$ : consideriamo<sup>34</sup>

$$y^n = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\right) \Rightarrow \|y^n\|_{\ell^1} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow x + y^n \rightarrow x \text{ in } \ell^1$$

ma  $x + y^n \notin A$ . Allora ogni elemento di  $A$  è limite di elementi che non stanno in  $A$ . Segue che sia  $A$  che il complementare sono densi.

*Esercizio 10.2*

Se invece di  $\ell^1$  considerassimo  $\ell^p$ ? Dire se i seguenti<sup>a</sup>. sono chiusi, aperti, compatti, convessi, connesso:

$$A = \{x \in \ell^\infty \mid \exists \bar{n} : x_n = 0 \forall n \geq \bar{n}\}$$

$$B = \{x \in \ell^\infty \mid \|x\|_{\ell^\infty} \text{ è un massimo}\}$$

<sup>a</sup>Nel insieme  $B$  si intende: esiste una successione  $x$  tale che un suo elemento è proprio  $\|x\|_\infty$

<sup>34</sup>inizialmente ci sono  $n$  zero

## 11 Lezione 19/10 - Teoria

### Lemma 11.1

Data  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  lineare, allora  $(\ker f)^\perp$  ha dimensione 0 o 1.

*Dimostrazione.* Se per assurdo  $\dim((\ker f)^\perp) \geq 2$  allora  $(\ker f)^\perp$  contiene  $W$  sottospazio di dimensione 2. Avremmo quindi che  $\dim(\ker f|_W) = \{1, 2\}$  visto che  $\mathbb{C}$  ha dimensione 1 come  $\mathbb{C}$  spazio vettoriale. Poichè  $W \subseteq (\ker f)^\perp$  avremmo  $(\ker f) \cap (\ker f)^\perp \neq \emptyset$ , assurdo.  $\square$

### Teorema 11.2 – Teorema di Riesz

Sia  $T : H \rightarrow \mathbb{C}$  lineare e continua. Allora  $\exists! y \in H$  tale che  $\forall x \in H$  si ha

$$T(x) = \langle x, y \rangle$$

*Dimostrazione.* Sia  $M = \ker T$ . Visto che  $T$  è continua,  $M = T^{-1}(\{0\})$  è un sottospazio chiuso. Si danno due casi:

1.  $M = H$ . Allora  $T \equiv 0$ , basta quindi considerare  $y = 0$ .
2.  $M \neq H$ . Visto che  $M$  è un sottospazio chiuso proprio sappiamo che  $H = M \oplus M^\perp$ , dunque  $M^\perp \neq \{0\}$ . Sia  $z \in M^\perp$  non nullo. Affermiamo che  $y = \frac{\overline{T(z)}z}{\|z\|^2} \in M^\perp$  verifica  $T(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H$ :
  - Se  $x \in M$  allora  $T(x) = 0$  e  $\langle x, y \rangle = 0$ , dunque  $T(x) = \langle x, y \rangle$ .
  - Se  $x \in M^\perp$ : visto che per il Lemma precedente  $M^\perp$  può avere dimensione 0 (caso degenere) oppure 1 si ha che  $M^\perp = \text{span}(z)$ . Esiste quindi  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $x = \lambda z$ . Allora

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \lambda z, \frac{\overline{T(z)}z}{\|z\|^2} \right\rangle = \lambda T(z) \frac{\langle z, z \rangle}{\|z\|^2} = \lambda T(z) = T(\lambda z) = T(x)$$

L'unicità segue perchè preso  $\tilde{z} \in M^\perp \setminus \{0\}$  allora  $z = \lambda \tilde{z}$  per un  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  e quindi

$$y = \frac{\overline{\lambda T(\tilde{z})} \lambda \tilde{z}}{|\lambda|^2 \|\tilde{z}\|^2} = \frac{\overline{T(\tilde{z})} \tilde{z}}{\|\tilde{z}\|^2}$$

$\square$

#### Osservazione 11.1

In realtà abbiamo che  $T$  è continua  $\iff \ker T$  è chiuso.

## 11.1 Sistemi ortonormali (completi)

### Definizione 11.3 – Sistema ortonormale

Dato  $H$  hilbert e  $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ , si dice *sistema ortonormale* se

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \forall i, j \in I$$

### Definizione 11.4 – Sistema ortonormale completo

$\{e_i\}_{i \in I}$  si dice *sistema ortonormale completo* se è massimale (rispetto all'inclusione). Vale a dire che  $\nexists v \in H$  tale che  $\{v\} \cup \{e_i\}_{i \in I}$  sia un sistema ortonormale

#### Osservazione 11.2

Dato un sistema ortonormale qualsiasi  $\{e_i\}_{i \in I}$  esiste, per il lemma di Zorn, il suo "completamento" massimale, ossia un sistema ortonormale completo che lo contiene.

*Osservazione 11.3* 1. Dati  $a_i \geq 0$  con  $i \in I$ , dove  $I$  è un insieme qualunque (il caso più che numerabile è quello più significativo). Definiamo

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} a_i \mid J \text{ finito } \subset I \right\}$$

Se  $I = \mathbb{N}$  quella sopra è la definizione classica di serie.

2. Se  $\sum_{i \in I} a_i$  è finita<sup>35</sup>, allora  $a_i \neq 0$  al più per un insieme al più numerabile di indici. Infatti, fissato  $n$ , si ha  $J_n = \{i : a_i \geq \frac{1}{n}\}$  è finito, perchè

$$\frac{1}{n} |J_n| \leq \sum_{J_n} a_i \leq \sum_I a_i = c < +\infty \Rightarrow |J_n| \leq nc$$

$$\Rightarrow \{i : a_i \neq 0\} = \bigcup J_n$$

è al più numerabile.

### Proposizione 11.5 – Disuguaglianza di Bessel

Sia  $\{e_i\}_{i \in I}$  sistema ortonormale in  $H$ . Allora per ogni  $x \in H$  vale

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

<sup>35</sup>ricordiamo  $a_i \geq 0$

*Dimostrazione.* Guardiamo prima il caso  $J \subset I$  finito:  $\forall x \in H$  si ha che

$\sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k$  è ben definito e vale

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \\ &= \left\langle x - \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k, x - \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^N \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle x, e_k \rangle - \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} + \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} \end{aligned}$$

da cui

$$\left\| x - \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2$$

ossia  $\sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ .

Passando al sup su  $J \subset I$  finito otteniamo  $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H \quad \square$

### Teorema 11.6 – Teorema fondamentale delle basi Hilbertiane

Sia  $H$  hilbert,  $\{e_i\}_{i \in I}$  sistema ortonormale. Sia  $M = \overline{\text{span}(e_i, i \in I)}$  sottospazio chiuso.

Allora  $\forall x \in H \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$  è ben definita e converge a  $x' \in H$  con  $x - x' \in M^\perp$ .

*Dimostrazione.* Fissato  $x \in H$  vale la disuguaglianza di Bessel:  $\sum |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow |\langle x, e_i \rangle|^2 \neq 0$  per un insieme  $\mathcal{I}_x$  di indici al più numerabile. Vogliamo dunque mostrare che  $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{\mathcal{I}_x} \langle x, e_i \rangle e_i$  sia ben definito. Per fare ciò, visto che  $|\mathcal{I}_x| \leq \aleph_0$ , fissiamo un ordinamento in modo che  $\mathcal{I}_x = \{1, \dots, n, \dots\}$  e dunque consideriamo la "serie"  $\sum_{\mathcal{I}_x} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ . Mostriamo che quest'ultima è convergente in  $H$  e che non dipende dall'ordinamento scelto:

- Convergenza: Definiamo  $x_k = \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n$  e dimostriamo che è di Cauchy in  $H$ . Infatti: per  $h < k$  qualsiasi vale

$$\|x_k - x_h\|^2 = \left\| \sum_{n=h+1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=h+1}^k |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$  converge per Bessel  $\Rightarrow$  le somme parziali sono successioni

di Cauchy in  $\mathbb{R}$  e dunque  $\sum_{n=h+1}^k |\langle x, e_n \rangle|^2 \rightarrow 0$  per  $h, k \rightarrow +\infty$ .



- **Ordinamento:** Sia  $x' = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$  in  $H$ . Allora<sup>36</sup>  $x' \in M = \overline{\text{span}(e_i, i \in I)}$ .

Dimostriamo ora che  $x - x' \in M^\perp$ . Consideriamo

$$\langle x - x_k, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x_k, e_i \rangle$$

Selezionando  $i$  nell'insieme  $\mathcal{I}_x$  dove  $\langle x, e_i \rangle \neq 0$ , si ha che

$$\langle x_k, e_i \rangle = \sum_{n=1}^k \langle \langle x, e_n \rangle e_n, e_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } k < i \\ \langle x, e_i \rangle & \text{se } k \geq i \end{cases}$$

Se  $i$  è fissato, allora

$$\langle x - x_k, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x_k, e_i \rangle = 0$$

e passando al limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x - x_k, e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e_i \right\rangle = 0$$

dunque  $x - x' \in M^\perp$ . Quindi  $x'$  è proprio la proiezione di  $x$  su  $M$ . Allora  $x'$  non dipende dall'ordinamento scelto su  $\mathcal{I}_x = \{i \in I \mid \langle x, e_i \rangle \neq 0\}$

□

#### Osservazione 11.4

Abbiamo dato un senso numerabile alla somma  $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$  e abbiamo dimostrato che non dipende dall'ordinamento dato a  $\mathcal{I}_x$ . (qua il risultato vale lo stesso ma non è detto che la serie sia assolutamente convergente).

**Attenzione:** Nella dimostrazione non possiamo usare  $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle| < +\infty$  perchè in generale *non* è vero. Però sappiamo che  $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 < +\infty$

### Teorema 11.7

Sono equivalenti in  $H$  hilbert. Dato  $\{e_i\}_{i \in I}$  sistema ortonormale

1.  $\{e_i\}_{i \in I}$  sistema ortonormale completo
2.  $\langle x, e_i \rangle = 0 \ \forall i \in I \Rightarrow x = 0$
3.  $\overline{\text{span}(e_i, i \in I)} = H$
4. **Identità di Parseval:**  $\forall x, y \in H \ \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$
5. **Identità di Bessel:**  $\forall x \in H \ \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$
6.  $\forall x \in H \ x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$

*Dimostrazione.* Seguiamo lo schema: (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (6)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (5)  $\Rightarrow$  (1)

<sup>36</sup>limite di somme finite di elementi in un insieme, appartiene alla sua chiusura

- (1)  $\Rightarrow$  (2): Se  $\exists x \neq 0$  tale che  $\langle x, e_i \rangle = 0 \forall i \in I \Rightarrow \{e_i\}_{i \in I} \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$  è un sistema ortonormale completo, assurdo.
- (2)  $\Rightarrow$  (3): Se  $\overline{\text{span}(e_i | i \in I)} = H \Rightarrow \exists x \in \overline{\text{span}(e_i | i \in I)}^\perp \Rightarrow \langle x, e_i \rangle = 0 \forall i \in I$ , ma allora  $x = 0$ , assurdo
- (3)  $\Rightarrow$  (6): Dal Teorema 11.1 sappiamo che  $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$  converge. Chiamiamo  $x' = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ . Poichè, sempre per il teorema citato,  $x - x' \in \overline{\text{span}(e_i | i \in I)}^\perp = \{0\}$  allora  $x = x' = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ .
- (6)  $\Rightarrow$  (4): Per l'identità di polarizzazione si ha:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4} \left[ \sum_{i \in I} (x_i + y_i)^2 - \sum_{i \in I} (x_i - y_i)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left( \sum_{i \in I} x_i^2 + \sum_{i \in I} y_i^2 + 2 \sum_{i \in I} x_i y_i - \sum_{i \in I} x_i^2 - \sum_{i \in I} y_i^2 + 2 \sum_{i \in I} x_i y_i \right) \\ &= \sum_{i \in I} x_i y_i \end{aligned}$$

dove abbiamo chiamato  $x_i = \langle x, e_i \rangle$  e  $y_i = \langle y, e_i \rangle$ .

- (4)  $\Rightarrow$  (5): Basta considerare  $y = x$
- (5)  $\Rightarrow$  (1): Supponiamo per assurdo che  $\{e_i\}_{i \in I}$  non sia completo  $\Rightarrow \exists x \in H$  tale che  $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{x\}$  è ancora un sistema ortonormale. Dalla disuguaglianza di Bessel si ha che  $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 + |\langle x, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ , ma allora per (5) si ha  $\|x\|^2 + |\langle x, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow |\langle x, x \rangle|^2 = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

□

## 12 Lezione 24/10 - Teoria

$H$  hilbert su  $\mathbb{C}$  ( o  $\mathbb{R}$ ). Abbiamo visto:

- Teorema di proiezione su convesso chiuso (Teorema 9.1)
- Teorema di proiezione su sottospazio  $M$  chiuso su cui vale Pitagora (Teorema 9.1)
- Caso di  $M = \overline{\{e_i\}}$  con  $\{e_i\}$  sistema ortonormale (nel caso finito è teorema visto ad analisi 2) in cui  $x' = \sum \langle x, e_i \rangle e_i = P_M$  ha senso ed è la proiezione su  $M$ .
- Nel caso di sistema ortonormale completo (vale a dire massimale) vale il Teorema 11.1.

Questo si è visto con  $|I| = \aleph_\alpha$  qualsiasi, da ora ci limiteremo ad avere un sistema ortonormale numerabile (legato a proprietà topologica interessante: separabilità)

### Teorema 12.1

$H$  hilbert.  $H$  ammette un sistema ortonormale completo al più numerabile  $\iff H$  è separabile.

*Dimostrazione.* Se  $N = \dim_{alg} H < +\infty$  vale  $H \sim \mathbb{C}^N$ , ok!

Vediamo il caso in cui  $N = +\infty$ .

$\Rightarrow$ ): usiamo che  $\text{Span}_{\mathbb{C}}(e_i : i \in \mathbb{N}) = H$  e prendiamo

$$\begin{aligned} D &= \text{combinazioni lineari finite a coefficienti in } \mathbb{Q} \\ &= \text{Span}_{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}(e_i, i \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

vale allora  $\bar{D} = H$ .

$\Leftarrow$ ): Dato  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  insieme denso e numerabile in  $H$ , costruiamo, tramite il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt<sup>37</sup>, un  $\{p_n\}$  sistema ortonormale tale che  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{span}_{\mathbb{C}}(p_1, \dots, p_n) = \text{span}_{\mathbb{C}}(q_1, \dots, q_n)$$

A meno di selezionare e rinumerare possiamo supporre  $q_1, q_2, \dots, q_n$  linearmente indipendenti. Poi prendiamo  $p_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|}$ ,  $p_2 = \frac{q_2 - \langle q_2, p_1 \rangle p_1}{\|q_2 - \langle q_2, p_1 \rangle p_1\|}$  infatti se consideriamo  $M_1 = \text{span}(p_1) = \text{span}(q_1)$  allora<sup>38</sup>

$$P_{M_1^\perp}(q_2) = q_2 - \langle q_2, p_1 \rangle p_1$$

dove  $\langle q_2, p_1 \rangle p_1 = P_{M_1}(q_2)$ .

Cerchiamo  $\tilde{p}_3 = \alpha q_1 + \beta q_2 + q_3$  con  $\alpha, \beta$  da determinare, tali che  $\langle \tilde{p}_3, p_1 \rangle = 0$  e  $\langle \tilde{p}_3, p_2 \rangle = 0$ , queste equivalgono a

$$\begin{cases} \langle \tilde{p}_3, q_1 \rangle = 0 \\ \langle \tilde{p}_3, q_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

<sup>37</sup>Vedasi Appendice 37.1

<sup>38</sup>stiamo togliendo al vettore  $q_2$  la sua proiezione ortogonale su  $\text{span}(q_1)$

ossia

$$\begin{cases} \langle \alpha q_1 + \beta q_2 + q_3, q_1 \rangle = 0 \\ \langle \alpha q_1 + \beta q_2 + q_3, q_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \alpha \|q_1\|^2 + \beta \langle q_2, q_1 \rangle = -\langle q_3, q_1 \rangle \\ \alpha \langle q_1, q_2 \rangle + \beta \|q_2\|^2 = -\langle q_3, q_2 \rangle \end{cases}$$

### Esercizio 12.1

Mostrare che il determinante della matrice associata al sistema è  $\neq 0$ .  
(Hint: Cauchy-Schwarz)

Ma allora<sup>39</sup>  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sistema ortonormale e

$$\overline{\text{span}(p_n | n \in \mathbb{N})} = \overline{\text{span}(q_n | n \in \mathbb{N})} \supseteq \overline{\{q_n\}} = H$$

□

### Osservazione 12.1

La cardinalità di un sistema ortonormale completo è fissa: finita, numerabile, più che numerabile. Non dipende quindi dal sistema.

## Teorema 12.2

Se  $H$  è separabile allora  $H$  è isomorfo<sup>a</sup> e isometrico a  $\ell^2$

<sup>a</sup>come spazio vettoriale reale

*Dimostrazione.* Scegliamo  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  sistema ortonormale numerabile completo. Allora fissato  $x \in H$ ,  $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$ , considerando

$$\Phi : x \rightarrow \{\langle x, e_n \rangle = \gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

con l'uguaglianza di Bessel segue  $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\gamma_n|^2 < +\infty$ .

Viceversa, data  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ , consideriamo  $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^N \gamma_n e_n = x^N$$

Diciamo che  $x^N$  è una successione di Cauchy in  $H$ . Fissati  $h, k \in \mathbb{N}$ ,  $h < k$

$$\|x^k - x^h\|_H = \left\| \sum_{n=h+1}^k \gamma_n e_n \right\|_H = \sqrt{\sum_{n=h+1}^k |\gamma_n|^2} < \varepsilon$$

dove l'ultimo  $<$  vale perchè la serie converge  $\forall h, k \geq n_0(\varepsilon)$ .

Chiamiamo  $x = \lim_{N \rightarrow \infty} x^N = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n e_n$  e  $\Phi(x) = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Dunque  $\Phi$  è lineare, surgettiva e  $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|\Phi(x)\|_{\ell^2}^2 = \|x\|^2$  quindi è un'isometria. □

<sup>39</sup>notiamo che questo procedimento non usa la completezza dello spazio

*Osservazione 12.2* 1. Dato  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$  prehilbert<sup>40</sup> sistema ortonormale la condizione  $\overline{\text{span}(e_n, n \in \mathbb{N})} = H \Rightarrow \{e_n\}$  massimale (completezza). (nella dimostrazione del Teorema 11.1 è usata solo continuità del prodotto scalare).

Viceversa: la freccia inversa ha bisogno del Teorema di proiezione (che vale sotto ipotesi di completezza<sup>41</sup> di  $H$ )

2. se  $\dim_{\text{alg}} H = +\infty$  e  $H$  Hilbert  $\Rightarrow \dim_{\text{alg}} H$  è più che numerabile. Infatti: sia  $\{e_i\}_{i \in I}$  sistema ortonormale (almeno numerabile, altrimenti  $\dim_{\text{alg}}$  sarebbe finita) allora  $\sum \gamma_n e_n$  con  $\gamma_n \in \ell^2$  non definitivamente nulli  $\in H$ . Caso tipico  $\gamma_n = \frac{1}{n+1}$ . Per assurdo se esistesse  $\mathcal{B} = \{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$  base algebrica di  $H$  a meno di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt consideriamo  $e_n$  base algebrica e sistema ortonormale, ma  $\sum \frac{1}{n+1} e_n \notin \text{span}(e_n : n \in \mathbb{N})$ , quindi non è una base algebrica.

### Definizione 12.3 – Base hilbertiana

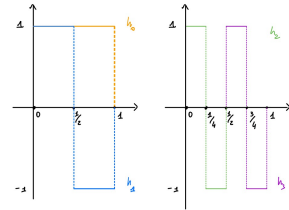
Data  $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$  si dice *base hilbertiana* se  $\overline{\text{span}_{\mathbb{C}}(e_i, i \in I)} = H$  e  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ .

Se  $H$  hilbert completo  $\{e_i\}_{i \in I}$  base hilbertiana  $\iff$  si può associare ad un sistema ortonormale completo.

*Esempi di basi hilbertiane:*

- $\ell^2$ ,  $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \forall i \in \mathbb{N}$  (dove 1 è in posizione  $i$ -esima) è una base hilbertiana
- $L^2([0, 1])$  Base di Haar (usata in teoria dei segnali)  
Dove le funzioni sono:

$$\begin{aligned} h_0 &\equiv 1 \\ h_{1,1} &= \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]} \\ h_{2,0} &= \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]} \\ h_{2,1} &= \mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]} \\ h_{2,2} &= \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]} - \mathbb{1}_{[\frac{3}{4}, 1]} \end{aligned}$$



Espressione generale (normalizzate per il fattore  $2^{\frac{n-1}{2}}$ ) in cui  $n$  indica l'ampiezza  $\frac{1}{2^{n-1}}$  dei supporti e  $k$  indica il posizionamento dell'onda.

$$h_{n,k} = 2^{\frac{n-1}{2}} \left( \mathbb{1}_{[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}]} - \mathbb{1}_{[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}]} \right)$$

- $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$  polinomi di Legendre.  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  e si ortonormalizza =  $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$  polinomi di Legendre
- $L^2([- \pi, \pi], \mathbb{C})$  base di Fourier definita come  $\left\{ \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$  base hilbertiana

<sup>40</sup>definito come spazio di Hilbert, solo che manca completezza

<sup>41</sup>si usava la presenza di un vettore  $\bar{x} \in H^\perp$  per il quale serve il teorema di proiezione, che vuole completezza

## 12.1 Serie di Fourier

Consideriamo ora  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  dotato del seguente prodotto scalare su  $\mathbb{C}$ , dove  $f, g$  sono misurabili:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx$$

Segue che lo spazio  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  dotato di

$$\|f\|_{L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$$

è completo.

### Definizione 12.4 – Base di Fourier

Si considera la base di Fourier complessa data da  $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$  dove  $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ . ( $e^{inx}$  è  $2\pi$  periodico.

### Teorema 12.5

La base di Fourier  $\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$  è una base hilbertiana di  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

*Dimostrazione.* È un sistema ortonormale, infatti:

$$\begin{aligned} \langle e^{inx}, e^{imx} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

Vediamo ora che è completo, ossia:  $\overline{\text{span}(e^{inx} : n \in \mathbb{Z})} = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ .

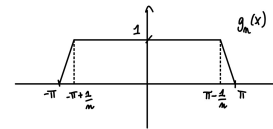
La dimostrazione si fa in diversi passi:

1. Data  $u \in C^0([-\pi, \pi])$  vediamo che è possibile approssimarla con le funzioni  $C^0_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ .

**Idea** Vogliamo approssimarla con qualcosa che la annichila o la periodizza sui bordi. ┘

Data  $u \in C^0((-\pi, \pi), \mathbb{C})$  consideriamo  $u_n = u \circ g_n$  dove

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \pi - \frac{1}{n} \\ n(|x| - \pi) & \text{altrimenti} \end{cases}$$



allora, detta  $h(x) = u(x) - u g_n(x)$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x) - u g_n(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{-\pi + \frac{1}{n}} |h(x)|^2 dx + \int_{-\pi + \frac{1}{n}}^{\pi - \frac{1}{n}} |h(x)|^2 dx + \int_{\pi - \frac{1}{n}}^{\pi} |h(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{-\pi + \frac{1}{n}} |u|^2 + |u g_n|^2 dx + \int_{\pi - \frac{1}{n}}^{\pi} |u|^2 + |u g_n|^2 dx \\ &\leq 2 \int_{[\pi - \frac{1}{n}, \pi] \cup [-\pi, \pi + \frac{1}{n}]} |u(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

2. Mostriamo che  $C_{periodiche}^0([- \pi, \pi], \mathbb{C})$  sono approssimabili con i *polinomi trigonometrici*  $\sum_{n=-k}^k (e^{ix})^n \gamma_n$ . Per fare questo usiamo una variante del teorema di Stone-Weierstrass (vedasi Teorema 37.2). Consideriamo

$$\mathcal{A} = \text{span}(e^{inx} : n \in \mathbb{Z})$$

Notiamo che  $\mathcal{A}$  è una sottoalgebra di  $C_{per}^0([- \pi, \pi], \mathbb{C})$  chiusa per coniugio e che contiene le costanti. Se  $f \in \mathcal{A}$  vale che  $f(-\pi) = f(\pi)$ , dunque  $\mathcal{A}$  non è separante. Possiamo però utilizzare il teorema di Stone-Weierstrass, ponendo<sup>42</sup>  $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$  e considerando  $\tilde{\mathcal{A}} = \{f \in \mathcal{A} : f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}$ . Si ha che  $\tilde{\mathcal{A}}$  contiene le costanti, è invariante per coniugio ed è separante. Vale dunque  $\tilde{\mathcal{A}} = C_{per}^0([- \pi, \pi], \mathbb{C})$ .

□

---

<sup>42</sup>gli unici punti che stiamo identificando sono quindi  $\pi$  e  $-\pi$

## 13 Lezione 25/10 - Esercitazione

Consideriamo  $A = \{f \in L^2([0, 1]) : f \text{ continua}\}$ . È chiuso, convesso? È convesso, infatti se prendiamo due funzioni  $f, g \in L^2([0, 1])$ , allora  $\frac{f+g}{2} \in L^2([0, 1])$ . Non è chiuso perchè è denso.

### Esercizio 13.1

Dato  $C = \{f \in L^2([0, 1]) : f \text{ costante}\}$  dire se è chiuso, convesso. Caratterizzare  $C^\perp$ .

Notiamo immediatamente che  $C$  è convesso.

**Idea** Intuitivamente verrebbe da dire che è anche chiuso, infatti una successione di costanti che converge ha il limite che è costante. Come possiamo dirlo formalmente però?  $\lrcorner$

Vediamo che la distanza tra due funzioni costanti è la differenza tra due numeri, dunque se le costanti convergono allora converge anche la successione delle funzioni e quindi  $\|\cdot\|_{L^2} < +\infty$ .

Capiamo ora chi è  $C^\perp$ : data  $f \in L^2$ ,  $P_C(f) = g$  con  $g \equiv k$  dove  $k$  minimizza la distanza in  $L^2$ , ossia<sup>43</sup>  $\int_0^1 (f - k)^2$ .  $C$  è anche sottospazio vettoriale. Essendo chiuso possiamo considerare<sup>44</sup>  $C^\perp = \{f \in L^2; \int f = 0\}$ . Sia  $f \in L^2$ ,  $\int f = 0$ . Chi è  $P_C(f)$ ? Sappiamo che  $f \in C^\perp$  dunque<sup>45</sup>  $P_C(f) = 0$ .  $\square$

### Osservazione 13.1

In generale: se  $D$  è sottospazio vettoriale chiuso e  $f \in D^\perp$  vale  $P_D(f) = g$  dove  $g \in D$  minimizza  $\|g - f\|^2 = \langle g, g \rangle + \langle f, f \rangle - 2\langle f, g \rangle$ . Dato che  $\langle f, g \rangle = 0$ ,  $g$  non influenza  $\langle f, f \rangle$ , dobbiamo quindi minimizzare  $\langle g, g \rangle$ , che ovviamente sarà per  $g \equiv 0$ .

### Esercizio 13.2

Dire per quali  $p$ ,  $L^p$  è uno spazio di Hilbert.

*Risoluzione:* Abbiamo che  $L^2$  è di Hilbert. Vogliamo ora dire che è l'unico. Vediamo prima il caso  $L^1$ : ha proprietà particolare: come mi immagino la palla unitaria? Non è strettamente convessa, può darsi infatti che la combinazione convessa stia sul bordo, allora  $L^1$ , non può essere uno spazio di Hilbert. Per  $p \neq 2$  si ragiona in maniera analoga.

### Osservazione 13.2

Condizione necessaria in uno spazio di Hilbert è che la palla unitaria sia strettamente convessa.

*Dimostrazione.* Infatti dati  $\|a\| = \|b\| = 1$ , allora

$$\left\| \frac{a+b}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4} (\langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + 2\langle a, b \rangle)^2$$

<sup>43</sup>sarebbe norma, ma se minimizza questo minimizza anche la radice

<sup>44</sup>visto che  $C$  è un retta, infatti è generato da  $h \equiv 1$ , basta prendere le funzioni ortogonali a  $h$

<sup>45</sup>mettersi a fare conti potrebbe far sorgere dubbi stupidi.



ma  $\langle a, b \rangle = 1 \iff a = kb$  il che sulla palla unitaria è possibile solo per  $k = 1$  e quindi  $\langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + 2\langle a, b \rangle < 4$ . In uno spazio normato vale

$$\left\| \frac{a+b}{2} \right\| \leq 1$$

In uno spazio di Hilbert

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \|a - b\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{a+b}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

questo dipende solo dal fatto di avere prodotto scalare.

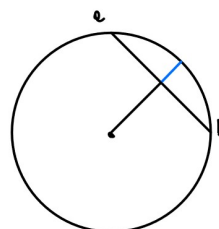


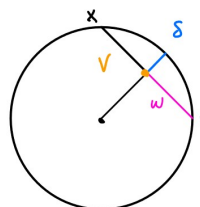
Figura 11: Il segmento in blu è  $1 - \delta$

Esplicitiamo la relazione tra  $\varepsilon$  e  $\delta$ . Detto  $V = \frac{x+y}{2}$

$$1 = \|y\|^2 = \langle V + \omega, V + \omega \rangle = \|V\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}$$

dunque

$$\|V\| = \sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)}$$



□

### Esercizio 13.3

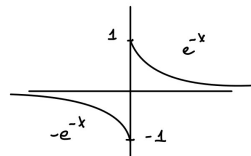
Consideriamo ora<sup>a</sup>  $A = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ a supporto compatto } \int f = 0\}$   
Questo insieme è convesso. È chiuso? Si caratterizzi  $\bar{A}$ .

<sup>a</sup>se non avessi l'ipotesi di supporto compatto,  $A$  non sarebbe ben definito

**Idea** Quel che dovrebbe suonare strano è il "a supporto compatto". Chi ci dice che il limite di funzioni a supporto compatto, abbia supporto compatto? ┘

Consideriamo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ -e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$



Ponendo  $f_n(x) = f(x) \mathbf{1}_{[-n, n]}$  si ha chiaramente che  $f_n \in A$ ,  $f_n \rightarrow f$ , ma  $f \notin A \Rightarrow A$  non è chiuso.

Ma allora ci chiediamo: chi è  $\bar{A}$ ? Sicuramente  $A \supseteq \{f \in L^2 \cap L^1, \int f = 0\}$ . È possibile che valga  $\subseteq$ ?

*Domanda preliminare:* se  $f \in \bar{A} \cap L^1$ , è vero che  $\int f = 0$ ? Ci aspettiamo di sì. Le funzioni che hanno  $\|\cdot\|_{L^1}$  grande e  $\|\cdot\|_{L^2}$  piccola sono funzioni in cui si ha pezzo lungo  $M$  e alto  $\frac{1}{M}$  per  $M$  grande. Ma quindi capiamo che in realtà la risposta è no!

Ora se  $f \notin L^1$  c'è un problema? No! Allora  $\bar{A} = L^2$ , ossia  $A$  è denso.

## 14 Lezione 26/10 - Esercitazione

### Esercizio 14.1

Sappiamo che se  $\mu(X) < +\infty$  allora  $p \geq q \Rightarrow L^p(X) \subseteq L^q(X)$ . Ma è vero che  $\ell^p \subseteq \ell^q$ ? Per quali  $p$  e  $q$  in  $[1, +\infty]$  vale  $\ell^p \subseteq \ell^q$ ?

*Risoluzione:*  $x \in \ell^p \Rightarrow x_n \rightarrow 0, p < +\infty$ . Allora sicuramente  $\ell^p \subseteq \ell^\infty$ , infatti affinché serie converga questa necessariamente deve essere infinitesima e dunque limitata. Quindi  $\forall n, |x_n| \leq \|x\|_{\ell^\infty}$  e

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j|^p \geq |x_n|^p \Rightarrow \|x\|_{\ell^p} \geq |x_n| \Rightarrow \|x\|_{\ell^p} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_{\ell^\infty}$$

Se vale  $\sum |x_n|^p < +\infty$  per quali  $p, q$  vale  $\sum |x_n|^q < +\infty$ ? Se  $x_n \rightarrow 0$  definitivamente sarà  $< 1$ , allora  $|x_n|^q$  per  $q > p$  sarà più piccolo di  $|x_n|^p$ . Dunque per  $q \geq p$  vale l'implicazione. Quindi:

$$\ell^p \subseteq \ell^q \iff q \geq p$$

che è esattamente l'opposto di quanto succedeva negli spazi  $L^p$  di misura finita.  $\square$

### Esercizio 14.2

Sia  $F = \{u \in L^2([-1, 1]), u \text{ è un polinomio al più di secondo grado}\}$ . È chiuso/convesso? È un sottospazio vettoriale? Esibire una sua base ortonormale.

*Risoluzione:* È chiaramente convesso. Chiuso? Notiamo preliminarmente che, poichè  $[-1, 1]$  ha misura finita, si ha  $L^2 \subseteq L^1$  e  $u_n \in L^1$ . Per la chiusura consideriamo  $u_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$  e studiamo la convergenza di  $a_n, b_n, c_n$ . Vogliamo dimostrare che necessariamente  $a_n, b_n, c_n$  sono limitate e che quindi, a meno di sottosuccessione convergono, cos'  $u_n \rightarrow u$  con  $u \in F$ .

**Idea** È possibile che  $a_n \rightarrow +\infty$ ? Se così fosse,  $u_n$  non convergerebbe. L'idea è che se una delle tre costanti è grossa le altre due non riescono a far niente.

$$\int_{-1}^1 u_n = \int_{-1}^1 a_n x^2 + c_n \geq \frac{|a_n|}{3}$$

Dunque se  $a_n \rightarrow +\infty$  avremmo che  $u_n \notin L^1$ , assurdo. Analogamente per  $b_n, c_n$ .  $\lrcorner$

È un sottospazio vettoriale? Sì! Inoltre, poichè un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert è di Hilbert, segue che  $F$  è di Hilbert. Cerchiamo una base ortonormale<sup>46</sup> per  $F$ .

$F$  ha dimensione 3, infatti una volta dati  $a, b, c$  ho tutta la funzione. Notiamo che  $\{1, x, x^2\}$  generano. Sicuramente sono linearmente indipendenti. Quindi è un insieme di generatori minimale.

$1$  e  $x$  sono ortogonali. Anche  $x$  e  $x^2$ , lo sono in quanto abbiamo un integrale di funzione dispari su un intervallo simmetrico.  $1$  e  $x^2$ ? No, si aggiusta, basta considerare  $x^2 - \langle 1, x^2 \rangle$ , stiamo togliendo la proiezione ortogonale. Facendo i conti risulta che una base ortogonale è  $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$ .

<sup>46</sup>nei conti spesso torna più comodo averla ortogonale, basta ricordarsi di dividere per norma

Proviamo a scrivere la proiezione lungo  $F$  di  $e^x$ : Vogliamo scrivere

$$e^x = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$$

Nella base ortonormale  $\{a_n, b_n, c_n\}$ , data  $u \in L^2$  i coefficienti sono i prodotti scalari:  $\langle u, a_n \rangle a_n$ .

Se  $\{\tilde{a}_n, \tilde{b}_n, \tilde{c}_n\}$  è la base ortogonale abbiamo che  $a_n = \frac{\tilde{a}_n}{\|\tilde{a}_n\|}$ ,  $b_n = \frac{\tilde{b}_n}{\|\tilde{b}_n\|}$ ,  $c_n = \frac{\tilde{c}_n}{\|\tilde{c}_n\|}$

e quindi  $\langle u, a_n \rangle a_n = \frac{\langle u, \tilde{a}_n \rangle \tilde{a}_n}{\|\tilde{a}_n\|^2}$ . Similmente per  $b_n, c_n$ .

Calcoliamo  $\|x\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$ ,  $\|x^2 - \frac{1}{3}\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 = \frac{8}{45}$

Consideriamo quindi:

$$\langle e^x, 1 \rangle = \int_{-1}^1 e^x dx = e - \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow a = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}$$

$$\langle e^x, x \rangle = \int_{-1}^1 e^x x = [e^x x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x = \frac{2}{e}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2}{e} \frac{x}{\frac{2}{3}}$$

$$\langle e^x, x^2 - \frac{1}{3} \rangle = \int_{-1}^1 e^x (x^2 - \frac{1}{3}) = [e^x x^2]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2e^x x - [\frac{e^x}{3}]_{-1}^1 = \frac{2e^2 - 14}{3e}$$

$$\Rightarrow c = \frac{(2e^2 - 14)(x^2 - \frac{1}{3})}{3e \frac{8}{45}}$$

## 15 Lezione 31/10 - Teoria

### 15.1 Teoria sulla serie di Fourier

Abbiamo visto che una base hilbertiana speciale su  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  è la base di Fourier:  $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ . Sappiamo che ogni  $f \in L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$  verifica

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

dove

#### Definizione 15.1 – Coefficienti di Fourier

Data  $h$  misurabile da  $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  definiamo

$$c_n(h) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{-inx} dx$$

sono ben definiti<sup>a</sup> se  $h \in L^2$ , ma anche se  $h \in L^1$  (Hölder)

<sup>a</sup>dove questo uguale è inteso in senso  $L^2$ , ossia un'uguaglianza come funzioni per q.o.x

#### Osservazione 15.1

In questo caso l'uguaglianza di Bessel diventa

$$\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

In questo modo possiamo ritrovare il valore numerico di alcune serie note.

*Dimostrazione.* Infatti consideriamo l'uguaglianza di Bessel  $\sum_{n \in I} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$

dove poniamo  $x = f$  e  $e_n = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$

$$\begin{aligned} \sum \left| \left\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \right|^2 &= \|f\|_{L^2}^2 \\ \sum |\langle f, e^{inx} \rangle|^2 &= 2\pi \|f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

ma  $\langle f, e^{inx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 2\pi c_n(f) \Rightarrow$

$$\sum |\langle f, e^{inx} \rangle|^2 = \sum (2\pi)^2 |c_n(f)|^2$$

□

#### Osservazione 15.2

In particolare se guardiamo  $\sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$  possiamo solo dire che, a meno di sottosuccessioni, esistono sottosuccessioni che convergono puntualmente q.o.x.

Siamo interessati a stabilire dei risultati di convergenza migliori per le nostre applicazioni ad esempio risoluzione in serie di Fourier di PDE. (Idea analoga: risoluzione per serie di potenze per equazioni del tipo  $y' = y + c$ ).

- convergenza puntuale: non è assicurata in generale neanche se  $f \in L^2 \cap C^0$
- convergenza uniforme: sotto quale ipotesi?

