Appunti di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Appunti dalle Lezioni di A. Pratelli e E. Paolini

Rocca Andrea

Aggiornati al: 17 giugno 2023 d.C.

Prefazione

SCRIVERE

Andrea Rocca

Indice

1 Lezione 27/02

Corso in due parti, prima la fa paolini, seconda pratelli. Ricevimento: martedi pomeriggio alle 15.

1.1 Problema della brachistocrona

Il problema, formulato da Galileo, è all'origine del calcolo delle variazioni.

Galileo notò che, preso un piano inclinato, ci vuole meno tempo seguendo il percorso curvo piuttosto che quello rettilineo.

DISEGNO

Idea L'interpretazione fisica è la seguente: usando la conversazione dell'energia sappiamo che $E_{kin} + U = cost$ vale che

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx \Rightarrow v = \sqrt{2gx}$$

dove gli assi sono x e z (x da su verso giu, z da sinistra a destra). Ci interessa ora il tempo che ci impiega. Siano $x = x(t), z = z(t)$ (poi scriveremo z in funzione x, motivo per cui x sta in verticale) allora abbiamo $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} = |\dot{x}|\sqrt{1 + \left|\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right|} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + (z'(x))^2}$ dove $z = z(x), z'(x) = \frac{dz}{dx}$ Ma, sapendo $A = (0,0), B = (x_B, y_B)$, si ha che il tempo di percorrenza

$$T = \int_0^T dt \underset{z=z(x)}{=} \int_0^{x_B} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} dx = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + (z'(x))^2}}{\sqrt{2gx}} dx$$

Formulazione analitica: trovare la funzione $u = u(x)$ $(z = u(x))$ tale che:

1. $u(0) = 0$, $u(x_B) = z_B$
2. è minimo: $\mathcal{F}(u) = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1+(u'(x))^2}}{\sqrt{2gx}} dx$

⌟

Problema classico del calcolo delle variazioni è minimizzare

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)))dx$$

dove $u \in X$ insieme di funzioni, classicamente C^1, ma più avanti nel corso si vedrà che non è la cosa ottimale. Ad esempio $X = \{x \in C^1([a,b]) : u(a) = z_A, u(b) = z_B\} \subseteq C^1([a,b])$ (quindi sono funzioni ad estremi fissati, va pensato come sottospazio affine di uno spazio vettoriale). La funzione u è la nostra incognita e F viene chiamata *Lagrangiana.*

Osservazione 1.1
X è un sottospazio affine di $C^1([a,b])$, ossia

$$X = u_0 + C_0^1([a,b])$$

dove $C_0^1 = \{u \in C^1 : u(a) = u(b) = 0\}$.

DISEGNO

Quindi $F = F(x, z, p)$ (p sta per la pendenza) e ad esempio $F \in C^2$.

Nel problema della brachistocrona si ha $F(x, z, p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gx}}$ e $a = 0, b = x_B, z_a = 0, z_b = z_B$

Proviamo a risolverlo: come troviamo il minimo di $F(u)$? Usando l'idea di Analisi 1/2 del principio di Fermat, possiamo usare le piccole variazioni: detti $u_0 \in X \subseteq C^1, \varphi \in T_{u_0}(X) = C_0^1$ $t \to \mathcal{F}(\underbrace{u_0 + t\varphi}_{v \in X})$, troviamo condizioni necessarie che il minimo deve avere:

$$\mathcal{F}(u_0 + t\varphi) = \int_a^b F(x, u_0(x) + t\varphi(x), u_0'(x) + t\varphi'(x))dx$$

Se u_0 è minimo per $\mathcal{F}$ allora $[\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u_0 + t\varphi)]_{t=0} = 0$ $\forall \varphi$. Dove $F \in C^1$, possiamo quindi scambiare segno di derivata e integrale:

$$[\frac{d}{dt}\int_a^b \dots]_{t=0} = [\int_a^b \frac{d}{dt}(\dots)dx]_{t=0} = \left[\int_a^b [F_z(x, u_0(x) + t\varphi(x), u_0'(x))\varphi(x) + \dots\right]_{t=0}$$
$$= \int_a^b [F_z(x, u_0(x), u_0'(x))\varphi(x) + F_p(x, u_0(x), u_0'(x))\varphi'(x)]dx$$

(stai derivando rispetto al tempo). Ora vorrei poter scrivere il tutto come un prodotto scalare usando l'integrazione per parti, e per fare ciò assumiamo $u_0 \in C^2, F \in C^2$: (la regolarità rispetto a x non ci interessa basterebbe de facto una funzione integrabile, più avanti nei teoremi saremo più precisi)

$$= \int_a^b [F_z(x, u_0, u_0') - \frac{d}{dx}F_p(x, u_0(x), u_0'(x)]\varphi(x)dx + [F_p\varphi]_a^b = \int_a^b [F_z - \frac{d}{dx}F_p]\varphi dx = 0$$

ma $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. (vedere come mettere freccia per togliere termine). Vorrei dire, come facciamo su $\mathbb{R}^n$, che se per ogni direzione (le chiamiamo *funzioni test*) il prodotto è zero, allora il coso per cui moltiplico è zero. Quindi ho $= 0$ se u_0 è di minimo.

Teorema 1.1

Sia $u_0 \in C^1([a, b])$ sia $F \in C^2$, F definita in un intorno della curva $(x, u_0(x), u_0'(x))$ (devo avere spazio per poter fare variazioni), se u_0 è minimo (locale) di $\mathcal{F}$. Allora

$$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) := \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}(u_0) = \frac{d}{dt}[\mathcal{F}(u_0 + t\varphi)]_{t=0} = 0$$

$\forall \varphi \in C^1([a, b])$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}$ ha minimo in u_0 allora $\mathcal{F}(u_0 + t\varphi)$ ha minimo per $t = 0$ $\forall \varphi \Rightarrow \delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0 \forall \varphi$. $\square$

Lemma 1.2 – Lemma fondamentale del CdV

Se $g \in C^0([a,b])$

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = 0 \ \forall \varphi \in C_C^\infty((a,b))$$

Allora $g \equiv 0$.

Idea L'ipotesi forte è sapere che g sia continua. Andremo ad indebolirla. ⌟

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\exists x_0$ tale che $g(x_0) \neq 0$, senza perdita di generalità sia $g(x_0) > 0$ e $x_0 \in (a,b)$. Possiamo dunque scegliere una funzione φ opportuna: se $g(x) > 0$ quando $\varphi(x) \neq 0$ allora $\int g(x)\varphi(x)dx > 0$. Per la permanenza del segno sappiamo che $g(x) > 0$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ quindi definiamo $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ 1 & se\ x \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}) \\ C^\infty & altrove \end{cases}$ (con C^∞ intendiamo di passare in maniera C^∞ da 0 a 1, basterebbe farlo in maniera C^1.)

DISEGNO

□

Definizione 1.3 – Funzione estremale debole

Se per u vale che $\delta\mathcal{F} = 0 \ \forall \varphi \in C_0^1$ allora u si dice *estremale debole* (ossia u è punto critico di $\mathcal{F}$).

Teorema 1.4 – Teorema di Eulero-Lagrange

Se $u \in C^2, F \in C^2, F$ definita su un intorno della curva $(x, u(x), u'(x))$ se $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0 \ \forall \varphi \in C_1^0$.
Allora vale l'*equazione di Eulero-Lagrange*:

$$F_z(x, u(x), u'(x)) = \frac{d}{dx} F_p(x, u(x), u'(x)) \quad \forall x \in [a,b]$$

Torniamo alla Brachistocroma: ricordiamo che $F(x,z,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gx}}$. Visto che F non dipende da z abbiamo $F_z = 0$. Per l'Equazione 1.1 $0 = \frac{d}{dx}\frac{u'(x)}{\sqrt{2gx}\sqrt{1+(u'(x))^2}}$ infatti $F_p = \frac{p}{\sqrt{2gx}\sqrt{1+(u'(x))^2}}$. Quindi $u' = C\sqrt{2gx}\sqrt{1+u'(x)^2}$. Elevando al quadrato

$$(u')^2 = C^2 2gx(1 + u'^2) \Rightarrow (1 - 2C^2gx)u'^2 = 2C^2gx$$

$$\Rightarrow u' = \sqrt{\frac{2C^2gx}{1 - 2C^2gx}}$$

E quindi

$$
\begin{aligned}
u = \int \frac{\sqrt{2C^2g}\sqrt{x}}{\sqrt{1-2C^2gx}}dx &= \int \frac{\sqrt{2C^2g}x}{\sqrt{x-2C^2gx^2}}dx \\
&= \int \frac{\sqrt{2C^2g}x}{\sqrt{\frac{1}{8C^2g} - (\sqrt{2C^2g}x - \frac{1}{2\sqrt{2C^2g}})^2}}dx \\
&= 4C^2g \int \frac{x}{\sqrt{1-(4C^2g-1)^2}}dx \\
&= R[\arccos(1-\frac{x}{R}) - \sqrt{1-(\frac{x}{R}-1)^2}]
\end{aligned}
$$

lo finiamo prossima volta

2 Lezione 02/03

Riprendiamo il calcolo della scorsa volta.

$$
\begin{aligned}
u = \int \frac{\sqrt{2C^2 g}\sqrt{x}}{\sqrt{1-2C^2 gx}}dx &= \int \frac{\sqrt{2C^2 g}x}{\sqrt{x-2C^2gx^2}}dx \\
&= \int \frac{\sqrt{2C^2 g}x}{\sqrt{\frac{1}{8C^2g} - (\sqrt{2C^2g}x - \frac{1}{2\sqrt{2C^2g}})^2}}dx \\
&= 4C^2 g \int \frac{x}{\sqrt{1-(4C^2g-1)^2}}dx
\end{aligned}
$$

Chiamo $R = \frac{1}{4c^2 g}$ così

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4c^2gx - 1 + 1}{\sqrt{1-(4c^2g-1)^2}}dx = \int \frac{\left(\frac{x}{R}-1\right)+1}{\sqrt{1-(4c^2g-1)^2}}dx \\
&= -R\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}-1\right)^2} + R\arccos(1-\frac{x}{R}) + k \\
&= R\arccos(\frac{R-x}{R}) - \sqrt{R^2-(x-R)^2}
\end{aligned}
$$

dove $0 = u(0) = k$, visto che vogliamo che la funzione in 0 faccia 0 (fisica del problema) allora viene che $c = 0$.
Verifichiamo che il grafico di u è una cicloide, dove

$$u(x) = R\arccos\left(\frac{R-x}{R}\right) - \sqrt{R^2-(x-R)^2}.$$

DISEGNO

dove una cicloide è la curva che rappresenta il movimento del centro di una circonferenza in cui il cerchio ruota senza strisciare lungo una circonferenza più grande. $\begin{cases} x = R - R\cos\theta \\ z = \theta R - R\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{R-x}{R} \\ z = R\arccos\frac{R-x}{R} - R\sqrt{1-\left(\frac{R-x}{R}\right)^2} \end{cases}$

Ci possiamo ora chiedere cosa succede al variare di R. Fissata una cicloide di riferimento, le altre si ottengono riscalandola. Prendendo un punto qualunque nel piano, possiamo trovare il parametro di riscalamento in modo che la cicloide passi per il punto considerato.