**Idea** è più facile stabilire la convergenza totale ┘

Data  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$  con  $\{c_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ . La convergenza totale è equivalente a studiare

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n(f) e^{inx}\|_{L^\infty([- \pi, \pi], \mathbb{C})}$$

### Definizione 15.2 – Convergenza totale per serie di funzioni

Una serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge totalmente ad una funzione  $f \in A$  se e solo se esiste una successione  $\{M_n\}_n$  tale che:

1.  $M_n > 0$  per ogni  $n$
2.  $\sum_n M_n$  converge (come serie numerica)
3.  $|f_n(x)| \leq M_n$  per ogni  $n$  e per ogni  $x \in A$

Equivalentemente: se  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)|$  converge come serie numerica.

### Teorema 15.3

Data  $\{c_n(f)\} \in \ell^2$  se  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < +\infty$  allora  $g_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$  converge totalmente, e quindi uniformemente, ad  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ .

In particolare

$$f \in C^0([- \pi, \pi], \mathbb{C}) \iff f \in C^0([- \pi, \pi], \mathbb{R}) \text{ e } f(\pi) = f(-\pi)$$

*Dimostrazione.* Omessa □

*Domanda:* Come potremmo estendere questo risultato per capire se anche funzione limite è derivabile? Diamo idea intuitiva:

**Idea** Date le  $g_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$  derivabili, serve un rappresentante per

la "derivata" di  $f$ . Sappiamo che<sup>47</sup>  $g'_N(x) = \sum_{n=-N}^N i n c_n(f) e^{inx} = i n g_N(x)$ .

<sup>47</sup>Quindi le ridotte parziali verificano una certa equazione differenziale.

Quando è che  $g_N$  converge uniformemente? Se  $g_N$  converge totalmente, ossia se  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |inc_n(f)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |nc_n(f)| < +\infty$ .  $\square$

*Problema:* i candidati coefficienti di Fourier di  $f'$  con  $f$  definita da  $\sum c_n(f)e^{inx}$ , sotto ipotesi di convergenza totale, sono  $inc_n(f)$ .

*Domanda:* qual è in generale il legame tra  $c_n(f)$  e  $c_n(f')$  se  $f$  è derivabile con continuità?

Formalizziamo l'idea di sopra

### Proposizione 15.4

Sia  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , derivabile e<sup>a</sup>  $f(-\pi) = f(\pi)$ ,  $f$  periodica<sup>b</sup> ed  $\exists h \in C^0([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  che coincide con  $f'$  su  $(-\pi, \pi)$ .

Allora  $c_n(f') = inc_n(f)$

<sup>a</sup>vale a dire  $f$  continua su  $[-\pi, \pi]$

<sup>b</sup>ipotesi fondamentale!!

*Dimostrazione.*  $c_n(f')$  è ben definito perchè  $f' \in L^\infty \Rightarrow f' \in L^2, L^1$ . Quindi, integrando per parti:

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} f(x)e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-in)e^{inx} dx \\ &= 0 + in \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} dx = inc_n(f) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ha perchè  $f$  periodica.  $\square$

#### Esercizio 15.1

Calcolare il legame tra  $c_n(f)$  e  $c_n(f')$  se  $f \in C^1$  nel senso sopra, ma  $f$  non è periodica.

*Risoluzione:* riprendendo il calcolo di sopra si ha

$$c_n(f') = \frac{(-1)^n}{2\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) + inc_n(f)$$

$\square$

#### Esercizio 15.2

Data  $f(x) = x$  su  $[-\pi, \pi]$  calcolare  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$ . Attenzione  $f \in C^0$

non periodica, i.e.  $f(\pi) \neq f(-\pi)$ , ma Bessel vale ugualmente. Se fosse  $f \in C_{per}^1$  allora potremmo utilizzare anche la convergenza puntuale della serie

### Corollario 15.5

Se  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  è  $C^1$  e  $f(-\pi) = f(\pi)$  allora valgono:

1.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^2|c_n(f)|^2 = \|f'\|_{L^2}^2 < +\infty$$

2. Se  $\alpha < \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$$

Abbiamo quindi una stima sul comportamento asintotico di  $|c_n|$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

#### Osservazione 15.3

Ha senso porsi la seguente domanda: c'è differenza tra l'essere derivabile su  $\mathbb{R}$  e esserlo quando si considera l'estensione  $2\pi$ -periodica di una funzione  $f$  continua su  $[-\pi, \pi]$  a tutto  $\mathbb{R}$ ? Se  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  è  $C^{k-1}$  allora estendendo  $f$  a  $\mathbb{R}$  in modo  $2\pi$ -periodico **non** è detto che  $f$  sia  $C^{k-1}$  su  $\mathbb{R}$ . Se invece  $f$  è  $C^{k-1}([-\pi, \pi])$  e  $D^h f(-\pi) = D^h f(\pi) \forall h \leq k$  allora l'estensione sarà  $C^{k-1}$  su tutto  $\mathbb{R}$ . Vale anche il viceversa.

Vediamo ora di estendere l'ultimo risultato per induzione:

### Teorema 15.6

Sia  $f \in C^h([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  con  $D^k f(-\pi) = D^k f(\pi) \forall k < h$ . Allora vale  $c_n(D^k f) = i^k n^k c_n(f)$  e

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |i^k n^k c_n(f)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2k} |c_n(f)|^2 < +\infty$$

Inoltre si ha che  $\forall \alpha < h - \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$$

Quindi la serie di Fourier di  $f$  converge totalmente con tutte le derivate di ordine  $< h$ , infatti

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|D^h(c_n e^{inx})\|_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^h |c_n| < +\infty$$

#### Osservazione 15.4

Nel precedente Teorema in realtà vale un se e solo se:

Se  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  è continua e  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^h |c_n| < +\infty$  con  $h \in \mathbb{N}$  allora  $f \in C^h$

ed è tale che

$$D^k f(-\pi) = D^k f(\pi) \quad k \leq h$$

Queste sono esattamente le funzioni nello spazio di Sobolev<sup>48</sup>  $H^k\left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\right)$ .

*Domanda:* La Proposizione 15.1 ha ipotesi ottimali? La periodicità è essenziale. Se  $f \in C^0([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  e periodica<sup>49</sup> allora basta che  $\exists g \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  o  $g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  tale che:

$$\begin{cases} f(x) = \int_{-\pi}^x g(t) dt + c \text{ c costante} \\ \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = 0 \end{cases}$$

Dunque  $f$  è continua,  $f(\pi) = f(-\pi)$ : Usando il Teorema di Lebesgue, sia  $x_n \rightarrow x$  allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}(t)_{[-\pi, x_n]} g(t) dt + c \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}(t)_{[\pi, x]} g(t) dt + c$$

e vale che  $c_n(g) = inc_n(f)$ .

### Esercizio 15.3

Dimostrare il risultato sotto ipotesi  $g \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Stabilire se nel caso  $g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  c'è un miglioramento del Teorema. (ha messo due ipotesi, prova a vedere se c'è differenza)

Concludendo: per stabilire regolarità serve sommabilità dei coefficienti  $c_n(f)$ . Segue il seguente teorema in positivo:

### Teorema 15.7

La convergenza totale,  $\sum |n|^h |c_n(f)| < +\infty$ ,  $\Rightarrow f \in C_{per}^h$  e le somme parziali convergono uniformemente.

Viceversa: se  $f \in C_{per}^0 + C^1 \Rightarrow c_n(f') = inc_n(f)$  e  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 < +\infty$ .

da questa ultima cosa

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} |c_n(f)| &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{|n|} |n| |c_n(f)| \\ &\stackrel{Schwarz}{\leq} \left( \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{|n|^2} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} n^2 |c_n(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \end{aligned}$$

La serie  $\sum c_n(f) e^{inx}$  converge totalmente a  $f$ .

Analogamente se  $f \in C_{per}^{h-1}$  e  $f \in C^h$  si può dimostrare che ogni  $D^k f$ ,  $k < h$  è limite uniforme di  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} i^k n^k c_n(f) e^{inx}$ . Abbiamo gap solo per l'ultimo esponente.

*Attenzione:*  $f \in C_{per}^{h-1} + C^h \Rightarrow D^h f \in \ell^2$  e  $\sum |n|^{2k} |c_n(f)|^2 < +\infty \forall k = 0, \dots, h$ , ma  $\nRightarrow \sum |n|^h |c_n(f)| < +\infty$ , bensì  $\Rightarrow \sum |n|^k |c_n(f)| < +\infty \forall k < h$

<sup>48</sup>Per i più curiosi rimando ai miei appunti del corso di "Spazi di Sobolev" reperibili [qui](#).

<sup>49</sup>condizione necessaria anche per dare senso a  $f(-\pi) = f(\pi)$



**Corollario 15.8**

Se  $f \in C_{per}^0$  ed  $f \in C^1$  la serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>avremmo potuto evitare di usare Stone-Weierstrass nella dimostrazione di completezza di base di Fourier

## 16 Lezione 02/11 - Esercitazione

### Esercizio 16.1

Consideriamo  $L^2([0, 1])$  e base di Haar<sup>a</sup>. Per la definizione della base si veda l'Esempio 2. Provare a dimostrare che effettivamente è una base.

<sup>a</sup>base spesso usata in teoria dei segnali. La base di Fourier torna comodo quando si ha a che fare con oggetti che ruotano.

*Risoluzione:* Torniamo all'Esempio 2. Il sistema  $S$  è chiaramente ortogonale, come scopriamo se è base? Possiamo provare a vedere se è massimale. Sia  $f \neq 0$  tale che

$$\int f h_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow \int_{\frac{a}{2^i}}^{\frac{a+1}{2^i}} f = 0 \quad \forall a = 0, \dots, 2^{j-1}$$

su un intervallo di lunghezza  $2^{-j} \Rightarrow f$  non è continua, infatti se  $f$  fosse continua, avrei un intervallino in cui è o positiva o negativa, ha segno costante. Ma allora  $f$  non avrà integrale nullo, assurdo.

Ma questo ragionamento implica che possiamo scrivere ogni funzione continua in termini di  $h_j$ , ossia  $\bar{S} \subseteq \{f \text{ continua}\}$ ? Perché, se ciò fosse vero, dal momento che le funzioni continue sono dense, avremmo che  $S$  è una base.

**Idea** Sostanzialmente, quando scriviamo una funzione  $f$  con la base  $S$ , stiamo facendo una proiezione di  $f$ . Vogliamo quindi capire se  $f$  rimane la stessa o meno, ossia se è vero che  $f - P_S(f) \stackrel{?}{=} 0$ . (Ci stiamo chiedendo se una funzione continua che ha tutti i prodotti scalari nulli è nulla). Al momento questa implicazione non vale, poichè non sappiamo se la proiezione è continua o meno<sup>50</sup>.  $\lrcorner$

E se al posto delle funzioni continue, considerassimo il denso delle funzioni semplici? Ossia riesco a costruire  $\mathbf{1}_{I_j}$  con  $I_j$  intervallo largo  $\frac{1}{2^j}$  qualunque? Sì<sup>51</sup>! Da questo faccio un qualsiasi intervallo e dunque le funzioni semplici e quindi ho che  $S$  è una base.

### 16.1 Base di Fourier

$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$  è una base di  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Si è osservato che  $\left\{ \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}$  è la base reale, infatti: sia  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in L^2$ . La possiamo vedere anche come funzione<sup>52</sup>  $\in \mathbb{C}$ , ma allora vale  $f(x) = \sum c_n e^{inx}$ , con  $c_n = a_n + ib_n$  e dunque<sup>53</sup>

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum c_n (\cos(nx) + i \sin(nx)) = \sum (a_n + ib_n) (\cos(nx) + i \sin(nx)) \\ &= \sum a_n \cos(nx) - b_n \sin(nx) + i(b_n \cos(nx) + a_n \sin(nx)) \\ &= \sum a_n \cos(nx) - b_n \sin(nx) + i \sum b_n \cos(nx) + a_n \sin(nx) \end{aligned}$$

Ma, essendo  $f$  reale,  $\sum b_n \cos(nx) + a_n \sin(nx) = 0$  e quindi

$$f = \sum a_n \cos(nx) - b_n \sin(nx)$$

<sup>50</sup>In realtà sappiamo che se  $S$  è chiuso allora, per il teorema di proiezione, è continua.

<sup>51</sup>Ci riusciamo considerando una serie infinita di elementi della base. Questa può essere usata visto che lavoriamo con  $\text{span}(S)$ .

<sup>52</sup>La funzione di partenza era reale, dunque la parte complessa si deve semplificare.

<sup>53</sup>possiamo smembrare la serie visto che converge assolutamente.

Dunque possiamo scrivere funzione reale in funzione di seni e coseni.  
 $F = \{\sin(nx), \cos(nx)\}$  è un sistema che genera<sup>54</sup> perchè lo era  $\{e^{inx}\}$ . Vediamo di normalizzare:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi$$

Quindi dobbiamo rinormalizzare per  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ . Sia quindi  $F = \left\{ \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ . Vediamo che sono ortogonali, a meno di segno:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx$$

così anche per le altre due.  $\Rightarrow F$  sistema ortonormale.

*Esempio:* Scriviamo lo sviluppo in serie di Fourier di  $f(x) = x$ . Notiamo preliminarmente che  $e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = (-1)^n$  e  $e^{-in\pi} = (-1)^n$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} x dx = \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{e^{inx} x}{in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{in} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{inx} x}{in} + \frac{e^{inx}}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{(-1)^n \pi}{in} + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n \pi}{in} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{in} \end{aligned}$$

Quindi

$$x = \sum \frac{(-1)^n}{in} (\cos(nx) + i \sin(nx)) = \sum \frac{(-1)^{n+1} \cos(nx)}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$$

### Esercizio 16.2

Provate a sviluppare con seni e coseni, deve tornare questo conto!

Ma quindi se la consideriamo in  $\frac{\pi}{2}$  abbiamo che, detto  $n = 2k + 1$ ,

$$\frac{\pi}{2} = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$$

e questo è stato uno dei primi modi efficienti di scrivere  $\pi$  in serie, va come  $\sim \frac{1}{k^2}$ .  
 (Verifica: serie converge per Leibnitz)

### Esercizio 16.3

Consideriamo  $L^2(\mathbb{N}, \mu)$ ,  $\mu$  misura su  $\mathbb{N}$ . È uno spazio di Hilbert? Se sì, troviamo una base.

<sup>54</sup>Attenzione: nel sistema non bisogna avere una funzione  $\equiv 0$ , ma serve almeno una  $\equiv$  costante, si aggiunge a mano

<sup>55</sup>Questo conto non ha bisogno della primitiva, basta infatti sfruttare  $\cos^2 + \sin^2 = 1$

*Risoluzione:* Si può dimostrare che  $L^2$  è uno spazio di Hilbert  $\forall \mu$ . Riusciamo a trovare base? Questo assomiglia a  $\ell^2$ . Una misura su  $\mathbb{N}$  non ha tante possibilità per essere definita. Se consideriamo  $\tilde{\mathbb{N}} = \{n : \mu(n) > 0\}$  e  $L^2(\mathbb{N}, \mu)$  sono successioni a valori in  $\tilde{\mathbb{N}}$ . Quindi una base è  $\left\{ \frac{e_n}{\sqrt{\mu(n)}}, n \in \tilde{\mathbb{N}} \right\}$ . Verifica immediata.

In generale come si verifica se, dato un insieme, questo è una base o meno? Il fatto che sia ortogonale/ortonormale non crea problemi, infatti, nel caso in cui non lo fosse, riusciamo a farla diventare una. *Il vero problema è vedere se generano o meno.*

#### Esercizio 16.4

Esiste una base di soli polinomi su  $L^2([0, 1])$ ?

*Risoluzione:* Sappiamo che su  $[0, 1]$  i polinomi sono densi nelle funzioni continue e queste approssimano tutte le funzioni. Allora tutti i polinomi sono un sistema di generatori, ma se li prendiamo tutti non sono base. Consideriamo solo i monomi e li ortogonalizziamo. Questi continuano a generare, infatti sono numerabili e vale ancora Stone-Weierstrass. (per formalismo usare induzione su grado del polinomio)

#### Esercizio 16.5

E se considerassimo  $L^2(\mathbb{R})$ ?

*Risoluzione:* non è più semplice come prima, Stone-Weierstrass vale sui compatti. Ricordiamo che nessun polinomio (non nullo) appartiene a  $L^2(\mathbb{R})$ . Non è quindi possibile una base con i polinomi.

#### Esercizio 16.6 - Possibile esercizio da scritto

E se considerassimo  $L^2(\mathbb{R})$  con polinomi razionali?

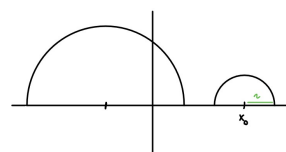
**Idea** I polinomi razionali sono gli inversi dei polinomi senza soluzioni. ┘

#### Esercizio 16.7

Vogliamo considerare le funzioni disegnabili solo con goniometro

$$f(x) = \sqrt{((r^2 - (x - x_0)^2)^+}$$

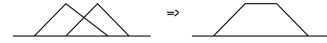
La domanda è: riusciamo a trovare una base qui dentro?



*Risoluzione:* Se riuscissimo ad approssimare un rettangolo avremmo finito, infatti avremmo le funzioni a scala e da lì potremmo generare tutto lo spazio. Supponiamo di aver trovato i generatori, come otteniamo una base? È sufficiente considerare le funzioni con raggio e centro razionale. Cerchiamo ora dei generatori.

**Idea** Proviamo a cambiare prospettiva: se invece di avere semicerchi considerassimo triangoli, il problema si semplificherebbe o resterebbe uguale? ┘

Si semplifica infatti, quando sommiamo due di queste funzioni, nei pezzi in comune son uguali e costanti, dunque otteniamo un trapezio, che è praticamente un rettangolo<sup>a</sup>.



---

<sup>a</sup>Il fatto di aver considerato triangoli con angoli 45 gradi è inutile, possiamo infatti moltiplicare e variare l'angolo

**Idea** Si provi a pensare come inizio di esercizio di Haar: se  $f$  continua allora se integrale nullo ho 0. ┘

## 17 Lezione 07/11 - Esercitazione

Prima di risolvere l'Esercizio 16.7, ricordiamo la seguente:

### Definizione 17.1 – Punti di Lebesgue

Un punto  $x$  si dice *di Lebesgue* se vale la seguente proprietà di media:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_x(\varepsilon))} \int_{B_x(\varepsilon)} u(y) dy$$

se il limite esiste.

Grazie a questa definizione, riusciamo a trovare rappresentati canonici per una funzione, infatti: il Teorema (37.3) ci dice che  $\{x \in X \text{ tale che } x \text{ non è punto di Lebesgue}\}$  è trascurabile dunque, definita  $\omega(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} u(y) dy \forall x$  punto di Lebesgue, vale che  $\omega = u$ . Per ulteriori dettagli al riguardo Vedasi Appendice (37.3).

*Risoluzione:* Sia  $\varphi$  funzione a semicerchio. Allora riformuliamo ciò che ci serve: data  $u \in L^2$  ortogonale a tutti i semicerchi, ossia tale che  $\int u\varphi = 0 \forall \varphi$  vorremmo dimostrare che ciò implica<sup>56</sup>  $u = 0$ . Il fatto che  $\varphi$  sia a supporto compatto mi permette di concentrarmi su un intervallo e ignorare cosa fa fuori. Se abbiamo una funzione che è positiva su un intervallo allora, moltiplicandola per una  $\varphi$ , non è possibile che l'integrale sia  $= 0$ .<sup>57</sup> Quindi  $u$  non può avere intervalli di misura non nulla in cui è  $> 0$ .

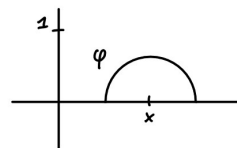
**Idea** Avessimo  $u$  continua potremmo trovare delle condizioni per poter affermare che è la funzione nulla, ma più in generale possiamo considerare i punti di Lebesgue. ┘

Vogliamo dimostrare che  $u$  non ha un punto di Lebesgue in cui non valga 0, ossia: preso  $x$  punto di Lebesgue per  $u$ ,  $u(x) = 1$  è assurdo. Una cosa equivalente, ma più forte, è

$$\int_{B(x,\varepsilon)} |u(y) - u(x)| dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Se  $\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |u(y) - 1| < \frac{\varepsilon}{10}$ , allora, visto l'ipotesi che  $u \perp \varphi \forall \varphi$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(y) u(y) dy \\ &= \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(y) dy + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(y) (u(y) - 1) dy \Rightarrow \\ &\|\varphi\|_{L^1} = - \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(y) (u(y) - 1) dy \end{aligned}$$



**Idea** Il sospetto è che il membro di destra sia molto più piccolo. ┘

<sup>56</sup>Similmente a quanto visto in Corollario (7.1)

<sup>57</sup>si moltiplica una funzione positiva, integrale non è mai nullo

$$\|\varphi\|_{L^1} = - \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(y)(u(y) - 1)dy \leq \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(y)^{58}|u(y) - 1|dy \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \frac{\varepsilon}{10}$$

Abbiamo scoperto che se ci fosse una  $u$  ortogonale a tutte le  $\varphi$  e con un punto di Lebesgue in cui non vale 0 allora esisterebbe una  $\varphi$  tale che  $\|\varphi\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{10} \|\varphi\|_{L^\infty}$ , ma sappiamo come sono fatte le  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^\infty} &= \varepsilon \\ \|\varphi\|_{L^1} &= \frac{\pi\varepsilon^2}{2} \Rightarrow \frac{\pi\varepsilon^2}{2} \leq \frac{\varepsilon^2}{10} \end{aligned}$$

il che è assurdo<sup>59</sup>.

#### Osservazione 17.1

La risoluzione vista ci dice che, in realtà, non ci interessa avere funzioni a semicerchio: finchè abbiamo funzioni continue, a supporto compatto che stanno in  $L^1, L^\infty$  il discorso resta valido<sup>60</sup>.

#### Osservazione 17.2

I fatti principali da ricordarsi da questo esercizio sono l'utilità dei punti di Lebesgue e il fatto che generare spazi di Hilbert non è così difficile: non è tanto importante generare, quanto generare con qualcosa di maneggevole.

#### Esercizio 17.1

Consideriamo l'operatore  $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  dove  $T(u)(x) = \int_0^x u(t)dt$ . Verificare la buona definizione e la continuità. Definire  $Im(T)$

**Risoluzione:** Buona definizione: Vogliamo  $T(u) \in L^2$ , ma  $T(u) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua.<sup>61</sup>

Continuità:  $T$  è lineare, basta vedere se è limitata.

$$\|T(u)\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} c$$

Usando la disuguaglianza di Hölder possiamo vedere che

$$\begin{aligned} |T(u)(x)| &= \left| \int_0^x u(t)dt \right| = \left| \int_0^1 u(t)\chi_{[0,x]}(t)dt \right| \leq \int_0^1 |u(t)\chi_{[0,x]}(t)|dt \\ &\leq \|u\|_{L^2} \|\chi_{[0,x]}\|_{L^2} = \sqrt{x} \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} \end{aligned}$$

quindi  $c = 1$ :

$$\|T(u)\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$$

Immagine di  $T$ :  $T(u)(0) = 0$  quindi  $Im(T) \subseteq \{\text{continue}, v(0) = 0\}$ . Se consideriamo  $\{v(0) = 0, v \text{ derivabile}, v' \in L^2\} \subset Im(T)$ , infatti  $u = v'$  funziona:

$$T(u)(x) = \int_0^x u(t)dt = \int_0^x v'(t)dt = v(x) - v(0) = v(x)$$

<sup>58</sup> $\varphi$  è già positiva, possiamo non scrivere il modulo

<sup>59</sup>chiaramente il valore di  $\|\varphi\|_{L^\infty}$  lo scegliamo come vogliamo

<sup>60</sup>Ricorda: detta  $\psi_\varepsilon$  omotetia vale sempre:  $\|\psi_\varepsilon f\|_{L^1} = \varepsilon \|f\|_{L^1}$  e  $\|\psi_\varepsilon f\|_{L^\infty} = \varepsilon \|f\|_{L^\infty}$

<sup>61</sup>funzioni continue definite su un intervallo chiuso sono  $L^2$

Non vale l'uguaglianza perchè  $Im(T)$  contiene funzioni non derivabili, tipo una funzione a triangolo. Per mostrare che  $Im(T) \subset \{continue, v(0) = 0\}$  basta mostrare funzioni  $\in L^1$  con derivata  $\notin L^2$ .

**Idea** Ma riusciamo a migliorare questo discorso? È possibile descrivere bene le funzioni? ┘

Abbiamo visto che, se  $u \in L^2$ ,  $u = \sum c_n e^{inx}$  e, dopo aver rinormalizzato,  $\|u\|_{L^2}^2 = \sum c_n^2$ . Se potessimo derivare a destra e a sinistra allora avremmo  $u' = \sum inc_n e^{inx}$ . Come possiamo usare questa cosa? Visto che  $T$  è lineare

$$T(u) = \sum c_n T(e^{inx}) = \sum \frac{c_n}{in} (e^{inx} - 1)$$

poichè  $\int_0^1 e^{int} dt = \frac{1}{in} (e^{inx} - 1)$ .

Ma  $T(u) \in L^2 \Rightarrow$  ammette scrittura in serie di Fourier dove i coefficienti sono  $c_k = \int e^{ikx} \sum \frac{(e^{inx}-1)}{in} c_n$ .

C'è però una questione tecnica da risolvere: perchè possiamo scrivere  $T(u)$  in quel modo? Essendo  $T$  un operatore lineare sappiamo che commuta con le somme finite, ma per quanto riguarda le serie invece? Visto che  $T$  continua:

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}\right) &= T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k c_n e^{inx}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k c_n T(e^{inx}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n T(e^{inx}) \end{aligned}$$

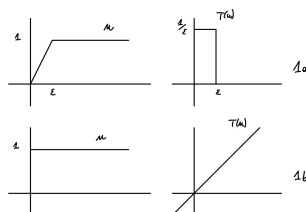
allora "T della serie è la serie dei T".

Abbiamo quindi scoperto che i coefficienti di Fourier di  $T(u)$  sono quelli di  $u$  divisi<sup>62</sup> per  $n$ .

Dunque per capire se una funzione continua che vale zero in zero appartiene a  $Im(T)$  possiamo limitarci a guardare i coefficienti di Fourier moltiplicati per  $n$ . Se *non* hanno quadrato sommabile, non c'è niente da fare, altrimenti abbiamo trovato  $u$ .

Domanda: nella stima  $\|T(u)\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} c$ , sappiamo che  $c = 1$ . Esiste una costante migliore<sup>63</sup>?

Consideriamo l'esempio in Figura (1a). Non funziona. In Figura (1b) notiamo che:



Notiamo che la  $u$  migliore di tutte va presa sempre positiva. Inoltre sappiamo che 1 non può essere la migliore costante perchè  $\sqrt{x}\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$ . Consideriamo

$$\|T(u)\|_{L^2}^2 = \int_0^1 T(u)^2(x) dx \leq \int_0^1 \|u\|_{L^2}^2 x dx = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2$$

<sup>62</sup>  $\mp in$ , precisamente, ma la cosa importante è che è divisa per  $n$ , converge meglio

<sup>63</sup> ossia più piccola di 1



$$\Rightarrow \|T(u)\|_{L^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \|u\|_{L^2}^2$$

Possiamo fare di meglio? Nella stima precedente abbiamo usato la disuguaglianza di Hölder: per avere l'uguaglianza serve che siano uno multiplo dell'altro. Allora l'unica  $u$  che possiamo prendere è  $u$  costante tra 0 e  $x$   $\Rightarrow$  la migliore che possiamo prendere è  $u$  costante dappertutto. Con queste considerazioni abbiamo

$$|T(u)(x)| \leq \dots \leq \|u\|_{L^2([0,x])} \leq \|u\|_{L^2([0,1])} \sqrt{x}$$

Proviamo a cambiare punto di vista: guardiamo i coefficienti di Fourier e andiamo a controllare cosa  $T$  fa sugli elementi della base.

**Idea** Controlliamo la costante sugli elementi della base. ┘

Sia  $u = \sum_n c_n \varphi_n$  con  $\{\varphi_n\}$  base. Vale allora  $T(u) = \sum_n c_n T(\varphi_n)$ . Se  $\|T(\varphi_n)\|_{L^2} \leq \tilde{c}$ , sappiamo che  $\tilde{c} \geq c$  in generale. Consideriamo la  $\tilde{c}$  migliore per tutte le  $\varphi_n$ . Può essere  $\tilde{c} > c$ ?

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &= \left\| \sum c_n T(\varphi_n) \right\| \leq \sum |c_n| \|T(\varphi_n)\| \\ &\leq \tilde{c} \sum |c_n| \|\varphi_n\| \stackrel{?}{\leq} \tilde{c} \|u\|_{L^2} \end{aligned}$$

In generale vale  $\sum_n c_n \geq \sqrt{\sum_n c_n^2} \Rightarrow$  possiamo guardare la migliore costante per le funzione della base, ma non è detto che sia la scelta migliore in generale. Lo è se  $\{T(\varphi_n)\}$  sono ortogonali

*Esercizio 17.2*

Consideriamo  $A = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \exists y \text{ tale che } u(y+t) = u(y-t) \forall t \in \mathbb{R}\}$  È chiuso? Convesso? Denso? Compatto?

## 18 Lezione 08/11 - Teoria

### 18.1 Convergenza puntuale della serie di Fourier

#### Definizione 18.1 – $\alpha$ -Hölderianità

Una funzione  $f$  si dice  $\alpha$ -hölderiana in  $x_0$  con  $\alpha > 0$  se  $\exists M < +\infty, \delta > 0$  tali che

$$|f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq M|t|^\alpha \quad \text{per } |t| \leq \delta$$

#### Teorema 18.2

Sia  $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  estesa per  $2\pi$ -periodicità<sup>a</sup> e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $f$  è  $\alpha$ -Hölderiana<sup>b</sup>. Allora  $\sum_{n=-N}^N c_n(f)e^{inx} \rightarrow f(x_0)$  per  $N \rightarrow +\infty$

<sup>a</sup>esempio  $f(x) = x$

<sup>b</sup> $f$   $\alpha$ -Hölderiana  $\Rightarrow f$  continua in  $x_0$ ,  $f(x_0)$  è ben definito

#### Osservazione 18.1

C'è una versione più debole di questo teorema<sup>64</sup>: sia  $f$  come sopra,  $L^1$  estesa per  $2\pi$ -periodicità e sia  $x_0$  tale che  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+), \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$  e

$$f^+|_{[x_0, x_0 + \delta)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ f(x_0^+) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

e

$$f^+|_{(x_0 - \delta, x_0]}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ f(x_0^-) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

sono entrambe  $\alpha$ -Hölderiane. Allora

$$\sum_{n=-N}^N c_n(f)e^{inx} \rightarrow \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

(storicamente utile per usare  $f(x) = x$  in calcolo serie fourier)

#### Definizione 18.3 – Nucleo di Dirichlet

Introduciamo il nucleo di Dirichlet  $D_N(x)$ , dove

$$D_N(x) = 1 \cdot \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

$D_n$  verifica alcune proprietà:

- $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$  Infatti:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<sup>64</sup>che vale anche per  $f(x) = x$  esteso per  $2\pi$ -periodicità

- Visto che abbiamo  $2N + 1$  termini,  $n = -N, -N + 1, \dots, 0, \dots, N$  allora

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{n=-N}^N e^{i(n+N-N)x} = \sum_{k=0}^{2N} e^{-iNx} e^{ikx} = e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} (e^{ix})^k \\ &= e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi  $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ , per  $x \in [-\pi, \pi], x \neq 0$ .

Per essere precisi resta da definire  $D_N$  in  $x = 0$ . La poniamo = 1.

*Dimostrazione del Teorema.* Data  $f \in L^1((-\pi, \pi))$  estesa a  $\mathbb{R}$  per periodicit , per ogni  $N \in \mathbb{N}$  poniamo

$$S_n(f) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx_0}$$

Vediamo che

$$S_n(f) = \sum_{n=-N}^N \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx_0} = \boxed{\sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x_0-y)} dy}$$

vale anche che

$$f(x_0) = f(x_0) \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0) \boxed{\sum_{n=-N}^N e^{inx} dx}$$

Vogliamo confrontare loro. Con cambio di variabile  $x = x_0 - y$ , allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x_0-y)} dy &= \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(x_0-x) e^{inx} dx \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-x) e^{inx} dx \end{aligned}$$

dove \* perch  abbiamo l'integrale di funzione periodica su il suo periodo, quindi non vede traslazione.

Confrontando le due scritte

$$S_n(f)(x_0) - f(x_0) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0-x) - f(x_0)) e^{inx} dx$$

Diciamo che  $S_n f(x_0) - f(x_0) \rightarrow 0$  per  $N \rightarrow +\infty$ . Riportando la somma dentro l'integrale vale che

$$\begin{aligned} S_n(f)(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0-x) - f(x_0)) D_n(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(f(x_0-x) - f(x_0))}{\sin(\frac{x}{2})} \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right) dx \end{aligned}$$

Detta  $g(x) = \frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{\sin(\frac{x}{2})}$ , se  $g \in L^1$ , per il lemma di Riemann-Lebesgue, si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Vediamo che  $g(x) = \frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{\sin(\frac{x}{2})} \in L^1((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ . Infatti<sup>65</sup>

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)| dx &= \int_{-\delta}^{\delta} |g(x)| dx + \int_{-\pi}^{-\delta} |g(x)| dx + \int_{\delta}^{\pi} |g(x)| dx \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{M|x|^\alpha}{\frac{|x|}{\pi}} dx + \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{|f(x_0-x)| - |f(x_0)|}{\sin(\frac{\delta}{2})} dx \\ &= 2\pi M \int_0^{\delta} \frac{1}{|x|^{1-\alpha}} dx + \frac{\|f\|_1 + |f(x_0)|}{\sin(\frac{\delta}{2})} < +\infty \end{aligned}$$

La funzione  $\frac{f(x_0)}{\sin(\frac{x}{2})} \in L^1([-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta), \mathbb{C})$  perchè è continua e

$$\left| \frac{f(x_0-x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right| \leq c|f(x_0-x)| \in L^1([-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta), \mathbb{C})$$

□

### Proposizione 18.4 – Lemma di Riemann-Lebesgue

Sia  $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  allora<sup>a</sup>

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \sin(px) dx \xrightarrow{p \rightarrow \pm\infty} 0$$

<sup>a</sup>per  $f$  a valori complessi consideri parte reale e immaginaria

*Dimostrazione.* Supponiamo  $g = \varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \sin(px) dx &\stackrel{*}{=} \int_{-M}^M \varphi(x) \sin(px) dx \\ &\stackrel{\text{int. parti}}{=} \left[ -\frac{\cos(px)}{p} \varphi(x) \right]_{-M}^M + \int_{-M}^M \frac{\cos(px)}{p} \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

dove in \* usiamo il fatto che quando una funzione è a supporto compatto vuol dire che  $\exists R \in \mathbb{R}_{>0}$  tale che  $\text{spt} \varphi \subseteq B(0, R)$ . Avremmo potuto anche non prendere un intervallo simmetrico, il primo addendo sarebbe comunque andato a 0 in  $p$ .

$$\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \sin(px) dx \right| \leq \left| \int_{-M}^M \frac{\cos(px)}{p} \varphi'(x) dx \right| \leq \frac{1}{p} 2M \|\varphi'\|_{\infty} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

Sia ora  $g \in L^1$  qualsiasi. Fissato  $\varepsilon > 0$  dimostriamo che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \sin(px) dx \right| < \varepsilon \text{ per } p \geq \bar{p}$$

<sup>65</sup>basta vederlo in un intorno di 0 perchè fuori da 0 abbiamo già una funzione  $L^1$

Per densità di  $C_C^1$  in  $L^1(\mathbb{R})$  allora, fissato  $\varepsilon$ ,  $\exists \varphi \in C_C^1$  tale che

$$\|g - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \sin(px) dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} (g(x) - \varphi(x)) \sin(px) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \sin(px) dx \right| \\ &\leq \|g - \varphi\|_{L^1} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

dove il secondo membro sappiamo già stimarlo.  $\square$

**Idea** Consiglio: in generale per stimare torna comodo usare la densità.  $\lrcorner$

**Proposizione 18.5** – Lemma di Riemann-Lebesgue generalizzato

Sia  $g \in L^1(\mathbb{R})$  e sia  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $T$  periodica. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) h(px) dx \xrightarrow{p \rightarrow \pm\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right) \int_0^T h(x) dx$$

in questo stile di dimostrazione serve la limitatezza

*Dimostrazione.* Introduciamo una funzione accessoria

$$\Phi(p, s) = \int_{\mathbb{R}} g(x) h(px + s) dx \quad s \in [0, T]$$

La dimostrazione è arzigogolata, ma trucco torna utile in molti conti. Vale che

1.  $\int_0^T \Phi(p, s) ds = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \int_0^T h(x) dx$
2.  $\forall s$  fissato  $\Phi(p, s) - \Phi(p, 0) \xrightarrow{p \rightarrow \pm\infty} 0$

*Dimostrazione di (1.):* Considerando  $g(x)h(px + s) = \varphi(x, s) \in L^1(\mathbb{R} \times [0, T], \mathbb{R})$ , visto che  $\|\varphi(x, s)\| \leq \|g(x)\|_{L^1} \|h\|_{L^\infty}$  possiamo applicare il Teorema di Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}} g(x) h(px + s) dx &= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} dx g(x) \int_0^T \underbrace{h(px + s)}_{\substack{px \text{ è una traslazione} \\ \text{di una funzione periodica}}} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \int_0^T h(s) ds \end{aligned}$$

*Dimostrazione di (2.):* Usiamo la continuità della traslazione in  $L^1$

$$\begin{aligned} \Phi(p, s) - \Phi(p, 0) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \underbrace{h(px + s)}_{=h(p(x + \frac{s}{p}))} dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) h(px) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g\left(\underbrace{x + \frac{s}{p}}_{=: x'}\right) h\left(p\left(x + \frac{s}{p}\right)\right) dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) h(px) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g\left(x' - \frac{s}{p}\right) h(px') dx' - \int_{\mathbb{R}} g(x') h(px') dx' \end{aligned}$$

Quindi, avendo una traslazione infinitesima,

$$\begin{aligned} |\Phi(p, s) - \Phi(p, 0)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \left( g\left(x' - \frac{s}{p}\right) - g(x') \right) h(px') \right| dx' \\ &\leq \|h\|_{L^\infty} \|\tau_{\frac{s}{p}} g - g\|_{L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \xrightarrow{p \rightarrow \pm\infty} 0 \end{aligned}$$

Possiamo quindi riscrivere la tesi come:

$$\Phi(p, 0) \xrightarrow{p \rightarrow \pm\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right) \int_0^T h(x) dx$$

Sappiamo che asintoticamente

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} (\Phi(p, s) - \Phi(p, 0)) = 0$$

e che

$$\int_0^T \Phi(p, s) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \int_0^T h(x) dx$$

Allora, usando il Teorema di convergenza dominata, si ha:

$$\begin{aligned} \Phi(p, 0) &= \int_0^T \Phi(p, 0) ds = \int_0^T (\Phi(p, s) + \Phi(p, 0) - \Phi(p, s)) ds \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right) \int_0^T h(x) dx + o(1) \text{ per } p \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

infatti

$$\left| \int_0^T \Phi(p, s) - \Phi(p, 0) ds \right| \rightarrow 0$$

sempre per il Teorema di convergenza dominata. Infatti per (2.) sappiamo che  $\Phi(p, s) - \Phi(p, 0) \rightarrow 0$  e che

$$|\Phi(p, s)| = \int g(x) h(px + s) dx \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \|h\|_{L^\infty} \quad \forall s \in [0, T]$$

**Idea** Trucco per memorizzare: per (1.) Fubini-Tonelli, per (2.) continuità di traslazione. ┘

□

*Esercizio 18.1*

Date  $h$   $T$ -periodica e limitata,  $\int_0^T h = c$  e  $g \in L^1$ . Supponendo  $g(x) = \mathbb{1}_{(a,b)}$  mostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) h(px) dx \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) c$$

(esercizio da fare un po' con le mani, da suddividere a modino intervallo)

**Idea** Si può pure estendere al caso di  $n$  intervalli e poi, per densità, passare alle funzioni in  $L^1$ . ┘

## 18.2 Equazione del calore

Dato  $\Omega$  corpo in  $\mathbb{R}^3$  isotropo omogeneo,  $u(t, x)$  è la temperatura al tempo  $t$  nel punto  $x$ . Si può mostrare che questa equazione è del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = c\Delta u(t, x) + f(t, x) = c \operatorname{div}(\nabla u) + f(t, x)$$

con  $x \in \Omega, t \in [0, T)$ .  $c > 0$  è la costante tipica del mezzo, proporzionale alla conduttività termica e inversamente proporzionale alla capacità termica.  $f$  è una sorgente di calore esogena. È una PDE, *Partial Differential Equation*.