Potremmo essere contenti così, però la mia equazione che soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange, non è minima. Il fatto che la curva sia effettivamente un minimo, non è ancora giustificato. Prima di vedere come ovviare al problema, facciamo altri esempi:

- *Problema delle geodetiche*: dati due punti sul piano ci chiediamo quale sia la curva di lunghezza minima che li congiunga.

DISEGNO

Assumiamo di lavorare nell'ambiente in cui le soluzioni sono grafici di funzioni, allora il funzionale che consideriamo è

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \sqrt{1 + (u'(x))^2}$$

Vogliamo trovare $\min \mathcal{F}(u)$ tale che $u(a) = z_a, u(b) = z_b$. Se consideriamo la Lagrangiana $F(x, z, p) = \sqrt{1 + p^2}$

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx$$

Vale che $F_z = 0, F_p = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$. Per l'equazione di Eulero-Lagrange $F_z = \frac{d}{dx} F_p \Rightarrow 0 = \frac{d}{dx}\left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\right]$

DISEGNO

Allora $F_p(u'(x)) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} = cost$, ma allora vuol dire che anche $u'(x) = cost = m \Rightarrow u(x) = mx + q$. Dunque, banalmente, la soluzione è la retta.
Se togliessimo l'ipotesi che la soluzione è grafico di una funzione, lavoriamo in forma parametrica: sia $\underline{u}(x)$ (x è il tempo), punto di partenza (a_1, a_2) e punto di arrivo (b_1, b_2). Sia $\underline{u} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ con $\underline{u}(0) = \underline{a} = (a_1, a_2)$ e $\underline{u}(1) = \underline{b} = (b_1, b_2)$ avremmo il funzionale $\mathcal{F}(\underline{u}) = \int_0^1 |u'(x)|dx$. Quindi la nostra lagrangiana sarebbe $F(x, z, p) = |p|$. Dunque $F_p = \frac{p}{|p|}$. Da Eulero-Lagrange $\frac{d}{dx}\frac{u'(x)}{|u'(x)|} = 0 \Rightarrow \frac{u'(x)}{|u'(x)|} = cost$, quindi $u(x)$ ha la direzione è costante $\Rightarrow$ il supporto di u è contenuto in una retta. In questa formulazione *non* c'è unicità del minimo.
Se lavorassimo con più variabili, avremmo problemi un po' più sostanziali come ad esempio quello delle superfici minime.

- *Diffrazione*: Se vogliamo collegare due punti in cui però nel mezzo è presente un vetro, come cambia il problema?

Idea L'idea è conviene minimizzare il percorso all'interno del vetro. ⌟

Disegno

Il funzionale è $\mathcal{F}(u) = \int_0^3 \sqrt{1 + (u'(x))^2} g(x)dx$, dove $g(x)$ rappresenta la densità del mezzo. (Questa può chiaramente anche dipendere da più variabili). Non ci aspettiamo più che la soluzione sia C^1, avremo dei punti angolosi. Risolvendola troveremmo che ci sono pezzi lineari. Bisogna solo capire come collegare questi pezzi. Questo esempio è significativo perchè ci fa intuire che le soluzioni non per forza devono essere C^1.
In questo contesto ritroviamo il *Problema della Brachistocrona* in cui $\mathcal{F}(u) = \int \frac{\sqrt{1+(u'(x))^2}}{\sqrt{x}} dx$. Infatti abbiamo una nuova possibile soluzione: la soluzione cicloide altro non è che una geodetica in cui abbiamo un mezzo che diventa sempre meno denso per $x \to +\infty$.

DISEGNO

Questo ci aiuta a capire che la soluzione, rispetto a x, *non* è un grafico di una funzione.

Idea È come se sapessimo che lo spazio in cui mi muoviamo fa meno attrito più in basso ci troviamo. Quindi intuitivamente capiamo che è più conveniente abbassarci per poi risalire. ⌟

Seguono dei controesempi (problemi ad hoc per capire che le cose possono andare male):

- $\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^{1} (1 - (u'(x))^2)^2 dx = \int_{-1}^{1} F(x, u(x), u'(x)) dx$ in cui $F(x, z, p) = (1 - p^2)^2$

  DISEGNO

  È quello che si dice un *doppio pozzo*. Consideriamo $\begin{cases} \mathcal{F}(u) \to \min \\ u(-1) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$ Cerco u tale che la derivata sia molto vicino a -1 o 1, andiamo nel piano xz.

  Idea Perchè vogliamo che la derivata stia vicino a $-1/1$? Perchè così si annulla la nostra lagrangiana, che sappiamo al minimo possa valere 0. ⌟

  DISEGNO

  Vediamo che $u_0(x) = 1 - |x|$ soddisfa, anche se $u_0 \notin C^1$: non è derivabile quasi ovunque ($x = 0$). Quindi $F(x, u(x), u'(x)) = 0$. È però possibile definire $u_\varepsilon \in C^1$ tale che $u_\varepsilon \to 0$ per $\varepsilon \to 0$ (immaginarsi piccole paraboline che stan sotto), così $\mathcal{F}(u_\varepsilon) \to 0$ e quindi $\mathcal{F}$ non ha minimo in C^1.

- Sia $\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^{1} [(1 - (u'(x)^2)^2 + u^2(x)] dx$ in cui la lagrangiana sarà $F(x, z, p) = (1 - p^2)^2 + z^2$. Come prima questa è positiva, quindi meno di 0 non lo posso ottenere e vogliamo stare con la derivata vicino a $-1/1$ senza allontanarmi troppo da 0.

  DISEGNO

  Quindi $\mathcal{F}(u_\varepsilon) \to 0 \quad \varepsilon \to 0$, ma se fosse $\mathcal{F}(u) = 0 \Rightarrow \int u^2 = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ *q.o.* $\Rightarrow u' = 0$ e quindi non sono vicino a $-1/1$.

- Consideriamo $\begin{cases} \mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(x))^3 dx \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$ e quindi $F(x, z, p) = p^3$, $F_p = 3p^2$.

  Da Eulero-Lagrange $0 = \frac{d}{dx} 3(u')^2 \Rightarrow (u')^2 = cost \Rightarrow u' = m \Rightarrow u(x) = mx + q$, ma per avere le condizioni al bordo $u(x) = 0$. Notiamo però che $u(x) \equiv 0$ non è minimo, infatti riusciamo andare nei valori negativi. Mi aspetto di riuscire a trovare successione di funzioni tale che $\mathcal{F} \to -\infty$.

Osservazione 2.1
Se $u(0) = u(1) = 0$ allora $\int_0^1 u' = [u]_0^1 = 0$, ossia "ho tanta derivata negativa, quanta positiva".

Idea Sfruttando il fatto di avere una cubica, possiamo costruire esempio in cui la voglio poco ripida vicino a 0 e parecchio ripida vicino a 1 ⌟

DISEGNO

in cui $u_k(x) = \begin{cases} kx & x \in [0, \frac{1}{k^2}] \\ \frac{1}{k} & x \in [\frac{1}{k^2}, 1 - \frac{1}{2k^2}] \\ 2k(1-x) & x \in [1 - \frac{1}{2k^2}, 1] \end{cases}$ e vale che

$$\mathcal{F}(u_k) = \int_{-1}^{1} (u_k')^3 = \int_0^{\frac{1}{k}} k^3 + \int_{1-\frac{1}{2k^2}}^{1} (-2k)^3 = \frac{k^3}{k^2} - \frac{8k^3}{2k^2} = -3k \to -\infty$$

Questo per dire che lo spazio C^1 non è quello ideale per trovare minimi. Notiamo che l'esempio della brachistocrona non rientra in un possibile controesempio: infatti le cose possono andare male se $p \to F(x,z,p)$ non è convessa. Come sfruttiamo la convessità? Vediamo nel caso della brachistocrona: $\mathcal{F}(u) = \int \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{x}} dx$ in cui $F(x,z,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$.

Idea Una funzione convessa ha la proprietà di stare sopra la retta tangente. (proprietà analoga a definizione) ⌟

Quindi $\forall x \; F(x,p) \geq F(x,p_0) + F_p(x,p_0)(p-p_0)$. Per dimostrare che data u_0 candidato minimo, vorremmo dimostrare che effettivamente $\mathcal{F}(u) \geq \mathcal{F}(u_0) \; \forall u$, ossia che u_0 effettivamente è un minimo. Vediamo che $\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0) > 0$. Ponendo $p = u'(x), p_0 = u_0'(x)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0) &= \int_a^b [F(x,u'(x)) - F(x,u_0'(x))]dx \\
&\geq \int_a^b \underbrace{F_p(x,u_0'(x))}_{\text{costante se } u_0 \text{ soddisfa E.L.}} (u'(x) - u_0'(x))dx \\
&= c\int_a^b (u'(x) - u_0'(x))dx = c[u-u_0]_a^b = 0
\end{aligned}$$

Quindi u_0 è veramente un minimo.

Osservazione 2.2
In effetti se $\forall x \; (z,p) \to F(x,z,p)$ è convessa allora $\mathcal{F}$ è convesso[1], ossia:

$$\mathcal{F}((1-t)u + tv) \leq (1-t)\mathcal{F}(u) + t\mathcal{F}(v)$$

infatti:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}((1-t)u + tv) &= \int F(x, (1-t)u + tv, (1-t)u' + tv')dx \\
&\leq \int [(1-t)F(x,u,u') + tF(x,v,v')]dx = (1-t)\mathcal{F}(u) + t\mathcal{F}(v)
\end{aligned}$$

[1] ha senso parlarne perchè $\mathcal{F}$ è definito su uno spazio affine

Osservazione 2.3
Se $\mathcal{F}$ è convesso e $\delta\mathcal{F}(u_0, \varphi) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}(u_0) = 0 \ \forall \varphi$ allora u_0 è minimo di $\mathcal{F}$

Teorema 2.1

Se $\forall x \ (z,p) \to F(x,z,p)$ è convesso e se u_0 soddisfa Eulero-Lagrange, allora u_0 è minimo di $\begin{cases} \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x,u,u')dx \\ u(a) = z_a \\ u(b) = z_b \end{cases}$

Dimostrazione. Dalla convessità segue che il grafico di F in un punto sta sopra al piano tangente di quel punto, ossia:

$$F(x,z,p) - F(x,z_0,p_0) \geq F_z(x,z_0,p_0)(z-z_0) + F_p(x,z_0,p_0)(z-z_0)$$

segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0) &= \int [F(x,u,u') - F(x,u_0,u_0')] \\ &\geq \int F_z(x,u_0,u_0')(u-u_0) + F_p(x,u_0,u_0')(u'-u_0')]dx \\ &\underset{\text{per parti}}{=} \int \left[F_z - \frac{d}{dx}F_p\right]_{z=u_0, p=u_0'} (u-u_0)dx + [F_p(u-u_0)]_a^b = 0 \end{aligned}$$

vedi come mettere le cose una sotto l'altra e come mettere barra per roba che si annulla $\square$

3 Lezione 06/03

Introduciamo il metodo della che storicamente è quello che è stato usato per vedere che effettivamente la cicloide è il minimo per la brachistocrona. Serve il seguente lemma (banale):

Lemma 3.1

Sia u_0 un candidato minimo di $\mathcal{F}$. Se esiste $\mathcal{M}$ tale che:

- $\mathcal{M}(u) \leq \mathcal{F}(u)$
- $\mathcal{M}(u_0) = \mathcal{F}(u_0)$
- u_0 è minimo di $m\mathcal{M}$

allora u_0 è minimo di $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. Per dire che u_0 è minimo mostreremo spesso che $\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0) \geq 0$.

$$\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0) \geq \mathcal{M}(u) - \mathcal{M}(u_0) \geq 0$$

□

Esempio: $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (1-(u')^2)^2 dx$ abbiamo visto la scorsa volta che non c'è un minimo di classe C^1. Però possiamo mostrare che c'è minimo se consideriamo

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u) = \int_0^1 (1-(u')^2)^2 dx \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

Idea L'idea è che, visto che in 0=0 e in 1=2, la funzione dovrà avere una derivata talmente tanto ripida che non vedrà la non convessità della lagnrangiana ⌟

Idea Consideriamo $\mathcal{M}(u) = \int_0^1 M(u')dx$ dove $M(p) = \begin{cases} F(p) & se\ |p| \geq 1 \\ 0 & se\ |p| \leq 1 \end{cases}$

DISEGNO

Grazie al lemma, se trovo il minimo di $\mathcal{M}$ e se $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{M}(u_0)$ allora u_0 è minimo anche per $\mathcal{F}$. ⌟

Usiamo l'equazione di Eulero-Lagrange per $\mathcal{M}$:

$$\left[\underbrace{M_z}_{=0} = \frac{d}{dx} M_p \right]_u \Rightarrow M_p(u'(x)) = cost$$

Notiamo che $M_p = \begin{cases} 2(1-p^2)(-2p) & se\ |p| > 1 \\ 0 & se\ |p| \leq 1 \end{cases}$. Quindi u' è costante quando $|u'| > 1$ ed è qualunque se $|u'| \leq 1$. Ma la seconda condizione è incompatibile[2]

[2]in tutto questo stiamo supponendo che $u \in C^1$, così da evitare salti

con i dati al bordo del problema, quindi l'unica possibilità è che $u' = m$. Dunque $u(x) = mx + q$ e con i dati al bordo $\Rightarrow u(x) = 2x$. Quindi $u_0(x) = 2x$ è minimo[3] di $\mathcal{M}$, ma poichè $u_0'(x) = 2$ si ha $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{M}(u_0) \Rightarrow u_0(x)$ è minimo anche di $\mathcal{F}$.

3.1 Metodo delle calibrazioni o metodo dei campi di Weierstrass

Introduciamo l'idea che sta dietro a questo metodo: tipicamente questo metodo si usa quando abbiamo un candidato minimo. Ricordiamo che u_0 minimo se $\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0) \geq 0$ $\forall u$ nel solito problema $\begin{cases} \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u')dx \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases}$. L'idea è quella di riempire il grafico con tutte le funzioni che soddisfano l'equazione di eulero lagrange, con condizioni al bordo diverse. (stiamo fibrando lo spazio)

Idea Detta $\Gamma_u(x) = (x, u(x))$ (grafico di u)

$$\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0) \geq \int_{\Gamma_u} \omega - \int_{\Gamma_{u_0}} \omega = 0$$

perchè ω sarà esatta. (in disegno il rosso è Γ_u, in blu Γ_{u_0}). ⌟

L'idea si può capire ancora meglio considerando il *problema delle geodetiche.*

Primo passo Supponiamo di avere ω e che ω sia esatta $\omega = \mathrm{d}S$ con $S(x, z)$. Notiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(S(x, u(x)))dx = [S(x, u(x))]_a^b = S(b, u(b)) - S(a, u(a)) = cost.$$

se u ha dati al bordo fissati. Vale anche

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(S(x, u(x)))dx = \int_a^b [S_x(x, u) + S_z(x, u)u'(x)]dx$$

Chiamiamo $\mathcal{M}(u) = \int M(x, u(x), u'(x))dx$ con $M(x, z, p) = S_x(x, z) + S_z(x, z)p$.
Se vale $\mathcal{M}(u) - \mathcal{M}(u_0) = 0$ abbiamo una *lagrangiana nulla*.
Sceglieremo $\omega = \alpha(x, z)\mathrm{d}x + \beta(x, z)\mathrm{d}z$ e, detta $\Gamma_u(x) = (x, u(x))$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_u} \alpha \cdot \mathrm{d}x + \beta \cdot \mathrm{d}z &= \int \alpha(x, u(x))dx + \beta(x, u(x))u'(x)dz \\ &= \int [S_x(x, u) + S_z(x, u)u'(x)]dx\end{aligned}$$

Ricordiamo che, detta $\gamma(t) = (x(t), z(t))^t$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \alpha \mathrm{d}x + \beta \mathrm{d}z = \int [\alpha(\gamma(t), x'(t) + \beta(\gamma(t), z'(t)]dt$$

[3] abbiamo che $\mathcal{M}$ è convessa

Secondo passo Supponiamo di avere una fibrazione dello spazio (x, z).

DISEGNO

dove u_c è una famiglia di curve che dipendo dal parametro c e che per $c = 0$, u_0 sia il mio candidato minimo.
Questa fibrazione è una sorta di superficie. In generale mi piacerebbe fibrare tutto lo spazio, ma in certe situazioni può essere utile lavorare localmente, quindi fibrare un intorno della nostra soluzione. Nel disegno abbiamo:

Chiamiamo $\Gamma = [a, b] \times [-\delta, \delta]$ il rettangolo e $G = f(\Gamma)$ intorno tubolare della candidata (G " intorno" del grafico di u_0). In cui $f : \Gamma \to G$ bigettiva. $f(x, c) = (x, u_c(x))$. Dire che le u_c fibrano lo spazio vuol dire che f è bigettiva (non ho intersezioni).

Il fatto che f sia bigettiva implica che le curve siano diverse, non si intersichino e che tutti i punti di G siano presi. Inoltre servirà che G sia *semplicemente connesso*.

Definizione 3.2 – Campo adattato alla fibrazione

Dico che ω è *adattato alla fibrazione* u_c (volendo ω è un campo, possiamo vedere le 1forme differenziabili come campi) se $\mathcal{F}(u_c) = \int_{\Gamma_{u_c}} \omega \ \forall c$.

Definizione 3.3 – Campo estremale

Dico che ω è *estremale* se u_c risolve l'equazione di Eulero-Lagrange $\forall c$.

Definizione 3.4 – Campo ottimale

Dico che ω è ottimale se $\mathcal{F}(u) \geq \int_{\Gamma_u} \omega$ quando u ha lo stesso dato al bordo di u_0.

L'idea ora è che queste caratteristiche definiscono la nostra soluzione, che dovrà soddisfare le *equazioni di Caratheodory*:

Cosa significa che $\mathcal{F}(u_c) = \int_{\Gamma_{u_c}} \omega$ con $\omega = \alpha \mathrm{d}x + \beta \mathrm{d}z$.

$$\mathcal{F}(u_c) = \int_a^b F(x, u_c, u_c')dx \overset{!}{=} \int_a^b [\alpha(x, u_c) + \beta(x, u_c)u_c']dx$$

Se inoltre vogliamo che il campo sia ottimale serve che

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u')dx \overset{!}{\geq} \int [\alpha(x, u) + \beta(x, u)u']dx$$

visto che non so come la funzione u passi dal punto, imponiamo che $F(x, z, p) \geq \alpha(x, z) + \beta(x, z)p$ deve essere vero $\forall (x, z) \in G, p \in \mathbb{R}$. (l'idea è che io non so quanto possa essere grande il mio competitore). Da queste due condizioni segueno le:

Definizione 3.5 – Equazioni di Caratheodory

Si chiamano *equazioni di Caratheodory* le seguenti:

$$\begin{cases} F(x,z,p) \geq \alpha(x,z) + \beta(x,z)p \\ F(x,z,\mathcal{P}) = \alpha(x,z) + \beta(x,z)\mathcal{P} \end{cases}$$

dove $\mathcal{P}$ sta per pendenza: $\mathcal{P} = P(x,z) = u_c'(x)$ con $u_c(x) = z$.

Osservazione 3.1

Chiaramente se valgono le *Equazioni di Caratheodory* si ha, dalla prima equazione, che $\mathcal{F}(u) \geq \int_{\Gamma_u} \omega$ e dalla seconda vale l'uguaglianza solo se prendo le funzioni del fascio $\mathcal{F}(u_c) = \int_{\Gamma_{u_c}} \omega$.