*Osservazione 18.2*

La soluzione  $u : [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  ci dice la temperatura al tempo  $t$  alla posizione  $x$ . Stiamo considerando l'evoluzione di questo problema per  $t > 0$ . Chiaramente la soluzione è univocamente determinata dal valore iniziale  $u(0, x) = u_0(x)$ . Sono necessarie altre condizioni iniziali dovute all'oggetto che studiamo, queste possono essere:

- *condizione di Dirichlet*: Assegniamo la  $u(t, x)$  su  $[0, T) \times \partial\Omega$ . Fisicamente significa che la temperatura resta costante su  $\partial\Omega$ .
- *condizione di Neumann*:  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  normale a  $\partial\Omega$ , ossia  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  su  $\partial\Omega$ . Fisicamente significa che non c'è scambio di calore attraverso  $\partial\Omega$ .
- condizioni di periodicità sul mezzo

Noi tratteremo il caso  $f = 0, u \in C^2$  in  $x$  e  $C^1$  in  $t$ , in questo modo questo "oggetto" ha significato puntuale. Per  $t \in (0, T), x \in [-\pi, \pi] \approx S^1$

$$\begin{cases} u_t = cu_{xx} & c > 0 \quad (0, T) \times [-\pi, \pi] \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u(t, \pi) = u(t, -\pi) & \forall t > 0 \\ u_x(t, \pi) = u_x(t, -\pi) & \forall t > 0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

Le condizioni (3), (4) sono *condizioni di periodicità al bordo* e la (3) ci assicura che, se la soluzione esiste, allora  $u_t(t, \pi) = u_t(t, -\pi) \Rightarrow u_{xx}(t, \pi) = u_{xx}(t, -\pi)$ .

### 18.2.1 Risoluzione formale di (P)

**Idea** a  $t$  congelato sviluppare la soluzione in serie di Fourier. Stesso principio di risolvere EDO lineari, secondo ordine con sviluppo di Taylor.  $\lrcorner$

Detti  $c_n(t) = c_n(u(t, \cdot))$  allora

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

$$c_n(t) = \int u(t, x) e^{-inx} dx$$

*Idea vincente di Fourier:* supporre di poter far passare derivata dentro a serie, così:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c'_n(t) e^{inx} \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) i n e^{inx} \\ \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) (in)^2 e^{inx} = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) n^2 e^{inx}\end{aligned}$$

ma allora, imponendo l'equazione del calore si ottiene

$$u_t(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c'_n(t) e^{inx} = -c \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) n^2 e^{inx} = c u_{xx}$$

Se la seguente fosse vera

$$c'_n(t) = -n^2 c_n(t)$$

avremmo uguaglianza formale termine a termine.

$$\sum c_n(0) e^{inx} = u(0, x) = u_0(x) = \sum c_n^0 e^{inx}$$

dove  $c_n^0 = c_n(u_0)$ . Quindi si intuisce che  $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$  dove i  $c_n(t)$  risolvono il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} c'_n(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^0 \end{cases}$$

Quindi abbiamo una soluzione formale al problema. Nella prossima lezione giustificheremo perchè questa derivazione si possa fare.



## 19 Lezione 09/11 - Teoria

Torniamo all'equazione del calore:

$$\begin{cases} u_t = cu_{xx} & c > 0 \quad (0, T) \times [-\pi, \pi] \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u(t, \pi) = u(t, -\pi) & \forall t > 0 \\ u_x(t, \pi) = u_x(t, -\pi) & \forall t > 0 \end{cases}$$

Vogliamo che  $\forall t > 0, u(t, x)$  sia  $C^2$  in  $x$  e  $C^1$  in  $t$ , per cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &\in C^0((0, +\infty) \times (-\pi, \pi)) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &\in C^0((0, +\infty) \times (-\pi, \pi)) \end{aligned}$$

Vediamo risultato di regolarità  $C^\infty$  per la candidata soluzione:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u(t, \cdot)) e^{inx}$$

Supponendo di passare a derivata sotto il segno di integrale, se  $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{inx}$

con  $c_n^0 = c_n(u_0)$  dove  $c_n$  soluzione di:  $\begin{cases} c_n'(t) = -cn^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^0 \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ . La candidata soluzione

$$c_n(t) = c_n^0 e^{-cn^2 t}$$

è associata alla scrittura formale

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-cn^2 t} e^{inx}$$

Problema: abbiamo serie di funzioni ben definite, regolarissime e periodiche sul bordo (in  $x$ ). Ma quando è che serie è derivabile? Richiamiamo un risultato base di Analisi 2 su serie di funzioni:

### Proposizione 19.1

Data  $g_n \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  se  $g_n \rightarrow g$  uniformemente e  $g_n' \rightarrow h$  uniformemente allora  $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  e  $g' = h$

*Dimostrazione.* Essere  $C^1$  significa verificare il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$g_n(x) = \int_a^x g_n'(t) dt + g_n(a)$$

Allora passando al limite

$$g(x) = \int_a^x h(t) dt + g(a) \Rightarrow g' = h$$

□

Quindi è sufficiente mostrare la convergenza uniforme della serie e della serie delle derivate per riscrivere derivata di serie come serie di derivate.

Definiamo  $g_N(x) = \sum_{n=-N}^N f_n(x)$ . Questa converge uniformemente se converge totalmente <sup>66</sup>, ossia se  $\sum \|f_n\|_\infty < +\infty$ .  $\Rightarrow \bar{S}_N = \sum_{|n| \leq N} \|f_n\|_\infty$  è una successione di Cauchy in  $\mathbb{R} \Rightarrow g_N$  è una successione di Cauchy in  $(C^0, \|\cdot\|_\infty)$

**Teorema 19.2 – Esistenza per l'equazione del calore con dati periodici**

Sia  $u_0 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  continua e  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$ . Allora la funzione definita formalmente da

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-cn^2 t} e^{inx}$$

è

1. una funzione continua da  $[0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$ .
2. In particolare

$$\begin{aligned} u(t, x) &\text{ è } 2\pi\text{-periodica in } x \text{ per } t \geq 0 \\ u_x(t, x) &\text{ è } 2\pi\text{-periodica in } x \text{ per } t > 0 \end{aligned}$$

3. inoltre<sup>a</sup>  $u(t, x) \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R})$  e soddisfa  $u_t = cu_{xx}$  per  $(t, x) \in (0, +\infty) \times [-\pi, \pi]$ .
4. se  $u_0$  è reale anche  $u(t, x)$  è a valori reali.

<sup>a</sup>estesa per  $2\pi$ -periodicità

*Osservazione 19.1*

La condizione  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$  è soddisfatta se  $u \in C^1([-\pi, \pi])$  e  $u_0(-\pi) = u_0(\pi)$ .

*Domanda:* Dato il Teorema, abbiamo la seguente uguaglianza in senso  $L^2$ :

$$u(0, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{inx}$$

Ma è vero che  $u(0, x) = u_0(x) \forall x \in [-\pi, \pi]$  *puntualmente*? In generale non è vero, ma lo è se  $u(0, x) \in L^2$  visto che  $u_0(x)$  è continua. Infatti: se  $\{u_n\}$  è tale che  $u_n \xrightarrow{L^p} u$  e  $u_n \xrightarrow{L^q} \tilde{u}$  allora  $u = \tilde{u}$  per quasi ogni  $x$  (a meno di estrarre una sottosuccessione).

*Dimostrazione.* Definiamo  $u_n(t, x) = c_n^0 e^{-cn^2 t} e^{inx}$ . Sia  $u(t, x)$  estesa su  $\mathbb{R}$  per periodicità, allora

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t, x)$$

<sup>66</sup>risultato visto alle prime lezioni, passiamo da serie di funzioni a serie numerica

Dimostriamo che la serie converge totalmente come successione in  $C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  stimando  $\|u_n(t, x)\|_{L^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R})} = \| |c_n^0| e^{-cn^2 t} e^{inx} \|_\infty = |c_n^0|$ . Quindi

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|u_n\|_\infty \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$$

per ipotesi  $\Rightarrow u(t, x)$  è ben definita ed<sup>67</sup> è  $C^0((0, +\infty) \times \mathbb{R})$ . Inoltre, poichè  $u_0$  e  $u(0, \cdot)$  hanno gli stessi coefficienti di Fourier vale  $u_0 = u(0, \cdot)$  quasi ovunque.

Dobbiamo ora dimostrare che  $u(t, x) \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Ci basta dimostrare<sup>68</sup> che  $\forall \delta > 0$  sono  $C^\infty((\delta, +\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Detto  $\alpha = (h, k)$  deriviamo  $h$  volte in  $t$  e  $k$  in  $x$ , si ha:

$$\begin{aligned} D^\alpha \sum_{|n| \leq N} u_n(t, x) &= \sum_{|n| \leq N} D^\alpha u_n(t, x) = \sum_{|n| \leq N} \frac{\partial^h}{\partial t^h} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u_n(t, x) \\ &= \sum_{|n| \leq N} c_n^0 \frac{\partial^h}{\partial t^h} e^{-cn^2 t} \frac{\partial^k}{\partial x^k} e^{inx} \\ &= \sum_{|n| \leq N} c_n^0 (-c)^h n^{2h} e^{-cn^2 t} (in)^k e^{inx} \end{aligned}$$

quindi c'è convergenza solo per  $\delta > 0$ .

Convergenza totale di

$$D^\alpha \sum_{|n| \leq N} u_n(t, x) = \sum_{|n| \leq N} c_n^0 (-c)^h n^{2h} e^{-cn^2 t} (in)^k e^{inx}$$

passando al  $\sup_{[\delta, +\infty) \times \mathbb{R}}$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{[\delta, +\infty) \times \mathbb{R}} |c_n^0 (-c)^h n^{2h} e^{-cn^2 t} (in)^k e^{inx}| = \sum_{|n| \leq N} |c_n^0| c^h e^{-cn^2 \delta} |n|^{2h+k}$$

e questa serie numerica è convergente perchè  $|n|^{2h+k} e^{-cn^2 \delta}$  è definitivamente limitato (è infinitesimo) quindi

$$\sum_{|n| \leq N} |c_n^0| c^h e^{-cn^2 \delta} |n|^{2h+k} \leq M \sum |c_n^0| < +\infty$$

Abbiamo così dimostrato il punto (2) e il (3).

Resta da verificare che soddisfa l'equazione (P). Notiamo che le funzioni  $u_n(t, x) = c_n^0 e^{-cn^2 t} e^{inx}$  verificano

$$\begin{aligned} (u_n)_t &= \frac{\partial}{\partial t} u_n(t, x) = c_n^0 (-cn^2) e^{-cn^2 t} e^{inx} \\ &= -cn^2 c_n^0 e^{-cn^2 t} e^{inx} = -cn^2 u_n(t, x) \\ c(u_n)_{xx} &= c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(t, x) = c c_n^0 (in)^2 e^{-cn^2 t} e^{inx} \\ &= -cn^2 u_n(t, x) \end{aligned}$$

<sup>67</sup>è continua anche in 0, ossia dato iniziale

<sup>68</sup>ricordiamo che essere derivabili è una proprietà locale. Il problema è che derivando  $e^{-cn^2 t}$  abbiamo un  $n^2$  che può far esplodere la serie

Quindi le  $u_n$  soddisfano l'equazione del calore.  $(u_n)_t = c(u_n)_{xx}$  passa alla somma finita e per convergenza uniforme passa<sup>69</sup> a  $u_t = cu_{xx}$ .

**Idea** Tutti questi conti sono quelli da fare quando in esercizi si ha una variazione di (P). ┘

Mostriamo ora che se  $u_0$  è a valori reali anche  $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-cn^2 t} e^{inx}$ , soluzione definita come serie, è a valori reali. Notiamo prima la seguente:

*Osservazione 19.2*

$v \in L^2$  è a valori reali  $\iff \overline{c_n(v)} = c_{-n}(v)$

*Dimostrazione.*

$$v(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{inx} = c_0(v) + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} c_n(v) e^{inx} + c_{-n}(v) e^{-inx}$$

( $\Rightarrow$ ) Se  $v = \bar{v}$  allora

$$\begin{aligned} c_n(v) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) e^{-inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{v(x) e^{inx}} \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) e^{inx}} = \overline{c_{-n}(v)} \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ): Possiamo scrivere

$$v(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$$

e segue immediatamente  $v = \bar{v}$ . □

Se  $u_0(x) \in \mathbb{R} \forall x$  allora  $c_n^0$  verifica, ma allora  $\overline{c_n^0} = c_{-n}^0 \forall n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(u(t, x)) = c_n^0 e^{-cn^2 t}$$

verificano questa proprietà. □

*Osservazione 19.3 - Legame coefficienti complessi e reali*

Ricordiamo che, detti  $c_n$  i coefficienti della serie di Fourier complessa e  $a_n, b_n$  i coefficienti dello sviluppo reale, valgono le seguenti relazioni:

$$c_0 = a_0 \quad \begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Infatti, data  $u$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + ib_n \sin(nx) \end{aligned}$$

<sup>69</sup>si vede qua che l'ipotesi  $c > 0$  è essenziale per far decadere l'esponenziale

Ma ricordando che  $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$  e  $\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$  abbiamo che

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + ib_n \sin(nx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \left( \frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-inx} \end{aligned}$$

□

**Teorema 19.3** – Unicità per l'equazione del calore con dati periodici

Sia  $u : [0, T] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  continua e  $C^1$  in  $t$  in  $(0, T) \times [-\pi, \pi]$ ,  $C^2$  in  $x$  in  $(0, T) \times [-\pi, \pi]$  che risolva  $(P)$  con  $u_0$  continuo. Allora  $u$  è unica.

*Dimostrazione.* Dimostriamo che i coefficienti di Fourier  $c_n(u(t, \cdot))$  sono univocamente determinati. Notiamo che

$$c_n(t) = c_n(u(t, \cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx$$

**Idea** sotto le ipotesi di regolarità di  $u(t, x)$  possiamo passare la derivazione sotto il segno di integrale. ┘

$$c'_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-inx} dx \quad \text{su } (0, T)$$

Verifichiamo di poterlo fare e che la condizione di partenza sia soddisfatta

$$\begin{aligned} c'_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx}(t, x) e^{-inx} dx \\ &= in \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_x(t, x) e^{-inx} dx \\ &= -n^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{inx} dx = -n^2 c_n(t) \end{aligned}$$

dove tutte le uguaglianze seguono per la  $2\pi$ -periodicità. Inoltre si ha che

$$\begin{aligned} c_n(0) &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(0, x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) e^{-inx} dx \\ &= c_n(u_0(x)) \end{aligned}$$

che è univocamente determinato. Il passaggio \* segue per l'ipotesi di continuità in  $t = 0$ . Quindi  $c_n(t)$  deve verificare per  $t > 0$

$$\begin{cases} c'_n(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(u_0) \end{cases}$$

Segue che l'equazione ha soluzione unica. □

Abbiamo visto che l'equazione del calore descrive come evolve nel tempo la temperatura: è *falso* in generale che la formula data si estenda per tempi negativi!

**Teorema 19.4 – Non esistenza nel passato**

$\exists u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $u_0$   $2\pi$ -periodica tali che il problema (P) *non* ha soluzione in  $(-\delta, 0] \times [-\pi, \pi]$  per ogni<sup>a</sup>  $\delta > 0$ .

<sup>a</sup>ossia: esistono dati periodici che, in particolare, non potete pensare che ammettano una soluzione all'equazione del calore neanche per un intervallino negativo

*Dimostrazione.* Se (P) avesse una soluzione con dati periodici di classe  $C^1$  in  $t$  e  $C^2$  in  $x$  e continua in  $(-\delta, 0] \times [-\pi, \pi]$  (ipotesi minimali per dare senso a cosa vuol dire risolvere equazione) allora, per l'unicità, i  $c_n$  dovrebbero verificare la

seguinte EDO:  $\begin{cases} c'_n = -n^2 c_n \\ c_n(0) = c_n^0 = c_n(u_0) \end{cases}$  e

$$u(t, x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-cn^2 t} e^{inx}$$

Basta quindi esibire dei coefficienti  $c_n^0$  tali che la serie non converga in ogni  $t < 0$  e la serie abbia senso in  $L^2$ , in particolare  $|c_n^0| = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \forall k > 0$  e  $u(t, x)$  va come  $c_n^0 e^{cn^2|t|}$ . Vogliamo quindi:

1.  $|c_n^0| = O(|n|^{-k})$  per  $n \rightarrow \pm\infty \forall k > 0$ . Così  $u_0 \in C_{per}^\infty$ .
2.  $|c_n^0| e^{n^2 s} \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow \pm\infty \forall s > 0$ .

Consideriamo quindi  $c_n^0 = e^{-|n|}$ , così  $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ . Si ha un assurdo perchè  $c_n(t) \in \ell^2$  ma per (2) esplodono. □

## 20 Lezione 14/11 - Teoria

### 20.1 Equazione delle onde

In questo corso useremo la teoria sviluppata per risolvere PDE modello. con condizioni di periodicità al bordo.

Volevamo capire se  $c_n(u_{xx}) = -n^2 c_n(u)$  e per fare questo era fondamentale la  $2\pi$ -periodicità di  $u$  e  $u_x$ .

Strumenti della teoria utilizzati:

- $\sum |n|^h |c_n| < \infty \Rightarrow u \in C_{per}^h$
- se  $u \in C_{per}^k$  allora  $\sum |n|^h |c_n| < \infty \forall h < k$

*Peculiarità del calore:* è regolarizzante: la soluzione  $\in C^\infty((0, +\infty) \times [-\pi, \pi])$   $\forall t > 0$ . Per  $t < 0$  il calore non si comporta bene:  $\exists u_0 \in C_{per}^\infty: u(t, x)$  non è definita per  $t < 0$ .

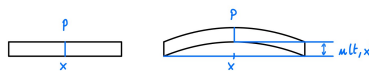
Queste stesse tecniche si possono applicare ad un'altra equazione modello: *l'equazione delle onde*. Equazione di propagazione, più regolare

$$u_{tt} = c\Delta u = v^2 \Delta u$$

con  $c > 0$ .  $u(t, x)$  è lo spostamento dalla posizione di riposo.

Nel caso 1 – *dim* applico onda di pressione/sonora.

Nel caso 2 – *dim*



$c$  è proporzionale alla costante elastica di  $\Omega$ , con  $\Omega$  mezzo omogeneo, inversamente proporzionale alla densità del mezzo.

Possiamo riscrivere  $u_{tt} = v^2 \Delta u$  dove  $v$  = velocità di propagazione. Dati naturali, al bordo, sono:

- Condizione di Dirichlet:  $u(t, x) = 0$  se  $x \in \partial\Omega$
- condizione di Neumann:  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) = 0$  se  $x \in \partial\Omega$ , dove  $\nu$  è normale esterna a  $\partial\Omega$
- caso nostro:  $\Omega \rightarrow S^1$

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi) \\ u_x(t, \pi) = u_x(t, -\pi) \\ u(0, x) = u_0(x) \\ u_t(0, x) = u_1 \end{cases} \quad (\text{EO})$$

#### 20.1.1 Risoluzione formale di (EO)

Cerchiamo  $u \in C^2$ . La scrittura formale  $u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx}$  ci dà, detti  $c_n(t) = c_n(u(t, \cdot))$ , la seguente:

$$u_{tt}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n''(t) e^{inx}$$

$$v^2 u_{xx}(t, x) = \sum -n^2 v^2 c_n(t) e^{inx}$$

Allora, da  $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ , si ha che  $c_n'' = -n^2 v^2$ , quindi  $c_n$  risolve:

$$\begin{cases} c_n''(t) = -n^2 v^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(u_0) = c_n^0 \\ c_n'(0) = c_n(u_1) = c_n^1 \end{cases}$$

e la soluzione di questa equazione differenziale ha polinomio caratteristico  $\lambda^2 + n^2 v^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm inv$ . Quindi le soluzioni generali saranno della

forma<sup>70</sup>  $\begin{cases} c_n(t) = A_n e^{invt} + B_n e^{-invt} & n \neq 0 \\ c_0(t) = A_0 + B_0 t & n = 0 \end{cases}$ . Basta prendere:

$$A_0 = c_0^0 = \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) dx$$

$$B_0 = c_0^1 = \int_{-\pi}^{\pi} u_1(x) dx$$

Invece  $A_n, B_n$  devono verificare il sistema, per  $n \neq 0$

$$\begin{cases} c_n(0) = A_n + B_n = c_n^0 \\ c_n'(0) = inv A_n - inv B_n = c_n^1 \end{cases}$$

Questo ci dà

$$\begin{cases} A_n + B_n = c_n^0 \\ A_n - B_n = \frac{c_n^1}{inv} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_n = \frac{1}{2} \left( c_n^0 + \frac{c_n^1}{inv} \right) \\ B_n = \frac{1}{2} \left( c_n^0 - \frac{c_n^1}{inv} \right) \end{cases}$$

La candidata soluzione si scriverà come:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx} \\ &= A_0 + B_0 t + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}} (A_n e^{invt} e^{inx} + B_n e^{-invt} e^{inx}) \\ &= c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}} (A_n e^{in(x+vt)} + B_n e^{in(x-vt)}) \end{aligned}$$

Se, a livello formale, indichiamo con  $\varphi_+, \varphi_-$  le funzioni in  $L^2$  i cui coefficienti di Fourier sono:

$$\begin{cases} c_0(\varphi_+) = 0 \\ c_n(\varphi_+) = A_n = \frac{1}{2} \left( c_n^0 + \frac{c_n^1}{inv} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} c_0(\varphi_-) = 0 \\ c_n(\varphi_-) = B_n = \frac{1}{2} \left( c_n^0 - \frac{c_n^1}{inv} \right) \end{cases}$$

allora, sempre a livello formale, vale

$$u(t, x) = A_0 + B_0 t + \varphi_+(x + vt) + \varphi_-(x - vt)$$

$\varphi_+, \varphi_-$  si chiamano *onde viaggianti*. Quindi abbiamo una doppia forma della soluzione<sup>71</sup>.

<sup>70</sup> scegliamo  $v > 0$  e  $v^2 = c$

<sup>71</sup> la seconda è specifica di (EO)



**Teorema 20.1** – Teorema di esistenza per (EO) con onde viaggianti

Siano  $u_0 \in C_{per}^2$  e  $u_1 \in C_{per}^1$  allora esistono  $\varphi_+, \varphi_-$   $2\pi$ -periodiche a media nulla<sup>a</sup>,  $\exists A_0, B_0 \in \mathbb{C}$  tali che

$$u(t, x) = A_0 + B_0 t + \varphi_+(x + vt) + \varphi_-(x - vt)$$

è  $C^1$  su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periodica e risolve (EO). Inoltre se  $u_0, u_1$  sono reali allora anche  $u$  è reale.

<sup>a</sup>sarebbe  $c_0(\varphi)$

*Dimostrazione.* Se abbiamo  $\varphi_+, \varphi_- \in C_{per}^2$  allora si ha la tesi, infatti: avendo  $\varphi_+(z), \varphi_-(z) \in C^2$ , allora l'equazione  $u_{tt} = v^2 u_{xx}$  è verificata:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= A_0 + B_0 t + \varphi_+(x + vt) + \varphi_-(x - vt) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= B_0 + v\varphi'_+(x + vt) - v\varphi'_-(x - vt) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= v^2\varphi''_+(x + vt) + v^2\varphi''_-(x - vt) = v^2 u_{xx} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \varphi''_+(x + vt) + \varphi''_-(x - vt) \end{aligned}$$

Vogliamo dunque trovare  $A_0, B_0, \varphi_+, \varphi_-$  che soddisfino le condizioni iniziali, ossia:

$$\begin{aligned} u_0(x) = u(0, x) &= A_0 + \varphi_+(x) + \varphi_-(x) \\ u_1(x) = u_t(0, x) &= [B_0 + v\varphi'_+(x + tv) - v\varphi'_-(x - tv)] \Big|_{t=0} \\ &= B_0 + v\varphi'_+(x) - v\varphi'_-(x) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{cases} \varphi_+(x) + \varphi_-(x) = u_0(x) - A_0 =: g_0 \\ \varphi'_+(x) - \varphi'_-(x) = \frac{u_1(x) - B_0}{v} =: h_1 \end{cases}$$

Notiamo che  $g_0 \in C^2$  e  $h_1 \in C^1$

**Idea** Sia  $g_1$  la primitiva di  $h_1$  vogliamo

$$\begin{cases} \varphi^+(x) + \varphi^-(x) = g_0(x) \\ (\varphi^+(x) - \varphi^-(x))' = g_1' \end{cases}$$

Se avessimo  $g_0$  e  $g_1$  periodiche, allora avremmo finito, poichè basterebbe considerare

$$\varphi^+ = \frac{1}{2}(g_0 + g_1) \quad \varphi^- = \frac{1}{2}(g_0 - g_1)$$

che sono entrambe  $C_{per}^2$ . ┘

Vogliamo quindi trovare  $A_0, B_0$  tali che  $g_0, g_1$  siano periodiche.

Se  $g_0$  è  $2\pi$ -periodica, allora  $\int_{-\pi}^{\pi} u_0(t) dt = 0$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_+(t) - \varphi_-(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) - c_0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(t) dt = A_0 \end{aligned}$$

Per trovare  $B_0$  dobbiamo ricordare il seguente risultato:

**Lemma 20.2**

Date  $h, g \in C^1(\mathbb{R})$  con  $g' = h$  e  $T \in \mathbb{R}_{>0}$  allora vale che

$$gT \text{ - periodica} \iff hT \text{ - periodica e } \int_0^T h(t) dt = 0$$

Quindi se  $g_1$  è  $2\pi$ -periodica vale

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_+ - \varphi_-) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u_1(t) - B_0}{v} dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_1(t) dt = B_0 \end{aligned}$$

□

**Teorema 20.3 – Teorema di esistenza per (EO) con metodo Fourier**

Siano  $u_0, u_1 \in C^0([-\pi, \pi])$   $2\pi$ -periodiche tali che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n^0| < +\infty \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |c_n^1| < +\infty$$

Allora la funzione

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2} \left( c_n^0 + \frac{c_n^1}{inv} \right) e^{in(x+vt)} + \frac{1}{2} \left( c_n^0 - \frac{c_n^1}{inv} \right) e^{in(x-vt)}$$

è  $C^2$ ,  $2\pi$ -periodica in  $x$  e verifica (EO). Se  $u_0, u_1$  sono reali, allora  $u$  è reale.

*Osservazione 20.1*

La condizione  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n^0| < +\infty$  è verificata se ad esempio  $u_0 \in C_{per}^3$ , ma non è in generale vera se<sup>72</sup>  $u \in C_{per}^2$ . Lo stesso per  $u_1$

*Osservazione 20.2*

A differenza dell'equazione del calore, vista la regolarità,  $t < 0$  non crea problemi, infatti se  $u(t, \cdot)$  risolve  $u_{tt} = v^2 u_{xx}$  anche  $u(-t, \cdot)$  lo fa. Quindi l'estensione della soluzione ottenuta per simmetria sui negativi è ancora soluzione dell'equazione

<sup>72</sup>notare che  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n^0| < +\infty \Rightarrow u \in C_{per}^2$

delle onde. Questo però ci dà che la regolarità della soluzione è la stessa di quella dei dati iniziali, non abbiamo un effetto regolarizzante.

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che la serie formale definita sopra converge totalmente insieme alle sue derivate in  $t$  e in  $x$ . Riportiamo solo uno scheletro della dimostrazione, dal momento che l'idea di base è la stessa di quella dell'equazione del calore.

**Idea** Non abbiamo termine regolarizzante. Visto che ci interessano le derivate seconde, bisogna verificare a meno la assoluta sommabilità seconda.  $\lrcorner$

Sia  $u_0(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t$  e

$$\begin{aligned} u_n(t, x) &= \frac{1}{2} \left( c_n^0 + \frac{c_n^1}{inv} \right) e^{in(x+vt)} + \frac{1}{2} \left( c_n^0 - \frac{c_n^1}{inv} \right) e^{in(x-vt)} \\ &= A_n e^{in(x+vt)} + B_n e^{in(x-vt)} \end{aligned}$$

derivando otteniamo, dove  $\alpha + \beta \leq 2, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial t} \frac{\partial^\beta}{\partial x} \left( \sum_{|n| \leq N} u_n(t, x) \right) &= \sum_{|n| \leq N} A_n (in)^\beta (inv)^\alpha e^{in(x+vt)} + \\ &+ B_n (in)^\beta (-inv)^\alpha e^{in(x-vt)} \end{aligned}$$

Stimiamo la convergenza totale

$$\sum_{|n| \leq N} \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial t} \frac{\partial^\beta}{\partial x} u_n(t, x) \right\|_{L^\infty} \leq v^\alpha |n|^{\alpha-\beta} (|A_n| + |B_n|)$$

Ricordiamo le ipotesi: 
$$\begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n^0| < +\infty \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |c_n^1| < +\infty \\ A_n = \frac{1}{2} \left( c_n^0 + \frac{c_n^1}{inv} \right) \Rightarrow |A_n| \leq \frac{|c_n^0|}{2} + \frac{|c_n^1|}{2|n|v} \\ B_n = \frac{1}{2} \left( c_n^0 - \frac{c_n^1}{inv} \right) \Rightarrow |B_n| \leq \frac{|c_n^0|}{2} + \frac{|c_n^1|}{2|n|v} \end{cases}$$

Controlliamo  $u_{tt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (u_n)_{tt}$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n(t, x) \right\| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \left\| \left( c_n^0 + \frac{c_n^1}{inv} \right) v^2 (in)^2 e^{in(x+vt)} \right\|_\infty + \\ &+ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \left\| \left( c_n^0 - \frac{c_n^1}{inv} \right) v^2 (-in)^2 e^{in(x-vt)} \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2 \frac{1}{2} |c_n^0| v^2 |n|^2 + \frac{2|c_n^1|}{2} |v| |n| < M \end{aligned}$$

Analogo per  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Ma allora abbiamo convergenza totale, la soluzione verifica la condizioni iniziali e i dati al bordo<sup>73</sup>.  $\square$

<sup>73</sup>dimostrazione fatta velocemente perchè, se chiesta l'idea, si concentrano su quella del calore, non delle onde.

*Commento:* Storicamente nei compiti danno variazioni di questo tipo, in cui al posto dello sviluppo di Taylor si ha uno sviluppo formale del quale va verificata la sommabilità dei coefficienti.

Abbiamo visto l'esistenza di una soluzione per (EO) in due diversi modi. Segue un risultato di unicità.

**Teorema 20.4 – Teorema di unicità per (EO)**

Sia  $u$  di classe  $C^2$  che risolve l'equazione delle onde con condizioni periodiche su  $u(t, \cdot), u_x(t, \cdot)$ , allora la soluzione è unica.

*Dimostrazione.* Moltiplicando l'equazione  $u_{tt} = v^2 u_{xx}$  per  $e^{-inx}$  si ottiene che i coefficienti  $c_n(u(t, \cdot))$  devono risolvere la seguente ODE di 2° ordine con  $c_n(0)$  e  $c'_n(0)$  assegnati:

$$\begin{cases} y'' = -n^2 v^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ y'(0) = c_n^1 \end{cases}$$

infatti:

$$\begin{aligned} \int u_{tt}(t, x) e^{-inx} dx &= \int u_{xx}(t, x) e^{-inx} dx \\ c_n(u_{tt}(t, \cdot)) &= v^2 c_n(u_{xx}(t, \cdot)) \end{aligned}$$

Ma vale anche  $c_n(u_{tt}(t, \cdot)) = n^2 c_n(u(t, \cdot))$  visto che la derivata passa sotto il segno di integrale si ha  $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = n^2 v^2 c_n(u(t, \cdot))$ . Dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} c_n(0) = c_n(u(0, x)) = c_n(u_0) \\ c'_n(0) = c_n(u_t(0, x)) = c_n(u_1) \end{cases} \quad \square$$

## 21 Lezione 15/11 - Esercitazione

Vediamo l'esercizio della scorsa volta:

*Esercizio 21.1*

Detto  $S = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : \exists \bar{x} : u(\bar{x} + y) = u(\bar{x} - y)\}$  dire se è chiuso, denso, convesso.

*Risoluzione:* è denso<sup>74</sup> perchè contiene le funzioni a semicerchio dell'Esercizio 16.7. Ma  $\bar{S} = L^2(\mathbb{R})$ ?

**Idea** Se consideriamo una funzione che non è simmetrica, non riusciamo a trovare una funzione simmetrica che le sia arbitrariamente vicino. ┘

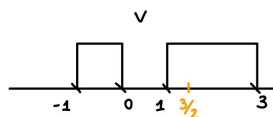
Ad esempio, detta  $v = \mathbb{1}_{[-1,0]} + \mathbb{1}_{[1,3]}$ , sia  $u$  simmetrica; scopriamo  $|\|u\| - 3| < \varepsilon$ , ossia  $\|u - v\|_{L^2} < \varepsilon$ .

**Idea** Visto che  $\|u\|_{L^2(0, \frac{3}{2})} = \|u\|_{L^2(\frac{3}{2}, 3)} = \frac{3}{2}$ , dove  $\frac{3}{2}$  scelto perchè dimezza  $\|v\|_{L^2}$ , vogliamo capire chi potrebbe essere  $\bar{x}$  centro di simmetria. ┘

Se  $|\bar{x} - \frac{3}{2}| > \frac{1}{10} \Rightarrow$

$$\varepsilon > \|u - v\|_{L^2} \geq \|u - v\|_{L^2([\bar{x}, +\infty))} \Rightarrow$$

$$\left| \|u\|_{L^2([\bar{x}, +\infty))} - \|v\|_{L^2([\bar{x}, +\infty))} \right| > \frac{1}{10}$$



assurdo<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>questo perchè  $\|u\|_{L^2([\bar{x}, +\infty))} = \frac{3}{2}$ .

Dunque  $\bar{x}$  è vicino a  $\frac{3}{2}$ , a distanza  $< \varepsilon$ . Quindi se

$$\varepsilon > \|u - v\|_{L^2((\frac{3}{2}, 3))} = \|u - 1\|_{L^2((\frac{3}{2}, 3))}$$

$$\Rightarrow \left| \|u - 1\|_{L^2((0, \frac{3}{2}))} - \|u - 1\|_{L^2((\frac{3}{2}, 3))} \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

(sarebbe 0 se  $\bar{x} = \frac{3}{2}$ ). Quindi  $\|u - 1\|_{L^2((0, \frac{3}{2}))} < 2\varepsilon$ , ma

$$\varepsilon > \|u - v\|_{L^2((0, \frac{3}{2}))} \geq \|v - 1\|_{L^2((0, \frac{3}{2}))} - \|u - 1\|_{L^2((0, \frac{3}{2}))} = 1 - \varepsilon$$

Il che è assurdo. Dunque  $\bar{S} \neq L^2(\mathbb{R})$ .

**Idea** Con questo formalismo abbiamo dato forma all'intuizione "non riesco ad avvicinarmi a roba asimmetrica con roba simmetrica" ┘

S è convesso? La  $v$  di prima è somma di due funzioni in  $S$ , ma lei  $\notin S$  (sta però nel convessificato). (altra cosa: se lo fosse avrei tutto  $L^2$ , assurdo)

S è chiuso? Siccome  $L^2$  è metrico, possiamo provare a vedere se è sequenzialmente chiuso. Prendiamo  $\{u_n\} \subseteq S$ , con  $u_n \xrightarrow{L^2} \bar{u}$ . È vero che  $\bar{u} \in S$ ? Consideriamo  $x_n$ , la *successione dei centri di simmetria*<sup>75</sup> delle  $u_n$ . Se  $x_n \rightarrow \bar{x}$  è ragionevole che  $\bar{u}$  sia simmetrica rispetto a  $\bar{x}$ , ma è vero? Dobbiamo verificare che:

<sup>74</sup>dove con denso indichiamo  $\overline{\text{span}(S)} = L^2(\mathbb{R})$ . Infatti bisogna prima dire che si ottengono tutte le funzioni prendendo la chiusura delle combinazioni lineari di  $S$ .

<sup>75</sup>se c'è è quello che mi divide  $\|\cdot\|_{L^2}$  in due, sennò non c'è

1.  $x_n \rightarrow \bar{x}$
2.  $\bar{x}$  è centro di  $\bar{u}$

**Idea Problema:** la definizione di  $x_n$  è stata vaga.  $\{x_n\}$  è ben definito, ma è possibile avere più punti che dividono a metà la norma di una funzione, ad esempio una funzione che ha un pezzo nullo. È sufficiente considerare il punto medio, perchè se ne considerassimo un altro avremmo un lato con norma  $> 0$  e non ci sarebbe più simmetria.  $\lrcorner$

Questo ci assicura che  $\{x_n\}$  è di Cauchy, infatti dati  $x_n, x_m$  se questi non fossero vicini, salterebbe anche la vicinanza tra  $u_n$  e  $u_m$ , assurdo perchè  $\{u_n\}$  è di Cauchy.

Controlliamo ora la seconda condizione: sappiamo che  $\varepsilon > \|u_n - \bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ , ma quindi anche

$$\begin{aligned} \varepsilon > \|u_n - \bar{u}\|_{L^2((-\infty, x))} &= \|r_{x_n} u_n - r_{x_n} \bar{u}\|_{L^2((x_n, +\infty))} \\ &= \|u_n - r_{x_n} \bar{u}\|_{L^2((x_n, +\infty))} \end{aligned}$$

dove  $r_{x_n}$  è la ribaltata rispetto<sup>76</sup> ad  $x_n$ . Avessimo  $\|\bar{u} - r_{\bar{x}} \bar{u}\| < \varepsilon$ ,  $\bar{x}$  sarebbe il centro e avremmo fatto, ma

$$\|\bar{u} - r_{\bar{x}} \bar{u}\| \leq \|\bar{u} - r_{x_n} \bar{u}\| + \|r_{x_n} \bar{u} - r_{\bar{x}} \bar{u}\|$$

che sono entrambi infinitesimi per  $n \rightarrow +\infty$ , infatti  $\bar{x}$  non dipende nè da  $\varepsilon$  nè da  $n$ , quindi  $S$  è chiuso.

## 21.1 Equazione del calore

Recap di teoria:  $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$  con  $u : \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $u$

periodica, ossia  $u(t, -\pi) = u(t, \pi) \forall t$  e  $u_0$  funzione assegnata.

### Osservazione 21.1

Ci servirebbe  $u_0$  continua e periodica. In realtà questa condizione può essere indebolita, infatti non ci interessa se al tempo zero è continua<sup>77</sup>. Poi è interessante studiare cosa succede all'interno, per poi stabilire le condizioni al bordo.

Possiamo sviluppare:  $u_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$  e  $u(t, x) = \sum c_n(t) e^{inx}$  con  $t$  fissato,

perchè se esiste una soluzione posso scriverla in questa forma essendo  $L^2$ . Per farlo è sufficiente che  $c_n \in \ell^1$  e deve essere  $c'_n = -c_n n^2$ , ossia  $c_n(t) = e^{-n^2 t} c_n(0)$ . E se capita di avere  $c_n \notin \ell^1$  non posso dire nulla.

Ricordare: l'equazione regolarizza, ossia le soluzioni sono automaticamente  $C^\infty$ .

### Esercizio 21.2

Risolvere  $u_0 = \sin x \cos^2 x$

*Risoluzione:* Due metodi rapidi per risolverlo:

<sup>76</sup> $r_{x_n} u_n = u_n$  perchè  $u_n$  è simmetrica

<sup>77</sup>Si veda Osservazione (19.1)

1. Notiamo<sup>78</sup>:

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x) \cos x + \sin x \cos(2x) \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 4 \sin x \cos^2 x - \sin x\end{aligned}$$

quindi  $u_0 = \frac{\sin(3x) + \sin x}{4}$ . Scritto così

$$u_0 = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + \frac{b_n \sin(nx)}{\sqrt{\pi}} + \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}$$

visto che è a media nulla  $a_0 = 0$ . Quindi:

$$\begin{aligned}a_n(t) &= e^{-n^2 t} a_n(0) \equiv 0 \\ b_n(t) &= e^{-n^2 t} b_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{altrimenti} \\ e^{-n^2 t \frac{\sqrt{\pi}}{4}} & \text{se } n = 1, 3 \end{cases}\end{aligned}$$

In conclusione<sup>79</sup>

$$u(t, x) = \frac{e^{-t} \sin(x)}{4} + \frac{e^{-9t} \sin(3x)}{4}$$

2. Altro modo è usare numeri complessi: ricordando

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Allora:

$$\begin{aligned}u_0 &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{8i} (e^{2ix} - e^{-2ix})(e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{8i} (e^{3ix} - e^{-ix} + e^{ix} - e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{e^{3ix} - e^{-ix} + e^{ix} - e^{-3ix}}{2i} \right) = \frac{\sin(3x) + \sin(x)}{4}\end{aligned}$$

□

### Esercizio 21.3

Si risolvi  $u_t = 5u_{xx}$

*Risoluzione:* Definiamo  $v(t, x) := u\left(\frac{t}{5}, x\right)$ . Allora

$$\begin{cases} v_t(t, x) = \frac{1}{5} u_t\left(\frac{t}{5}, x\right) = \frac{1}{5} 5 u_{xx}\left(\frac{t}{5}, x\right) = u_{xx}\left(\frac{t}{5}, x\right) = v_{xx}(t, x) \\ v_0 = u_0 \end{cases}$$

Possiamo quindi considerare il problema in cui la costante è 1 e poi riportare la soluzione indietro con riscalamento.

<sup>78</sup> ho esponente totale = 3, quindi devo avere qualcosa in dipendenza da  $3x$ . Altro cosa è che la funzione è dispari, quindi alla fine non ci devono essere coseni

<sup>79</sup> come self check si controlli per  $t = 0$ , se non si ritrova  $u_0$  è stato fatto un errore)

**Idea** Come facciamo a studiare un'equazione definita su un intervallo diverso da  $[-\pi, \pi]$ , tipo  $[5, 9]$ ? Innanzitutto è indifferente il centro rispetto al quale la studiamo, quindi vediamo subito il caso  $[-2, 2]$ . A questo punto riscaldiamo in modo da avere intervallo che ci piace e poi torniamo indietro.  $\lrcorner$

### 21.1.1 Metodo risolutivo con condizione di Dirichlet

Quando studiamo l'equazione del calore/onde con la condizione di Dirichlet, ossia

$$\begin{cases} u_t = cu_{xx} & \text{in } [0, T] \times [0, \pi] \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

si ha che, preso  $\left\{ \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} : n = 1, 2, \dots \right\}$  che è una base hilbertiana\* di  $L^2([0, \pi], \mathbb{R})$ . Valgono

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum b_n(u) \sin(nx) \\ b_n(u) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x) \sin(nx) dx \\ b_n(u_{xx}) &= -n^2 b_n(u) \end{aligned}$$

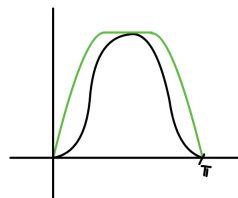
#### Osservazione 21.2

Nella dimostrazione sopra bisogna motivare meglio un passaggio: noi non stiamo considerando lo spazio  $L^2([0, \pi], \mathbb{R})$  in realtà, ma il sottospazio con condizioni al bordo. Sappiamo che  $\text{span}\{\sin(nx), n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^2$ , ma vale anche  $=$ ? Notiamo che data  $u \in L^2$ , possiamo considerare

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & \text{su } \left(\frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \text{su } \left(0, \frac{1}{2n}\right) \cup \left(\pi - \frac{1}{2n}, \pi\right) \end{cases}$$

e vale che  $u\varphi_n \rightarrow u$ , infatti  $|u\varphi_n|^2 \leq |u|^2 \in L^2$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>poichè va a zero puntualmente ed è dominata. Avremmo potuto usare anche la convergenza puntuale



#### Osservazione 21.3

Data  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  è sempre possibile decomporla come somma della sua parte simmetrica (funzione pari) e antisimmetrica (funzione dispari):

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{:=f_p(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{:=f_d(x)}$$

Quindi se  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} = \sum_{i=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$  è lo sviluppo reale di  $f(x)$  notiamo che in una funzione pari si ha  $b_n = 0$  e in una dispari  $a_n = 0 \forall n$ . Quindi  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{2\pi}} : n = 1, 2, \dots \right\}$  è una base di  $L^2([-\pi, \pi])$ .

**Idea** In generale se abbiamo un intervallo di lunghezza  $L$  centrato in  $x_0$  si ha che una base è  $\sin\left(\frac{2\pi n(x-x_0)}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi n(x-x_0)}{L}\right)$  al variare di  $n \in \mathbb{N}$ .  $\lrcorner$



**Idea** Quindi se abbiamo una funzione su  $[0, \pi]$  con condizioni di Dirichlet, la possiamo simmetrizzare rispetto a 0  $\Rightarrow$  i soli seni costituiscono una base. Potremmo dire la stessa cosa con  $\cos(nx)$ ? Sì, ma avremmo bisogno di condizioni diverse.  $\lrcorner$

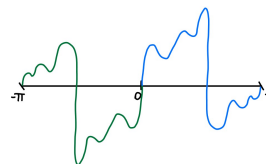
*Esercizio 21.4 - Condizione di Dirichlet al bordo*

In  $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi]$  si risolve

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{cases}$$

dove  $u_0 = x^2 - \pi x$

*Risoluzione:* Come osservato precedentemente possiamo considerare<sup>a</sup> la simmetrizzata e lavorare su  $[-\pi, \pi]$ . Successivamente, trovata la soluzione su  $[-\pi, \pi]$ , la sua restrizione su  $[0, \pi]$  sarà la soluzione del problema originario<sup>b</sup>.



<sup>a</sup>data la condizione di Dirichlet

<sup>b</sup>questo per il teorema di unicità della soluzione

**Idea** Scriviamo  $u_0(x) = \sum a_n \sin(nx)$  dove calcoliamo  $a_n$  integrando per parti e poi  $u(t, x) = \sum e^{-n^2 t} a_n \sin(nx)$ . Finire per casa.  $\lrcorner$

## 22 Lezione 16/11 - Teoria

### 22.1 Operatori differenziali autoaggiunti

**Idea** Lo sviluppo in serie di Fourier è molto utile per la risoluzione di PDE per la relazione

$$\left(\sum c_n e^{inx}\right)' = \sum c_n i n e^{inx}$$

La cosa *essenziale* è che  $e^{inx}$  sono autovettori dell'operatore di derivazione e sono ortogonali tra loro.

Viene quindi naturale chiedersi: dato un operatore differenziale  $T$  è sempre possibile trovare una base ortonormale di autovettori di  $T$ ? In corsi futuri si vedrà che condizioni sono necessarie per avere un teorema spettrale, noi ci limiteremo a introdurre le prime definizioni.  $\square$

#### Definizione 22.1 – Operatore aggiunto

Dato un operatore  $T : H \rightarrow H$  con  $H$  spazio di Hilbert, definiamo l'operatore *aggiunto* come segue:

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u, v \in H$$

#### Definizione 22.2 – Operatore autoaggiunto

Dato  $H$  spazio di Hilbert,  $D \subseteq H$  sottospazio denso<sup>a</sup> e  $T : D \rightarrow H$  operatore lineare,  $T$  si dice *autoaggiunto* se

$$\langle u, Tv \rangle = \langle Tu, v \rangle \quad \forall u, v \in D$$

$\lambda$  si dice *autovalore* di  $T$  se  $\exists v \neq 0$  tale che  $T(v) = \lambda v$ .

<sup>a</sup>così si ha che gli autovalori stanno in  $D$

#### Proposizione 22.3

Sia  $T : D \rightarrow H$  autoaggiunto. Allora:

1. gli autovalori di  $T$  sono reali
2. dati  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  autovalori, i corrispondenti autospazi  $V_{\lambda_1}$  e  $V_{\lambda_2}$  sono ortogonali.

*Dimostrazione.* Dimostrazione vista nel corso di Geometria 1.  $\square$

#### Definizione 22.4

Dato un operatore  $T : D \rightarrow H$  questo si dice:

- *definito positivo* se  $\langle Tu, u \rangle \geq 0 \forall u \in D$  e  $\langle Tu, u \rangle = 0 \iff u = 0$ .
- *definito negativo* se  $\langle Tu, u \rangle \leq 0 \forall u \in D$  e  $\langle Tu, u \rangle = 0 \iff u = 0$ .

Osservazione 22.1

$\{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}, \{\sin(nx), n \in \mathbb{N}\}$  opportunamente normalizzate sono basi di autovettori per particolari operatori differenziali.

Esempi:

1.  $H = L^2([-π, π], \mathbb{C})$  e  $D = \{u \in C_{per}^2\}$ . Consideriamo  $T : u \rightarrow u''$ . È un operatore differenziale lineare. Vediamo che è autoaggiunto<sup>81</sup>:

$$\begin{aligned}\langle v, Tu \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} v \overline{u''} dx = [v \overline{u'}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} v' \overline{u'} dx \\ &= 0 - \int_{-\pi}^{\pi} v' \overline{u'} dx \\ \langle Tv, u \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} v'' \overline{u} dx = [v' \overline{u}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} v' \overline{u'} dx \\ &= 0 - \int_{-\pi}^{\pi} v' \overline{u'} dx\end{aligned}$$

Vale inoltre che  $T$  è definito negativo, infatti:

$$\langle Tu, u \rangle = - \int_{-\pi}^{\pi} u' \overline{u'} dx = -\|u'\|_{L^2}^2 \leq 0$$

e vale 0 solo se  $u = 0$  per le condizioni al bordo. Inoltre gli autovalori sono  $\lambda_n = -n^2$  con autospazi  $V_n = \text{span}\{e^{\pm inx}\}$ .

Risolvendo la seguente EDO possiamo trovare una base di Hilbert di

$$\text{autovettori di } T: \begin{cases} u'' = \lambda u \\ u(\pi) = u(-\pi) \\ u'(\pi) = u'(-\pi) \end{cases}$$

2.  $H = L^2([0, \pi], \mathbb{R})$  e  $D = \{u \in C^2([0, \pi], \mathbb{R}) \text{ tale che } u(0) = u(\pi) = 0\}$  sottospazio<sup>82</sup> denso. Consideriamo l'operatore  $T(u) = u''$ . Questo è ben definito, lineare, autoaggiunto e definito negativo:

$$\begin{aligned}\langle v, Tu \rangle &= \int_0^{\pi} v u'' dx = [v u']_0^{\pi} - \int_0^{\pi} v' u' dx = 0 - \int_0^{\pi} v' u' dx \\ \langle Tv, u \rangle &= \int_0^{\pi} v'' u dx = [v' u]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} v' u' dx = 0 - \int_0^{\pi} v' u' dx \\ \langle Tu, u \rangle &= - \int_0^{\pi} (u')^2 dx = -\|u'\|_{L^2}^2 \leq 0\end{aligned}$$

e vale 0 solo se  $u = 0$  per le condizioni al bordo. Allora abbiamo la EDO

$$\begin{cases} u'' = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \lambda = -n^2 \\ \Rightarrow u(x) = \sin(nx) \end{matrix}$$

<sup>80</sup>è un sottospazio denso perchè contiene  $\text{span}\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$

<sup>81</sup>Utilizziamo l'integrazione per parti e il fatto che  $u, v$  sono  $2\pi$ -periodiche

<sup>82</sup>infatti la condizione  $u(0) = u(\pi) = 0$  è stabile per linearità

### Esercizio 22.1

Considerare:

1.  $D = \{u \in L^2([0, \pi], \mathbb{R}) : u \in C_{per}^2\}$  e  $T(u) = -u''$ . Dire se  $T$  è autoaggiunto e, in caso affermativo, calcolare gli autovalori.
2.  $D = \{u \in C^2 : u(0) = u(\pi) = 0\}$  e  $T(u) = -u^2$ . Dire se  $T$  è autoaggiunto, definito positivo e calcolare gli autovettori e autovalori.
3.  $D = C^2([-\pi, \pi])$  e  $T(u) = -u''$ . Vedere che  $T$  non è autoaggiunto.

### Osservazione 22.2

L'insieme degli autovettori, in generale, *non* è una base, infatti in generale non è tale che il suo span sia a chiusura densa. Questo dipende dall'operatore.

### Osservazione 22.3

In generale gli operatori che trattiamo *non* sono estendibili a tutto  $H$ . Dato  $T : D \rightarrow H$  lineare possiamo avere

- $T$  non è continuo  $\iff$  non è limitato
- $T$  è continuo ( $\iff$  uniformemente continuo)  $\Rightarrow$  si estende a tutto  $H$  in modo continuo e lineare per il seguente Lemma:

### Lemma 22.5

Sia  $X$  spazio e  $D \subseteq X$  denso. Se abbiamo  $f : D \rightarrow Y$  uniformemente continua con  $Y$  spazio metrico completo allora  $f$  ammette una e una sola estensione continua  $F : X \rightarrow Y$  tale che  $F|_D = f$ .

Notiamo che tutti gli operatori visti in precedenza sono lineari, ma non limitati, infatti essere limitati dà una stima sugli autovalori. Se per assurdo questi fossero limitati, detta  $M$  la costante di limitatezza, avremmo, per ogni autovalore,  $|\lambda| \leq M$ , ma noi avevamo  $\lambda_n = -n^2$ , che sono arbitrariamente grandi.

### Esercizio 22.2

Questa caratterizzazione vale anche in dimensione più alta? Studiamo il caso di  $\Omega = [-\pi, \pi]^d$  o  $\Omega =$  "rettangolo". Considerando il prodotto scalare su  $\mathbb{R}^n$ , abbiamo che la base di Fourier di  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  è

$$\{e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}, \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)\} = \{e^{in_1x_1} e^{in_2x_2} \dots e^{in_dx_d} | \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)\}$$

Verificare che si ha effettivamente una base per  $d = 2$ , verificare quindi che lo span di questo insieme ha chiusura densa.

Definito  $T(u) = -\Delta u$  su  $C_{per}^2$ , vedere se questo è autoaggiunto, definito positivo, contio.

## 22.2 Trasformata di Fourier

### Definizione 22.6 – Trasformata di Fourier

Data  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  la *trasformata di Fourier* di  $f$  è la funzione  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx} dx$$

Si può anche scrivere come, detta<sup>a</sup>  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0^0(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f} = \mathcal{F}f$

<sup>a</sup>Generalizza la nozione di coefficiente di Fourier. Servirà a definire una formula di inversione: scriveremo  $f$  sapendo  $\hat{f}(y)$

### Proposizione 22.7

Data  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $\hat{f}$  è ben definita, continua, infinitesima all'infinito e  $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ . In particolare  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  è lineare e continua.

*Dimostrazione.* •  $\hat{f}(y)$  è ben definita ed è lineare  $\forall y \in \mathbb{R}$ : infatti visto che  $|f(x)e^{-ixy}| \leq |f(x)|$  si ha  $f(x)e^{-ixy} \in L^1(\mathbb{R})$  infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-iyx}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1} < +\infty$$

allora ha senso considerare  $\hat{f}(y) = \int f(x)e^{-ixy} dx$  ed è chiaramente lineare.

- $\hat{f}(y)$  è continua su  $\mathbb{R}$ , infatti: fissato  $y_0 \in \mathbb{R}$  sia  $y_n \rightarrow y_0$ . Allora per convergenza dominata<sup>83</sup> si ha

$$\hat{f}(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iy_n x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iy_0 x} dx$$

- $\hat{f}(y)$  è infinitesima per  $y \rightarrow \pm\infty$ , infatti: detta  $h(z) = e^{-iz}$  allora

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iyx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(yx) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$$

per il Lemma 18.1, perchè  $e^{iz}$  ha media nulla sul periodo. □

#### Esercizio 22.3

Trovare una  $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$  per cui  $\hat{f}(y)$  non è ben definita.

Da qui notiamo che la definizione di  $\hat{f}$  non è ben posta per  $f \in L^2$ , ne verrà data una ad hoc in seguito. (ricordiamo infatti che  $L^2 \not\subseteq L^1$  perchè  $\mathbb{R}$  ha misura infinita)

<sup>83</sup>dominazione data da  $|f(x)e^{-iy_n x}| = |f(x)|$

## 23 Lezione 21/11 - Teoria

Abbiamo definito  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C_0^0$  continue e infinitesime all'infinito. dove

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx$$

è lineare, limitata e  $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^1}$ .

*Domanda:* questa stima è ottimale? Sì! È sufficiente dimostrare che per qualche  $f$  vale l'uguaglianza.

### Proposizione 23.1 – Legame trasformata e traslazione/omotetia

Data  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  si ha

1. Traslazione:  $\forall z \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f(\cdot - z)} = \widehat{\tau_z f} = e^{-iyz} \hat{f}(y)$$

$$\hat{f}(y - z) = \tau_z(\hat{f}(y)) = \widehat{e^{ixz} f}(y)$$

2. Omotetie:  $\forall \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  vale

$$\widehat{f\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)}(y) = |\delta| \hat{f}(\delta y)$$

*Dimostrazione.* • Traslazioni, ricordando che una traslazione nel dominio non ha alcun effetto:

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_z f}(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - z) e^{-ixy} dx \stackrel{x=x-z+z}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x - z) e^{-i(x-z)y} e^{-iyz} dx \\ &\stackrel{x'=x-z}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x') e^{-ix'y} dx' = e^{-iyz} \hat{f}(y) \end{aligned}$$

Per l'altra formula:

$$\hat{f}(y - z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix(y-z)} dx = \int_{\mathbb{R}} (f(x) e^{ixz}) e^{-ixy} dx = \widehat{e^{ixz} f}(y)$$

- Omotetie:

$$\begin{aligned} \widehat{f\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)}(y) &= \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\delta}\right) e^{-i\frac{x}{\delta}y} dx \\ &\stackrel{x'=\frac{x}{\delta}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x') |\delta| e^{-ix'(\delta y)} dx' = |\delta| \hat{f}(\delta y) \end{aligned}$$

□

**Proposizione 23.2** – Legame tra derivazione e trasformata

Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Se

1.  $f \in C^1$  e  $f' \in L^1$  allora  $\hat{f}'(y) = iy\hat{f}(y)$ , ossia  $c_n(f') = inc_n(f)$ .
2. Se  $|x|f(x) \in L^1$  allora  $(\hat{f})' = -\widehat{ixf(x)}(y)$

*Osservazione 23.1*

Per il Teorema 1.1, poichè  $|f(x)e^{-ixy}|$  è dominata da  $|f(x)|$ , notiamo che

$$\mathcal{F}(f)(y) = \hat{f}(y) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x)e^{-ixy} dx = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ x_n^1 \rightarrow -\infty \\ x_n^2 \rightarrow +\infty}} \int_{x_n^1}^{x_n^2} f(x)e^{-ixy} dx$$

*Dimostrazione.* Vediamo prima il (1). L'ipotesi  $f' \in L^1$  serve solo perchè senza non avrebbe senso considerare  $\hat{f}'$ .

**Idea** Usare integrazione per parti e l'informazione che  $f \in C^1$  e  $f' \in L^1 \Rightarrow f \in C_0^0$ , ossia  $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$  ┘

Fissati  $x_n^1 < x_n^2 \in \mathbb{R}$  si ha che

$$\begin{aligned} \int_{x_n^1}^{x_n^2} f'(x)e^{-ixy} dx &\stackrel{f \in C^1}{=} [f(x)e^{-ixy}]_{x_n^1}^{x_n^2} - \int_{x_n^1}^{x_n^2} f(x)(e^{-ixy})' dx \\ &= [f(x)e^{-ixy}]_{x_n^1}^{x_n^2} + iy \int_{x_n^1}^{x_n^2} f(x)e^{-ixy} dx \end{aligned}$$

e passando al limite  $\forall x_n^1 \rightarrow -\infty, x_n^2 \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{F}(f')(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n^2)e^{-ix_n^2 y} - f(x_n^1)e^{-ix_n^1 y}) + iy\hat{f}(y)$$

Allora basta trovare

$$\begin{aligned} x_n^1 \rightarrow -\infty &\quad \text{tale che } |f(x_n^1)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ x_n^2 \rightarrow +\infty &\quad \text{tale che } |f(x_n^2)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Se  $|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  allora

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0 \quad (1)$$

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = 0 \quad (2)$$

**Idea** Questo vale perchè il  $\liminf$  è, per definizione, il più piccolo dei limiti delle sottosuccessioni di  $f$ , ossia: è il più piccolo valore verso cui, presa una qualsiasi sottosuccessione  $f(x_n)$ , questa converge a qualcosa. ┘

Quindi se la successione non fosse limitata inferiormente, esisterebbe una sottosuccessione che tenderebbe a  $-\infty$ , assurdo. Se invece il limite esiste finito la  $f$  è limitata. Vediamo che se  $f$  è positiva e integrabile su  $[0, +\infty)$ , deve avere  $\liminf = 0$  perchè se fosse  $> 0$  allora  $\exists c > 0$  tale che  $f > c$  e allora  $\int_0^\infty f \geq \int_0^\infty c = +\infty$ , assurdo. Possiamo quindi selezionare  $x_n^2$  da (1) e  $x_n^1$  da (2).

**Esercizio 23.1**

Vedere che in realtà, se  $f' \in L^1$ , allora

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

*Hint:* da usare  $f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt$ .

Vediamo il (2):

**Idea** Derivare sotto il segno di integrale con insieme di integrazione di misura infinita. ┘

$$\frac{d}{dy} \hat{f}(y) = \frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{d}{dy} e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(-ixf(x)) e^{-ixy}}_{\in L^1} dx$$

Possiamo derivare sotto il segno di integrale per il Lemma 23, infatti: preso  $A = \mathbb{R}$ , detta  $f(y, x) = f(x) e^{-ixy}$ , allora  $\frac{\partial f}{\partial y}(y, x) = -ixf(x) e^{-ixy}$  è dominata da  $|x||f(x)| \in L^1(A)$ . □

**Lemma 23.3** – Altra versione di derivazione sotto il segno di integrale

Sia  $f : (a, b) \times A \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ) tale che:

1.  $\forall t \in (a, b)$   $f(t, \cdot)$  è integrabile
2. per q.o.  $x \in A$ .  $t \rightarrow f(t, x)$  è  $C^1$
3.  $\exists g \in L^1(A)$  tale che  $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x) \forall t \in (a, b)$

allora per  $t \in (a, b)$  la funzione  $\varphi(t) = \int_A f(t, x) dx$  è ben definita, derivabile e  $\varphi'(t) = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx$ .

<sup>a</sup>con  $A$  misurabile di  $\mathbb{R}$

*Dimostrazione.* Usiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale: se  $h \in C^0([a, b])$  allora  $H(t) = \int_a^t h(z) dz \in C^1$  e  $H' = h$ . Consideriamo  $f(\cdot, x) \in C^1((a, b))$  per q.o.  $x$ . Presi  $t_0$  e  $t_1$   $f(t, x)$  si verifica che

$$f(t_1, x) - f(t_0, x) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial t}(s, x) ds$$

<sup>84</sup>corollario di TFCl +  $f(\cdot, x) \in C^1$



Integriamo questa uguaglianza in  $dx$  su  $A$ .

$$\int_A f(t_1, x) dx - \int_A f(t_0, x) dx = \int_A dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial t}(s, x) ds$$

Vogliamo ora scambiare l'ordine di integrazione. Per applicare Fubini verifichiamo che  $\frac{\partial f}{\partial t}(s, x) \in L^1((a, b) \times A)$ :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L^1((a,b) \times A)} &= \int_a^b \int_A \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, x) \right| ds dx \\ &\leq \int_a^b \int_A \underbrace{g(x)}_{\in L^1} dx dt \leq (b-a) \|g\|_{L^1(a,b)} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_A f(t_1, x) dx - \int_A f(t_0, x) dx &= \int_A dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial t}(s, x) ds \\ H(t_1) - H(t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} h(s) ds \end{aligned}$$

e per il teorema di convergenza dominata<sup>85</sup>  $h(s)$  è continua  $\Rightarrow H'(t) = h(t)$ .

**Idea Domanda:** perchè non abbiamo fatto una stima di questo tipo nelle dimostrazioni precedenti, come ad esempio in quella del teorema delle serie di Fourier? In quel caso trattavamo funzioni continue su un limitato che, grazie ad una stima di limitatezza con  $\|\cdot\|_{L^\infty}$ , sapevamo essere anche integrabili. Se invece abbiamo una funzione continua su un insieme illimitato questa stima non è possibile e bisogna fare il ragionamento di sopra.  $\lrcorner$

□

#### Esercizio 23.2

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  verifica  $(1 + |x|^k)|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  allora  $\hat{f}$  è derivabile  $k$  volte e  $D^k \hat{f} = (iy)^k \hat{f}(y)$

#### Proposizione 23.4 – Convoluzione e trasformata

Siano  $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  allora  $f_1 * f_2 \in L^1$  e

$$\widehat{f_1 * f_2}(y) = \hat{f}_1(y) \hat{f}_2(y) \quad \forall y$$

*Dimostrazione.* Per (6.1) si ha che  $f_1 * f_2 \in L^1$ . Notiamo che, congelando  $x$  e integrando in  $z$  vale  $|f_1| * |f_2| \in L^1$ , infatti:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f_1(x-z)| |f_2(z)| \underbrace{|e^{-ixy}|}_{=1} dx dz \leq \int_{\mathbb{R}} |f_1| * |f_2|(x) dx < +\infty$$

<sup>85</sup> $h(s)$  è dominata in  $|\cdot|$  da  $g(x)$

Possiamo dunque applicare il Teorema di Fubini-Tonelli e vale:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f_1 * f_2}(y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(f_1(x-z)f_2(z))}_{f_1 * f_2(x)} dz e^{-i(x-z+z)y} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f_1(x-z) e^{-i(x-z)y} f_2(z) e^{-izy} dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}} dz f_2(z) e^{-izy} \int_{\mathbb{R}} f_1(x-z) e^{-i(x-z)y} dx \\
 &= \hat{f}_2(y) \hat{f}_1(y)
 \end{aligned}$$

□

*Osservazione 23.2*

Per il calcolo della trasformata di Fourier valgono le seguenti:

- $f$  pari  $\Rightarrow \hat{f}$  parti e

$$\hat{f}(y) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(xy) dx$$

- $f$  pari e a valori reali  $\Rightarrow \hat{f}$  pari e valori reali.
- $f$  dispari  $\Rightarrow \hat{f}$  dispari e

$$\hat{f}(y) = 2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(xy) dx$$

- $f$  dispari e a valori reali  $\Rightarrow \hat{f}$  dispari e a valori immaginari puri.

### 23.0.1 Calcoli diretti di trasformate

1.  $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]} \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}(y) = \frac{2}{y} \sin(ay)$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) e^{-ixy} dx &= \int_{-a}^a \cos(xy) dx - i \int_{-a}^a \sin(xy) dx \xrightarrow{0} \\
 &= 2 \int_0^a \cos(xy) dx = \frac{2}{y} \sin(ay)
 \end{aligned}$$

2.  $f(x) = e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$ : facciamo un calcolo diretto, essendo  $e^{-|x|}$  pari e  $e^{-x} \cos(xy) = \Re(e^{ixy})$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-ixy} dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \cos(xy) dx - i \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \sin(xy) dx \xrightarrow{0} \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(xy) dx \\
 &= 2 \int \Re e^{ixy} dx = 2 \Re \left( \int e^{ixy} dx \right) \\
 &= 2 \Re \left( \left. \frac{e^{ix(y-1)}}{i(y-1)} \right|_0^{\infty} \right) = \frac{2}{1+y^2}
 \end{aligned}$$

3.  $f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$  distribuzione gaussiana  $\Rightarrow \hat{f}(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$ . Per calcolare questo possiamo usare le proprietà della trasformata, infatti:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x) = -i(-ixf(x))$$

Applicando la trasformata ( $xf(x) \in L^1$ )

$$iy\hat{f}(y) = \hat{f}'(y) = -i(\widehat{-ixf(x)}) = -i(\hat{f})'(y)$$

Quindi la funzione incognita  $\hat{f}(y)$  verifica  $(\hat{f})' = -y\hat{f}$ , che è la stessa equazione che verifica  $f$ .

Dunque l'equazione  $u'(x) = -xu(x)$  è verificata da  $ke^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \hat{f}(y) = ke^{-\frac{y^2}{2}}$ . Dobbiamo trovare  $k$ :

$$k = \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

### 23.1 Applicazioni a ODEs

Consideriamo l'equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti

$$u'' - u = g(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Se  $g(x) \in L^1$  possiamo provare a usare le proprietà della trasformata di Fourier, ossia se  $g \in L^1(\mathbb{R})$  si ha

$$\widehat{u''} - \hat{u} = \hat{g}(y)$$

e visto che  $\widehat{u''} = iy\hat{u}' = (iy)^2\hat{u}$  si ha

$$-y^2\hat{u} - \hat{u} = \hat{g}$$

Questo ci dice che  $\hat{u}(y) = -\frac{1}{1+y^2}\hat{g}(y)$ .

$$\hat{u}(y) = -\frac{1}{2}e^{-|x|}\widehat{g(x)} = -\frac{1}{2}(e^{-|x|} * \widehat{g(x)})$$

Se la trasformata fosse iniettiva, allora avremmo la soluzione. L'iniettività della trasformata sarà il prossimo argomento trattato.

## 24 Lezione 22/11 - Esercitazione

### 24.1 Disuguaglianza isoperimetrica

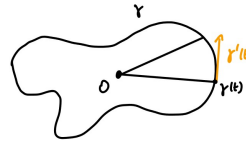
*Osservazione 24.1*

Data  $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  chiusa che non si autointerseca e che parametrizza  $\partial D$  con  $D$  compatto. Riusciamo a calcolare l'area di  $D$ ? Sì, vale:

$$2Area = \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma(t)| |\gamma'(t)| \sin(\theta(t)) dt = \langle -i\gamma', \gamma \rangle$$

*Dimostrazione.* Basta usare il Teorema della divergenza con il campo  $\Phi(x, y) = (x, y)$ .

$$\begin{aligned} 2Area &= 2 \int_D dx dy = \int_{\partial D} x dy - y dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_x dy - \gamma_y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma(x)| |\gamma'(x)| (\sin \theta(x)) dx \end{aligned}$$



□

*Esercizio 24.1*

Dimostrare che preso un compatto  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  vale

$$Per^2 \geq 4\pi Area$$

dove il perimetro è la lunghezza di  $\partial D$ . Inoltre mostrare che vale l'uguaglianza se e solo se  $D$  è un disco.

*Risoluzione:* Guardiamo gli insiemi di perimetro assegnato e massimizziamo l'area.

**Idea** Per prendere "più area possibile" dobbiamo considerare l'angolo massimo. ┘

Senza perdita di generalità possiamo supporre  $\gamma'$  costante, ossia  $\gamma' = \frac{\text{perimetro}}{2\pi}$ . Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\gamma(t)| |\gamma'(t)| \sin(\theta(t)) dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma(t)| |\gamma'(t)| \leq \|\gamma\|_{L^2} \|\gamma'\|_{L^2} = \|\gamma\|_{L^2} \frac{Per}{\sqrt{2\pi}}$$

Abbiamo scoperto che in generale:

$$2Area \leq \frac{Per \|\gamma\|_{L^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Scriviamo lo sviluppo in serie di Fourier di  $\gamma, \gamma'$ :

$$\gamma(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad \gamma'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i n c_n e^{inx}$$

Usando l'uguaglianza e la disuguaglianza di Bessel segue che:

$$\begin{aligned}
 Per^2 &= 2\pi \|\gamma'\|_{L^2}^2 = 4\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\gamma')|^2 = 4\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(\gamma)|^2 \\
 &\geq 4\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n(\gamma)|^2 \\
 &= 4\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(-i\gamma') \cdot \overline{c_n(\gamma)} \\
 &= 2\pi \langle -i\gamma', \gamma \rangle = 4\pi A
 \end{aligned}$$

dove si è usato che  $n^2 \geq n \forall n \in \mathbb{Z}$ . Abbiamo quindi che

$$Area \leq \frac{Per^2}{4\pi}$$

Dalla stima si vede che si ha un'uguaglianza quando  $n^2 = n$  che succede se e solo se  $n = 0, 1$ . Allora deve essere che  $c_n = 0 \forall n \neq 0, 1$ . Questo vuol dire che  $\gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$ , ossia  $\partial D$  è una circonferenza e dunque  $D$  è un disco.

## 24.2 Operatori differenziali

### Esercizio 24.2

L'operatore  $T(u) = u'$ , con  $H = L^2(\mathbb{R})$  e  $D = \{u \in H \cap C^1, u' \in L^2\}$  è autoaggiunto?

*Risoluzione:* È vero che  $\langle u', v \rangle = \langle u, v' \rangle$ ?

$$\int_{\mathbb{R}} u'(x) \bar{v}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{v}'(x) u(x) dx$$

Vogliamo provare ad integrare per parti, quindi per escludere i punti di bordo proviamo a supporre  $u, v$  a supporto compatto.

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \bar{v}'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \bar{v}'(x) dx$$

ossia  $\langle Tu, v \rangle = -\langle u, Tv \rangle$ . L'operatore sarebbe autoaggiunto se  $\langle Tu, v \rangle = -\langle u, Tv \rangle = 0 \quad \forall u, v \in D$ . È facile esibire due funzioni il cui integrale è positivo per cui vale l'uguaglianza: quindi  $T$  non è autoaggiunto.

### Esercizio 24.3

Sia  $D = \{u \in L^2(\mathbb{R}), u \in C^2, \text{ a supporto compatto}\}$ , consideriamo<sup>a</sup>  $T(u) = u - u''$ . È lineare? È autoaggiunto? È (semi-)definito positivo/negativo? Possiamo dire qualcosa sugli autovalori?

<sup>a</sup>se  $u \in C^2$ , a supporto compatto, allora  $u, u'' \in L^2$

*Risoluzione:* È chiaramente lineare. Controlliamo<sup>86</sup>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u - u'')v = \int_{-\infty}^{+\infty} uv - \int_{-\infty}^{+\infty} u''v = \int_{-\infty}^{+\infty} uv + u'v' = \int_{-\infty}^{+\infty} (v - v'')u$$

dunque  $T$  è autoaggiunto.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u - u'')u = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 - u''u = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 + u'^2 \geq 0$$

è  $> 0$  a meno che  $u \equiv 0$ .

Studiamo gli autovalori<sup>87</sup>:  $Tu = \lambda u \Rightarrow u - u'' = \lambda u \Rightarrow u'' = (1 - \lambda)u$ . Le possibili soluzioni di questa equazione differenziale sono note: sono esponenziali o seni/coseni, che però non stanno in  $L^2(\mathbb{R})$ , quindi non abbiamo autovalori<sup>88</sup>.

### Esercizio 24.4

Se considerassimo  $D \subseteq \tilde{D} = \{u \in L^2(\mathbb{R}), u \in L^2, u', u'' \in L^2\}$  cosa potremmo dire sull'operatore  $T(u) = u - u''$ ?

*Risoluzione:* non avendo più funzioni a supporto compatto non possiamo integrare per parti. Consideriamo  $\varphi$  funzione cutoff<sup>89</sup> su  $I$  e abbiamo

$$\|\varphi u - u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus I)}$$

<sup>86</sup>non mettiamo il modulo perchè siamo in  $\mathbb{R}$

<sup>87</sup> $\lambda = 0 \iff u \in \ker T$ , ma visto che è definito positivo questo non succede

<sup>88</sup>avessimo messo  $L^2([-\pi, \pi])$  li avremmo avuti.

<sup>89</sup> $= 1$  se  $x \in I$ , sennò scende a 0 in maniera  $C^\infty$

Possiamo quindi approssimare  $u$  con una funzione  $\varphi$  a supporto compatto (quindi anche  $C^\infty$ ). Funziona anche per  $u'$  e  $u''$ ?

$$(\varphi u - u)' = (\varphi u)' - u' = \varphi' u + \varphi u' - u' = \varphi' u + (\varphi - 1)u'$$

$$(\varphi u - u)'' = \varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u'' - u''$$

Quindi possiamo dire che data  $u \in \tilde{D}$  esiste  $u_n \in D$  tale che  $\|u_n - u\|_{L^2} \rightarrow 0$  e questo anche per  $\|u'_n - u'\|_{L^2}$  e  $\|u''_n - u''\|_{L^2}$ .