Le due condizioni insieme ci dicono che, fissato (x,z), (guardandole nell'incognita $\mathcal{P}$) $p \to F(x,z,p)$ ha $\alpha + \beta p$ come retta di supporto (ciò una retta tangente che sta sotto il grafico della funzione). Detta in altri termini

$$h(p) := F(x,z,p) - [\alpha(x,z) + \beta(x,z)p]$$

è sempre ≥ 0 e ha minimo in $p = \mathcal{P}$. Questo è garantito se $\forall (x,z)$ la funzione $p \to F(x,z,p)$ è convessa in p. (per certi versi questo è molto meglio della condizione di convessità nella coppia della scorsa lezione). Questa è un'ipotesi molto più naturale, senza la quale abbiamo visto che è facile costruire controesempi.
Inoltre possiamo caratterizzare i coefficienti α, β: fissato (x,z) , poichè $h(\mathcal{P}) = 0$ e $h(p)$ ha minimo in $p = \mathcal{P} \Rightarrow h'(\mathcal{P}) = 0$, abbiamo

$$\begin{cases} h'(p) = F_p(x,z,p) - \beta(x,z) \Rightarrow \beta(x,z) = F_p(x,z,\mathcal{P}(x,z)) \\ \alpha(x,z) = F(x,z,\mathcal{P}) - F_p(x,z,\mathcal{P})\mathcal{P} \end{cases}$$

e queste ultime sono le *Equazioni di Caratheodory* e avremo $\omega = \alpha \mathrm{d}x + \beta \mathrm{d}z$.

4 Lezione 09/03

Abbiamo definito con disegno $f(x,c) = (x, u_c(x))$. Abbiamo visto che vale

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x,u,u')dx \geq \int_a^b M(x,u,u')dx$$

dove F è convessa in p e $\mathcal{P}(x, u_c(x)) = u_c'(x)$

$$M(x,z,p) = F(x,z,\mathcal{P}) - \mathcal{P}F_p(x,z,\mathcal{P}) + pF_p(x,z,\mathcal{P})$$

Oggi vedremo che

$$\int_a^b M(x,u,u')dx = \int_a^b M(x,u_0,u_0')$$

ossia abbiamo una lagrangiana nulla. Segue quindi che $\int_a^b M(x,u_0,u_0') = \int F = \mathcal{F}(u_0)$.

L'uguaglianza segue perchè persiamo a M come ad una forma differenziale:

$$\int_a^b M(x,u,u') = \int_{(x,u(x))} \alpha \mathrm{d}x + \beta \mathrm{d}z = \int \omega$$

dove $\omega = \alpha \mathrm{d}x + \beta \mathrm{d}z$. Quindi

$$M(x,u(x),u'(x)) = F(x,u,\mathcal{P}(x,u)) - \mathcal{P}F_p() + u'F_p()$$
$$M\mathrm{d}x = [F() - \mathcal{P}F_p()]\mathrm{d}x + F_p\mathrm{d}z$$

infatti $z = u(x), dz = u'dx$.

Idea Sostanzialmente stiamo dicendo che $\omega = [F - \mathcal{P}F_p]\mathrm{d}x + F_p\mathrm{d}z$ ⌟

Vogliamo dimostrare che ω è esatta: supponiamo che $G = f([a,b]\times[-\delta,\delta])$ sia semplicemente connesso. È quindi sufficiente dimostrare che ω è chiusa.

Riassunto 1−forme differenziali $\omega : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $x \to \omega_x = \omega(x)$ dove $\omega(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in cui $v \to \omega(x)[v] = \omega_x[v]$ (le 1 forme puoi vederle come campi vettoriali).
Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è differenziabile allora $\mathrm{d}f : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), x \to \mathrm{d}f_x$ in cui $\mathrm{d}f_x[v] = \frac{\partial f}{\partial v}(x)$. Le rappresentiamo rispetto alla base $\mathrm{d}\{x_k\}$ in cui $x_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \to x_k$ e $\mathrm{d}x_k[v] = v_k, \mathrm{d}x_k(e_j) = \delta_{jk}$.
ω si dice esatta se $\exists f : \mathrm{d}f = \omega$. Se $f \in C^2$ allora esatta implica chiusa: ho derivate miste uguali, cioè $\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}$.

L'ultimo ingrediente da introdurre è il *pull-back*.

DISEGNO

dove $\phi^*\omega(x)[v] = \omega(\phi(x))[\mathrm{d}\phi[v]]$, con $y = \phi(x)$. Se omettiamo questa dipendenza finale è che il pull-back è una notazione matematica che quasi scompare quando scriviamo le cose senza dipendenza.

La nostra forma era $\omega = (F - \mathcal{P}F_p)\mathrm{d}x + F_p\mathrm{d}z$

DISEGNO

visto che f bigettiva, con $f(x,c) = (x, u_c(x))$, con $\phi(x, u_c(x)) = (x, u_c(x), u_c'(x))$. Sostanzialmente $\phi(x,z) = (x, z, \mathcal{P}(x,z))$

$$\gamma = (F - pF_p)\mathrm{d}x + F_p \mathrm{d}z + 0\mathrm{d}p$$

Se consideriamo il suo pullback

$$\phi^*\gamma = \omega$$

Vediamo che ω è chiusa $\iff$ $f^*\omega$ è chiusa (stiamo supponendo che f sia un diffeomorfismo).[4]

Notiamo che $f^*\omega = (\phi \circ f)^*\gamma$. Studiamo lei

$$(\phi \circ f)(x,c) = (x, u_c(x), u_c'(x))$$

$$(\phi \circ f)^*\gamma = [F(x, u_c, u_c') - u_c' F_p(x, u_c, u_c')]\mathrm{d}x + F_p(x, u_c, u_c')\mathrm{d}z$$

visto che $x = u_c(x) \Rightarrow \mathrm{d}z = u_c'(x)\mathrm{d}x + \frac{\partial u_c}{\partial c}(x)\mathrm{d}c$ sostituiamo

$$= F(x, u_c, u_c')\mathrm{d}x + F_p(x, u_c, u_c') \cdot \frac{du_c}{\partial c}(x)\mathrm{d}c$$

e consideriamo le sue derivate miste. Bisogno ora distinguere i casi in cui u è uno scalare o vettore.

Se $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ anche $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ e, ripetendo i conti di prima, troviamo:

$$(\phi \circ f)^*\gamma = F(x, \underline{u_c}, \underline{u_c'})\mathrm{d}x + \sum_j F_p(x, u_c, u_c') \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j}\mathrm{d}c_j$$

Caso u scalare: $(\phi \circ f)^*\gamma$ è chiusa se e solo se

$$\frac{d}{dc}F(x, u_c, u_c') = \frac{d}{dx}\left(F_p(x, u_c, u_c')\frac{\partial u_c}{\partial c}\right)$$

Calcoliamo queste due derivate:

$$\begin{aligned} &= F_z \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c} + F_p \cdot \frac{\partial}{\partial c}u_c' - ((\frac{d}{dx}F_p)\frac{\partial u_c}{\partial c} + F_p\frac{\partial}{\partial c}u_c') \\ &= [F_z(x, u_c.u_c') - \frac{d}{dx}F_p(x, u_c, u_c')]\frac{\partial u_c}{\partial c} \end{aligned}$$

e questa quantità è $= 0$ se u_c soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange.

segure enunciato nel caso scalare:

Teorema 4.1

Se u_c sono soluzioni di $E.L$ per la lagrangiana F (sono di classe C^2 rispetto a x) , se u_c fibrano un intorno tubolare di G di u_0, se G è semplicemente connesso e se F è convessa in p per ogni (x,z). Allora u_0 è minimo di $\mathcal{F}$ tra tutte le u con stesso dato al bordo e grafico in G. Questo vale solo se $n = 1$.

(enunciato non proprio preciso perchè mancano le ipotesi di regolarità di F). Caso vettoriale lo vedremo prossima volta

Esempio: (Brachistocrona)

[4]Se $f^*\omega = \mathrm{d}g$ allora $\omega = \mathrm{d}(g \circ f^{-1})$.

DISEGNO

avevamo $F(x,z,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{z}}$. Si nota che $(p,z) \to \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{z}}$ non è convessa, infatti $trH > 0$ e $detH =$ non ha segno (per essere convessa i due autovalori di hessiana dovrebbero essere entrambi positivi). Ma la funzione $p \to \sqrt{1+p^2}$ è convessa. Abbiamo detto che la mia cicloide mi può creare una fibrazione del mio spazio. Il primo problema è che tutte in 0 valgono 0, quindi manca già un'ipotesi del teorema. Si potrebbe risolvere costruendo una fibrazione tramite cicloidi in cui magari traslo. (non si tratta perchè lo abbiamo già analizzato a modo).

Esempio: Consideriamo $\mathcal{F}(u) = \int_a^b ((u')^2 - u^2)dx$, $f(x,z,p) = p^2 - z^2$. Non è convesso nella coppia, mentre lo è in p. Siano $a > 0, b < \pi$ (fede divina, potresti mettermi a capire perchè sono importanti). Da Eulero lagrange $-2u = \frac{d}{dx}2u'$ ossia $u'' + u = 0$. Le soluzioni[5] sono $u(x) = A\sin(x) + B\cos(x) = C\sin(x - x_0)$. Imponendo $u(a) = u(b) = 0$ segue che , visto che il seno si annulla in due punti che distano P, l'unica soluzione possibile è $C = 0$. Quindi $u_0 \equiv 0$ è l'unica soluzione di eulero-lagrange che soddisfa le condizioni al bordo. Allora è chiaro che $u_c = c\sin(x)$. (non hanno dato al bordo giusto ma soddisfano l'eq. di eulero -lagrange) e chiaramente u_c fibrano spazio.

disegno

Posso concludere che u_0 è minimo globale di $\mathcal{F}$. Fatto interessante perchè ci dice che quel funzionale è sempre positivo, infatti visto che $\mathcal{F}(u_0) = 0$ allora $\int_a^b u^2 \leq \int_a^b (u')^2$ se $u(a) = u(b) = 0$ (Disuguaglianza di Poincarè).