Ora vogliamo vedere che  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \forall u, v \in \tilde{D}$ . Sappiamo che

$$\langle Tu_n, v_n \rangle = \langle u_n, Tv_n \rangle \forall n$$

Visto che, se  $T$  continua, vale che  $T(u_n) \xrightarrow{L^2} T(u)$ . Quindi  $T$  è autoaggiunto anche su  $\tilde{D}$ .

Vale il definito positivo? Il passaggio al limite diventa al massimo  $\geq$ . Possiamo anche vedere che  $T$  è somma di due operatori, che sono definiti positivi, dunque  $T$  è definito positivo.

Possiamo osservare un'altra cosa: è vero che  $\int uv'' = \int u'v'$ ? Sì, abbiamo due modi di vederlo:

1. Possiamo dire

$$\int_{-k}^k u''v = - \int_{-k}^k u'v' + u''(k)v(k) - u''(-k)v(-k)$$

ma per  $k \rightarrow +\infty$ , non è detto che i termini si annullino.

2. Sfruttando il fatto che  $u_n \rightarrow u$  come limite forte ci dà

$$\int_{\mathbb{R}} u''v = \lim \int_{\mathbb{R}} u''_n v_n = - \lim \int_{\mathbb{R}} u'_n v'_n = - \int u'v'$$

dove siamo tornati a  $D$  per la densità di  $\tilde{D}$ .

**Idea** Aver notato che  $D$  è denso in  $\tilde{D}$  ha semplificato di molto l'esercizio.  $\lrcorner$

#### Esercizio 24.5

Sia  $T(u) = iu' + 2xu$  con  $T : D \rightarrow H$  dove  $H = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e  $D = \{u \in H : u' \in H\}$ .  $T$  è autoaggiunto? Definito positivo?

#### Esercizio 24.6

$H = L^2([-\pi, \pi])$  ammette la base  $F = \left\{ \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

Consideriamo  $\{u_j\} \subseteq F$  base e le  $\{u'_j\}$  sono ancora ortogonali, ma non limitate<sup>a</sup> in  $L^2$ . Esiste una base ortonormale  $\{u_j\}$  di  $H$  fatta di funzioni  $C^1$ , con  $\|u'_j\|_{L^2}$  limitate?

<sup>a</sup>questo perchè spunta fuori un  $n$  dall'argomento

*Risoluzione:* Supponiamo che esista  $\{v_j\}$  con  $\|v_j\| = 1, \|v'_j\| \leq c$ . Sia  $u \in H \cap C^\infty$ , allora<sup>90</sup>

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_j v_j \quad u' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_j v'_j$$

Vale che  $\|u\|_{L^2} = \|\alpha\|_{\ell^2}$  e<sup>91</sup>

$$\|u'\|_{L^2} = \left\| \sum \alpha_j v'_j \right\|_{L^2} \leq \sqrt{\sum \alpha_j^2 \|v'_j\|_{L^2}^2} \leq c \|u\|_{L^2}$$

Quindi potremmo generare solo funzioni che abbiano  $\|u'\| \leq c\|u\|$ . Esiste una  $u \in H$  per cui non vale questa disuguaglianza:  $u(x) = e^{10cx}$ . Infatti  $u'(x) = 10ce^{10cx}$  e

$$\|u'\|_{L^2} = 10c\|u\|_{L^2}$$

---

<sup>90</sup>Per la regolarità di  $u$  possiamo portare la derivata dentro la serie

<sup>91</sup>Si ricorda che la norma della serie è minore o uguale alla serie delle norme



## 25 Lezione 23/11 - Teoria

### 25.1 L'antitrasformata di Fourier

L'ultima volta abbiamo introdotto la necessità di un teorema di inversione per la trasformata.

#### Definizione 25.1 – Antitrasformata di Fourier

Data  $u \in L^1(\mathbb{R})$  consideriamo l'operatore  $\mathcal{F}^* : L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  definito come

$$\mathcal{F}^*(u)(x) = \check{u}(x) := \int_{\mathbb{R}} u(z)e^{ixz} dz$$

Notiamo che  $\mathcal{F}^*(u)(x) = \mathcal{F}(u)(-x)$ .  $\mathcal{F}^*$  si chiama l'antitrasformata di  $u$  ed è lineare e continuo.

#### Teorema 25.2 – Formula di inversione

Se  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  allora si ha che<sup>a</sup> per quasi ogni  $x$

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f)) = 2\pi f$$

ossia<sup>b</sup>

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{ixy} dy \quad \text{per quasi ogni } x$$

<sup>a</sup>il fattore  $2\pi$  è dovuto alla definizione data, questo può cambiare

<sup>b</sup> $f(x)$  risulta  $\in \text{Im}(\mathcal{F}^*)$  e quindi  $f$  è continua.

#### Corollario 25.3 – Iniettività della trasformata di Fourier

$\mathcal{F}$  è iniettiva, vale a dire: data  $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  tali che

$$\hat{f}_1 = \hat{f}_2$$

allora  $f_1 = f_2$ .

*Dimostrazione. (del Corollario)* Applichiamo il Teorema 25.1 a  $f_1 - f_2 = h \in L^1$  e  $\hat{h} = 0 \in L^1$  □

*Dimostrazione. (del Teorema)* Fissata  $f \in L^1$  con  $\hat{f} \in L^1$  dobbiamo dimostrare che

$$\mathcal{F}^*(\hat{f})(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{ixy} dy \stackrel{?}{=} 2\pi f(x)$$

Introduciamo una funzione ausiliaria  $g_\delta \in L^\infty$  tale che  $\int g_\delta \rightarrow 1$  puntualmente, in modo che<sup>92</sup>

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g_\delta(y)e^{ixy} dy \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{T.e.o. 1.1} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{ixy} dy$$

<sup>92</sup>stiamo approssimando la funzione

Detta  $g(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$  consideriamo  $g_\delta = e^{-\frac{(\delta x)^2}{2}} = \sqrt{2\pi}g(\delta x)$ . Possiamo riscrivere

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g_\delta(y)e^{ixy} dy = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-izy} dz \right) g_\delta(y)e^{ixy} dy = (*)$$

e notiamo che  $f(z)g_\delta(y)e^{-i(z-x)y} \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$  visto che

$$\begin{aligned} |f(z)g_\delta(y)e^{-i(z-x)y}| &\leq |f(z)||g_\delta(y)| \\ \Rightarrow \|f(z)g_\delta(y)e^{-i(z-x)y}\|_{L^1} &\leq \|f\|_{L^1} \|g_\delta\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Possiamo dunque invertire l'ordine di integrazione

$$(*) = \int_{\mathbb{R}} dz f(z) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\delta y)^2}{2}} e^{-i(x-z)y} dy}_{\text{è la trasformata di Fourier di } g_\delta \text{ calcolata in } (x-z)}$$

Poichè  $g(x)$  è un nucleo di convoluzione con la proprietà

$$\hat{g}_\delta(y) = \sqrt{2\pi} \widehat{g(\delta \cdot)}(y) = \sqrt{2\pi} \frac{1}{|\delta|} g\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{|\delta|} e^{-\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \frac{1}{2}}$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g_\delta(y) dy &= \int_{\mathbb{R}} f(z)\hat{g}_\delta(x-z) dz \\ &= f * \sqrt{2\pi} \frac{1}{|\delta|} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 2\pi f * \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}}{|\delta|\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

dove  $\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}}{|\delta|\sqrt{2\pi}}$  è la riscalata di una funzione che ha  $\int_{\mathbb{R}} = 1$ . Ricordiamo che, data  $\varphi_\delta(x) = \frac{1}{|\delta|}\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ ,  $\varphi \in C^\infty$  con  $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\delta = 1$  vale che  $\forall f \in L^p, p \neq \infty$  e  $f * \varphi_\delta \rightarrow f$  in  $L^p$ .

Quindi riprendendo la formula iniziale

$$\tilde{f}(x) \stackrel{\forall x}{\leftarrow} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g_\delta(y)e^{ixy} dy = \underbrace{2\pi f * \varphi_\delta(x)}_{\text{per quasi ogni } x \text{ a meno di sottosuccessioni } \delta_n \rightarrow 0} \xrightarrow{L^1} 2\pi f$$

Allora, passando a  $\delta_n \rightarrow 0$  in modo tale che  $f * \varphi_{\delta_n} \rightarrow f$  puntualmente, otteniamo la tesi.  $\square$

## 25.2 Trasformata di Fourier in $L^2$

**Idea** Al momento abbiamo definito la trasformata solo per funzioni  $L^1$ . Il seguente teorema permette di definire la trasformata di Fourier di funzioni  $\in L^1 \cap L^2$ . In particolare, vediamo che l'applicazione che associa ad una funzione la sua trasformata,  $\in L^2$ , è un'isometria da  $L^1 \cap L^2$  in  $L^2$  e può essere estesa in maniera unica ad un'isometria da  $L^2$  in sé.  $\lrcorner$

### Teorema 25.4 – Teorema di Plancherel

Sia  $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  allora  $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ .  
In particolare, date  $f_1, f_2 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  vale

$$\langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})} = 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})}$$

*Osservazione 25.1*

Ricordiamo che la trasformata si comporta bene anche con il coniugio.

*Dimostrazione.* Fissiamo  $f_1, f_2 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e  $g_\delta$  come nella dimostrazione precedente<sup>93</sup> così  $\int_{\mathbb{R}} g_\delta = 1$ :

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(y) \overline{\hat{f}_2(y)} dy \stackrel{Teo (1.1)}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\hat{f}_1(y) \overline{\hat{f}_2(y)}}_{\in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \text{ segue da Hölder}} g_\delta(y) dy \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(y) \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{f_2(z)} e^{iyz} g_\delta(y) dz \right) dy \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{f_2(z)} e^{iyz} g_\delta(y) dz \right) dy = (*) \end{aligned}$$

**Idea** Scambiamo l'ordine di integrazione cercando di trovare la convoluzione di  $f_1$  con un nucleo.  $\lrcorner$

$$\begin{aligned} |f_1(x) \overline{f_2(z)} g_\delta(y) e^{-i(x-z)y}| &\leq |f_1(x)| |\overline{f_2(z)}| |g_\delta(y)| \\ \Rightarrow \|f_1(x) \overline{f_2(z)} g_\delta(y) e^{-i(x-z)y}\|_{L^1} &\leq \|f_1\|_{L^1} \|\overline{f_2}\|_{L^1} \|g_\delta\|_{L^1} \end{aligned}$$

Quindi riprendendo il calcolo<sup>94</sup>

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} dz \overline{f_2(z)} \int_{\mathbb{R}} dx f_1(x) \int_{\mathbb{R}} g_\delta(y) e^{-iy(x-z)} dy \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} dz \overline{f_2(z)} \int_{\mathbb{R}} dx f_1(x) \check{g}_\delta(z-x) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\pi \int_{\mathbb{R}} dz \overline{f_2(z)} \int_{\mathbb{R}} dx f_1(x) \varphi_\delta(z-x) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\pi \int_{\mathbb{R}} dz \overline{f_2(z)} f_1 * \varphi_\delta(z) = (**). \end{aligned}$$

<sup>93</sup>detta  $g(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$  consideriamo  $g_\delta = e^{-\frac{(\delta x)^2}{2}} = \sqrt{2\pi} g(\delta x)$

<sup>94</sup>essendo  $g_\delta$  pari,  $g_\delta(x-z) = g_\delta(z-x)$  e  $\varphi_\delta = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}$ . Quindi  $\frac{\varphi_\delta}{2\pi} = \check{g}_\delta$ .

Osserviamo che, poichè  $f_1 \in L^2$ , allora<sup>95</sup>  $f_1 * \varphi_\delta \xrightarrow{L^2} f_1$ . Quindi

$$(**) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle 2\pi f_1 * \varphi_\delta, f_2 \rangle = 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle$$

□

### Corollario 25.5

$\mathcal{F} : L^1 \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  è una  $\sqrt{2\pi}$ -isometria e quindi, dato che  $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  è denso in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , si estende in modo unico a tutto  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  come  $\sqrt{2\pi}$ -isometria.

*Dimostrazione.* Notiamo che:

- $L^1 \cap L^2$  è denso in  $L^2$  infatti:  $C_c^\infty \subseteq L^1 \cap L^2$  e  $\overline{C_c^\infty} = L^2$ .
- $\mathcal{F}|_{L^1 \cap L^2}$  è uniformemente continua, visto che è una isometria.

Preso  $f \in L^2 \setminus L^1 \exists f_n \in L^1 \cap L^2$  tale che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2 \Rightarrow f_n$  è di Cauchy in  $L^2 \xrightarrow{\text{isometria}} \hat{f}_n$  sono di Cauchy in  $L^2 \Rightarrow \exists h = \lim \hat{f}_n, \mathcal{F}(f) = h$ . Allora per il Corollario (22.3) abbiamo la tesi. □

*Osservazione 25.2*

Ma cosa vuol dire estendere? Data  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \setminus L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  come calcoliamo<sup>96</sup>  $\mathcal{F}(f)$ ? Detta  $f_r = f \mathbb{1}_{[-r, r]}$  vale che:

- $f_r \in L^1$
- $f_r \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} f$

Quindi  $\hat{f}_r$  si può calcolare con la classica formula e converge a  $\hat{f}$  in  $L^2$ . Inoltre se esiste il limite puntuale quasi ovunque di  $\hat{f}_r$  allora

$$\hat{f}(y) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) e^{-ixy} dx$$

con l'integrale inteso in senso improprio studiato ad Analisi 1 e non con l'integrazione alla Lebesgue.

*Osservazione 25.3*

Abbiamo esteso  $\mathcal{F}$  a  $L^2$ . Continuano a valere le formule rispetto a traslazione, omotetia viste in (23). *Esempio:* data  $f \in L^2$  vale

$$f(\cdot + z) = \widehat{\tau_z f}(y) = e^{-izy} \hat{f}(y)$$

*Dimostrazione.* Prendiamo  $f_1$  come sopra. Per ogni  $r, f_r \in L^1$ . Si è già visto che

$$\widehat{\tau_z f_r} = e^{-iyz} \hat{f}_r$$

e passando al limite in  $L^2$

$$\tau_z f = e^{-iyz} \hat{f}$$

□

<sup>95</sup>per quanto ricordato nella dimostrazione precedente

<sup>96</sup>La formula data è valida solo se  $f \in L^1$

### Proposizione 25.6

Data<sup>a</sup>  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $f \in C^1$  e  $f \in L^2 \cup L^1$  e supponiamo<sup>b</sup> che  $f' \in L^2 \cup L^1$ . Allora

$$\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y)$$

<sup>a</sup>Si estendono anche i risultati sulla Trasformata di  $f'$

<sup>b</sup>può essere  $f \in L^1$  e  $f' \in L^2$  o viceversa

*Dimostrazione.* È sufficiente integrare per parti su intervalli  $[x_n^1, x_n^2]$  in cui  $f$  ha limite 0 all'infinito. Vale che

$$f'(x)\mathbb{1}_{x_n^1, x_n^2}]e^{-ixy} \xrightarrow{L^2} f'(x)e^{-ixy}$$

Quindi

$$\int_{x_n^1}^{x_n^2} f'(x)e^{-ixy} dx \longrightarrow \mathcal{F}(f'(x))$$

□

## 26 Lezione 28/11 - Teoria

La scorsa volta abbiamo visto che è possibile estendere  $\mathcal{F}$  su  $L^2$ . Vediamo ora alcune delle sue proprietà:

*Osservazione 26.1 - (utile in esercizi)*

Ricordiamo che:

- $\mathcal{F}|_{L^1}$  è continua  $L^1 \rightarrow L^\infty$ :  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$  allora  $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$  in  $L^\infty$ . Infatti  $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$ .
- $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$  con  $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}$  e  $f_n \xrightarrow{L^2} f \Rightarrow \mathcal{F}(f_n) \xrightarrow{L^2} \mathcal{F}(f)$

Vediamo come si estendono alcune proprietà della trasformata su  $L^2$ .

**Idea** Vogliamo trovare ipotesi sufficienti su  $f$  per garantire la validità della formula di inversione. ┘

### Proposizione 26.1 – Formula di inversione in $L^2$

Sia  $f \in C^1(\mathbb{R})$  o  $C^1$  a tratti,  $f \in L^1$  e  $f' \in L^2$ . Allora vale la formula di inversione (in particolare  $\hat{f} \in L^1$ ).

*Dimostrazione.* Sotto questa ipotesi ha senso fare  $\hat{f}$  e  $\hat{f}'$ , inteso come  $\mathcal{F}$  estesa a  $L^2$ . Per quanto visto nella Proposizione 25.2 vale  $\hat{f}' \in L^2$  e  $\hat{f}'(y) = iy\hat{f}(y)$ . È sufficiente mostrare che  $\hat{f}$  sia sommabile.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)| dy &= \int_{\{|y| \leq 1\}} |\hat{f}(y)| dy + \int_{\{|y| > 1\}} |\hat{f}(y)| dy \\ &\leq 2\|f\|_{L^\infty} + \int_{\{|y| > 1\}} \underbrace{\frac{|y|\hat{f}(y)}{|y|}}_{=iy\hat{f}(y)=\hat{f}'} dy \\ &\leq 2\|f\|_{L^1} + \left( \int_{\{|y| > 1\}} \frac{1}{|y|^2} dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\{|y| > 1\}} \underbrace{\frac{|iy\hat{f}(y)|^2}{|\hat{f}'(y)|^2}}_{|\hat{f}'(y)|^2} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\|f\|_{L^1} + c\|\hat{f}'\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})} \leq c'(\|f\|_{L^1} + \|\hat{f}'\|_{L^2}) < +\infty \end{aligned}$$

□

*Domanda:* qual è una classe di funzioni con questa proprietà? Le funzioni  $C^1$  a supporto compatto: appartengono a tutti i  $L^p$  ed hanno supporto che è contenuto in un limitato.

*Osservazione 26.2*

La formula è sicuramente vera per  $f \in C^1_C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

*Osservazione 26.3*

Notiamo che  $\mathcal{F}^*$  è l'aggiunta di  $\mathcal{F}$  rispetto al prodotto hermitiano di  $L^2$ , ossia:

$$\langle \mathcal{F}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{F}^*g \rangle$$

*Dimostrazione.* Infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \overline{g(y)} dy &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} \right) \overline{g(y)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ixy} \overline{g(y)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \int_{\mathbb{R}} \overline{g(y) e^{ixy}} dy = \langle f, \mathcal{F}^* g \rangle \end{aligned}$$

dove gli scambi di integrazioni sono possibili per  $f(x)e^{-ixy}\overline{g(y)} \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$   $\square$

**Idea** Visto che su funzioni pari  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$  potremmo pensare ad autoaggiunto?  $\lrcorner$

*Esercizio 26.1*

$\exists$  autovalori della trasformata? (su  $L^2$ )

*Esercizio 26.2*

Visto che  $\mathcal{F}$  estesa a  $L^2$  è una  $\sqrt{2\pi}$ -isometria, è surgettiva?

*Risoluzione:* Si ha che  $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow C_0^0$  non è surgettiva. Vediamo invece che  $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$  è un'isometria surgettiva. Visto che è un'isometria,  $Im(\mathcal{F})$  è un chiuso di  $L^2$ . Abbiamo la tesi se mostriamo che esiste  $C \subseteq L^2$  denso tale che  $C \subseteq Im(\mathcal{F})$ . Consideriamo  $C = C_C^\infty$ . Si è visto che questo è un denso in  $L^2$ , dobbiamo quindi verificare che  $C \subseteq Im(\mathcal{F})$ . Se  $f \in C$  allora  $\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f)) = 2\pi f$ , ma poichè  $\mathcal{F}^*(f(x)) = \mathcal{F}(f(-x))$ , a meno di fattore moltiplicativo e di una simmetria, si ha che  $C \subseteq \mathcal{F}(L^1 \cap L^2)$ .  $\square$

Abbiamo visto che, se  $f_1, f_2 \in L^1$   $\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \hat{f}_1 \hat{f}_2$ . Vale analogo al contrario:

### Proposizione 26.2

$\mathcal{F}$  vista su  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  verifica  $\forall f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , si ha

$$2\pi \mathcal{F}(f_1 f_2) = \hat{f}_1 * \hat{f}_2$$

*Dimostrazione.* Notiamo che  $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  per Hölder e, visto che è un'algebra, ha senso  $\mathcal{F}(f_1 f_2) \in L^2$ . Dal Teorema 6.1 segue<sup>97</sup> che  $\hat{f}_1 * \hat{f}_2 \in L^2$  e  $\|f_1 * f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_{L^2} \|f_2\|_{L^2}$ .

**Idea** Vogliamo utilizzare l'iniettività di  $\mathcal{F}^*$  e la validità della formula di inversione.  $\lrcorner$

Possiamo ridurci a dimostrare la formula per  $f_1, f_2 \in C^1$  a supporto compatto, il risultato segue per ogni  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$  per densità: prese  $f_1, f_2$  in  $L^2$   $\exists \varphi_{n,1}, \varphi_{n,2} \in C_C^1$  che approssimano in  $L^2$ .

$$\|f_1 f_2 - \varphi_{n,1} \varphi_{n,2}\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

<sup>97</sup>ossia il prodotto di convoluzione ha senso

infatti:

$$\begin{aligned} \|f_1 f_2 - \varphi_{n,1} f_2 + \varphi_{n,1} f_2 - \varphi_{n,1} \varphi_{n,2}\|_{L^1} &\leq \|f_2(f_1 - \varphi_{n,1})\|_{L^1} + \|\varphi_{n,1}(f_2 - \varphi_{n,2})\|_{L^1} \\ &\stackrel{2}{\leq} \|f_2\|_{L^2} \underbrace{\|f_1 - \varphi_{n,1}\|_{L^2}}_{\rightarrow 0} + \|\varphi_{n,1}\|_{L^2} \underbrace{\|f_2 - \varphi_{n,2}\|_{L^2}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

e, visto che la convergenza forte in  $L^2$  implica la limitatezza, abbiamo che  $\|f_1 f_2 - \varphi_{n,1} \varphi_{n,2}\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Quindi vale  $\mathcal{F}(\varphi_{n,1} \varphi_{n,2}) \xrightarrow{L^\infty} \mathcal{F}(f_1 f_2)$ .

Riusciamo ad approssimare anche la convoluzione  $\varphi_{n,1} * \varphi_{n,2} \xrightarrow{L^\infty} f_1 * f_2$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n,1} * \varphi_{n,2} - f_1 * f_2\|_{L^\infty} &\leq \|\varphi_{n,1} * (\varphi_{n,2} - f_2) + (\varphi_{n,1} - f_1) * f_2\|_{L^\infty} \\ &\leq \|\varphi_{n,1} * \varphi_{n,2} - f_2\|_{L^\infty} + \|(\varphi_{n,1} - f_1) * f_2\|_{L^\infty} \\ &\leq \sup_n \|\varphi_{n,1}\|_{L^2} \underbrace{\|\varphi_{n,2} - f_2\|_{L^2}}_{\rightarrow 0} + \|f_2\|_{L^2} \underbrace{\|\varphi_{n,1} - f_1\|_{L^2}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Dimostriamo ora il risultato per  $f_1, f_2 \in C_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ : visto che

$$f_1, f_2, \mathcal{F}(f_1), \mathcal{F}(f_2), f_1 f_2, f_1 * f_2 \in L^1$$

allora possiamo usare la Proposizione (23) e quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f_1 f_2)) &= f_1(x) f_2(x) 2\pi \\ \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f_1) * \mathcal{F}(f_2)) &= \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f_1)) \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f_2)) \\ &= 2\pi f_1 2\pi f_2 \end{aligned}$$

ossia, per iniettività

$$2\pi \mathcal{F}(f_1 f_2) = \mathcal{F}(f_1) * \mathcal{F}(f_2)$$

□

### Teorema 26.3 – Teorema di Paley-Wiener

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\exists \alpha > 0$  per cui  $e^{\alpha|x|} f(x) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  allora  $\hat{f}$  è analitica. In particolare è la restrizione ad  $\mathbb{R}$  di una funzione olomorfa su  $A = \mathbb{C} \cap \{|Im| < \alpha\}$ .

*Dimostrazione.* Per  $|\Im(z)| < \alpha$  definiamo  $g$  come

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixz} dx$$

Dobbiamo vedere che ha senso fare l'integrale, ossia  $\forall z : |Im(z)| \leq \alpha$  si ha  $f(x) e^{-ixz} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ :

$$\begin{aligned} |f(x) e^{-ixz}| &\leq |f(x)| |e^{-ix\Re(z)}| |e^{-ix\Im(z)}| \\ &\leq |f(x)| \underbrace{1}_{|Im(z)| \leq \alpha} \leq |f(x)| e^{\alpha|x|} \in L^1 \end{aligned}$$



Notiamo che se  $Im(z) = 0$  allora  $g(z) = \hat{f}(\Re(z))$ .

Resta da dimostrare che  $g$  è olomorfa su  $\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha) \cong \{z : |Im(z)| < \alpha\}$ .

Vediamo intanto che  $g$  si scrive come serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  in  $B(0, \alpha)$ .

Usando lo sviluppo in serie di  $e^{-ixz}$  diciamo che

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixz} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ixz)^n}{n!} dx = \int_{\mathbb{N}} d\# z^n \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{(-ix)^n}{n!} dx}_{a_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})}$$

avendo applicato Fubini-Tonelli dove si è considerato  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ixz)^n}{n!} dx = \int_{\mathbb{N}} \frac{(-ixz)^n}{n!} d\#$ .

Verifichiamo le ipotesi di Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{N}} dx d\# \left| f(x) \frac{(-ixz)^n}{n!} \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \sum |f(x)| \frac{(-ixz)^n}{n!} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)| e^{|Im(z)||x|} \leq \|f e^{\alpha|x|}\|_{L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})} \end{aligned}$$

□

## 26.1 Applicazioni della Trasformata alla risoluzione di PDE

Vediamo come è possibile utilizzare la trasformata di Fourier nella risoluzione di equazioni del tipo (P) oppure (EO).

**Idea** Il procedimento che adotteremo è simile a quanto visto in precedenza: indoviniamo la soluzione formale, verifichiamo le ipotesi e concludiamo per il teorema di unicità della soluzione. ┘

Consideriamo il caso di (P). Supponiamo di avere  $u \in C^0([0, T] \times \mathbb{R})$  e  $C^1$  in  $t$  e  $C^2$  in  $x$ . Applichiamo la trasformata di Fourier nella variabile  $x$ .

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(t, x) &= \widehat{u_{xx}}(t, x) \\ \hat{u}_t(t, y) &= \int_{\mathbb{R}} u_t(t, x) e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{u_{xx}(t, x)}_{(u_x(t, \cdot))'} e^{-ixy} dx \\ &= iy \int_{\mathbb{R}} u_x(t, x) e^{-ixy} dx = (iy)^2 \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ixy} dx \end{aligned}$$

Se valesse un teorema di derivazione sotto segno di integrale e se  $u_0$  fosse in  $L^1$  o in  $L^2$  allora  $\hat{u}$  verificherebbe una equazione differenziale rispetto alla derivata in  $t$  con dato iniziale  $\hat{u}(0, y) = \widehat{u_0}(\cdot)$ :

$$\hat{u}_t(y) = -y^2 \hat{u}(t, \cdot)(y)$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\begin{cases} \hat{u}(t, y) = k e^{-y^2 t} = \hat{u}_0 e^{-y^2 t} \\ \hat{u}(0, y) = \hat{u}_0(y) \end{cases}$$

**Idea** Dobbiamo vedere la gaussiana  $e^{-y^2 t}$  come una trasformata di una certa  $\varphi_\delta$  e scrivere  $y^2 t = (y\sqrt{t})^2$  visto che consideriamo tempi positivi così da avere:

$$\hat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t} = \widehat{u_0}(y) \widehat{\varphi_\delta}(y) = \widehat{u_0 * \varphi_\delta}$$

Vediamo ora che deve valere  $\delta = \sqrt{2t}$  e  $\varphi = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ . ┘

Cerchiamo quindi  $\delta$  tale che:

$$\left( e^{-\frac{(x\delta)^2}{2}} \right) (y) = e^{-y^2 t}$$

Notiamo preliminarmente che vale:

$$\mathcal{F} \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right) = e^{-\frac{z^2}{2}} = e^{-\left(\frac{y\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Usando le formule in (23) si ha

$$\hat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) \frac{e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2}}{\sqrt{t}} (y) = \mathcal{F} \left( u_0(x) * \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} \right)$$

e per iniettività della trasformata ( $u_0 \in L^1$ )

$$u(t, x) = u_0(x) * \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}}$$

se  $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$  e la convoluta ha senso in  $L^1$  (basta  $u_0 \in L^\infty$ ) allora  $u(t, x)$  definita è una soluzione dell'equazione del calore.

## 26.2 Trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^d$

*Osservazione 26.4*

Per risolvere l'equazione di Poisson su  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , si può pensare di utilizzare anche la trasformata di Fourier<sup>98</sup>. Data , Abbiamo visto come è possibile risolvere  $\Delta u = f$  nel caso  $d = 1$  tramite trasformata di Fourier. Quest'idea può essere estesa per  $d \geq 2$  serve la trasformata in  $\mathbb{R}^d$

### Definizione 26.4 – Trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^d$

Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  allora

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx$$

Si verifica che è ben definita e che verifica analoghe proprietà a quella 1-dimensionale:

- $\mathcal{F}$  è lineare e continua a valori in  $(C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$
- $\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$
- $\widehat{\tau_z f} = e^{-i\langle z, y \rangle} \hat{f}$ ,  $e^{izx} \widehat{f(x)}(y) = \tau_z \hat{f}(y)$
- $\widehat{f(Ax)} = \frac{1}{|\det A|} \hat{f}(({}^t A)^{-1}(y)) \forall A$  matrice  $d \times d$  invertibile
- $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j} = iy_j \hat{f}(y)$  per  $j = 1, \dots, d$ . Più compatto:  $\nabla \hat{f}(y) = iy \hat{f}(y)$
- $\frac{\partial}{\partial y_j} \hat{f} = -ix_j \hat{f}$ . Più compatto  $\nabla \hat{f} = -ix \hat{f}$
- Se  $f \in L^1 \cap L^2$  vale

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \sqrt{(2\pi)^d} \|f\|_{L^2}$$

si estende a  $L^2$

<sup>98</sup>Abbiamo notato che l'equazione di Laplace è l'equazione stazionaria del calore.

## 27 Lezione 29/11 - Esercitazione

*Esercizio 27.1*

Detto  $A = \{x \in \ell^p : \underbrace{\sum x_i = 0}_{\text{converge e converge a 0}}\}$  dire se è convesso, chiuso.

*Osservazione 27.1*

Che la serie converga è automatico se e solo se  $p = 1$ .

*Risoluzione:*  $A$  convesso? Sì, infatti

$$\sum x_n + y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k + y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k$$

Avremmo anche potuto notare direttamente che è un sottospazio vettoriale.

$A$  è chiuso? Distinguiamo due casi:

1.  $p > 1$ : Consideriamo una successione  $\{x^j\}$  del tipo  $x_n^j = 0$  per  $n > \bar{n}(j)$  ( $j$  mi dice quale elemento della successione in  $A$  stiamo usando). Consideriamo

$$x^j = \left(1, 2, 3, \dots, \frac{1}{j}, 0, 0, \dots\right)$$

Chiaramente  $x^j \notin A$ , ma dette

$$\chi^j = \left(1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{j}, -\frac{1}{j}, 0, 0, \dots\right)$$

abbiamo che  $\chi^j \in A \forall j$  e  $\chi^j \rightarrow x^j$ .  $A$  non è chiuso. Potremmo verificare in realtà che per  $p \neq 1$ ,  $A$  è denso.

2.  $p = 1$ :

**Idea** riusciamo a fare un limite di elementi di  $A$  per cui le serie converge, ma non va a zero? Visto che siamo in  $\ell^1$  siamo assolutamente convergente e dunque possiamo scambiare l'ordine di somma.  $\lrcorner$

Prese  $x, y \in \ell^1$  vale che

$$\left| \left( \sum x_i \right) - \left( \sum y_i \right) \right| = \left| \sum (x_i - y_i) \right| \leq \|x - y\|_{\ell^1}$$

Dunque in  $\ell^1$  per ogni successione possiamo definire la serie e la differenza tra due serie è limitata.  $\Rightarrow$  abbiamo una funzione continua (è 1-lipschitziana!). Dunque  $A$  è chiuso in  $\ell^1$ .

## 27.1 Calcolo di trasformate

Vogliamo calcolare  $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$ . Ha senso considerare  $f$  estesa  $\mathbb{C}$  così da poter usare il Teorema dei Residui

### 27.1.1 Richiami di analisi complessa

#### Definizione 27.1 – Residuo

Data  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa, la possiamo sviluppare localmente in serie di potenze. Se  $g$  ha un polo<sup>a</sup> in  $\bar{z}$  definiamo il *residuo* di  $g$  in  $\bar{z}$  come

$$Res(g, \bar{z}) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial B_r(\bar{z})} g(z) dz$$

<sup>a</sup>ricordiamo che un *polo* di ordine  $k$  è una singolarità tale per cui lo sviluppo in serie di Laurent di  $g$  presenta coefficienti  $a_n$  solo per  $n \geq -k$ .

#### Osservazione 27.2

Se calcolato in un punto che non è un polo, il residuo vale 0.

#### Osservazione 27.3

Se  $z_0$  è un polo di ordine  $k$  per  $f$  consideriamo  $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ . Vale allora:

$$Res(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

*Esempio:*  $g(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ . I poli sono  $\pm i$  e vale  $Res(g, i) = \frac{1}{2i}$ ,  $Res(g, -i) = -\frac{1}{2i}$ .

#### Teorema 27.2 – Teorema dei Residui

Sia  $\Omega$  un insieme aperto del piano complesso  $\mathbb{C}$ . Siano  $z_1, \dots, z_n$  punti di singolarità della funzione  $f(z)$ . Sia inoltre  $\gamma$  una curva semplice chiusa in  $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$  tale che  $\{z_1, \dots, z_n\}$  sia contenuto nel sottoinsieme limitato di  $\mathbb{C}$  delimitato da  $\gamma$ . Se  $f(z)$  è una funzione olomorfa su  $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ , allora l'integrale della funzione su  $\gamma$  è dato da:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n Res(f, z_k)$$

#### Esercizio 27.2

Calcola la trasformata di  $f(x) = e^{-x}$  e di  $\varphi(x) = e^{-|x|}$

*Risoluzione:* Trasformiamo  $f$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} e^{-x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(xy) + i \sin(xy)) e^{-x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \cos(xy) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xy) e^{-x} dx \end{aligned}$$

Calcoliamo per parti

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos(xy) dx &= -e^{-x} \cos(xy) - \int e^{-x} y \sin(xy) dx \\ &= -e^{-x} \cos(xy) + ye^{-x} \sin(xy) - \int y^2 e^{-x} \cos(xy) dx \\ \Rightarrow \int e^{-x} \cos(xy) &= \frac{-e^{-x} \cos(xy) + ye^{-x} \sin(xy)}{1 + y^2} \end{aligned}$$

Osserviamo che per  $x \rightarrow -\infty$ , la funzione esplode. In effetti  $f \notin L^1(\mathbb{R})$ . Tuttavia  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$  non ha problemi. Emuliamo i conti di prima

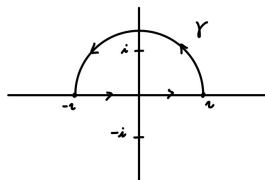
$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(xy) - i \sin(xy)) e^{-|x|} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-x} dx = \frac{2}{1 + y^2} \end{aligned}$$

### Esercizio 27.3

Calcolare la trasformata di  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

*Risoluzione:* Vale  $\hat{g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \frac{1}{1+x^2} dx$ . Per semplificare il calcolo proviamo a considerare l'estensione  $h$  su  $\mathbb{C}$ . Sia  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h(z) = \frac{e^{-iyz}}{1+z^2}$ . Vale  $\text{Res}(h, i) = \frac{e^y}{2i}$  e  $\text{Res}(h, -i) = -\frac{e^{-y}}{2i}$

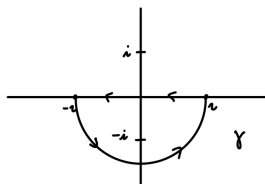
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h &= 2i\pi \frac{e^y}{2i} = \pi e^y \\ \int_{\gamma} h &= \int_{-R}^R \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx + \int_{\gamma^+} \frac{e^{-iyz}}{1+z^2} \end{aligned}$$



Visto che  $|e^{-iyz}| = |e^{-iy(r \cos \theta + ir \sin \theta)}| = |e^{-iyr \cos \theta}| |e^{yr \sin \theta}| = 1 |e^{ry \sin \theta}| \leq 1$  se  $y \leq 0$  (visto che  $\sin \theta > 0$ , essendo in  $\gamma^+$ ) allora  $\int_{\gamma^+} \rightarrow 0$  e quindi  $\hat{g}(y) = \pi e^y$ .

Se invece  $y > 0$  consideriamo  $\gamma^-$  e vale:

$$-\pi e^{-y} = \int_{\gamma} h = \int_R^{-R} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx + \int_{\gamma^-} \frac{e^{-iyz}}{1+z^2}$$



Vale la stima:  $|e^{-iyz}| = |e^{ry \sin \theta}| \leq 1 \Rightarrow \int_{\gamma^-} \frac{e^{-iyz}}{1+z^2} \rightarrow 0$  e quindi vale  $\hat{g}(y) = \pi e^{-y}$  se  $y > 0$

Quindi  $\hat{g}(y) = \pi e^{-|y|}$ .

Avremmo potuto dirlo dal principio notato i legami tra trasformata e antitrasformata.

### Osservazione 27.4

Le curve sono prese in senso antiorario in modo da non dover correggere i segni

*Esercizio 27.4*

Data la ODE  $u'' - u = f$  con  $f$  data e  $u$  incognita, quando possiamo fare la trasformata?

*Risoluzione:* Supponiamo  $f \in L^1$ . Possiamo scrivere

$$\hat{f} = \widehat{u''} - \hat{u} = -y^2 \hat{u}(y) - \hat{u}(y) = -(1 + y^2) \hat{u}$$

Cerchiamo una soluzione particolare, tale che  $\hat{u} = \frac{-\hat{f}}{1+y^2} = -\hat{f} e^{-\frac{|x|}{2}} = -f * e^{-\frac{|x|}{2}}$ .

Controlliamo che abbia senso fare la trasformata, ossia che  $-f * e^{-\frac{|x|}{2}} \in L^1$ . Per risultati visti sulla convoluzione, visto che  $e^{-\frac{|x|}{2}}$  è tale che le code vanno a zero più velocemente di qualsiasi potenza, si ha<sup>99</sup>  $-f * e^{-\frac{|x|}{2}} \in L^1$ .