Osservazione 4.1
Cosa succede su $(a,b) \subseteq [0,\pi]$. $u_0(x) \equiv= 0$ è l'unica soluzione di E.L. con dato al bordo nullo. (come prima). Se io provassi a costruire fibrazione, vedrei che non riuscirei a prendere tutto. La fibrazione non esiste su tutto $[a,b]$. Potremmo provare a dimostrare che esiste localmente. Comunque in questo caso in realtà $u_0 = 0$ non è il minimo di $\mathcal{F}$. Prova a vedere che $\inf \mathcal{F} = -\infty$.

In generale, data u_0, possiamo sperare di avere una fibrazione u_c solo localmente.

4.1 Costruzione locale della fibrazione

Caso scalare:

DISEGNO

Voglio costruire u_c

1. u_c soddisfa E.L.

$$\begin{aligned} F_z(z, u_c, u_c') &= \frac{d}{dx}F_p(x, u_c, u_c') \\ &= F_{px}() + F_{pz}()u_c' + F_{pp}()u_c'' \end{aligned}$$

[5] solito discorso di fase e modulo

Se $F_{pp} \neq 0$ posso scrivere l'equazione in forma normale: Scelgo u_c che risolve:

$$u'' = F_{pp}^{-1}(F_z - F_{px} - F_{pz}u')$$

Per trovare una soluzione, dobbiamo mettere delle condizioni iniziali. Supponiamo $u_c(x_0) = u_0(x_0) + c$ e $u'_c(x_0) = u'_0(x_0)$ (perchè voglio ritrovare u_0 per $c = 0$). (così abbiamo che in quel punto sono tutte parallele). Quindi scelgo u_c che risolve

$$\begin{cases} u'' = F_{pp}^{-1}(F_z - F_{px} - F_{pz}u') \\ u_c(x_0) = u_0(x_0) + c \Rightarrow \frac{\partial u_c}{\partial c}(x_0) = \frac{\partial c}{\partial c} = 1 \\ u'_c(x_0) = u'_0(x_0) \end{cases}$$

Si può verificare che per $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ esiste una soluzione u_c. (Teorema di esistenza di Cauchy). Per unicità, si ha che se $c = 0$ "$u_0 = u_0$". Inoltre dovremmo verificare che $f(x, c) = (x, u_c(x))$ è localmente invertibile: per il teorema di inversione locale basta verificarlo in $(x_0, u_0(x_0))$. Quindi vogliamo $JF(x_0, u_0(x_0))$ invertibile:

$$JF(x, c) = \begin{pmatrix} 1 & u'_c(x) \\ 0 & \frac{\partial u_c(x)}{\partial c} \end{pmatrix}$$

che in $(x_0, 0)$ ha determinante $= 1$.

caso vettoriale: prossima volta.

5 Lezione 13/03

registrazione inizio 14.16
Completiamo il caso vettoriale $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Avevamo già osservato che:

$$(\phi \circ f)^* \gamma = F(x, \underline{u_c}, \underline{u_c'})\mathrm{d}x + \sum_j F_p(x, u_c, u_c') \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j} \mathrm{d}c_j$$

Dobbiamo ora mostrare che questa forma è chiusa. Vogliamo che:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_j} F(x, u_c, u_c') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_p(x, u_c, u_c') \frac{\partial u_c}{\partial c_j} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_k} F_p(x, u_c, u_c') \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_j} F_p(x, u_c, u_c') = \frac{\partial u_c}{\partial u_k} \end{cases}$$

La prima condizione è vera se u_c soddisfa Eulero-Lagrange, che nel caso vettoriale è:

$$F_{z_k}(x, u, u_c) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{p_x}(x, u, u_c)$$

La verifica è identica al caso scalare ed è pertanto omessa.
La seconda condizione invece possiamo riscriverla come $[c_j, c_k] = 0$ che è detta *parentesi di Lagrange*. Non è vero in generale che sia soddisfatta:
Esempio di problema della geodetica:segmenti di fibrazione che "vengono fatti ruotare", potrebbero non soddisfare la condizione. Nel caso scalare c'è esistenza locale della fibrazione: data la curva u_0 e un punto x_0 dicevamo $u_c(x_0) = u_0(x_0) + c$. Risolvevamo un'equazione differenziale di E-L del secondo ordine imponendo anche $u_c'(x_0)?u_0'(x_0)$.

Nel caso vettoriale scriviamo esplicitamente come viene l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$F_z(x, u_c, u_c') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_p(x, u_c, u_c')$$

$$F_z(x, u_c, u_c') = F_{px}(x, u_c, u_c') + F_{pz} \cdot u_c' + F_{pp}(x, u_c, u_c') u_c''$$

dove F_{pz} è una matrice $p = p_k, z = z_j$ e u_c' è un vettore. Per poter ricavare l'equazione in forma normale, supponiamo che F_{pp} sia invertibile in x_0 (siamo rassegnati a cercare soluzione locale) e quindi in un intorno di x_0. Quindi l'equazione differenziale da risolvere in forma normale è:

$$u_c'' = F_{pp}^{-1}(F_z(x, u_c, u_c') - F_{px}(x, u_c, u_c') + F_{pz}(x, u_c, u_c') u_c')$$

DISEGNO

Prendo x^* e costruisco soluzioni che siano uscenti da questo punto. Se volessi fibrare tutto $[a, b]$ dovrei avere $x^* < a$, quindi dovrei supporre che soluzione sia definita un po' più di $[a, b]$. Se voglio fibrazione in cui roba non si tocca, allora non devo prendere x^*: considero $\delta < |x - x^*|$.

$$\begin{cases} u_c'' = F_{pp}^{-1}(F_z(x, u_c, u_c') - F_{px}(x, u_c, u_c') + F_{pz}(x, u_c, u_c') u_c') \\ u_c(x^*) = u_0(x^*) \\ u_c'(x^*) = u_0'(x^*) + c \end{cases}$$

Vedremo ora che le soluzioni definite in questo modo soddisferanno il fatto di avere parentesi di lagrange nulle e quindi avremo fatto.

Vediamo che questa costruzione è localmente invertibile: ossia detta $f(x,c) = (x, u_c(x))$ vorremmo dire che f è localmente invertibile. Le u_c sono definite dal problema di Cauchy subito sopra (in cui, per il teorema di Cauchy-Lipschitz stiamo supponendo che il proma di sopra abbia soluzione locale). f è localmente invertibile se Jf è invertibile in $(x_0, 0)$. (teorema di invertibilità locale). Come si fa? Scrivo la formula di Taylor di u_c:

$$u_c(x) = u_c(x^*) + u_c'(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*)$$

e

$$Jf(x_0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) & 0 & \dots & 0 \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

e, visto che $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ mi interessa la sottomatrice che è $\frac{\partial}{\partial c} u_c(x_0)$. Se immagino che ci sia dipendenza continua dal dato c, essendo su compatto, è anche uniforme continua, ma allora, usando lo sviluppo di Taylor, visto che $u_c'(x^*) = u_0'(x^*) + c$

$$\frac{\partial}{\partial c} u_c(x) = 0 + Id(x - x^*) + o(x - x^*)$$

è invertibile se $|x - x^*|$ è abbastanza piccolo. (l'idea è di avere deformazione che è un cono, ma avendo termine di primo ordine che non influenza, ho semplicemente una "perturbazione" dell'identità). Ci sarebberro molti dettagli da sistemare (cit), ma noi ci interessiamo principalmente all'idea che sta dietro al metodo.

Verifichiamo ora che $[c_j, c_k] = 0$, ovvero che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dc_k}} F_p(x, u_c, u_c') \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j}$ è simmetrico in (k, j). Lo facciamo in due passi:

1. Verifichiamo che lo è per $x = x^*$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[c_j, c_k]$

Queste due cose mi dicono che $[c_j, c_k] = 0 \ \forall x$ che sono nella fibrazione.

Dimostrazione di 1). : se $x = x^*$ allora $u_c = u_0$ non dipende da c, dunque $\frac{\partial u_c}{\partial c_j}(x^*) = 0 \Rightarrow F_p \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial c_k}(F_p \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j} = 0)$ (è simmetrico perchè entrambi valgono 0) $\square$

Dimostrazione di 2). :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_k}(F_p(x, u_c, u_c')\frac{\partial u_c}{\partial c_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_j}(F_p(x, u_c, u_c')\frac{\partial u_c}{\partial c_k}\right] = 0$$

basta lavorare con un pezzo: usando l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_k}(F_p(x, u_c, u_c')\frac{\partial u_c}{\partial c_j} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dc_k}}[(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p(x, u_c, u_c'))\frac{\partial u_c}{\partial c_j} + F_p(x, u_c, u_c')\frac{\partial}{\partial c_j}u_c'] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dc_k}}[F_z(x, u_c, u_c')\frac{\partial u_c}{\partial c_j} + F_p(x, u_c, u_c')\frac{\partial}{\partial c_j}u_c'] \\
&= [F_{zz}\frac{\partial u_c}{\partial c_k} + F_{zp}\frac{\partial u_c'}{\partial c_k}]\frac{\partial u_c}{\partial c_j} + F_z\frac{\partial^2 u_c}{\partial c_k \partial c_j} + F_{pz}\frac{\partial u_c}{\partial c_k} + F_{pp}\frac{\partial u_c'}{\partial c_k}]\frac{\partial u_c'}{\partial c_j} + F_p\frac{\partial^2}{\partial c_k \partial c_j}u_c' \\
&= F_{zz}\frac{\partial u_c}{\partial c_k}\frac{\partial u_c}{\partial c_j} + F_{zp}\frac{\partial u_c'}{\partial c_k}\frac{\partial u_c}{\partial c_j} + F_z\frac{\partial^2 u_c}{\partial c_k \partial c_j} + F_{pz}\frac{\partial u_c}{\partial c_k}\frac{\partial u_c'}{\partial c_j} + F_{pp}\frac{\partial u_c'}{\partial c_k}\frac{\partial u_c'}{\partial c_j} + F_p\frac{\partial^2 u_c'}{\partial c_k \partial c_j}
\end{aligned}$$

CONTROLLARE CONTI

Cancelliamo ora i termini simmetrici e restano solo termini simmetrici in (k, j) $\square$

Esempio: geodetiche

disegno

Questo metodo viene usato in situazioni di funzionali geometrici. (fine prima parte di prima parte fatta da paolini)

Richiami che serviranno Probabilmente nelle prossime lezioni verranno dimostrati i seguenti fatti che serviranno per proseguire nel corso:

1. Detta $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$. Con $\rho \in C_C^\infty$ con supporto in B_ρ. Se $u \in L^1$ allora $u_\varepsilon \in C_C^\infty$ e $u_C \xrightarrow{L^1} u$.
2. Se $u \in L^1$ abbiamo i punti di Lebesgue
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \fint_{B_\varepsilon} (x)u(y)dy \to u(x)$$
per quasi ogni x.

Per non toccare questi lemmi vediamo ora degli *esempio di problematiche che non abbiamo coperto fin'ora*

- *Problemi di ottimizzazione con estremi liberi.* Sia $u \in C^1([a,b])$, in cui $u(a)$ e $u(b)$ non sono vincolati. Considero
$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx$$

 Osservazione 5.1
 Se u è minimo per questo problema, è ovviamente minimo nella classe ristretta delle funzioni che hanno il suo stesso dato al bordo.

 Se u è minimo allora $\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1$. Ma quindi l'equazione di Eulero-Lagrange vale lo stesso. Però abbiamo qualche informazione in più, capiamo quali:
$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F}(u,\varphi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\int_a^b F(x, u+\varepsilon\varphi, (u+\varepsilon\varphi)')dx \\ &= \int_a^b [F_z(x,u,u')\varphi + F_p(x,u,u')\varphi']dx \\ &= \int_a^b [F_z(x,u,u') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p(x,u,u')]\varphi + [F_p(x,u,u')\varphi]_a^b\end{aligned}$$
 Se $\varphi \in C_0^1 \Rightarrow$ il secondo termine si annulla e quindi si annulla anche il primo, ossia $F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p = 0$. Ma se il primo termine è nullo allora se φ è qualunque anche il secondo termine si annulla. Ma
$$(2) = F_p(b, u(b), u'(b))\varphi(b) - F_p(a, u(a), u'(a))$$
 posso scegliere φ tale che $\varphi(b) = 1$ MORTO PC DA COPIARE ultimi 5 minuti

Esempio: $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 [|u'(x)|^2 + |u-x|^2]dx$. Trovare il minimo di u su tutto $C^2([a,b])$.

$$F(x,z,p) = \frac{1}{2}[p^2 + (z-x)^2]$$

$$F_z = z - x \quad F_p = p$$

E.L: $u - x = \frac{d}{dx}u' \Rightarrow u'' - u = -x$. Quindi una soluzione è $u(x) = x + Ae^x + Be^{-x}$ (con dati al bordo fissati troverei A, B.
Condizioni al bordo: $F_p(x, u(x), u'(x)) = 0$ per $x = a, b$ ossia $u'(0) = 0$ e $u'(1) = 0$.

$$u'(x) = 1 + Ae^x - Be^{-x}$$

quindi

$$\begin{cases} 1 + A - B = 0 \\ 1 + Ae - \frac{B}{e} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1-e}{e^2-1} \\ B = 1 + A \end{cases}$$

6 Lezione 16/03

Vediamo altri esempi:
Esempio: equazione di Newton. se $z = u(x), p = u'(x)$

$$F(x, z, p) = \frac{1}{2}mp^2 - V(z)$$

(langrangiana =energia cinetica - energia potenziale). il funzionale che consideriamo è

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx$$

quindi l'eq di EL sarà, visto che $F_z = -\nabla V$, $F_p = mp$,

$$\frac{d}{dx}mu'(x) = -\nabla V(u(x))$$

ossia

$$mu''(x) = -\nabla V(u(x))$$

ossia $ma = F$. (meccanica analitica si può vedere sostituendo eq con funzionale di minimizzazione)

Noi sappiamo che tutte le leggi di conservazione della fisica si ottengono come trasformazioni di questa $\mathcal{F}$. Quello che si fa sono *variazioni interne*. Sono semplicemente delle riparametrizzazioni temporali: in pratica, detta $\varphi \in C_C^\infty([a, b])$, le variazioni esterne sono $u_\varepsilon = u(x) + \varepsilon\varphi(x)$, mentre la variazione interna sarà, detta $\eta_\varepsilon(y) = y + \varepsilon\varphi(y)$, $u_\varepsilon(x) = u(\eta_\varepsilon^{-1}(x))$. Affinchè questo abbia senso serve che η_ε sia a valori in $[a, b]$ e che come funzione $[a, b] \to [a, b]$ sia bigettiva. Se ε è abbasstanza piccolo, visto che φ è a supporto compatto su $[a + \delta, b - \delta]$, $\varepsilon\|\varphi\|_{L^\infty} < \delta$. Quindi η_ε sarà una perturbazione dell'identità data da φ.

DISEGNO

Mi basta vedere che è strettamente crescente: vorrei che non uscisse dal quadrato, ma questo lo posso fare se ε è abbasstanza piccolo, quindi $\eta_\varepsilon([a, b]) \subseteq [a, b]$. Vorrei anche $\eta'_\varepsilon > 0$, ma $\eta'_\varepsilon = 1 + \varepsilon\varphi'$, quindi se ε è abbastanza piccolo, $\varepsilon\|\varphi'\|_{L^\infty}$ allora $\eta'_\varepsilon > 0$. Quindi u_ε è ben definita.

Se $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u_\varepsilon)$ (u è minimo) allora

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathcal{F}(u_\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int_a^b F(x, u_\varepsilon(x), u'_\varepsilon(x))dx =$$

scrivo $x = \eta_\varepsilon(y)$ e $\mathrm{d}x = \eta'_\varepsilon(y)dy$.

$$= \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\int_a^b F(\eta_\varepsilon(y), u(y), \frac{u'(y)}{\eta'_\varepsilon(y)})\eta'_\varepsilon(y)dy$$

e poichè $u'_\varepsilon(x) = u'(y)\frac{1}{\eta'_\varepsilon}$ allora

$$\int_a^b \left\{\left[F_x\varphi + F_p\frac{u'(y)\varphi'}{(\eta'_\varepsilon)^2}\right]\eta'_\varepsilon + F\varphi'\right\}_{\varepsilon=0} dy$$

valutando in $\varepsilon = 0$. (vale $\eta'_\varepsilon(y) = 1 + \varepsilon\varphi'(y)$

$$\int_a^b [F_x\varphi - F_p u'\varphi' + F\varphi']dy$$

vorrei raccogliere un φ', quindi integro per parti il primo pezzo (devo metterci una primitica di F per x)

$$\int_a^b \left[-\int F_x - F_p u' + F\right]\varphi' dy$$

abbiamo che questo integrale si annulla per ogni φ' con $\varphi \in C_C$. Ma ricordando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni: si aveva che $\int f\varphi = 0\ \forall\varphi \in C_0^\infty$. se $f \in C^0 \Rightarrow f \equiv 0$. Abbiamo anche una seconda versione di questo lemma che vedremo: se $\int f\varphi' = 0\ \forall\varphi \in C_C^\infty$ e $f \in C^1$ allora (se φ a supporto compatto anche φ' è a supporto compatto) allora

$$0 = \int f\varphi' = -\int f'\varphi \Rightarrow f' \equiv 0 \Rightarrow f = c$$

Da questo lemma "potenziato" deduciamo che

$$\tau(x) = \int F_x + F_p u' - F = cost$$

$$= u'(x)F_p(x, u(x), u'(x)) - F(x, u(x), u'(x)) + \int_a^x F_x(t, u(t), u'(t))dt$$

Abbiamo visto che se F è abbasstanza regolare (C^1) e se u è minimo locale (in C^0) di $\mathcal{F}(u) = \int F(x, u, u')$ allora $\tau(x)$ è costante.

Questo risultato, nell'esempio precedente, dovrebbe restituirci la legge di conservazione dell'energia. Avevamo $F(x, z, p) = \frac{1}{2}mp^2 - V(z)$. Dunque , poichè $F_x = 0$

$$\tau(x) = u'mu' - \frac{1}{2}m(u')^2 + V(u) + 0$$

$$\frac{1}{2}m(u')^2 + V(u) = cost$$

Esempi di funzioni di più variabili Sia $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))dx$$

Se u è minimo allora $\forall\varphi \in C_C^\infty$

$$\begin{aligned}0 = \delta\mathcal{F}(u, \varphi) = \frac{d}{d\varepsilon}|_\varepsilon \mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi) &= \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \int_\Omega F(x, u + \varepsilon\varphi, \nabla(u + \varepsilon\varphi))dx \\ &= \int_\Omega (F_z(x, u, \nabla u)\varphi + F_p(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi]dx \\ &= \int_\Omega [F_z(x, u, \nabla u) - div_x(F_p(x, u, \nabla u))]\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \varphi F_p \cdot \nu_\Omega\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio sarebbe un'integrazione per parti in più variabili, ossia teorema della divergenza[6].

Possiamo fare due osservazioni: se u ha un dato al bordo assegnato $u \equiv g$ su $\partial\Omega$ allora φ è nulla al bordo (la posso scegliere come voglio) quindi il termine di bordo non c'è. Di conseguenza si deve annullare altro pezzo e, per lemma fondamentale calcolo delle variazioni, posso dedurre che è verificata l'eq di E-L.

$$F_z(x, u, \nabla u) = div_x \cdot F_p(x, u, \nabla u)$$

Se invece u è libera (no condizioni al bordo) vale comunque EL (per quanto detto la scorsa volta) perchè posso fare comunque delle variazioni a supporto a compatto. Scoperto che sta roba è nulla, scopro che posso fare variazioni anche sul bordo e quindi no problem.

$$F_p(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nu_\Omega(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

Ci sono esempi famosissimi:
Dirichlet:

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega f(x) \cdot u$$

$$F(x, z, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + f(x)z$$

$$F_z = f(x) \qquad F_p = p$$

l'eq di EL diventa

$$div_x \nabla u = f(x) \Rightarrow \Delta u = f$$

quindi se il dato al bordo è assegnato

$$\begin{cases} \Delta u = f & su\ \Omega \\ u = g & su\ \partial\Omega \end{cases}$$

abbiamo le condizioni di DIrichlet.(inoltre questo funzionale è convesso, quindi ho unicità).
se invece non il dato al bordo è libero so $F_p \cdot \nu_\Omega = 0 \Rightarrow \Delta u \cdot \nu_\Omega = 0$ abbiamo

$$\begin{cases} \Delta u = f & su\ \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & su\ \ \partial\Omega \end{cases}$$

abbiamo le condizioni di Neumann. (anche dette condizioni naturali).