*Osservazione 27.5*

Questo metodo è un po' inutile. Ci dice che c'è una soluzione particolare, ma non la fa trovare esplicitamente.

$$\int e^{-x^2} e^{-ixy} dx = \int e^{-(x+i\frac{y}{2})^2} e^{-\frac{y^2}{4}} dx = e^{-\frac{y^2}{4}} \int \underbrace{e^{-(x+i\frac{y}{2})^2}}_{\text{traslazione}} dx$$

**27.1.2 Calcolo di trasformate in più variabili**

*Esercizio 27.5*

Calcolare la trasformata di  $u(x) = \frac{1}{1+x^2} e^{-x^2}$

*Risoluzione:* Possiamo notare che  $u(x)$  è un prodotto. Vista la Proposizione (23) potremmo calcolare la trasformata di ogni fattore e poi fare la convoluzione. Ricordiamo che su  $\mathbb{R}$  sappiamo le trasformate di polinomi, esponenziali negative,  $\frac{1}{1+x^2}$ . Ma sappiamo fare la trasformata di ogni fattore? Se  $v(x) = \omega(x_1)$  (dipende solo da  $x_1$ ) allora

$$\begin{aligned} \hat{v}(y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot y} v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1 y_1} e^{-ix_2 y_2} \omega(x_1) dx_1 \right) dx_2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_2 y_2} (\hat{\omega}(y_1)) dx_2 \\ &= \hat{\omega}(y_1) \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2 y_2} dx_2 \end{aligned}$$

ma  $1 \notin L^1$ , quindi non sappiamo fare la trasformata di uno dei due fattori. Ma possiamo notare che

$$\begin{aligned} \hat{u}(y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1 y_1} e^{-ix_2 y_2} \frac{1}{1+x_1^2} e^{-x_2^2} dx_2 dx_1 \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x_1 y_1}}{1+x_1^2} dx_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_2 y_2} e^{-x_2^2} dx_2 \right) \end{aligned}$$

dunque non abbiamo una convoluzione, è il prodotto delle diverse trasformate<sup>100</sup>.

<sup>99</sup>in realtà  $\in L^\infty$

<sup>100</sup>e questo vale per le funzioni che sono un prodotto a variabili separabili

*Esercizio 27.6*

Calcolare la trasformata di  $e^{-x_1^2-8x_2^2}$

*Esercizio 27.7*

Calcolare la trasformata di  $e^{-x_1x_2}$

*Risoluzione:* non è più un prodotto, cosa possiamo notare? L'esponenziale per essere  $L^1$  deve avere esponente negativo, quindi questa funzione, ad esempio, nel secondo quadrante  $\notin L^1$ , non si trasforma.

*Esercizio 27.8*

Calcolare la trasformata di  $u(x) = \frac{e^{-(x_1^2+x_2^2)}}{1+(x_1x_2)^2}$

*Risoluzione:* Vorremmo scrivere  $u(x)$  come quadrati, facciamo un cambio variabili:  $x_1x_2 = a^2 - b^2$

Completando come segue:  $e^{-x_1x_2-10x_1^2-10x_2^2}$ , sappiamo che la funzione è trasformabile, infatti abbiamo un esponente negativo<sup>101</sup>. Con il cambio di variabili  $\begin{cases} x_1 = a + b \\ x_2 = a - b \end{cases}$  la funzione diventa  $e^{-a^2+b^2-20a^2-20b^2}$  e questo è un prodotto a variabili separabili, che sappiamo trasformare.

---

<sup>101</sup>ovviamente la costante 10 è casuale. Si poteva scegliere  $k \geq 2$ .



## 28 Lezione 30/11 - Teoria

### 28.1 Funzioni armoniche

Vogliamo risolvere

$$\begin{aligned}\Delta u &= f && \text{Equazione di Poisson} \\ \Delta u &= 0 && \text{Equazione di Laplace}\end{aligned}$$

dove  $\Delta :=$  operatore Laplaciano è definito come segue:

#### Definizione 28.1 – Operatore Laplaciano

Data  $u \in C^2(\Omega)$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto e  $x_i$  base ortonormale di  $\mathbb{R}^d$  definiamo:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Saremo interessanti in particolare a studiare  $\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

### 28.2 Strumenti di integrazione su sfere $(d-1)$ -dimensionali

Dette  $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| < r\}$  e  $\partial B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| = r\}$ , su ogni  $\partial B_r(x_0)$  è definita una misura  $\sigma_{\partial B_r(x_0)}$   $(d-1)$ -dimensionale, che chiameremo  $d\sigma_{d-1}$ .

*Osservazione 28.1*

Se  $u \in C^0$  valgono le seguenti formule:

1.

$$\int_{B_r(x_0)} u(x_0) \underbrace{dx}_{\mathcal{L}^d} = \int_0^r d\rho \int_{\partial B_\rho(x_0)} u(z) d\sigma_{d-1}(z)$$

tramite il cambio di variabile  $x \in B_r(x_0) \rightarrow (\|x\|, \frac{x}{\|x\|})$  dove  $\|x\| := \rho$ .

2.

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u(z) d\sigma_{d-1}(z) = r^{d-1} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + r\xi) d\sigma_{d-1}(\xi)$$

dove  $z = x_0 + \underbrace{z - x_0}_{r\xi} = x_0 + r\xi$  con  $\xi \in S^{d-1} = \partial B_1(0)$

Dette  $\omega_d = \operatorname{vol}_d(\overline{B_1(0)})$  e  $c_{d-1} = \sigma_{d-1}(\partial B_1(0)) = \operatorname{vol}_{d-1}(B_1(0))$ , visto che  $c_{d-1} = d\omega_d$  infatti:

$$\begin{aligned}\omega_d &= \int_{B_1(0)} 1 d\underline{x} = (2\pi)^d \left[ \frac{\rho^d}{d} \right]_0^1 = (2\pi)^d \frac{1}{d} \\ c_{d-1} &= \int_{\partial B_1(0)} 1 d\underline{x} = (2\pi)^d\end{aligned}$$

segue immediatamente che:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^d(B_r(x_0)) &= r^d \mathcal{L}^d(B_1(0)) = r^d \omega_d \\ \sigma_{\partial B_r}(\partial B_r(x_0)) &= r^{d-1} \sigma_{d-1}(\partial B_1(0)) = r^{d-1} c_{d-1} \stackrel{(2.)}{=} r^{d-1} d\omega_d\end{aligned}$$

### Lemma 28.2

Se  $u \in C^0(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto,  $\forall x_0 \in \Omega$  e  $\forall r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$  le funzioni

$$\begin{aligned}(0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)) \ni r &\longrightarrow \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \\ (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)) \ni r &\longrightarrow \int_{\partial B_r} u(z) d\sigma_{d-1}\end{aligned}$$

si estendono con continuità in  $r = 0$  al valore  $u(x_0)$ .

*Dimostrazione.* Fissato  $x_0$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $u(x) - u(x_0) < \varepsilon \forall x \in B_r(x_0) \forall r < \delta$ . Allora

$$\begin{aligned}\left| \int_{B_r(x_0)} u(x) dx - u(x_0) \right| &= \left| \int_{B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0)) dx \right| \\ &\leq \int_{B_r(x_0)} \|u(x) - u(x_0)\| dx \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Allo stesso modo si mostra che  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_r(x_0)} u(z) d\sigma_{d-1} = u(x_0)$ . La tesi segue dalla formula in (1).  $\square$

### Definizione 28.3 – Proprietà della media sulle palle/sfere

Sia  $u_0 \in C^0(\Omega)$  e  $x_0 \in \Omega$ . Diciamo che  $u$  verifica:

- la *proprietà di media sulle palle* centrate in  $x_0$  se  $\forall r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u(x) d\mathcal{L}^d = \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B_r(x_0)} u(x) d\mathcal{L}^d \quad (\text{MP})$$

- la *proprietà di media sulle sfere* centrate in  $x_0$  se  $\forall r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$

$$u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u(z) d\sigma_{d-1} = \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B_r} u(x) d\sigma_{d-1} \quad (\text{MS})$$

Si dice che  $u$  verifica la proprietà della media sulle palle/sfere su vale (MP)/(MS)  $\forall x_0 \in \Omega$ .

### Lemma 28.4

Data  $u \in C^0(\Omega)$  e  $x_0 \in \Omega$  vale che

$$(MP) \iff (MS)$$

*Dimostrazione.* (2.)  $\Rightarrow$  (1.):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx &= \frac{1}{\omega_d r^d} \int_0^r d\rho \int_{\partial B_\rho(x_0)} u(z) d\sigma_{d-1} \\ &= \frac{1}{r^d} \int_0^1 \left( \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u(z) d\sigma_{d-1} \right) \\ &= \frac{1}{r^d} \int_0^r du(x_0) \rho^{d-1} d\rho = u(x_0) \end{aligned}$$

(1.)  $\Rightarrow$  (2.): Vogliamo usare il teorema fondamentale del calcolo integrale alla seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} u(x_0) \omega_d r^d &= \int_{B_r(x_0)} u(x) dx = \int_0^r d\rho \int_{\partial B_\rho(x_0)} u d\sigma_{\partial B_\rho} \\ &= \int_0^r \rho^{d-1} d\rho \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + \rho\xi) d\sigma_{d-1}(\xi) \end{aligned}$$

Posta  $g(\rho) := \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + \rho\xi) d\sigma_{d-1}(\xi)$ , vale

$$u(x_0) \omega_d r^d = \int_0^r \rho^{d-1} g(\rho) d\rho$$

Dunque, per poter usare il teorema fondamentale del calcolo integrale,  $g(\rho)$  deve essere continua. Notiamo che

$$\rho \longrightarrow \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + \rho\xi) d\sigma_{d-1}(\xi)$$

è continua (come funzione di  $\rho$ ), infatti  $u(x_0 + \rho\xi)$  è  $L^\infty$ , converge puntualmente per continuità di  $u$  e  $\rho \rightarrow x_0 + \rho\xi$ . Possiamo dunque derivare rispetto a  $r$ :

$$r^{d-1} g(r) = (u(x_0) \omega_d r^d)' = u(x_0) d r^{d-1} \omega_d = u(x_0) c_{d-1} r^{d-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + r\xi) d\sigma_{d-1}(\xi) &= u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u(z) d\sigma_{\partial B_r} \\ &= \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B_r} u(z) d\sigma_{d-1} \end{aligned}$$

□

**Definizione 28.5 – Funzione armonica**

$u \in C^2(\Omega)$  si dice armonica su  $\Omega$  se  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$

**Teorema 28.6**

1. Se  $u$  verifica la proprietà di media sulle palle allora  $u$  è  $C^\infty$  ed è armonica
2. se  $u \in C^2(\Omega)$  e armonica, allora verifica la proprietà di media sulle palle.

*Dimostrazione. Dimostrazione di (2.):* sia  $x_0 \in \Omega$  fissato e  $r \in (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega))$  e consideriamo

$$u(x_0) \stackrel{?}{=} \int_{\partial B_r(x_0)} u(z) d\sigma_{\partial B_r}(z) = \underbrace{\frac{1}{d\omega_d} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + r\xi) d\sigma_{d-1}(\xi)}_{:=h(z)}$$

**Idea** Deriviamo questa quantità e vediamo che è costante. Allora per il Lemma (28.2) vale  $u(x_0)$ .

Vogliamo verificare che  $h(r)$  è una quantità costante e usare la proprietà integrale per  $r \rightarrow 0$ . Diciamo che  $r \rightarrow h(r)$  è derivabile e applichiamo il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.  $\lrcorner$

In seguito con  $\cdot$  indicheremo il prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^d$ .

$$\frac{d}{dr} u(x_0 + r\xi) = \nabla u(x_0 + r\xi) \cdot \xi$$

Dato  $\xi \in S^{d-1}$  la normale esterna  $\nu(\xi)$  coincide con  $\xi$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow h'(r) &= \frac{1}{d\omega_d} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + r\xi) \cdot \underbrace{\xi}_{=\nu_{\text{ext}B_1}(\xi)} d\sigma_{d-1}(\xi) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{d\omega_d} \int_{B_1(0)} \text{div}(\nabla u(x_0 + r\xi)) dx = \frac{1}{d\omega_d} \int_{B_1(0)} \Delta u(x_0 + r\xi) dx \stackrel{**}{=} 0 \end{aligned}$$

dove \* segue per il Teorema della divergenza e \*\* perchè  $u$  armonica. Dunque, essendo  $h(r)$  continua,

$$h(r) = \text{costante} = \lim_{r \rightarrow 0^+} h(r) = u(x_0)$$

ossia  $h(r) = u(x_0) \forall r$ . Quindi vale (MS).

*Dimostrazione di (1.):* Per vedere che  $u \in C^0$  è  $C^\infty$ , facciamo vedere che coincide con la convoluzione con un nucleo.

Caso  $\Omega = \mathbb{R}^d, u \in C^0 \cap L^\infty$ : consideriamo  $\varphi(x) = ke^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$  radiale con  $k$  tale che

$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) = 1$ . Allora la funzione  $u * \varphi$  è ben definita e  $C^\infty$ . Fissato  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  si ha

$$\begin{aligned} u * \varphi(x_0) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x_0 - y) \underbrace{\varphi(y)}_{g(\|y\|)} dy = \int_0^{+\infty} d\rho \int_{\partial B_\rho(0)} u(x_0 - y) g(\|y\|) d\sigma_{d-1} \\ &\stackrel{z=-y}{=} \int_0^{+\infty} g(\rho) d\rho \int_{\partial B_\rho(0)} u(x_0 + z) d\sigma_{d-1} \stackrel{(MS)}{=} \int_0^{+\infty} g(\rho) d\omega_d \rho^{d-1} u(x_0) d\rho \\ &= u(x_0) \int_0^{+\infty} g(\rho) \rho^{d-1} d\omega_d d\rho = u(x_0) \end{aligned}$$

dove

$$\int_0^{+\infty} g(\rho) \rho^{d-1} d\omega_d d\rho = \int_0^{+\infty} \rho(\|y\|) dy = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$$

Ma allora vale

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\varphi(x)}_{g(\|x\|)} dx = \int_0^{+\infty} g(\rho) \int_{\partial B_\rho(0)} 1 d\sigma_{\partial B_\rho}$$

Caso  $\Omega$  aperto qualsiasi e  $u$  qualsiasi: vale la stessa dimostrazione di prima. Essere di classe  $C^\infty(\Omega)$  è una proprietà locale, ci riduciamo quindi ad un aperto  $A \subset \Omega$ , selezionando un intorno tubolare di raggio  $R$  di  $A$  del tipo  $A + B_R(0) \subset \Omega$ . Consideriamo sempre  $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$  radiale con  $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$  e che ha supporto in  $B_{\frac{R}{2}}(0)$ . Possiamo ad esempio prendere una qualsiasi funzione a campana e riscalarla/rinormalizzarla in modo che  $\varphi(x) = g(\|x\|)$ . Se prendiamo

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{su } \overline{A + B_R} \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$$

è limitata visto che  $u$  è continua e  $\overline{A + B_R}$  compatto contenuto in  $\Omega$ . Visto che  $\tilde{u} \in L^\infty$  possiamo farci la convoluzione! Vale  $u(x_0) = \tilde{u} * \varphi(x_0)$  e quindi  $u \in C^\infty$ . Mostriamo ora che  $u$  è armonica, ossia  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ . Ci basta dimostrare che  $\int_{B_r(x_0)} \Delta u = 0 \forall r \forall x_0$ . Abbiamo visto che, detta  $h(r) = \int_{\partial B_r(x_0)} u(z) d\sigma_{\partial B_r}$ , vale

$$h'(r) = \int_{B_1(0)} \Delta u(x_0 + rx) dx = 0 \Rightarrow \int \Delta u = 0 \text{ su ogni palla}$$

□

Con la dimostrazione precedente abbiamo anche il seguente:

### Lemma 28.7

Data  $u \in C^2$  e detta  $R := \text{dist}(x, \Omega^C)$  allora

$$h : r \rightarrow \int_{\partial B_r(x)} u d\sigma_{d-1}$$

è ben definita e derivabile su  $[0, R)$  e inoltre

$$h'(r) = \frac{1}{c_d r^{d-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u d\mathcal{L}^d$$

## 29 Lezione 05/12 - Teoria

Tra le funzioni armoniche e le funzioni olomorfe c'è un collegamento diretto. Sia  $F : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , usando l'identificazione

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\approx \mathbb{R}^2 \\ x + iy &\leftarrow (x, y) \\ z &\rightarrow (\Re(z), \Im(z))\end{aligned}$$

Diciamo  $F$  è *olomorfa* se è derivabile in senso complesso e se

$$\begin{aligned}F(x + iy) &= \Re F(x + iy) + i\Im F(x + iy) \\ &= u(x, y) + iv(x, y)\end{aligned}$$

Visto che  $F$  olomorfa  $\iff$  verifica le equazioni di Cauchy-Riemann<sup>102</sup> :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow i \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

### Proposizione 29.1

Se  $F$  olomorfa su  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  allora  $\Re F = u$  e  $\Im F = v$  sono armoniche su  $A$

*Dimostrazione.* Calcoliamo ad esempio per  $u$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

dove possiamo invertire l'ordine di derivazione per il Teorema di Schwarz. Dunque si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$

ossia  $u$  armonica. Analogamente per  $v$ . □

### Proposizione 29.2

Se  $\Omega$  è semplicemente connesso e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è armonica allora esiste  $F$  olomorfa tale che  $u = \Re F$

*Dimostrazione.* Presa una 1-forma

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

<sup>102</sup>Si ricorda: se  $f = u + iv$  allora  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\omega$  chiusa equivale a dire  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Per risultati noti, data  $\omega$  chiusa su  $\Omega$  semplicemente connesso, allora  $\omega$  è esatta, ossia  $\exists h : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}) = (P, Q) = \nabla h$ . Consideriamo la forma

$$\omega(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Visto che  $u$  è armonica diciamo che  $\omega$  è chiusa. Consideriamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \end{aligned}$$

e, poichè  $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$ , allora  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Quindi  $\exists v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow u(x, y) + iv(x, y) = F(x, y)$$

verifica Cauchy-Riemann  $\Rightarrow$  è olomorfa. □

*Esempi di funzioni armoniche:*

**Idea** Tutto ciò che derivato due volte si annulla è armonico. ┘

- $P$  polinomio in  $x_1, \dots, x_d$  di  $\deg \leq 1$  è armonico.
- polinomi di grado 2:

$$u(x, y) = xy, x^2 - y^2, \underbrace{\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)}_{\text{su } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$$

(Ricorda:  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$  è classico esempio di forma chiusa ma non esatta)

Siamo interessati ad applicare queste proprietà all'equazione di Poisson, ossia della forma:  $\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$  con  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  assegnate e continue. Cerchiamo  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $u \in C^0(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega)$  e sia soluzione.

### Lemma 29.3

Sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  armonica e sia  $x_0$  un punto di massimo assoluto per  $u$ . Allora  $u(x) = u(x_0)$  su tutta la componente connessa di  $\Omega$  che contiene  $x_0$ . (Analogo per minimo assoluto)

*Dimostrazione.* Definiamo  $E = \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\}$  e mostriamo che è aperto e chiuso.  $E$  è chiuso perchè  $E = u^{-1}(u(x_0))$  e  $u$  è continua.

$E$  è aperto per la proprietà della media su palle: fissato  $r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$  si ha  $\max u = u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \leq \max u \Rightarrow \int_{B_r(x_0)} u(x) dx = \max u$  e quindi

$$\int_{B_r(x_0)} \underbrace{(\max_{\Omega} u - u(x))}_{h(x) \text{ è continua su } B_r(x_0) \text{ ed è } \geq 0} dx = 0$$

Come è noto  $\int h(x) = 0 \Rightarrow h = 0$  quasi ovunque. Però, visto che  $h$  è continua, l'uguaglianza vale ovunque. Quindi  $B_r(x_0) \subseteq E$  e questo ragionamento lo possiamo ripetere  $\forall \bar{x} \in E$   $\square$

**Lemma 29.4** – Principio del massimo per funzioni armoniche

Sia  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  armonica e  $\Omega$  limitato. Allora  $\exists x_0$  punto di massimo assoluto,  $\exists x_1$  punto di minimo assoluto e  $x_0, x_1 \in \partial\Omega$ .

*Osservazione 29.1*

Attenzione: il lemma non ci sta dicendo che non ci possono essere punti di massimo/minimo all'interno, vedi ad esempio le funzioni costanti. Nel caso in cui ci fossero punti di massimo interni, il lemma ci dice che arriviamo al bordo.

*Dimostrazione.* Essendo  $\bar{\Omega}$  compatto, consideriamo  $\bar{x}$  un punto di massimo qualsiasi. Allora l'insieme definito come segue,  $E = \{x : u(x) = u(\bar{x})\}$ , è aperto e chiuso (è una componente connessa per Lemma (29))  $\Rightarrow \exists x_0 \in \partial E$  punto di massimo  $\stackrel{?}{\Rightarrow} x_0 \in \partial\Omega$ .

Se  $x_0 \in \bar{\Omega}$  allora avremmo che  $E$  non era massimale, ossia che potremmo ingrandire la componente connessa  $E$ , infatti  $E \cup B_r(x_0) \subseteq \{u(x) = u(\bar{x})\}$ , assurdo. Lo stesso vale per i punti di minimo assoluto  $\square$

*Osservazione 29.2*

L'ipotesi  $\Omega$  limitato è necessaria. Ad esempio: si consideri  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 > 0\}$  e  $u(x) = x_1$ .  $u$  è definita su  $\bar{\Omega}$ , è armonica, ma non ha punti di massimo.

**Teorema 29.5** – Teorema di unicità per l'equazione di Poisson su  $\Omega$  limitato

Dato  $\Omega$  limitato, siano  $u_1, u_2$  soluzioni di

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Allora  $u_1 = u_2$ .

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $v = u_1 - u_2, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  verifica

$$\begin{cases} \Delta v = \Delta u_1 - \Delta u_2 = f - f = 0 & \text{su } \Omega \\ v = u_1 - u_2 = u_0 - u_0 = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$



Allora  $v$  è armonica su  $\bar{\Omega}$  e  $v = 0$  su  $\partial\Omega$ . Applicando il Lemma 29 si ha

$$0 = v(x_1) = \min_{\bar{\Omega}} v \leq v(x) \leq \max_{\bar{\Omega}} v = v(x_0) = 0$$

□

**Proposizione 29.6** – Principio di confronto per l'equazione di Poisson

Siano  $u_1$  e  $u_2$  soluzioni di

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f & \text{su } \Omega \\ u_1 = u_1^0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \Delta u_2 = f & \text{su } \Omega \\ u_2 = u_2^0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Allora, se  $u_2^0 \geq u_1^0$  su  $\partial\Omega$ , vale  $u_2 \geq u_1$  in  $\Omega$ . Se inoltre  $\exists \bar{x} \in \Omega$  tale che  $u_1(\bar{x}) = u_2(\bar{x})$  allora  $u_1 = u_2$  sulla componente connessa in  $\Omega$  di  $\bar{x}$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $v = u_2 - u_1$ . Questa verifica  $\Delta v = 0$  e  $v \geq 0$  su  $\partial\Omega$ . Usando il Lemma (29) otteniamo che  $\min v$  esiste ed è ottenuto su  $\partial\Omega$

$$\min_{\bar{\Omega}} v = \underbrace{v(x_1)}_{\in \partial\Omega} \geq 0 \Rightarrow v \geq 0 \text{ su } \Omega$$

□

## 29.1 Risoluzione dell'equazione di Laplace su $B_1(0)$

L'equazione si scrive come 
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } B_1(0) \\ u = u_0 & \text{su } \partial B_1(0) \end{cases}$$

**Teorema 29.7**

Se  $u_0$  è di classe  $C^1$  allora esiste soluzione  $u$  dell'equazione di Laplace su  $B_1(0)$  e si rappresenta esplicitamente.

*Dimostrazione.* Consideriamo l'applicazione  $\mathbb{R} \ni \theta \rightarrow e^{i\theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  allora  $u_0(x, y) \rightarrow h(\theta) = u_0 e^{i\theta}$ , con  $h$  di classe  $C^1$  e tale che  $h(-\pi) = h(\pi)$ . Sviluppando  $h$  si ha  $h(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$  e  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$

**Idea** La forma di  $h$  (sviluppo di  $u_0$ ) ci suggerisce come fornire una estensione armonica su tutto  $B_1(0)$  di  $u_0$ . Basta vederla come  $\Re$  di una funzione olomorfa.

┘

Visto che  $h, u_0 \in \mathbb{R}$ , sappiamo che  $c_{-n} = \overline{c_n}$ , perciò possiamo scrivere

$$\begin{aligned} h(\theta) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} e^{-in\theta} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{in\theta} + \overline{c_n e^{in\theta}}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\Re \underbrace{(c_n e^{in\theta})}_{c_n (e^{i\theta})^n} \end{aligned}$$

Estendiamo  $\partial B_1(0) \ni e^{i\theta} \rightarrow z \in B_1(0)$  e consideriamo

$$u(z) = \Re \left( c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \right)$$

Affermiamo che  $F(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$  è convergente  $\forall |z| \leq 1$ . Studiamo la convergenza totale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|z| \leq 1} |c_n| |z^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty \text{ per ipotesi}$$

Quindi  $F$  è olomorfa su  $B_1$  e si estende per continuità su  $\partial B_1$ . Definiamo allora  $u(x, y) := \Re F(x + iy)$  su  $\overline{B_1(0)} \Rightarrow u$  è armonica e  $u|_{\partial B_1} = u_0$   $\square$

#### Esercizio 29.1

Cosa succede se  $u_0$  è solo continua su  $\partial B_1$ ?

**Idea** Scrivere una estensione di  $u_0$  che usi i coefficienti di Fourier, senza passare per la convergenza totale.

$$u_0(e^{i\theta}) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\Re(c_n (e^{i\theta})^n)$$

Provare ad estenderla nei complessi ricordando che  $c_n = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) e^{-in\theta} d\theta$

$$\begin{aligned} u(z) &= \int h(\theta) d\theta + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re \left( \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) e^{-in\theta} z^n d\theta \right) \\ &= \Re \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int h(\theta) (e^{-i\theta} z)^n d\theta \right] \end{aligned}$$

Usare le somme parziali della serie geometrica: provate a congelare  $\theta$  e calcolare la somma della serie geometrica  $(e^{-i\theta} z)$   $\lrcorner$

## 30 Lezione 06/12 - Teoria

### 30.1 Richiami di sottovarietà differenziali

#### Definizione 30.1 – Differenziale

Data  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  di classe  $C^1$  e  $x \in \Omega$ , il *differenziale* di  $f$  in  $x$  è l'applicazione lineare  $d_x f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  associata alla matrice  $\nabla f(x)$ . Lo sviluppo di Taylor di  $f$  in  $x$  al primo ordine è

$$f(x+h) = f(x) + d_x f \cdot h + o(h)$$

#### Definizione 30.2 – $k$ -superficie

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^d$ .  $S$  si dice  $k$ -superficie in  $\mathbb{R}^d$  di classe  $C^m$  se  $\forall x_0 \in S \exists U$  intorno aperto di  $x_0$  in  $\mathbb{R}^d$  ed  $\exists \Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ , con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^k$ , di classe  $C^m$  tale che

- $\Phi : A \rightarrow S \cap U$  è omeomorfismo
- $\text{rnk } d\Phi(\cdot) = k$  su  $A$

$\Phi$  è una *parametrizzazione regolare locale*. Questa è la proprietà (30.1).

<sup>a</sup>di solito sarà chiuso

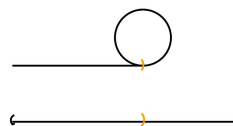
*Osservazione 30.1*

$k \leq d$  e le  $d$ -superfici in  $\mathbb{R}^d$  sono gli aperti.

*Osservazione 30.2*

Questa definizione corrisponde a quella di sottovarietà "embedded" di  $\mathbb{R}^d$ .

*Attenzione:* se  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua e  $\Phi : A \rightarrow S \cap U$  bigezione non è detto che sia un omeomorfismo. Esempio:



#### Proposizione 30.3

La seguenti proprietà sono equivalenti:

1. Proprietà (30.1)
2. Vediamo  $S$  localmente come luogo di zeri:  $\forall x_0 \exists U'$  intorno di  $x_0$ ,  $\exists g : U' \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  di classe  $C^m$  tale che:
  - $U' \cap S = \{x \in U' : g(x) = 0\} = g^{-1}(0)$
  - $\text{rnk } dg(\cdot) = d - k$  su  $U'$
3. Vediamo  $S$  localmente come grafico:  $\exists U''$  intorno aperto di  $x_0$  e  $\exists \psi : A \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$ , con  $A \subseteq \mathbb{R}^k$  aperto, di classe  $C^m$  tale che  $U'' \cap S = \{(z, \psi(z)) : z \in A\}$

*Dimostrazione.* Omessa. Argomento standard con uso del teorema della funzione implicita.  $\square$

*Esempi:*

- $S^{d-1} = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_d) : x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$  è  $d - 1$  superficie in  $\mathbb{R}^d$  con  $g(\underline{x}) = |\underline{x}|^2 - 1$ .
- $P = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1\}$  è 2-superficie in  $\mathbb{R}^3$ . È globalmente grafico di  $B_1(0) \ni (x, y) \rightarrow \psi(x, y) = x^2 + y^2$
- Luogo di zeri non 1-superficie:  $\{(x, y) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : x^3 - y^2 = 0\}$
- Grafico non 2-superficie: il cono  $B_1(0) \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$

#### Definizione 30.4 – Mappe regolari tra superfici

Sia  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^M$  con  $S$   $k$ -superficie in  $\mathbb{R}^d$  di classe  $C^m$ .  $f$  è di classe  $C^h$ , con  $h \leq m$ , se  $\forall x_0 \in S$  e  $\forall \Phi$  parametrizzazione regolare  $\Phi : A \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  si ha  $f \circ \Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^M$  è di classe<sup>a</sup>  $C^h$ .

<sup>a</sup>vediamo la regolarità di  $f$  tramite le carte.

#### Proposizione 30.5 – Estensione di mappe regolari

Data  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^M$  di classe  $C^h$  allora  $\forall x_0 \in S \exists U$  aperto in  $\mathbb{R}^d$  ed esiste  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^M$  di classe  $C^h$  tale che  $F|_S = f$ .

*Dimostrazione.* Omessa. Usa le stesse idee della dimostrazione del teorema della funzione implicita  $\square$

#### Definizione 30.6 – $k$ -spazio tangente

Data  $S$   $k$ -superficie di  $\mathbb{R}^d$  in ogni punto di  $S$  è definito il  $k$  spazio tangente ad  $S$  in  $x_0$  come

$$T_{x_0} S = \text{Tan}(S, x_0) = \{\dot{\gamma}(0) : \gamma : I \rightarrow S \text{ } C^1 \text{ con } \gamma(0) = x_0\}$$

#### Definizione 30.7

Date  $S, f$  come al solito e  $x \in S$ . Definiamo il *differenziale di  $f$  in  $x$*  come la mappa lineare  $d_x f : T_x S \rightarrow \mathbb{R}^d$  tale che

$$d_x f : \dot{\gamma}(0) \rightarrow (f \circ \gamma)'(0)$$

#### Proposizione 30.8

Data  $S$   $k$ -superficie in  $\mathbb{R}^d$  di classe  $C^m, m \geq 1$  si ha che

$$d\Phi(y_0)(\mathbb{R}^k) = \text{Tan}(S, x_0) = \ker dg(x_0)$$

dove  $dg(x_0)$  è di Proprietà (2) e  $d\Phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  lineare.

*Osservazione 30.3*

Dalla proposizione segue che  $Tan(S, x_0)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^d$  di dimensione  $k$ . È dunque centrato nell'origine.

*Dimostrazione.* (dell'Osservazione) Infatti  $dg(x_0) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  ed ha rango  $d - k \Rightarrow \ker dg(x_0)$  ha dim  $k$ . Analogamente  $d\Phi(y_0)$  ha rango  $d - k$   $\square$

*Dimostrazione.* (della Proposizione) Basta vedere i contenimenti:

$$Im\ d\Phi(y_0) \subseteq Tan(S, x_0) \subseteq \ker dg(x_0)$$

perchè è noto che  $Im\ d\Phi(y_0), \ker dg(x_0)$  sono sottospazi vettoriali di dimensione  $k$  e dunque coincidono.

Prendiamo un elemento  $v \in Im\ d\Phi(y_0)$ . Questo è equivalente a  $\exists w \in \mathbb{R}^k$  tale che  $d\Phi(y_0)(w) = v$ . Allora definiamo  $\gamma(t) = \Phi(y_0 + tw)$  con  $y_0 \in A, tw \in \mathbb{R}^k$ . Verifichiamo che  $\gamma$  sia di classe  $C^1$ :  $\gamma(0) = \Phi(y_0) = x_0$  e

$$\gamma'(t)|_{t=0} = d\Phi(y_0 + tw) \cdot w|_{t=0} = d\Phi(y_0)w = v$$

Abbiamo così mostrato  $Im\ d\Phi(y_0) \subseteq Tan(S, x_0)$ . Prendiamo ora  $v = \dot{\gamma}(0)$  con  $\gamma : I \rightarrow S \cap U$  di classe  $C^1$  e  $\gamma(0) = x_0$ . Consideriamo<sup>103</sup>  $g(\gamma(t)) = 0 \forall t$ . Allora  $\frac{d}{dt}(g \circ \gamma(t)) = 0 \forall t$ , ma vale

$$\frac{d}{dt}(g \circ \gamma(t)) = dg(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

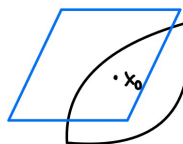
che calcolato in  $t = 0$

$$dg(\gamma(0))\gamma'(0) = dg(x_0) \cdot v = 0 \Rightarrow v \in \ker dg(x_0)$$

$\square$

### Definizione 30.9 – Spazio tangente

Lo spazio tangente è  $x_0 + Tan(S, x_0)$ .



*Osservazione 30.4*

Quando disegniamo lo spazio tangente, facciamo sempre riferimento al sottospazio affine.

### Proposizione 30.10

$x_0 + Tan(S, x_0)$  è l'unico sottospazio affine che verifica

$$dist(x, x_0 + Tan(S, x_0)) = o(|x - x_0|) \quad x \in S$$

*Dimostrazione.* Omessa.  $\square$

<sup>103</sup>in quanto  $g = 0$  sulla superficie.

*Esercizio 30.1*

Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi dello spazio  $\mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2=d}$  sono  $k$ -superfici in  $\mathbb{R}^d$

- $Sim(n \times n, \mathbb{R})$  di dimensione  $\frac{n(n+1)}{2}$  ( $A - {}^t A = 0$ )
- $O(n)$  di dimensione  $\frac{n(n-1)}{2}$  ( ${}^t A A - Id = 0$ )

**Idea** Calcolare il differenziale di  $g(A) = A - {}^t A$ . Provare a vedere  $g(A+tB)$ .  $\lrcorner$

**Idea** Tornando alla definizione di  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^M$  di classe  $C^m$  ci piacerebbe definire un operatore lineare  $\forall x_0 \in S \ d_S f(x_0) : Tan(S, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^M$ . In particolare se  $f : S \rightarrow S'$  di classe  $C^m$  con  $m \leq k$ . (la definizione è la stessa visto che  $S' \subseteq \mathbb{R}^M$ ). Ci sono 2 possibilità:  $\lrcorner$

Consideriamo  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^M$  con  $U$  intorno di  $x_0$  in  $\mathbb{R}^d$  di classe  $C^m$  estensione di  $f$  e consideriamo  $dF(x_0)$ , che esiste ed è  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^M$ , allora

$$d_S f(x_0) = dF(x_0)|_{Tan(S, x_0)}$$

*Esercizio 30.2*

Dimostrare che se  $F_1, F_2$  sono 2 estensioni locali (su  $U \cap \{x_0\}$ ) allora

$$dF_1(x_0)|_{Tan(S, x_0)} = dF_2(x_0)|_{Tan(S, x_0)}$$

**Teorema 30.11**

Dati  $S, S'$  come sopra,  $f : S \rightarrow S' \forall x_0 \in S \exists ! T : Tan(S, x_0) \rightarrow Tan(S', f(x_0))$  lineare e  $T$  coincide con  $dF(x_0)|_{Tan(S, x_0)} \forall F$  estensione locale di  $f$ .

*Dimostrazione.* Usiamo le curve. Prendiamo  $v \in Tan(S, x_0) \iff \gamma : I \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^d$  di classe  $C^1$  tale che  $\gamma(0) = x_0, \dot{\gamma} = v$  e consideriamo

$$v \rightarrow (f \circ \gamma)'(0)$$

dove, detta  $F$  estensione di  $f$ , vale<sup>104</sup>  $(f \circ \gamma)'(0) = (F \circ \gamma)'(0)$ . Vogliamo vedere che  $(f \circ \gamma)'(0) \in Tan(S', f(x_0))$ . Definiamo  $\tilde{\gamma}(t) := f \circ \gamma(t) = F \circ \gamma(t)$ . Allora

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(0) &= f(x_0) \\ \tilde{\gamma}'(t) &= dF(\gamma(t))\gamma'(t) \end{aligned}$$

e  $\tilde{\gamma}'(0) = dF(x_0) \cdot v = d_S f(x_0) \cdot v \in Tan(S, x_0)$ .  $\square$

<sup>104</sup>così evitiamo il problema della buona definizione e ha senso parlare di differenziale usando  $F$  e non  $f$ .

## 30.2 Nozione di integrazione su superficie

### Definizione 30.12 – Insieme misurabile su $S$

Definiamo una classe di insiemi misurabili su  $S$ :  $E$  è misurabile se  $\forall$  parametrizzazione "locale"  $\Phi$ ,  $\Phi^{-1}(E)$  è misurabile

### Definizione 30.13 – Misura associata ad $S$

Sia  $E \subseteq S$  misurabile. Supponendo che  $\Phi^{-1}(E)$  abbia senso<sup>a</sup> definiamo

$$\sigma|_S(E) = \int_E d\sigma_S = \int_{\Phi^{-1}(E)} J\Phi(y) dy$$

dove  $J\Phi(y) = \sqrt{\det d\Phi^t(y)d\Phi(y)}$ .

<sup>a</sup>dovremmo fare partizione dell'unità

#### Osservazione 30.5

Osserviamo che questa è una misura intrinseca della superficie che non dipende da alcuna parametrizzazione. È anche chiamata misura di Hausdorff  $k$ -dimensionale.