Altro esempio importantissimo è quello delle superfici minime (analogo multimensionale del problema della geodetica) Dara $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, il funzionale sarebbe l'area $\mathcal{A}(u)$

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} + \int_\Omega H(x)u(x)dx$$

e la lagrangiana è

$$F(x, z, p) = \sqrt{1 + |p|^2} + H(x)z$$

[6]ricordiamo che dice la seguente cosa: $\int_\Omega div(\varphi F_p) = \int_{\partial\Omega} \varphi F_p \nu_\Omega d\sigma(x)$ con σ misura superficiale. Ricordiamo che $\int_\Omega div(\varphi F_p) = \int_\Omega [\nabla\varphi \cdot F_p + \varphi \cdot div(F_p)]$

così abbiamo

$$F_z = H(x) \quad F_p = \frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}}$$

e eq di EL diventa

$$div \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = H(x)$$

geometricamente $div \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$ è la curvatura del grafico di u. Se è $= 0$ abbiamo le superfici minime.

6.1 Punti di Lebesgue

Vorremmo estendere il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni a funzioni L^1.

Lemma 6.1

Se $f \in L^1(\Omega)$ e per ogni $\varphi \in C^0_C(\Omega)$ si ha $\int_\Omega f\varphi = 0$. Allora $f \equiv 0$ quasi ovunque.
Se invece vale $\forall \varphi \in C^\infty_C(\Omega)$ $\int_\Omega f\nabla\varphi = 0$. Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $f \equiv c$ quasi ovunque.

Per dimostrare questi lemmi, ci servono dei prerequisiti tecnici. (si potrebbe fare anche con la teoria dei mollificatori) Introduciamo i punti di Lebesgue di una funzione L^1.

Metodo 1: uso i mollificatori. Data una $\rho(x) \in C^\infty_C$ (BLU IN DISEGNO) definiamo $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$.

DISEGNO

definiamo

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(y-x)dx$$

Data $f \in L^1$ posso definire $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$. Vale che $f_\varepsilon \in C^\infty$.

Primo pezzo lemma:

$$\int f_\varepsilon\varphi = \int (f * \rho_\varepsilon)\varphi = \int f(\varphi * \rho_\varepsilon) = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_C$$

dove scambio integrali perchè ρ_ε è simmetrica. Dunque dai lemmi già mostrati so che $f_\varepsilon = 0$. Diamo per buono di sapere che se $f \in L^1$ allora $f_\varepsilon \xrightarrow{L^1} f$ ma quindi anche $f = 0$.

Secondo pezzo lemma:

$$\int f_\varepsilon\nabla\varphi = \int (f * \rho_\varepsilon)\nabla\varphi = \int f(\nabla\varphi * \rho_\varepsilon) = \int f\nabla(\varphi * \rho\varepsilon) = 0 \quad \forall\varphi$$

quindi $f_\varepsilon = c_\varepsilon \in \mathbb{R}$. ma allora $f_\varepsilon \xrightarrow{L^1} f \Rightarrow c_\varepsilon \xrightarrow{L^1} f$. Quindi $f = c \in \mathbb{R}$

Così si conclude il metodo 1 con mollificatori (solo accennato, diverse cose date per buone)

Metodo 2 darà anche info più precise: usiamo il teorema di Lebesgue:

Teorema 6.2

Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ per quasi ogni $x \in \Omega$ si ha

$$f(x) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho(x)} f = \lim_{\rho \to 0} \int f \frac{\chi_{B_\rho}(x)}{|B_\rho(x)|}$$

(da un certo punto di vista analogo a quanto fatto prima, solo che giochiamo con funzioni che non sono continue).
Per dimostrare questo teorema serve il seguente

Lemma 6.3 – Lemma ricoprimento tipo Vitali

Sia X spazio metrico totalmente limitato. Sia[a] $\rho : X \to (0, +\infty)$. Allora esiste un insieme al più numerabile di punti x_k tali che:

1. le palle $B_{\rho(x_k)}(x_k)$ sono a due a due disgiunte
2. $X \subseteq \cup_k B_{3\rho(x_k)}(x_k)$

[a] la funzione associa ad ogni punto il raggio di una palla

Definizione 6.4

X totalemente limitato se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists Y \subseteq X$, Y finito tale che $\cup_{y \in Y} B_\varepsilon(y) \supseteq X$.

7 Lezione 21/03

7.1 Punti di Lebesgue

Definizione 7.1 – Misura di Radon

Dato uno spazio di misura $(Y, \mathcal{A}, \nu)$, con Y spazio topologico, diciamo che $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ è *di Radon* se valgono le seguenti condizioni:

- ν è Boreliana
- $\nu(K) < +\infty \ \forall K \subseteq Y$ compatto
- $\forall E \subseteq Y$ misurabile, vale che

$$\nu(E) = \sup\{\nu(K) | K \subseteq E, K \text{ compatto}\}$$

- $\forall S \subseteq Y$ vale che

$$\nu(S) = \sup\{\nu(A) | S \subseteq A, A \text{ aperto}\}$$

Consideriamo uno spazio metrico (X, d) e una misura μ di Radon su X. Ricordando che possiamo supporre $\mu(B_p(x)) > 0 \ \forall x \forall p$, quindi ha senso parlare di integrale medio su palla, diamo la seguente definizione:

Definizione 7.2 – Punto di Lebesgue

x si dice punto di Lebesgue per $f : X \to \mathbb{R}, f \in L^1$ se

$$\fint_{B_p(x)} |f(y) - f(x)| d\mu \underset{p \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Teorema 7.3 – Teorema di Lebesgue

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ L^1 allora $\exists Z \subseteq X$ con $\mu(Z) = 0$ tale che $x \in X \backslash Z$ è di Lebesgue.

Osservazione 7.1
Se f è L^1 e continua $\Rightarrow$ ogni punto è di Lebesgue. Sia infatti $x_0 \in X$ e sia $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall y \in B(x_0, \delta)$ vale $|f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon$, allora se $\rho \in (0, \delta)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu(B(x_0, \rho))} \int_{B(x_0,\rho)} |f(x_0) - f(y)| d\mu(y) \leq \frac{1}{\mu(B(x_0, \rho))} \int_{B(x_0,\rho)} \varepsilon d\mu \leq \varepsilon$$

Otteniamo la tesi scegliendo $\varepsilon_n \searrow 0^+, \delta_{\varepsilon_n} \searrow 0^+$.

DA FINIRE DI SISTEMARE

Corollario 7.4

Ci sono tanti tanti rappresentanti, ma il preferito è quelle definito come segue: se il limite esiste allora f assume il limite, se non esiste gli diamo un valore random. Detto f Allora

$$\fint_{B_\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} f(x)$$

se $f(x)$ esiste. La forza di questo è che è quasi continuità, è stabile. Se voglio usare continuità probably voglio usare questo

Dimostrazione. la costruiamo noi con le mani, sarà da sistemare. dim pulita da libro puoi trovartela

So che una funzione L^1 è limite di funzioni continue: $\exists\{f_n\}$ tale che $f_n \xrightarrow{L^1} f$. Abbiamo visto che posso anche supporre $f_n \to f$ quasi ovunque. (forse non serve, ma visto che è gratis prendila, in questo caso è facile aspettarmi che mi serva). Cosa vuol dire che un punto non è di lebesgue? Che $\fint_{B_p(x)} |f(y) - f(x)| d\mu$ non fa zero. Tagliamo la testa al toro, visto che lim sup e lim inf sono sempre definiti usiamoli:

$$x \text{ non di Lebsgue} \iff \limsup_{\rho\to 0} \fint_{B_p(x)} |f(y) - f(x)| d\mu > 0$$

Voglio dimostrare che questo insieme ha misura nulla, ossia che mu-quasi nessun punto capita questa roba. Vuol dire che esiste una misura positiva di punti per cui lim sup è $> \delta$.
Teorema falso $\iff \exists\delta : \mu(\{x : \limsup_{\rho\geq 0} > \delta\}) > \delta$.
Iniziamo a giocare con l'integrale medio:

$$\fint_{B_{\rho(0)}} |f(y) - f(x)| \leq \fint |f(y) - f_n(y)| + \fint |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$

(visto che $\fint |f_n(x) - f(x)|$ è un numero sarà $|f_n(x) - f(x)|$).
So già che il secondo pezzo va a 0 per $\rho \to 0$. Voglio dimostrare che primo e terzo son piccoli. Per primo uso convergenza in L^1, per terzo convergenza puntuale. Devo trovare una scelta oppurtuna di f_n in modo che i punti in cui le cose vanno male siano pochi. Mi verrebbe spontaneo considerare $A_n = \{x : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\delta}{2}\}$, ma questi potrebbero comportarsi male. Per esperienza è sempre meglio cercare di prenderli inscatolati: considero $A_k = \{x : |f(x) - f_j(x)| > \frac{\delta}{2}\ con\ j \geq k\}$. Allora ora $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$. Noto che $\cap A_k \subseteq \{x : f_n(x) \not\to f(x)\}$. Voglio dedurre che $\exists n : \mu(A_n) < \frac{\delta}{2}$. Dovrei avere paura che ho un A_j con misura infinita? In realtà no perchè avendo misura di Radon (di Radon equivalente a $\sigma-$finite). Riesco sempre a trovare compatti la cui unione abbia misura completa. Posso dunque supporre di essere in compatto, dunque scelgo n tale che $\mu(A_n) < \frac{\delta}{2}$ e tale che $\|f_n - f\|_{L^1} < \smile$(da determinare in seguito).
Chi possono essere i punti per cui lim sup non sia 0?. Se $x \notin A_n$ allora terzo $< \delta/2$, guardiamo il primo pezzo. Definisco $C_n = \{x : \limsup \fint_{B_\rho} |f(y) - f_n(y)| > \frac{\delta}{2}\}$. Se $x \notin A_n \cup C_n$ allora x è buono. (non vale prop. di teorema falso). Può essere cattivo un punto solo che sta o in An o in Cn. l'unico modo in cui il teorema

sia falso è che $\mu(C_n) > \frac{\delta}{2}$. Se riusciamo a dire che questa è falsa abbiamo finito. Come si fa?
Roba molto carina (molto utile da vedere come idea): usiamo lemma di ricoprimento.