#### Osservazione 30.6

Cosa significa  $\det(d\Phi^t d\Phi)$ ? A  $d\Phi$  operatore lineare  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  associato la matrice  $d\Phi = N$  ottenuto dalla scelta di una base ortonormale su  $\mathbb{R}^k$  e una su  $\mathbb{R}^d$  allora

$$\det(d\Phi^t d\Phi) = \det N^t N$$

In generale vale la formula di Cauchy-Binet per  $A$ , matrice  $n \times m$  con  $m \leq n$

$$\det(A^T A) = \sum_{M \subset A} (\det M)^2$$

dove  $M$  sono i minori di ordine massimo e nella formula ci sono  $\binom{n}{m}$  addendi

## 31 Lezione 07/12 - Esercitazione

### 31.1 Funzioni armoniche

Consideriamo il problema<sup>105</sup>  $-\Delta u = f$  su  $\mathbb{R}^d$ , come possiamo risolverlo? Possiamo utilizzare la trasformata: poichè  $\frac{\partial f}{\partial x_j} = iy_j \hat{f}$  allora  $|y|^2 \hat{u} = -\widehat{\Delta u} = \hat{f}$  e quindi  $\hat{u} = \frac{1}{|y|^2} \hat{f}$ . Supponendo di avere una funzione  $g$  tale che  $\hat{g} = \frac{1}{y^2}$  avremmo

$$\hat{u} = \frac{1}{|y|^2} \hat{f} = \hat{g} \hat{f} = \widehat{g * f}$$

e quindi  $u = g * f$ . Il problema è che  $\frac{1}{y^2} \notin L^p, \forall p$  e quindi non la possiamo antitrasformare.

**Idea** Visto che  $\frac{1}{y^2}$  ha problemi soltanto in 0, possiamo cercare una funzione  $g \sim \frac{1}{y^2}$ . Osserviamo che, essendo la convoluzione un operatore regolarizzante, non è necessario cercare una  $g$  regolare.  $\lrcorner$

Facciamo un conto formale:

$$-\Delta(g * f)(0) = {}^{106} g * (-\Delta f(0)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\underline{x})(-\Delta f)(-\underline{x}) d\underline{x} \stackrel{?}{=} f(0)$$

Tutto ciò varrebbe, solo se fosse vera l'ultima uguaglianza.

**Idea** Quindi la  $g$  che cerchiamo in realtà è tale che  $\hat{g} = \frac{y^2}{2}$ . È sufficiente trovare  $g$  in modo che  $g \in L^1_{loc}$ .  $\lrcorner$

Dal momento che la trasformata è radiale, cerchiamo una  $g(x)$  radiale. Vogliamo quindi una  $g$  che sia funzione di  $|x|$ .

**Idea** Nella precedente esercitazione ci siamo accorti che la trasformata sugli esponenti dei polinomi fa spuntare fuori esponente  $d$ .  $\lrcorner$

Proviamo quindi a considerare  $g(x) = \begin{cases} |x|^{2-d} & \text{per } d \geq 3 \\ \log |x| & \text{per } d = 2 \end{cases}$ , dove nel caso

$d = 2$  abbiamo posto  $g = \log |x|$  perchè si comporta come una potenza di zero<sup>107</sup>. Facciamo il conto in  $d = 2$ , altro è analogo. Consideriamo  $g(x) = \log |x|$

$$\text{Obiettivo: } \boxed{\int_{\mathbb{R}^2} \Delta f(x) g(x) = f(0)}$$

Vediamo che:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{x_1}{|x|^2} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \frac{1}{|x|^2} - 2 \frac{x_1^2}{|x|^4}$$

quindi

$$\Delta g = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_1^2}{|x|^4} + \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_2^2}{|x|^4} = 0$$

<sup>105</sup>Attenzione: ora c'è una scelta stilistica: è indifferente se si sceglie  $+\Delta u$  oppure  $-\Delta u$ .

<sup>106</sup>Visto che quando consideriamo la derivata della convoluzione di due funzioni, possiamo scaricare le derivate come vogliamo sulle funzioni.

<sup>107</sup>In generale quando vogliamo usare  $f x^{-1-a} = \frac{1}{-a} x^{-a}$ , che fallisce per  $a = 0$ , utilizziamo il log perchè  $\log(x) = \int \frac{1}{x}$ .



$$\nabla g = \frac{x}{|x|^2}$$

Notiamo che la  $g$  così definita è  $L^1_{loc}$ , infatti esplode lentamente a  $+\infty$  ed è integrabile vicino a 0. Consideriamo  $B_\varepsilon$ , dobbiamo studiare  $-\int_{B_\varepsilon} \Delta f(x) \log(|x|) dx$ . Usando il teorema della divergenza<sup>108</sup>:

$$\int_{B_\varepsilon} (-\Delta f)g = \int_{B_\varepsilon} \nabla f \nabla g + \int_{\partial B_\varepsilon} g \nabla f \frac{x}{|x|} = (*)$$

*Achtung*: occhio a segni: a secondo membro è presente un  $+$  perchè avevamo un meno e, visto che siamo nel complementare, se  $\nu$  è la normale esterna, bisogna considerare  $-\nu$ ! Qui  $\nu = \frac{x}{|x|}$ . Notiamo

$$0 = \int_{B_\varepsilon} f(-\Delta g) = \int_{B_\varepsilon} \nabla f \nabla g + \int_{\partial B_\varepsilon} f \nabla g \frac{x}{|x|}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\partial B_\varepsilon} g \cdot \nabla f(x) \frac{x}{|x|} + f(x) \nabla g \frac{x}{|x|} dx \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} g \cdot \nabla f(x) \frac{x}{|x|} + f(x) \frac{x}{|x|^2} \frac{x}{|x|} dx \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} g \cdot \nabla f(x) \frac{x}{|x|} + f(x) \frac{1}{|x|} dx \end{aligned}$$

Ricordando che se  $h \in C^2$  allora  $\nabla h$  è limitato e poichè  $\frac{x}{|x|}$  è limitato pure, detta  $M = \|f\|_{L^\infty}$

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon} g(x) \nabla f(x) \frac{x}{|x|} \right| \leq M \int_{\partial B_\varepsilon} |\log(|x|)| = M |\log \varepsilon| 2\pi \varepsilon$$

e passando al limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M |\log \varepsilon| 2\pi \varepsilon = 0$ . Visto che  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} f(x) \frac{1}{|x|} dx = 2\pi f(0)$  si ha:

$$\boxed{-\int_{\mathbb{R}^d} \Delta f(x) g(x) = 2\pi f(0)}$$

Quindi la funzione da considerare è  $g(x) = \begin{cases} \frac{\log(|x|)}{2\pi} & d=2 \\ \frac{|x|^{2-d}}{d\omega_d(d-1)} & d \geq 3 \end{cases}$  e il problema  $-\Delta u = f$  ha soluzione  $u = g * f$ . Noi lo abbiamo visto solo per  $x = \underline{0}$ , va

<sup>108</sup>Per chi ha fatto pochi conti in vita sua ricordiamo che: data  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto limitato,  $u, v$  differenziabili con continuità su  $\bar{\Omega}$  e  $\nu_i$  normale  $i$ -esima valgono:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx &= \int_{\partial \Omega} u \nu_i v d\sigma_{d-1} - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ \int_{\Omega} \Delta u v dx &= \int_{\partial \Omega} \nabla u \nu v d\sigma_{d-1} - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \end{aligned}$$

verificato per ogni punto.

$$\begin{aligned} -\Delta u(\bar{x}) &= g * (-\Delta f)(\bar{x}) \\ &= \int (-\Delta f)(\bar{x} - x)g(x) = f(\bar{x}) \end{aligned}$$

□

Richiami veloci di teoria:

- Caratterizzazione di funzioni armoniche.
- Una funzione armonica non costante può avere il massimo/minimo solo sul bordo.
- Non abbiamo gli strumenti per verificare che un'equazione Laplaciana ammetta soluzione, ma è chiaro che se esiste questa è unica.
- Il principio del massimo ci dà delle stime: se  $u \geq 0$  su  $\partial\Omega$ , allora  $u \geq 0$  su  $\Omega$ , visto che  $u$  ha minimo sul bordo.
- Se  $u, v$  armoniche su  $\Omega$  e vale  $u \geq v$  su  $\partial\Omega$  allora  $u \geq v$  su  $\Omega$  (non serve proprio  $u, v$  armoniche, basta che  $\Delta u \geq \Delta v$ .)

*Esercizio 31.1*

Sia  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Si risolva  $\begin{cases} -\Delta u = x + y & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

*Risoluzione:* Per avere quel laplaciano serve deg  $u = 3$  e vediamo che ci serve un polinomio. Notiamo che non possono comparire quadrati, sennò in  $\Delta$  avremmo 1. Vediamo caso<sup>109</sup>  $\begin{cases} -\Delta u = x & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ .

Per fare 0 al bordo ci serve qualcosa  $x^2 + y^2 - 1$ . Notiamo che  $x^3 + xy^2 - x = 0$  su  $\partial\Omega$ . Notiamo che:  $\Delta \frac{x^3}{6} = x$ ,  $\Delta \frac{x^2 y}{2} = y$  e quindi  $\Delta(x^3 + xy^2 - x) = 8x$ . La funzione cercata è dunque

$$u = -\frac{x^3 + xy^2 - x}{8}$$

□

**Idea Domanda:** il ragionamento precedente funziona sempre? ┘

Consideriamo  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : Q(x) \leq 1\}$ , dove  $Q$  è una forma quadratica definita positiva, se volessimo risolvere  $\begin{cases} -\Delta u = P & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$  con  $P$  polinomio di grado  $n$  e  $u_0$  polinomio di grado  $n + 2$ , allora cercheremo  $u$  di grado  $n + 2$ . Vediamo prima che la soluzione esiste: consideriamo l'operatore<sup>110</sup>

$$\begin{aligned} T : \{\text{polinomi di grado } n + 2\} &\longrightarrow \{\text{polinomi di grado } n\} \\ A &\longrightarrow \Delta(A(Q - 1)) \end{aligned}$$

<sup>109</sup>Poi è sufficiente vedere il caso  $-\Delta u = y$  e sommare

<sup>110</sup>la moltiplicazione per  $(Q - 1)$  fa tornare il polinomio al grado  $n + 2$

**Idea** Vogliamo ricondurci ad un problema in cui al bordo siamo  $= 0$ . ┘

Se l'operatore  $T$  fosse surgettivo allora, date  $P, u_0$ , potremmo trovare  $A$  tale che  $T(A) = P + \Delta u_0$ . Definiamo  $u = A(Q - 1) + u_0$ . Notiamo che  $u = u_0$  su  $\partial\Omega$  e che

$$-\Delta u = -\Delta(A(Q - 1)) - \Delta u_0 = T(A) - \Delta u_0 = P$$

quindi

$$\begin{cases} -\Delta u = P & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \iff \begin{cases} -\Delta v = P - \Delta u_0 & \text{su } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Dobbiamo verificare che  $T$  sia surgettivo. Visto che siamo in uno spazio finito dimensionale questo equivale a vedere se  $T$  è iniettiva. Se  $A$  è tale che  $T(A) = 0 \Rightarrow v = A(Q - 1)$  è una funzione armonica ed è 0 al bordo. Per il principio del massimo abbiamo che  $v \equiv 0$  su  $\Omega \Rightarrow A \equiv 0$ .

$$T(A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta A = 0 & \text{su } \Omega \\ A = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow A = 0$$

**Idea** Quando dobbiamo risolvere gli esercizi non è detto che  $f, u_0$  siano polinomi. Se non lo sono, le possiamo approssimare con un polinomio, che risolverà un problema vicino a quello di partenza. ┘

## 32 Lezione 12/12 - Teoria

Risolviamo l'Esercizio (30.1) dato la scorsa volta:

- $S = \{\text{matrici simmetriche}\}$  sono individuate dall'equazione  $A^t = A$

$$\begin{aligned} g: \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ A &\rightarrow A - A^t = 0 \end{aligned}$$

Vediamo che  $g$  identifica un luogo di zeri e che è lineare e di classe  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}^{d^2}$ . Detta  $A = (a_{i,j})$

$$g(A) = g(a_{11}, \dots, a_{dd}) \rightarrow (a_{11}, \dots, \underbrace{a_{j,i}}_{\text{al posto } i,j}, \dots) - (a_{11}, \dots, a_{dd})$$

Per vedere che è una superficie dobbiamo calcolare  $dg$  in ogni punto in cui  $g(A) = 0$  e vedere se il rango è costante  $\forall A \in S$ . Notiamo che  $dg(A)$  è un'applicazione lineare da  $\mathcal{M}(d \times d, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}(d \times d, \mathbb{R})$ . Quindi

$$g(A + hB) - g(A) = dg(A)(hB) + o(hB)$$

quindi

$$g(A + hB) = A + hB - A^t - hB^t = (A - A^t) + h(B - B^t)$$

Vediamo che la mappa  $B \rightarrow B - B^t$  ha  $\ker = \{\text{matrici simmetriche}\}$  ed ha dimensione  $\frac{d(d+1)}{2}$ , quindi il rango è  $\frac{d(d-1)}{2}$ .

- Vediamo il caso delle *matrici ortogonali*. L'applicazione ora diventa

$$g(A) = A^t A - Id$$

Come prima calcoliamone il differenziale:

$$\begin{aligned} g(A + hB) &= (A + hB)^t(A + hB) - Id = (A^t + hB^t)(A + hB) - Id \\ &= A^t A + hA^t B + hB^t A + \underbrace{h^2 B^t B}_{O(h^2)} - Id \\ &= g(A) + \underbrace{h(A^t B + B^t A)}_{dg(A)(hB)} + o(h^2) \end{aligned}$$

Dobbiamo ora calcolare  $\dim \ker o$ , equivalentemente,  $\dim Imm$ . Si può dimostrare che  $dg(A)$  è surgettiva sulle matrici simmetriche, infatti:

### Esercizio 32.1

Data  $A$  tale che  $A^t A = Id$  e data  $C$  matrice simmetrica, trovare  $B$  tale che  $A^t B + B^t A = C$ .

**Idea**  $C$ 'è da dimostrare innanzitutto che  $g$  sia a valori in  $Sym(d \times d, \mathbb{R})$ .  $\lrcorner$

### Definizione 32.1 – Superficie con bordo

$S \subseteq \mathbb{R}^d$  si dice  $k$ -superficie con bordo se  $\forall x_0 \in S \exists U$  intorno aperto di  $x_0$  in  $\mathbb{R}^d$  ed, dove  $A \subseteq \mathbb{R}^k$  aperto,  $\exists \Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^d$  di classe  $C^m$  se, detto<sup>a</sup>  $H = \{(y_1, \dots, y_k) : y_1 \leq 0\}$ , si ha

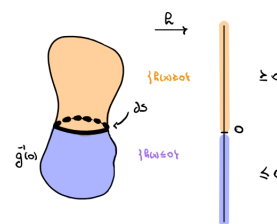
$$\Phi : A \cap H \rightarrow S \cap U$$

è omeomorfismo. I punti del bordo  $\partial S$  sono quelli contenuti in  $\Phi(A \cap \partial H)$ .

<sup>a</sup>semispazio chiuso, hai semipiano

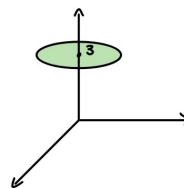
### Proposizione 32.2

$S$  è  $k$ -superficie con bordo se e solo se  $\forall x_0 \exists g : U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  e  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^m$  tali che le "equazioni" che identificano  $S$  sono  $g = 0$  e  $h \leq 0$  con le condizioni  $\text{rank } dg = d - k$  e, detta  $\tilde{g} = (g, h)$ ,  $\text{rank } d\tilde{g} = d - k + 1$  e in ogni punto  $x_0$  di  $\partial S$ :  $g(x_0) = h(x_0) = 0$ .



Esempio:  $D^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Possiamo vedere

$$D^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 3\}$$



## 32.1 Richiami su applicazioni $k$ -lineari alternanti

### Definizione 32.3 – Applicazione $k$ -lineare alternante

Sia  $V$  spazio vettoriale reale (di dimensione  $d$ ).  $\Phi : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice  $k$ -lineare alternante se:

1.  $\Phi$  è lineare in ogni variabile:

$$\Phi \left( \dots, \sum_{i=1}^d \lambda_i v_i, \dots \right) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \Phi(\dots, v_i, \dots)$$

2.  $\Phi$  cambia segno quando scambiamo  $v_i$  con  $v_j, i \neq j$ .

$$\Phi(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\Phi(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

*Osservazione 32.1*

La proprietà di cambiare segno per ogni scambio si traduce come

$$\Phi(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = \text{sgn}(\sigma)\Phi(v_1, \dots, v_k)$$

dove  $\sigma \in S_k$  è una permutazione di  $1, 2, \dots, k$ .

*Osservazione 32.2*

Come dirette conseguenze della definizione abbiamo che:

- La proprietà (2)  $\iff \Phi(v_1, \dots, v_k) = 0$  quando  $v_i = v_j$  per qualche  $i \neq j$ .
- Le proprietà (1)+(2)  $\implies \Phi(v_1, \dots, v_k) = 0$  quando  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente dipendenti, infatti: se  $v_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j v_j$  allora

$$\Phi(v_1, \dots, v_k) = \Phi\left(v_1, \dots, v_{k-1}, \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \Phi(v_1, \dots, v_j) = 0$$

Indicando con  $\Lambda^k(V)$  l'insieme delle applicazioni  $k$  lineari alternanti si ha:

- $\Lambda^k(V) = \{0\}$  se  $k > d, k = 0$ , dove  $\dim V = d$ .
- $\Lambda^k$  è uno spazio vettoriale.
- $\Lambda^1(V) = V^*$  è il duale di  $V$ .  $V^* = \{\Phi : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineari}\}$ .
- $\Lambda^d(V) = \{\lambda \det\}$  se  $V = \mathbb{R}^d$ , ossia le applicazioni lineari alternanti sono multipli del determinante, infatti, da definizione, il determinante è l'unica applicazione che verifica queste proprietà.

#### Definizione 32.4 – $k$ -covettore

Un elemento  $\Phi \in \Lambda^k(V)$  si dice  $k$ -covettore.

#### Definizione 32.5 – Prodotto esterno

Siano  $\Phi_1 \in \Lambda^{k_1}(V)$  e  $\Phi_2 \in \Lambda^{k_2}(V)$ . Possiamo definire il *prodotto esterno*  $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \in \Lambda^{k_1+k_2}(V)$  come

$$\begin{aligned} \Phi_1 \wedge \Phi_2(v_1, \dots, v_{k_1}, v_{k_1+1}, \dots, v_{k_1+k_2}) &= \\ &= \frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+k_2}} \text{sgn}(\sigma) \Phi_1(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_{k_1}}) \Phi_2(v_{\sigma_{k_1+1}}, \dots, v_{\sigma_{k_1+k_2}}) \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che  $\forall \bar{\sigma} \in S_{k_1+k_2}$  vale

$$\Phi_1 \wedge \Phi_2(v_{\bar{\sigma}_1}, \dots, v_{\bar{\sigma}_{k_1+k_2}}) = \text{sgn}(\bar{\sigma})(\Phi_1 \wedge \Phi_2)(v_1, \dots, v_{k_1+k_2})$$

Verifica: detta  $\tau = \sigma \circ \bar{\sigma}$  si ha

$$\begin{aligned}
\Phi_1 \wedge \Phi_2(v_{\bar{\sigma}_1}, \dots, v_{\bar{\sigma}_{k_1+k_2}}) &= \\
&= \frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+k_2}} \text{sgn}(\sigma) \Phi_1(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_{k_1}}) \Phi_2(v_{\tau_{k_1+1}}, \dots, v_{\tau_{k_1+k_2}}) \\
&= \frac{\text{sgn}(\bar{\sigma})}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+k_2}} \underbrace{\text{sgn}(\bar{\sigma}) \text{sgn}(\sigma)}_{\substack{=\text{sgn}(\sigma\bar{\sigma}) \\ =\text{sgn}(\tau)}} \Phi_1(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_{k_1}}) \Phi_2(v_{\tau_{k_1+1}}, \dots, v_{\tau_{k_1+k_2}}) \\
&= \text{sgn}(\bar{\sigma}) \Phi_1 \wedge \Phi_2(v_1, \dots, v_{k_1+k_2})
\end{aligned}$$

□

### Proposizione 32.6

$\forall \Phi_1 \in \Lambda^{k_1}(V) \forall \Phi_2 \in \Lambda^{k_2}(V)$  si ha

$$\Phi_1 \wedge \Phi_2 = (-1)^{k_1 k_2} \Phi_2 \wedge \Phi_1$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la permutazione  $\bar{\sigma} \in S_{k_1+k_2}$  tale che

$$(1, \dots, k_1, k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2) \xrightarrow{\bar{\sigma}} (k_2 + 1, \dots, k_2 + k_1, 1, 2, \dots, k_2)$$

Allora

$$\begin{aligned}
\Phi_2 \wedge \Phi_1(v_1, \dots, v_{k_1}, v_{k_1+1}, \dots, v_{k_1+k_2}) &= \\
&= \Phi_1 \wedge \Phi_2(v_{\bar{\sigma}(1)}, v_{\bar{\sigma}(k_1)}, \dots, v_{\bar{\sigma}(k_1+1)}, \dots, v_{\bar{\sigma}(k_1+k_2)}) \\
&= (-1)^{k_1 k_2} \Phi_1 \wedge \Phi_2(v_1, \dots, v_{k_1+k_2})
\end{aligned}$$

□

*Osservazione 32.3*

Il prodotto esterno è iterativo.

#### 32.1.1 Base di $\Lambda^k(V)$

Andiamo ora ad indagare la dimensione di questo spazio vettoriale studiando una base di  $\Lambda^k(V)$ . Presa  $\{e_1, \dots, e_d\}$  base di  $V \forall$  scelta di  $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k)$  indici in  $\{1, \dots, d\}$  tali che  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ , definiamo  $e_{\underline{i}}$  la forma  $k$ -lineare alternante tale che

$$\begin{cases} e_{\underline{i}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 1 & \text{se } \underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \\ e_{\underline{i}}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0 & \text{se } \underline{i} \neq (j_1, \dots, j_k) \end{cases}$$

Diciamo che  $e_{\underline{i}}$  al variare del multiindice *ordinato*  $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k)$  è una base di  $\Lambda^k$  di dimensione  $\binom{d}{k}$ .

Definiamo  $\mathcal{I}(d, k) = \{\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, d\} \text{ verificano } i_1 < \dots < i_k\}$ . Vediamo che genera, ossia che ogni  $\Phi \in \Lambda^k(V)$  è univocamente determinato dai valori che assume sui  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  con  $i_1 < \dots < i_k$ .

*Dimostrazione.* Basta dimostrare che se  $\Phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0 \forall \underline{i} \in \mathcal{I}(d, k)$  allora  $\Phi$  è identicamente nulla. Bisogna usare la multilinearità su  $\Phi(v, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = 0$  ed estendere poi a tutte le altre componenti.  $\square$

*Esercizio 32.2*

Concludere la dimostrazione per esercizio.

**32.1.2 Caso  $V = \mathbb{R}^d$**

Consideriamo gli elementi di  $\Lambda^1(V)$  dati da  $dx_i$  tali che

$$dx_i(v) = (v, e_i) = \text{coordinata } i\text{-esima di } v$$

dove  $(x_1, \dots, x_d)$  sono le coordinate standard di un elemento di  $\mathbb{R}^d$  in relazione alla base canonica  $\{e_i\}$ .

Allora una base di  $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$  è data da  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  al variare di  $\underline{i} \in \mathcal{I}(d, k)$ .

**Idea** Abbiamo definito in maniera astratta questi oggetti, ma vorremmo farli agire come determinante.

┘



## 33 Lezione 13/12 - Esercitazione

### 33.1 Funzioni subarmoniche e superarmoniche

#### Definizione 33.1 – Funzione subarmonica e superarmonica

Una funzione  $u$  si dice *subarmonica* se  $-\Delta u \leq 0$ .  
 Una funzione  $u$  si dice *superarmonica* se  $-\Delta u \geq 0$ .

*Osservazione 33.1*

A differenza delle funzioni armoniche, i segni – nella definizione, **non** sono una scelta stilistica, ma fanno parte della definizione.

*Esempi:* Il cono e la parabola sono funzioni subarmoniche.

Come cambiano i risultati visti per le funzioni armoniche per le subarmoniche?

- *Proprietà della media:* rivediamo la dimostrazione della proprietà della media e vediamo come cambia:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_{\partial B_r} u(x) d\sigma_{N-1}(x) = \frac{1}{N\omega_n r^{N-1}} \int_{\partial B_r} u(x) d\sigma_{N-1}(x) \\ &\stackrel{x=ry}{=} \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1} u(ry) d\sigma_{N-1}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1} \nabla u(ry) d\sigma_{N-1} = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r} \nabla u(y) d\sigma_{N-1} \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^N} \int_{B_r} \Delta u \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi vale che

$$u(x_0) \leq \int_{\partial B_r(x_0)} u d\sigma_{N-1}$$

o equivalentemente

$$u(x_0) \leq \int_{B_r(x_0)} u d\mathcal{L}^N$$

- Per le funzioni *subarmoniche* vale il *principio del massimo* che possiamo enunciare come di seguito:

Se  $u$  ha un punto di massimo interno allora  $u$  è costante.

Una funzione subarmonica  $u$  può assumere massimo solo sul bordo a meno che non sia una funzione costante.

Per le funzioni *superarmoniche* vale invece il *principio del minimo*.

- *Regolarità:* Si può dimostrare che

$u$  è subarmonica  $\iff u \in C^2$  e verifica la proprietà della sottomediana.

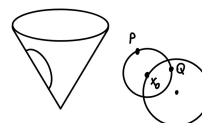
infatti, per assurdo in  $\Leftarrow$ , se valesse la disuguaglianza opposta avremmo una palla in cui non vale la proprietà di sottomedietà per continuità.

In generale, a differenza delle funzioni armoniche, vediamo che verificare la proprietà della sottomedietà non implica per forza regolarità.

*Esempio banale:*  $g(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ .

*Esempio meno banale:* Consideriamo il caso del cono. È una funzione  $\notin C^1$ . Mostriamo che verifica la proprietà della sottomedietà.

Prendiamo  $(-a, 0)$ ,  $P = (-a - l, y)$ ,  $Q = (-a + l, y)$ .  
Vogliamo capire se la seguente è vera o falsa:



$$\frac{|P| + |Q|}{2} > |x_0| \iff \frac{\sqrt{(a+l)^2 + y^2} + \sqrt{(a-l)^2 + y^2}}{2} > a$$

Notiamo che la  $y$  "ci aiuta": se  $\frac{\sqrt{(a+l)^2 + y^2} + \sqrt{(a-l)^2}}{2} > a$  vale, allora vale anche quella di sopra. E  $\frac{\sqrt{(a+l)^2 + y^2} + \sqrt{(a-l)^2}}{2} > a \iff |a+l| + |a-l| > 2a$  che è vera. Abbiamo dunque trovato una funzione nemmeno  $C^1$  che però verifica la proprietà della sottomedietà.

Un altro esempio può essere "spaccare" il cono, che è discontinua e verifica ancora la proprietà della sottomedietà.

*Osservazione 33.2*

Abbiamo quindi visto che *le proprietà interessanti delle funzioni subarmoniche seguono dalla proprietà di sottomedietà*, ad esempio il principio del massimo. Possiamo dare una nuova definizione di funzione subarmonica:

$f$  si dice subarmonica se verifica la proprietà della sottomedietà.

In questo senso  $|x|$  è subarmonica. Si osserva che già per  $d = 1$  la funzione  $|x|$  è subarmonica e non superarmonica. Visto che  $|x| \in C^2$  tranne in zero possiamo calcolare le seguenti:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}$$

Vale quindi che

$$\Delta u = \frac{d-1}{|x|} \Rightarrow -\Delta u \leq 0 \text{ perchè } d \geq 2$$

*Domanda:* se  $u$  ha uno/due punti in cui salta la continuità che succede? Se potessimo approssimare  $u$  con funzioni subarmoniche che sono regolari nei punti in questione, potremmo guardare i limiti di successioni.

**Idea** Attenzione: la condizione  $-\Delta u \leq 0$  è delicatissima: se consideriamo la convoluzione con un regolarizzatore, abbiamo una funzione  $C^\infty$ , ma non è detto che si preservi la condizione con il laplaciano!!  $\lrcorner$

Per le funzioni armoniche abbiamo visto che se  $u \geq v$  su  $\partial\Omega \Rightarrow u \geq v$  su  $\Omega$ . Possiamo dire qualcosa di simile per le subarmoniche/superarmoniche? In

generale no, basta infatti pensare a due coni in cui uno è più alto e stretto mentre l'altro è più basso e largo.

È però possibile aggiungere una condizione affinché questa cosa valga: vogliamo che  $u - v \geq 0$  su  $\Omega$ , quindi  $u - v$  superarmonica. Quindi

$$-\Delta(u - v) = -\Delta u - (-\Delta v) \geq 0 \Rightarrow u \text{ superarmonica}, v \text{ subarmonica}$$

Dunque

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & \text{su } \Omega \\ -\Delta v \leq 0 & \text{su } \Omega \\ u \geq v & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow u \geq v \text{ su } \Omega$$

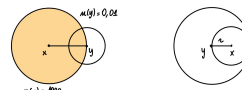
*Esercizio 33.1 - Costante di Harnack*

Prendiamo un dominio  $\Omega$  e  $u$  armonica positiva sul bordo:

$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & \text{su } \Omega \\ u \geq 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ . Vogliamo cercare di capire se c'è un certo rapporto tra il massimo e il minimo di  $u$  che non può essere superato.

*Risoluzione:* Se  $u$  ha un punto interno ad  $\Omega$  in cui vale  $n$ , ha punti in cui si annulla? No! Se invece consideriamo un dominio più piccolo, è possibile che valga 0,01? Ricordando che la funzione  $u$  è armonica, vale la proprietà del media: la funzione deve "salire tanto quanto scende". È possibile che il punto di massimo sia mille volte più grande del punto di minimo su una palla più piccola? Consideriamo  $x, y$  punti di minimo e di massimo rispettivamente per  $u$  su  $\Omega$ . Visto che  $B(x, 2r) \supset B(y, r)$  allora  $\int_{B(x, 2r)} f \geq \int_{B(y, r)} f \forall f$ . Quindi, usando (MP)

$$u(x)r^N \omega_N = \int_{B(x, r)} u dx \leq \int_{B(x, 2r)} u dx = u(y)2^N r^N \omega_N$$



$\Rightarrow u(x) \leq 2^N u(y)$ . Poichè usiamo (MP) questa stima vale se le due palle sono contenute in  $\Omega$ .

Dunque, a meno di rimpicciolire le palle considerate, se ricopriamo  $\Omega$  con un numero infinito di palle abbiamo il rapporto

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leq 2^N \cdot \# \text{ numero palle}$$

C'è un rapporto tra massimo e minimo ed è una costante che non dipende dalla funzione armonica  $u$ , ma solo dal dominio  $\Omega', \Omega$ . Questa prende il nome di *costante di Harnack*.

Questo discorso resta valido se consideriamo una funzione subarmonica/superarmonica? La catena di uguaglianze che usiamo diventa di disuguaglianze, che però è inutile. Quindi la nostra dimostrazione fallisce, ma è possibile vedere che falliscono tutte: la proprietà di Harnack non passa per le subarmoniche/superarmoniche.

## 34 Lezione 14/12 - Teoria

### 34.1 $k$ -covettori

Ricordiamo che i  $k$ -covettori sono applicazioni  $k$ -lineari alternanti su uno spazio vettoriale reale  $V$  e che una base di  $\Lambda^k(V)$ , con  $\Phi$  multilineari, è individuata, fissata  $e_1, \dots, e_d$  base di  $V$ , dai valori  $\Phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  con  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}$  qualsiasi.

Dal momento che  $\Phi$  è alternante si ha che, fissati  $i_1, \dots, i_k$  qualsiasi, il valore  $\Phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  è individuato a meno del segno. Possiamo dunque considerare<sup>111</sup>  $i_1 < i_2 < \dots < i_k < d$ . Dunque ogni  $\Phi$  si scrive in termini di

$$\Phi = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}(d, k)} \alpha_{\underline{i}} \Phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

Visto che  $|\mathcal{I}(d, k)| = \binom{d}{k} \Rightarrow \dim(\Lambda^k(V)) = \binom{d}{k}$ .

Una base è data da  $\hat{e}_{\underline{i}}, \underline{i} \in \mathcal{I}(d, k)$  tali che

$$\hat{e}_{\underline{i}}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k) \\ 1 & \text{se } \underline{i} = (j_1, \dots, j_k) \end{cases}$$

Su  $\Lambda^k(V)$  c'è un'operazione di *prodotto esterno*:

$$" \wedge : \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{k+1}(V) "$$

che non è ancora interemante ben definita. Per fare ciò è necessario vedere il "pull-back". Abbiamo visto che  $\Lambda^1(V) =$  applicazioni lineari da  $V$  in  $\mathbb{R}$ . Dunque fissata una base di  $V$   $\{e_1, \dots, e_d\}$  sia  $\hat{e}_i(v) = v_i$

### 34.2 Pull-back di $k$ -covettori

#### Definizione 34.1 – Pull-back

Dati  $V, W$  spazi vettoriali reali e  $T : W \rightarrow V$  lineare<sup>a</sup>. Allora è definito il *pull-back* come<sup>b</sup>

$$T^\# : \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^k(W)$$

dove, data  $\Phi \in \Lambda^k(V)$

$$T^\#(\Phi)(w_1, \dots, w_k) = \Phi(Tw_1, \dots, Tw_k)$$

<sup>a</sup>visto che siamo in spazi finito dimensionali linearità = continuità. Non vero in generale.

<sup>b</sup>Per i più curiosi, categorialmente è un funtore controvariante.

#### Osservazione 34.1

Dato  $V$  spazio vettoriale reale di dimensione  $d$ , fissata una base  $\{e_1, \dots, e_d\}$  di

<sup>111</sup>avessimo un'uguaglianza per  $i_j = i_i$  avremmo valore = 0.

$V$ , c'è un'applicazione naturale, che è l'inversa di  $T$ :

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^d &\longrightarrow V \\ (x_1, \dots, x_d) &\longrightarrow \sum_{i=1}^d x_i e_i \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_d) &\longleftarrow v = \sum \lambda_i e_i \quad \forall v \in V \exists! \lambda_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Analizziamo meglio il caso<sup>112</sup> di  $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$ : denotiamo  $dx_{\underline{i}} = \hat{e}_{\underline{i}}$  per ogni  $\underline{i} \in \mathcal{I}(d, k)$  allora  $dx_{\underline{i}}$  è una base di  $\Lambda^k(V)$  e ogni  $\Phi$  si scrive come  $\sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}(d, k)} \alpha_i dx_{\underline{i}}$

*Osservazione 34.2*

$dx_1, \dots, dx_d$  è la base di  $\Lambda^1(\mathbb{R}^d)$ .

### Proposizione 34.2

Si verifica che  $dx_{\underline{i}} = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  se  $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k)$

*Dimostrazione.* Basta calcolare  $dx_{\underline{i}}$  sugli elementi  $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ . Usiamo la formula iterata e il fatto che

$$dx_{i_1}(e_{j_l}) = \delta_{i_1, j_l}$$

Concludere per esercizio. □

Possiamo vedere questo risultato in un altro modo:

### Proposizione 34.3

Risulta  $\forall \underline{i} \in \mathcal{I}(d, k)$

$$dx_{\underline{i}}(v_1, \dots, v_k) = \det(A_{\underline{i}})$$

in cui  $A_{\underline{i}}$  è il minore che ha esattamente le  $k$  righe selezionate da  $i_1, \dots, i_k$  ed ordinate e le  $k$  colonne.

*Dimostrazione.* Si può fare per induzione usando il fatto che quando calcoliamo il determinante di una matrice  $(k+1) \times (k+1)$  possiamo decidere di partire dalla prima riga ed usare la multilinearità e l'alternanza del determinante. □

*Esempio:* Consideriamo  $dx_{(i_1, i_2)} = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}$ , allora

$$\begin{aligned} dx_{\underline{i}}(v, w) &= dx_{\underline{i}}(v_{i_1} e_{i_1} + v_{i_2} e_{i_2}, w_{i_1} e_{i_1} + w_{i_2} e_{i_2}) \\ &= dx_{\underline{i}}(v_{i_1} e_{i_1}, w_{i_2} e_{i_2}) + dx_{\underline{i}}(v_{i_2} e_{i_2}, w_{i_1} e_{i_1}) \\ &= v_{i_1} w_{i_2} dx_{\underline{i}}(e_{i_1}, e_{i_2}) + v_{i_2} w_{i_1} dx_{\underline{i}}(e_{i_2}, e_{i_1}) \\ &= (v_{i_1} w_{i_2} - v_{i_2} w_{i_1}) \underbrace{dx_{\underline{i}}(e_{i_1}, e_{i_2})}_{=1} \end{aligned}$$

<sup>112</sup>stiamo sempre assumendo  $k \leq d$ .

Riprendiamo il *prodotto esterno* definito in (34.1): fissato un qualunque elemento  $\Phi_1$  in  $\Lambda^1(V)$  consideriamo

$$\begin{aligned}\Lambda^k(V) &\longrightarrow \Lambda^{k+1}(V) \\ \Phi_2 &\longrightarrow \Phi_1 \wedge \Phi_2\end{aligned}$$

**Corollario 34.4** – Formula di Binet generalizzata

Date due qualsiasi matrici  $A, B \in \mathcal{M}(d \times k, \mathbb{R})$  risulta

$$\det(B^t A) = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}(d, k)} \det(B_{\underline{i}}) \det(A_{\underline{i}})$$

dove  $B_{\underline{i}}, A_{\underline{i}}$  minori con righe  $i_1, \dots, i_k$ .

*Dimostrazione.* Fissato  $B$  vediamo  $A \rightarrow \det(B^t A)$  come elemento di  $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$ .  $A = (v_1 \dots v_k)$  dove  $v_i \in \mathbb{R}^d$  sono le colonne di  $A$ .

$$\begin{aligned}(v_1, \dots, v_k) &\longrightarrow \Phi(v_1, \dots, v_k) = \det(B^t(v_1 \dots v_k)) \\ (v_1, \dots, v_k) &\longrightarrow \tilde{\Phi}(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}(d, k)} \det(B_{\underline{i}}) \det(A_{\underline{i}})\end{aligned}$$

Notiamo che  $\Phi, \tilde{\Phi}$  sono  $k$ -lineari alternanti (verifica per esercizio). Resta da vedere che coincidono sulla base  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  con  $\underline{i} \in \mathcal{I}(d, k)$ . Bisogna usare che, detto  $\tilde{C}_{\underline{i}}$  il minore con le proprietà di sopra,  $\det(B_{\underline{i}}^t) = \det(B_{\underline{i}})$ , ma allora

$$\det(B^t(e_{i_1} \dots e_{i_k})) = \det(B_{\underline{i}}^t) = \det(B_{\underline{i}})$$

□

**Corollario 34.5**

Se  $A = B$  allora vale che

$$\det(A^t A) = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } A}} (\det(Q))^2$$

**Applicazione di questo risultato** Data  $\Phi$  parametrizzazione (locale) di  $S$

$$J\Phi = \sqrt{\det(\nabla\Phi^t \nabla\Phi)} = \sqrt{\sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } \nabla J}} \det(Q)^2}$$

Ricordiamo che lo jacobiano della parametrizzazione individua la misura  $\sigma_S$  sulla superficie  $S$   $k$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^d$  attraverso la formula<sup>113</sup>

$$\sigma_k(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} J\Phi \, dy$$

con  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^d$  omeomorfismo su  $S \cap V$  con  $\text{rnk } d\Phi = k$ .

<sup>113</sup>dove  $E$  è un misurabile, quindi  $\int_{\Phi^{-1}(E)}$  è ben definito

*Osservazione 34.3*

La formula sopra è coerente con quanto visto per 1-superfici in  $\mathbb{R}^d$ , 2-superfici in  $\mathbb{R}^3$  e per il cambio di variabile in  $\mathbb{R}^d$ .

- Una 1-superficie in  $\mathbb{R}^d$  ha parametrizzazione locale in  $\mathbb{R}^d$

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$$

con  $1 = \text{rango } \dot{\gamma}(t) \iff \dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t \in I$ . La lunghezza della curva è:

$$l(S) = \int_I \sqrt{\dot{\gamma}^t(t) \cdot \dot{\gamma}(t)} dt = \int_I |\dot{\gamma}(t)| dt$$

- Analogo per 2-superfici. Vedi per esercizio.

### 34.3 $k$ -forme in $\mathbb{R}^d$

#### Definizione 34.6 – $k$ -forma

Dato  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^d$  si dice  $k$ -forma un'applicazione

$$\omega : \Omega \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^d)$$

$\omega$  si rappresenta in termini della base su  $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$  come

$$\omega(x) = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}(d,k)} \omega_{\underline{i}}(x) dx_{\underline{i}}$$

con  $\omega_{\underline{i}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

In modo naturale  $\omega$  si dice di classe  $C^m$  se  $\omega_{\underline{i}}$  è di classe  $C^m$ .

*Esempi:*

- $k = 0$ : le 0-forme sono le funzioni  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $k = 1$ : le 1-forme si rappresentano come

$$\sum_{i=1}^d a_i(x) dx_i$$

in modo naturale se  $f$  è  $C^1$  su  $\Omega$  il differenziale di  $f$ ,  $df$  è associato alla 1-forma:

$$df(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$$

Pensando a questa definizione qui, viene naturale voler definire un operatore differenziale esterno.

#### Definizione 34.7 – Differenziale esterno

$\exists$  un operatore lineare "d" che manda  $k$ -forme in  $(k+1)$ -forme su  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $\forall \omega$

$$\omega = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}(d,k)} \omega_{\underline{i}}(x) dx_{\underline{i}} \xrightarrow{d} d\omega(x) = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}(d,k)} \sum_{j=1}^d \frac{\partial \omega_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{\underline{i}}$$

#### Esercizio 34.1

Provare a dimostrare che se  $\omega \in C^2$   $k$ -forma su  $\Omega$

$$d \circ (d(\omega)) = d^2\omega = d(d\omega) = 0$$

con  $d^2\omega$   $(k+2)$ -forma su  $\Omega$ .

**Idea** Avere  $C^2$  serve per poter invertire l'ordine di derivazione (Schwarz).  $\lrcorner$



## 35 Lezione 19/12 - Teoria

Abbiamo visto che, se  $\omega$  è una  $k$ -forma, allora il differenziale esterno è

$$d\omega := \sum_{j=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i$$

### Esercizio 35.1

Calcolare il differenziale esterno delle seguenti  $k$ -forme:

1.  $\omega(x, y) = x^2 y dx$
2.  $\omega(x, y, z) = xy dx \wedge dz$

*Risoluzione:*

1.  $d\omega(x, y) = 2xy dx \wedge dx + x^2 dy \wedge dx = 0 - x^2 dx \wedge dy$
2.  $d\omega(x, y, z) = x dy \wedge dx \wedge dz = -x dx \wedge dy \wedge dz$

### Proprietà del differenziale esterno

- $d : k$ -forme su  $A \rightarrow (k+1)$ -forme su  $A$  ed è lineare.
- Se  $g$  è una  $0$ -forma (ossia è una funzione su  $A$ ) allora

$$dg = \text{differenziale di } g = \sum_{i=1}^d \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

- se  $\omega$  è di classe  $C^2$  allora  $d^2\omega = 0$ .
- vale una regola di tipo "Leibnitz": se  $\omega$   $k$ -forma su  $A$  e  $\varphi$   $h$ -forma su  $A$  allora

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$$

Notiamo che se  $\omega$   $k$ -forma e  $g$  funzione allora

$$d(g\omega) = dg \wedge \omega + g d\omega$$

### Esercizio 35.2

Chiedersi se una  $k$  forma verifica  $d\omega = 0$ . (proprietà di chiusura)

### Esercizio 35.3

Determinare  $\alpha$  tale che  $\omega = \alpha y dx + x dy$  verifichi  $d\omega = 0$ .

*Risoluzione:* Se  $\omega = \alpha y dx + x dy$  allora

$$\begin{aligned} d\omega &= \alpha dy \wedge dx + dx \wedge dy \\ &= (1 - \alpha) dx \wedge dy = 0 \iff \alpha = 1 \end{aligned}$$

*Esercizio 35.4*

Per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\exists \varphi$  0-forma in  $\mathbb{R}^2$  tale che  $d\varphi = \alpha y dx + x dy$ ?

*Risoluzione:*

$$0 = d^2\varphi \Rightarrow \alpha = 1$$

$$d\varphi = y dx + x dy \Rightarrow \varphi(x, y) = xy$$

*Esercizio 35.5*

Dire se  $\exists \varphi$  0-forma su  $\mathbb{R}^3$  tale che  $d\varphi = y dx + (x + z) dy + y dz$ , nel caso trovarla.

**Definizione 35.1** – Pull-back di  $k$ -forme

Sia  $\omega$   $k$ -forma su  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^d$ .  $f : A' \subseteq \mathbb{R}^M \rightarrow A$  almeno di classe  $C^1$

$$f^\# \omega = (df)^\#(\omega \circ f)$$

$$f^\#(\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(x))(df(x)v_1, \dots, df(x)v_k)$$

*Osservazione 35.1*

Valgono le seguenti proprietà:

- $f^\#(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^\#\omega_1) \wedge (f^\#\omega_2)$
- $f^\#(d\omega) = d(f^\#\omega)$
- Se  $g$  è una 0-forma allora  $f^\#g = g \circ f$
- $f^\#(dx_i) = df_i \quad \forall i$

*Osservazione 35.2*

In particolare, date  $S$   $k$ -superficie in  $\mathbb{R}^d$  e  $\omega$  una  $k$ -forma su  $A$  aperto  $\supseteq S$ , allora  $\forall \varphi$  parametrizzazione regolare locale di  $S$  si ha che  $\varphi^\#\omega$  è una  $k$ -forma su  $D$ .

**Idea** Ciò equivale a dire, a meno di considerare una partizione dell'unità, che è possibile tirare indietro ogni  $k$ -forma definita su un aperto che contiene  $S$  e vederla localmente come  $k$ -forma sugli aperti di  $\mathbb{R}^d$  che parametrizzano localmente la superficie  $S$ . ┘

### 35.1 Nozione di integrale di una $k$ -forma in $\mathbb{R}^d$ su una $k$ superficie $S$ in $\mathbb{R}^d$

Prima di poterlo definire, dobbiamo dare un'orientazione su  $S$ , in quanto  $\int_S \omega$  dipende dall'orientazione scelta su  $S$ .

#### Definizione 35.2 – Orientazione

Dato  $W$  sottospazio  $k$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^d$  poniamo sull'insieme di tutte le basi<sup>a</sup>  $(v_1, \dots, v_k)$  di  $W$  in  $\mathbb{R}^d$  la relazione di equivalenza

$$(v_1, \dots, v_k) \sim (v'_1, \dots, v'_k)$$

se la matrice di cambiamento di base ha determinante positivo.

Un'orientazione su  $S$   $k$ -superficie in  $\mathbb{R}^d$  è un'applicazione che ad ogni  $x \in S$  associa  $[\beta(x)]$  orientazione di  $Tan(S, x)$  in modo "localmente" continuo.

$$S \ni x \longrightarrow [(v_1(x), \dots, v_k(x))] \in Tan(S, x)$$

<sup>a</sup>scritte in modo ordinato.

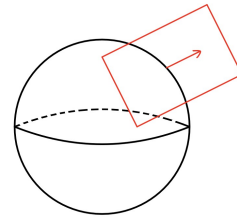
#### Osservazione 35.3

Se  $S$  è una  $k$ -superficie con bordo in  $\mathbb{R}^d$  orientata nel senso sopra, si induce in modo naturale un'orientazione di  $\partial S$  ( $(k-1)$ -superficie in  $\mathbb{R}^d$ ): individuiamo la "normale esterna a  $S$  in  $x_0 \in \partial S$ ".

Ricordando che

$$Tan(S, x_0) = \{\dot{\gamma}(0) | \gamma : I(0) \rightarrow S \text{ con } \gamma(x) = x_0\}$$

nel caso  $x \in \partial S$ , l'oggetto sopra è un semispazio di  $Tan(S, x_0)$  che ha come frontiera esattamente  $Tan(\partial S, x_0)$  visto come spazio  $(k-1)$ -dimensionale.



#### Definizione 35.3 – Orientazione del bordo

Data  $[\tau_1, \dots, \tau_k]$  orientazione di  $S$  scegliamo l'orientazione del bordo  $[v_1, \dots, v_{k-1}]$  in modo che, detta  $\nu(x)$  la normale esterna in  $x \in \partial S$ , si abbia:

$$[(\nu(x), v_1, \dots, v_{k-1})] = [(\tau_1, \dots, \tau_k)] \quad \forall x \in \partial S$$

#### Definizione 35.4 – Integrale di $k$ -forme su $k$ superfici orientate

Data  $S$   $k$ -superficie orientata, fissata  $\forall x \in S$  una qualsiasi base ortonormale  $(v_1(x), \dots, v_k(x))$  tale che  $\det(v^t v) = 1$ , allora<sup>a</sup>

$$\int_S \omega = \int_S \omega(x)(v_1(x), \dots, v_k(x)) d\sigma_S$$

<sup>a</sup>Ricordiamo che  $\omega(x)$  è una  $k$ -forma  $\forall x$ . Nella definizione stiamo dunque applicando  $\omega(x)$  al vettore  $(v_1(x), \dots, v_k(x))$ .

*Osservazione 35.4*

L'integrale dipende solo dall'orientazione e dal volume  $vol(v_1, \dots, v_k) = 1$ . Non dipende dalla scelta di  $v_1, \dots, v_k$  e dunque la definizione è ben posta.

*Esempio:* se  $S$  è una 1-superficie orientata e  $\omega$  è una 1-forma, allora  $\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_d(x)dx_d$ . Sappiamo che localmente vale

$$S = \{\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ con } \gamma(t) \neq \underline{0} \text{ e } \dot{\gamma}(t) \text{ orientazione di } Tan(S, \gamma(t)) \forall t\}$$

ma allora:

$$\int_S \omega(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} d\sigma_S = \int_0^L \omega(\gamma(t)) \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} |\gamma'(t)| dt$$

Quindi è possibile considerare, se<sup>114</sup>  $\varphi : D \rightarrow S \cap U$  è parametrizzazione regolare che preserva l'orientazione

$$\int_{S \cap U} \omega = \int_D \varphi^\# \omega = \int_D h(x) dx$$

visto che se  $\varphi^\# \omega$  è una  $k$ -forma su  $D$  allora vale che  $\varphi^\# \omega = h(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ .

**Teorema 35.5 – Teorema di Stokes**

Sia  $S$  una  $k$ -superficie orientata *compatta* con bordo in  $\mathbb{R}^d$  e sia  $\omega$  una  $(k-1)$ -forma su  $S$  di classe  $C^1$  allora

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

dove l'orientazione di  $\partial S$  è quella indotta dall'orientazione di  $S$ .

*Osservazione 35.5*

Vediamo che dal Teorema di Stokes è possibile ricavare diversi risultati visti nei precedenti corsi:

- Se  $k = 1$  e  $d = 1$  ritroviamo il Teorema fondamentale del calcolo integrale.
- Se  $k = 2$  e  $d = 3$  ritroviamo il Teorema di Stokes visto ad Analisi 2.
- Se  $k = d - 1$  ritroviamo il Teorema della divergenza.

*Osservazione 35.6*

Conoscere la parametrizzazione del bordo di una superficie  $C$  ci permette di calcolare l'area di  $C$ , infatti come visto nell'Esercizio 24.1 si usa il teorema della divergenza.

*Osservazione 35.7*

Se conosciamo tutte le parametrizzazioni locali di  $dS$   $\varphi_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ , utilizzando le partizioni dell'unità subordinata al ricoprimento<sup>115</sup>  $\sum_{i \in I} \sigma_i(x) = 1$  allora

$$\int_S f d\sigma = \sum_{i \in I} \int_{D_i} \sigma_i(\varphi_i(y)) f(\varphi_i(y)) J_{\varphi_i} dy$$

<sup>114</sup>dove  $D \subseteq \mathbb{R}^k$

<sup>115</sup>Attenzione: dobbiamo ricordarci di portarci dietro il fattore di partizione dell'unità.

## 36 Lezione 20/12 - Esercitazione

### 36.1 Esercizi di esami passati

*Esercizio 36.1 - Esercizio 1 scritto 13/01/21*

Sia  $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, |y| \leq \frac{1}{|x|^2 + |x|^4} \right\}$ . Consideriamo  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = |x|^5 |y|$ . Per quali  $p$  si ha  $f \in L^p$ ?

*Risoluzione:* Dovremo stimare gli integrali al variare di  $x$  per vedere quando abbiamo la convergenza, possibilmente avremo problemi vicino a 0 e vicino a  $+\infty$ , possiamo però notare<sup>116</sup> che nel primo caso vale  $\frac{1}{|x|^2 + |x|^4} \sim \frac{1}{x^2}$ , mentre nel secondo  $\frac{1}{|x|^2 + |x|^4} \sim \frac{1}{x^4}$ . Bisogna determinare  $p$  in dipendenza da  $n, k$ .

Detto  $r(x) = \frac{1}{|x|^2 + |x|^4}$ , poichè  $\int_{|y| \leq r} |y|^p dy \approx \int_{\sigma=0}^r \sigma^p \sigma^{k-1} d\sigma = \frac{r^{p+k}}{p+k}$  che è definito in quanto è limitato  $\Rightarrow$  stiamo in una palla, consideriamo

$$\begin{aligned} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{|y| \leq r} |x|^{5p} |y|^p dy dx &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^{5p} \int_{|y| \leq r} |y|^p dy dx \\ &\approx \int_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^{5p} r(x)^{p+k} dx \end{aligned}$$

Stiammo ora questo integrale dall'alto e dal basso. Come visto  $r \sim \frac{1}{|x|^2}$  vicino a 0 e  $r \sim \frac{1}{|x|^4}$  vicino a  $+\infty$ :

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq 1} |x|^{5p} \frac{1}{|x|^{2(p+k)}} dx &= \int_{|x| \leq 1} |x|^{3p-2k} dx \\ &= \int_{t=0}^1 t^{3p-2k} t^{n-1} dt < +\infty \iff 3p-2k+n-1 > -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 1} |x|^{5p} \frac{1}{|x|^{4(p+k)}} dx &= \int_{|x| \geq 1} |x|^{p-4k} dx \\ &= \int_{t=0}^{t=+\infty} t^{p-4k} t^{n-1} dt < +\infty \iff p-4k+n-1 < -1 \end{aligned}$$

□

*Osservazione 36.1*

Non conviene tentare di integrare. Visto che è sufficiente dire quando l'integrale è finito o meno, facciamo delle stime dall'alto e dal basso.

*Esercizio 36.2 - Esercizio 2 scritto 13/01/21*

Calcolare la trasformata di Fourier di  $f(x) = e^{-|x|} \cos(x)$

*Risoluzione:* fare la trasformata del prodotto non porta vantaggi, dovendo fare convoluzione.

<sup>116</sup>formalmente dovremmo dire che, ad esempio, per  $x \rightarrow 0$ ,  $|x|^2 < |x|^2 + |x|^4 < 2|x|^2$

Possiamo scrivere  $f(x) = \frac{e^{-|x|}(e^{ix}+e^{-ix})}{2}$ , e, essendo la trasformata lineare, possiamo calcolare la trasformata di  $f_1 = e^{-|x|}e^{ix}$  e  $f_2 = e^{-|x|}e^{-ix}$ . Ricordandoci che  $\widehat{g(x)e^{i\alpha x}}(y) = \int g(x)e^{i\alpha x}e^{-ixy}dx = \int g(x)e^{-ix(y-\alpha)} = \hat{g}(y-\alpha)$ . Allora

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(y) &= \widehat{e^{-|x|}}(y-1) = \frac{2}{1+(y-1)^2} \\ \hat{f}_2(y) &= \widehat{e^{-|x|}}(y+1) = \frac{2}{1+(y+1)^2}\end{aligned}$$

dunque

$$\hat{f}(y) = \frac{\hat{f}_1 + \hat{f}_2}{2} = \frac{1}{1+(y-1)^2} + \frac{1}{1+(y+1)^2}$$

□

*Esercizio 36.3 - Esercizio 1 scritto 10/02/21*

Sia  $\omega = \sum_{i=2}^{k-1} (x_{i-1} - x_i + x_{i+1})dx_i$ . Calcolare  $d\omega$

*Risoluzione:* Notiamo preliminarmente che  $\omega$  è una 1-forma essendo somma finite di 1-forme. Ricordando  $d(a \wedge b) = da \wedge b + a \wedge db$ , abbiamo che

$$\begin{aligned}d\omega &= \sum_{i=2}^{n-1} dx_{i-1} \wedge dx_i + dx_{i+1} \wedge dx_i = \sum_{i=2}^{n-1} dx_{i-1} \wedge dx_i - dx_i \wedge dx_{i+1} \\ &= dx_1 \wedge dx_2 - dx_{n-1} \wedge dx_n\end{aligned}$$

perchè si semplificano tutti i termini tranne il primo e l'ultimo. □

*Esercizio 36.4 - Esercizio 4 scritto 10/02/21*

Sia  $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  e  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (3|x|^2, 6|x|^3)$ . Qual è l'area del grafico<sup>a</sup> di  $f$ ?

<sup>a</sup>2-superficie in  $\mathbb{R}^4$

*Risoluzione:* Definiamo  $\text{Grafico}(f) = g(B)$  dove  $g(x) = (x, 3|x|^2, 6|x|^3)$ . Calcolando  $d(3|x|^2) = (3x_1^2, 3x_2^2)$  e  $d(6|x|^3) = (18|x|x_1, 18|x|x_2)$  si ha

$$Dg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 6x_1 & 6x_2 \\ 18|x|x_1 & 18|x|x_2 \end{pmatrix}$$

I minori, self-check prima di iniziare, devono essere 6 in questo caso<sup>117</sup>. Calcoliamone il loro determinante:

$$\det = 1, 6x_2, 18|x|x_2, -6x_1, -18|x|x_1, 0$$

$$\text{Area} = \int_B \sqrt{1 + 36|x|^2 + 18^2|x|^4} = \int_B 1 + 18|x|^2 dx = \pi + 18A = 10\pi$$

dove  $A = \int_B |x|^2 = 2\pi \int_{t=0}^1 t^2 t dt = \frac{\pi}{2}$  □

<sup>117</sup>non ci interessano i segni nello specifico, tanto dobbiamo elevare tutto al quadrato



Dunque

$$K = \{u \in H : u(x+2) = -u(x), x \in [0, 1], u \equiv 0, x \in [1, 2]\}$$

sembra un candidato plausibile.  $\lrcorner$

Diciamo che  $K = (\ker T)^\perp$ . È chiaro che  $K \subseteq (\ker T)^\perp$ , vediamo l'inclusione opposta. Per assurdo neghiamo le due condizioni separatamente:

- Sia  $v \in (\ker T)^\perp, v \neq 0$  in  $[1, 2]$ . Consideriamo  $u = v\mathbb{1}_{[1,2]}$ , chiaramente  $u \in \ker T$  e

$$\int uv = v^2 \neq 0, \text{ assurdo}$$

- Sia  $v \in (\ker T)^\perp, v(x+2) \neq v(x)$  con  $x \in [0, 1]$ . Sia  $A = \{x \in [0, 1] : v(x) \neq -v(x+2)\}$  e  $u = \chi_A + \chi_{A+2}$ . Chiaramente  $u \in (\ker T)^\perp$ . Notiamo  $\int uv = \int_A v(x) + v(x+2)$ , ma non è detto che non sia nullo! Vorremmo che la funzione integranda fosse positiva: basta allora ridefinire  $A = \{x \in [0, 1] : v(x) > -v(x+2)\}$ . Ma allora vale che o  $A = \emptyset$  e allora consideriamo l'insieme con  $>$ , oppure l'integrale è nullo e abbiamo finito.

*Metaesercizio:* L'esercizio ci chiede di calcolare  $(\ker T)^\perp$  dove aver calcolato  $T^*$ , perchè? Esiste un legame:

$$\boxed{(\ker T)^\perp = \overline{Im T^*}}$$

*Dimostrazione.* Sia  $v \in Im T^* \Rightarrow v = T^*(\omega)$ . Sia  $u \in \ker T$  allora

$$\langle u, v \rangle = \langle u, T^*\omega \rangle = \langle Tu, \omega \rangle = 0$$

quindi  $\overline{Im T^*} \subseteq (\ker T)^\perp$ . Si mostri l'altra inclusione per esercizio.  $\square$

Sappiamo che  $H = \ker T \oplus (\ker T)^\perp$ . Cerchiamo di scrivere  $u = u_1 + u_2$  con<sup>119</sup>  $u_1 \in \ker T$  e  $u_2 \in (\ker T)^\perp$

$$u_1(x) = \begin{cases} \frac{u(x)+u(x+2)}{2} \\ u(x) \\ \frac{u(x-2)+u(x)}{2} \end{cases} \quad u_2(x) = \begin{cases} \frac{u(x)-u(x+2)}{2} \\ 0 \\ \frac{-u(x+2)+u(x)}{2} \end{cases}$$

$\square$

### Esercizio 36.6

Data  $u \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $u$   $\alpha$ -Hölderiana in  $x$ . Dimostrare che esiste

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{u(t-x)}{t} dt.$$

<sup>119</sup>È sufficiente calcolare  $u_1(x)$  visto che  $u_2(x) = u(x) - u_1(x)$ .



## 37 Appendice

### 37.1 Fatti generali utili

**Proposizione 37.1** – Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Dato  $V$  spazio vettoriale e  $\{v_1, \dots, v_n\}$  insieme di vettori linearmente indipendenti, è sempre possibile trovare una famiglia di vettori linearmente indipendenti  $\{w_1, \dots, w_n\}$  che siano ortonormali tra loro e che

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$$

*Dimostrazione.* È un processo induttivo. Vediamo i primi passi e poi diamo la formula generale.

**Idea** Il vettore  $w_k$  sarà il vettore  $v_k$  a cui toglieremo la sua proiezione ortogonale su i vettori  $w_1, \dots, w_{k-1}$ .  $\lrcorner$

Poniamo  $w_1 = v_1$  mentre

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

In generale vale

$$w_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

□

**Proposizione 37.2** – Completezza per Serie

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  spazio normato. È completo se e solo se ogni serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  assolutamente (normalmente) convergente è convergente.

### 37.2 Sul Teorema di Stone-Weierstrass

Sia  $X$  spazio topologico compatto ed  $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$  un'algebra chiusa. Consideriamo il seguente insieme (che individua una relazione di equivalenza per i punti di  $X$ ):

$$R_{\mathcal{A}} = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x') \forall f \in \mathcal{A}\}$$

e la proiezione al quoziente (compatto per continuità di  $\pi$ ):

$$\pi : X \longrightarrow X/R_{\mathcal{A}}$$

Per costruzione dell'insieme  $R_{\mathcal{A}}$ , per ogni  $f \in C(X, \mathbb{R})$  vi è  $\tilde{f} : X/R_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

Si può allora definire l'algebra:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{g \in C(X/R_{\mathcal{A}}) \mid g \circ \pi \in \mathcal{A}\}$$

Vi è quindi l'isomorfismo algebrico:

$$\begin{aligned} \pi^* : \tilde{\mathcal{A}} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ g &\longmapsto g \circ \pi \end{aligned}$$

che è anche isometria dato che<sup>120</sup>:

$$\|\pi^*(g)\|_{\infty, X} = \max_{x \in X} |g(\pi(x))| = \max_{y \in X/R_{\mathcal{A}}} |g(y)| = \|g\|_{\infty, X/R_{\mathcal{A}}}$$

Inoltre vale che:

1.  $\tilde{\mathcal{A}}$  chiuso in  $C(X)$ , infatti  $\mathcal{A}$  chiuso in  $C(X)$  completo, quindi  $\mathcal{A}$  completo, da cui segue per isomorfismo  $\tilde{\mathcal{A}}$  completo, chiuso.
2.  $\tilde{\mathcal{A}}$  separante per costruzione.

Si può applicare il Teorema di Stone-Weierstrass:  $\tilde{\mathcal{A}}$  è l'ideale generato da  $1 \in C(X/R_{\mathcal{A}})$  o un ideale massimale di  $C(X/R_{\mathcal{A}})$ .

---

<sup>120</sup>Questo vale perchè  $\pi$  è surgettiva.

### 37.3 Punti di Lebesgue

#### Definizione 37.3 – Misura di Radon

Dato uno spazio di misura  $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ , con  $Y$  spazio topologico, diciamo che  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  è di Radon se valgono le seguenti condizioni:

- $\nu$  è Boreliana
- $\nu(K) < +\infty \forall K \subseteq Y$  compatto
- $\forall E \subseteq Y$  misurabile, vale che

$$\nu(E) = \sup\{\nu(K) \mid K \subseteq E, K \text{ compatto}\}$$

- $\forall S \subseteq Y$  vale che

$$\nu(S) = \inf\{\nu(A) \mid S \subseteq A, A \text{ aperto}\}$$

#### Definizione 37.4 – Spazio di doubling

$(X, \mu)$  si dice spazio di *doubling* se  $\forall x, \forall p$

$$\mu(B_{3p}(x)) \leq k\mu(B_p(x))$$

Consideriamo uno spazio metrico  $(X, d)$  e una misura  $\mu$  di Radon su  $X$ . Ricordando che possiamo supporre  $\mu(B_p(x)) > 0 \forall x \forall p$ , quindi ha senso parlare di integrale medio su palla, diamo la seguente definizione:

#### Definizione 37.5 – Punto di Lebesgue

$x$  si dice punto di Lebesgue per  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \in L^1$  se

$$\int_{B_p(x)} |f(y) - f(x)| d\mu \xrightarrow{p \rightarrow 0} 0$$

#### Teorema 37.6 – Teorema di Lebesgue

Dato  $(X, \mu)$  spazio doubling con  $\mu$  misura di Radon. Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R} L^1$  allora  $\exists Z \subseteq X$  con  $\mu(Z) = 0$  tale che  $x \in X \setminus Z$  è di Lebesgue.

#### Corollario 37.7

Data  $f \in L^1$  ci sono tanti tanti rappresentanti possibili, ma il "preferito" è quello definito come segue: se il seguente limite esiste allora  $f$  assume il limite, sennò le assegniamo un valore causale.

$$\int_{B_\rho(x)} f(t) dt \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} f(x)$$

**Idea** Questo risultato è particolarmente rilevante perchè è *quasi continuità*, è stabile. Probabilmente, nelle dimostrazioni o negli esercizi, quando vogliamo usare la continuità di una funzione, questo fatto può aiutarci molto.  $\lrcorner$

*Osservazione 37.1*

Se  $f$  è  $L^1$  e continua  $\Rightarrow$  ogni punto è di Lebesgue. Sia infatti  $x_0 \in X$  e sia  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$  tale che  $\forall y \in B(x_0, \delta)$  vale  $|f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon$ , allora se  $\rho \in (0, \delta)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu(B(x_0, \rho))} \int_{B(x_0, \rho)} |f(x_0) - f(y)| d\mu(y) \leq \frac{1}{\mu(B(x_0, \rho))} \int_{B(x_0, \rho)} \varepsilon d\mu \leq \varepsilon$$

Otteniamo la tesi scegliendo  $\varepsilon_n \searrow 0^+, \delta_{\varepsilon_n} \searrow 0^+$ .

Prima di procedere con la dimostrazione richiamiamo un lemma utile:

**Lemma 37.8 – Lemma di ricoprimento "alla Vitali"**

Sia  $Z$  spazio totalmente limitato. Allora, data  $\bigcup_{\alpha \in A} B_{r(z_\alpha)}(z_\alpha)$  esiste un'unione *numerabile* di palle disgiunte, ma

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{3r(z_k)}(z_k) \supseteq \bigcup_{\alpha \in A} B_{r(z_\alpha)}(z_\alpha)$$

<sup>a</sup>dove  $|A| = \aleph_\beta$  con  $\beta \in \text{Ord}$  qualsiasi.

*Dimostrazione.* Osserviamo immediatamente che  $x$  non è di Lebesgue  $\iff \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{B_\rho(x)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) \neq 0$ . Visto che in generale il limite può non esistere consideriamo il lim sup. Vale quindi

$$x \text{ non di Lebesgue} \iff \limsup_{\rho \rightarrow 0} \int_{B_\rho(x)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) > 0$$

Negando la tesi del teorema si ha che  $\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tali che

$$\mu \left( \left\{ x \in X : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \int_{B_\rho(x)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) > \varepsilon \right\} \right) > \delta$$

**Idea** Stiamo mostrando che l'insieme dei punti dove il limite non è zero ha misura positiva.  $\lrcorner$

Dobbiamo quindi stimare l'integrale medio. Consideriamo  $\{f_n\} \subseteq C^0(X)$  tali che  $f_n \xrightarrow{L^1} f$  e, a meno di sottosuccessione, possiamo anche supporre che  $f_n \rightarrow f$  puntualmente quasi ovunque. Abbiamo allora<sup>121</sup>

$$\int_{B_\rho(x)} |f(y) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + \int_{B_\rho(x)} |f(y) - f_n(y)| + \int_{B_\rho(x)} |f_n(y) - f_n(x)|$$

<sup>121</sup>ommettiamo che l'integrazione è rispetto  $d\mu(y)$

**Idea** Stimeremo ora singolarmente i tre pezzi. Per il primo vogliamo usare la convergenza puntuale mentre per il secondo quella in  $L^1$ .  $\lrcorner$

*Terzo pezzo:* Visto che  $\{f_n\}$  è convergente, sappiamo che è di Cauchy e dunque, per  $\rho \rightarrow 0$ , vale che  $\int_{B_\rho(x)} |f_n(y) - f_n(x)| \rightarrow 0$ .

*Primo pezzo:*

**Idea** Bisogna trovare una scelta opportuna di  $f_n$  in modo che i punti in cui le cose vanno male siano pochi. Verrebbe spontaneo considerare  $A_n = \{x : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\delta}{2}\}$ , ma per esperienza è sempre meglio cercare di prenderli inscatolati.  $\lrcorner$

Consideriamo

$$A_k = \left\{ x \in X : |f(x) - f_j(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ con } j \geq k \right\}$$

così  $A_k \supseteq A_{k+1}$ . Detto  $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq \{x \in X | f_j(x) \not\rightarrow f(x)\}$ .

Per le proprietà iniziali delle misura sull'intersezione, se  $\exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $\mu(A_n) < +\infty$  allora  $\mu(A) = 0$ . Visto che  $\mu$  è di Radon possiamo supporre, senza perdita di generalità, che  $X$  sia compatto e dunque  $\mu(A_0) \leq \mu(X) < +\infty$ . Possiamo quindi trovare  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che<sup>122</sup>

$$\mu(A_{\bar{n}}) \leq \frac{\delta}{2} \quad \|f_{\bar{n}} - f\|_{L^1} \leq \varepsilon$$

**Idea** Con questa scelta di  $\bar{n}$  è come se avessimo considerato il limite per  $n \rightarrow +\infty$ . Consideriamo ora quello per  $\rho \rightarrow 0$ . Questo è un passaggio cruciale della dimostrazione, l'ordine in cui fare questi limiti è importante. Possiamo notare che questo è l'ordine giusto perchè il primo termine, che non dipende da  $\rho$ , ci fa scegliere  $\bar{n}$ .  $\lrcorner$

*Secondo pezzo:* Affinchè  $\int_{B_\rho(x)} |f(y) - f(x)| > \varepsilon$ , visto che se  $x \notin A_{\bar{n}}$  vale  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , allora deve valere

$$\int_{B_\rho(x)} |f(y) - f_n(y)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

Consideriamo quindi

$$C_n := \left\{ x \in X : \int_{B_\rho(x)} |f(y) - f_n(y)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

Quindi i punti per cui il teorema è vero sono gli  $x \notin A_{\bar{n}} \cup C_{\bar{n}}$ . Quindi il teorema è falso per gli  $x \in C_{\bar{n}}$ . Visto che la negazione della tesi deve valere per  $\rho \rightarrow 0$  e che  $\mu(A_{\bar{n}}) < \frac{\delta}{2}$ , deve valere  $\mu(C_{\bar{n}}) > \frac{\delta}{2}$ .

<sup>122</sup>scriviamo  $\leq$  piuttosto di mettere immediatamente la costante giusta per far capire al lettore a quale punto della dimostrazione capiamo che condizione è necessaria.

**Idea** Sappiamo che i punti di  $C_n$  sono tali che  $\int_{B_{\rho(x)}} |f(y) - f_n(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$ . In realtà ci basta un'informazione più debole:

$$\forall x \in C_n \exists \rho(x) \text{ tale che } \int_{B_{\rho(x)}(x)} |f - f_n| > \frac{\delta}{2} \mu(B_{\rho(x)}(x))$$

Chiamiamo  $B = \bigcup_{x \in C_n} B_{\rho(x)}(x)$ . Ovviamente  $B \supseteq C_n$ . ┘

Per il lemma di ricoprimento alla Vitali è possibile trovare  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C_{\bar{n}}, \{\rho_j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  tali che:

$$B_{\rho_j(x)}(x_j) \cap B_{\rho_i(x)}(x_i) = \emptyset \quad \forall j \neq i$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{3\rho_j(x)}(x_j) \supseteq C_{\bar{n}}$$

Visto che  $X$  è di doubling sappiamo che  $\exists k > 0$  tale che

$$\mu(B_{2R}(x)) \leq k\mu(B_R(x)) \quad \forall x \in X$$

Abbiamo quindi che<sup>123</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} < \mu(C_n) &\leq \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{3\rho_j}(x_j)\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_{3\rho_j}(x_j)) \\ &\leq k \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_{\frac{3}{2}\rho_j}(x_j)) \leq k^2 \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_{\frac{3}{4}\rho_j}(x_j)) \\ &\leq k^2 \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_{\rho_j}(x_j)) \leq \frac{2k^2}{\varepsilon} \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{B_{\rho_j}(x_j)} |f_{\bar{n}}(y) - f(y)| d\mu \\ &= \frac{2k}{\varepsilon} \int_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{\rho_j}(x_j)} |f_{\bar{n}}(y) - f(y)| d\mu \leq \frac{2k^2}{\varepsilon} \|f_{\bar{n}} - f\|_{L^1} \end{aligned}$$

L'assurdo segue scegliendo  $\bar{n}$  in modo che  $\|f_{\bar{n}} - f\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon\delta}{4k^2} = \smile$ . □

<sup>123</sup>si usa il fatto elementare che se  $A \subseteq B$  allora  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

## Indice analitico

- $k$  forma, 168
- $k$  spazio tangente, 148
- $k$ -covettore, 158
- $k$ -superficie, 147
  
- Algebra, 177
- Algoritmo Gram-Schmidt, 177
- Antitrasformata di Fourier, 121
- Applicazione  $k$ -lineare alternante, 157
  
- Base di Fourier, 62
- Base hilbertiana, 61
  
- Coefficienti di Fourier, 68
- Compattezza, 177
- Completezza, 178
- Convergenza totale, 69
- Convoluzione, 32
- Costante di Harnack, 163
  
- Differenziale esterno, 168
- Disuguaglianza di Bessel, 55
- Disuguaglianza di Hölder, 13
- Disuguaglianza di Markov, 24
- Disuguaglianza di Young, 13
  
- Equazione delle onde, 95
- Equazione del calore, 87
- Equazioni di Cauchy-Riemann, 142
- Esistenza (EO con metodo Fourier), 98
- Esistenza (EO) con onde viaggianti, 97
- Esistenza per l'equazione del calore con dati periodici, 90
  
- Formula di inversione, 121
- Formula di inversione in  $L^2$ , 126
- Funzione a supporto compatto, 26
- Funzione armonica, 140
- Funzione cutoff, 118
- Funzione misurabile, 7
- Funzione subarmonica, 161
- Funzione superarmonica, 161
  
- Identità del parallelogramma, 45
- Identità di Bessel, 57
- Identità di Parseval, 57
- Identità di polarizzazione, 46
- Insieme misurabile su  $S$ , 151
  
- Integrale di  $k$ -forme su  $k$  superfici orientate, 171
  
- Lemma di ricoprimento alla Vitali, 180
- Lemma di Riemann-Lebesgue, 84
- Lemma di Riemann-Lebesgue generalizzato, 85
  
- Mappe regolari tra superfici, 148
- Misura associata ad  $S$ , 151
- Misura di Radon, 179
  
- Norma  $L^p$ , 12
- Nucleo di Dirichlet, 82
  
- Onde viaggianti, 96
- Operatore aggiunto, 106
- Operatore autoaggiunto, 106
- Operatore Laplaciano, 137
- Orientazione, 171
- Orientazione del bordo, 171
  
- Parametrizzazione regolare, 147
- Principio del massimo per funzioni armoniche, 144
- Principio di confronto per l'equazione di Poisson, 145
- Prodotto esterno, 158
- Prodotto scalare, 45
- Proprietà media sulle palle, 138
- Proprietà media sulle sfere, 138
- Pull-back, 164
- Pull-back di  $k$ -forme, 170
- Punti di Lebesgue, 78
- Punto di Lebesgue, 179
  
- Residuo, 133
  
- Sistema ortonormale, 55
- Sistema ortonormale completo, 55
- Spazio di doubling, 179
- Spazio di Hilbert, 46
- Spazio tangente, 149
- Stima di interpolazione, 20
- Superficie con bordo, 157
  
- Teorema dei Residui, 133
- Teorema di convergenza dominata, 9

Teorema di Fubini-Tonelli, 9  
Teorema di interpolazione di Young, 33  
Teorema di Lusin, 29  
Teorema di Paley-Wiener, 128  
Teorema di Plancherel, 123  
Teorema di proiezione convesso chiuso,  
47  
Teorema di proiezione su sottospazio  
chiuso, 48  
Teorema di Riesz, 54  
Teorema di Severini-Egoroff, 24  
Teorema di Stokes, 172  
Teorema di Stone-Weierstrass, 178  
Teorema di unicità per l'equazione di  
Poisson su  $\Omega$  limitato, 144  
Teorema fondamentale delle basi Hil-  
bertiane, 56  
Trasformata di Fourier, 109  
Trasformata di Fourier in  $\mathbb{R}^d$ , 131  
  
Unicità per (EO), 100  
Unicità per l'equazione del calore con  
dati periodici, 93