Idea io so che punti di Cn sono tali che $f > \frac{\delta}{2}$, in realtà a me basta di meno: $\forall x \in C_n$ so che $\exists \rho(x)$ tale che $\int_{B_{\rho(x)}(x)} |f - f_n| > \frac{\delta}{2}\mu(B_{\rho(x)}(x))$. Chiamo $B = \bigcup_{x \in C_n} B_{\rho(x)}(x)$. Ovviamente $B \supseteq C_n$. ⌟

Posso dire: prendo x_1 tale che[7] $\rho(x_1) \geq \frac{\sup\{\rho(x), x \in C_n\}}{2}$. Se $B_{3\rho(x_1)}(x_1) \supseteq C_n$ fine (chiaramente è disgiunto). Altrimenti sia $x_2 \notin B_{3\rho(x_1)}(x_1)$ con $\rho(x_2) \geq \frac{1}{2}\sup\{\rho(x), x \notin B_{3\rho(x_1)}(x_1)\}$. La cosa interessante è che $B_{\rho(x_2)}(x_2) \cap B_{\rho(x_1)}(x_1) = \emptyset$ infatti

DISEGNO

e quindi itero: posso sempre trovare palle. Posso finire in un numero finito/numerabile di palle. Noto che se x_k sono numerabili $\Rightarrow \rho(x_k) \to 0$. proprietà basic di tot limitato: da definizione non puoi trovare numerabili palle con raggio uguale. Ma allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{3\rho(x_k)}(x_k) \supseteq C_n$. Se esistesse $x \in C_n \setminus \bigcup B$ allora $\rho(x) < 2\rho(x_k) \forall k$, ma $\rho(x) > 0$ e la succesisone va a 0, assurdo. Scriviamo meglio cosa abbiamo appena dimostrato:

Lemma 7.5 – Lemma di ricoprimento "alla Vitali"

Sia Z spazio totalmente limitato. Allora, data $\bigcup_{\alpha \in A} B_{r(z_\alpha)}(z_\alpha)$ (dove $|A| = \aleph_\beta$ con $\beta \in Ord$ qualsiasi) esiste un' unione *numerabile* di palle disgiunte, ma $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{3r(z_k)}(z_k) \supseteq \bigcup_{\alpha \in A} B_{r(z_\alpha)}(z_\alpha)$

(altro famoso è di Bernstein con 5)

Definizione 7.6 – Spazio di doubling

(X, μ) si dice spazio di *doubling* se $\forall x, \forall p$

$$\mu(B_{3p}(x)) \leq k\mu(B_p(x))$$

mi devo ricordare che $\forall x \in C_n$ abbiamo scelto $\rho(x)$ tale che $\int_{B_{\rho(x)}(x)} |f - f_n| > \frac{\delta}{2}\mu(B_{\rho(x)}(x))$. Applico ora il lemma di ricoprimento e ho $\{x_j\}, \{\rho_j\}$:

[7] posso prendere sup perchè spazio è compatto, dunque totalmente limitato. dividi per 2 perchè non sai di avere il massimo, prendi un numero che sia quasi il massimo. puoi metterci $1 - \varepsilon$ così da avere dopo $2 - \varepsilon$

$C_n \subseteq \bigcup B_{3\rho_j}(x_j)$ e $B_{\rho_j}(x_j)$ sono disgiunte.

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{2} &\leq \mu(C_n) \leq \mu\left(\bigcup B_{3\rho_j}(x_j)\right) \leq \sum \mu(B_{3\rho_j}(x_j)) \\
&\leq k \sum \mu(B_{\rho_j}(x_j) \leq \frac{2k}{\delta} \sum \int_{B_{\rho(x_j)}(x_j)} \\
&= \frac{2k}{\delta} \int_{\bigcup B_j(x_j)} |f - f_n| \leq \frac{2k}{\delta} \|f - f_n\|_{L^1}
\end{aligned}
$$

quindi ora scelgo n tale che $\smile = \frac{\delta^2}{4k}$ e ho l'assurdo. hai mandato n a infinito e rho a 0. stato fondamentale scegliere l'ordine giutsto. prima rho, poi hai scelto n (che sostanzialemte è mandarlo all'infinito). per capirlo vedevi che terzo membro non dipende da rho, quindi lui ti dà scelta da n. per scelta a posteriori con motivazione giusta. essendo gli A_n inscatolati poi fare scelta successiva di n quando il primo membro ti dice che "hei, ne voglio uno più grande". $\square$

8 Lezione 23/03

Volta scorsa abbiamo visto che se $u \in L^1$

$$\int u\varphi' = 0 \ \forall \varphi \in C_C^\infty \Rightarrow u = c \ q.o.$$

Corollario 8.1 – Lemma fondamentale 1

Se $u \in L^1$, $\int_a^b u\varphi = 0 \ \forall \varphi \in C_C^\infty \Rightarrow u = 0$ quasi ovunque

Dimostrazione. Se questo è vero vale inoltre che $\int_a^b u\varphi' = 0$ (se φ a supporto compatto, anche φ' lo è. Quindi per il lemma 2 $u = c$ quasi ovunque. Per vedere che $c = 0$, basta prendere $\varphi \in C_C^\infty(a, b)$ tale che $\int_a^b \varphi \neq 0$.

$$0 = \int_a^b u\varphi = \int_a^b c\varphi = c\int_a^b \varphi$$

ma poichè $\int_a^b \varphi \neq 0$ allora $c = 0$. □

Quindi vale il lemma fondamentale per funzioni L^1.

Teorema 8.2 – Teorema di Du Bois-Reymond

Dato $\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u')dx$ con $F \in C^1, u \in C^1$ e $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0 \ \forall \varphi \in C_C^\infty(a, b)$. Allora [a] $x \to F_p(x, u(x), u'(x))$ è C^1, quindi la condizione di Eulero-Lagrange è soddisfatta:

$$\frac{d}{dx}F_p(x, u, u') = F_z(x, u, u')$$

[a] vale la condizione di Eulero-Lagrange, anche se F, u non fossero C^2

Esempio: Consideriamo

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u) = \int_{-1}^1 u^2(x)(2x - u'(x))^2 dx \\ u(-1) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

in cui $u_0(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in [-1, 0] \\ x^2 & se\ x \in [0, 1] \end{cases}$. Chiaramente $u \in C^1 \backslash C^2$ e, poichè $\mathcal{F} \geq 0$ e $\mathcal{F}(u_0) = 0$, u_0 è chiaramente un minimo. Si ha che $F(x, z, p) = z^2(2x - p)^2$, $F_z = 2z(2x - p)^2$ e $F_p = -2z^2(2x - p)$, dunque

$$E.L. : \frac{d}{dx}(-2u^2(2x - u')) = 2u(2x - u')^2 \Rightarrow 0 = 0$$

Dimostrazione del Teorema. Sappiamo che, $\forall \varphi \in C_C^\infty$ vale

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{F}(u, \varphi) &= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_a^b F(x, u + \varepsilon\varphi, (u + \varepsilon\varphi)'dx\right]|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b [F_z(x, u, u')\varphi + F_p(x, u, u')\varphi']dx = * \end{aligned}$$

Idea Consideriamo una primitiva di F_z:

$$H(x) = \int_a^x F_z(t, u(t), u'(t))dt$$

e poichè $F_z \in C^0, u, u' \in C^0$, allora possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale ed avere $H'(x) = F_z(x, u(x), u'(x))$ ⌟

Quindi, integrando per parti,

$$\begin{aligned} * &= [H(x)\varphi]_a^b - \int_a^b H(x)\varphi' + \int_a^b F_p\varphi' \\ &= \int_a^b [F_p(x, u, u') - H(x)]\varphi'(x)dx = 0 \end{aligned}$$

Per il lemma fondamentale[8] 2, possiamo dedurre che $F_p(x, u, u') - H(x) = c$. Dunque

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = c + H(x)$$

ma $H(x)$ è C^1, quindi anche F_p lo è e possiamo farne la derivata

$$\frac{d}{dx}F_p(x, u, u') = H'(x) = F_z(x, u, u')$$

□

Idea Per poter generalizzare questo risultato, serviranno $u \in L^1$ e $u' \in L^1$. Serviranno delle osservazioni che al momento non siamo ancora in grado di fare. ⌟

Vale lo stesso teorema in più variabili

Teorema 8.3

Sia $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)d\underline{x}$ in cui $u \in C^1, F \in C^1$. (ci interessa che lagrangiana sia C1 in tutte e tre le variabili. si intuisce che per la x basta che sia L1) con $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0\ \forall\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$. Allora

$$divF_p(x, u, \nabla u) = F_z(x, u, \nabla u)$$

Dimostrazione.

$$0 = \delta\mathcal{F}(u, \varphi) = \int_\Omega [F_z(\underline{x}, u, \nabla u)\varphi + F_p(\underline{x}, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi]d\underline{x} = *$$

Idea Similmente a prima vogliamo definire una corretta funzione H per vederla come divergenza di F_z. Definiamola per componenti

DISEGNO

[8] lo abiamo usato per le funzioni continue

$$H_k(x) = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{x_k} F_z(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)u(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n), \nabla u(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n))dt$$

y (ossia stiamo supponendo che fuori da Ω sia tutto nullo). In questo modo

$$\frac{\partial H}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{n}F_z(x, u(x), \nabla u(x))$$

dunque

$$div\underline{H} = \sum \frac{\partial H}{\partial x_k}(x) = F_z$$

(per questo mettiamo $\frac{1}{n}$) ⌟

quindi, integrando per parti

$$* = -\int_\Omega \underline{H}(x)\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega F_p\cdot\nabla\varphi = \int_\Omega [F_p(x, u, \nabla u) - H]\cdot\nabla\varphi$$

e per il lemma fondamentale in più variabili, sulle componenti connesse di Ω, si ha $F_p - H = c$. Ma allora come prima

$$divF_p = 0 + div\underline{H} = F_z$$

□

8.1 Condizioni al secondo ordine

Con E-L ci aspettiamo un minimo, e dunque derivata prima uguale a 0. Vediamo ora una condizione al secondo ordine: *condizione di Legendre*. Potrebbe essere usata perchè, risolvendo eq di E-L. , se questa soluzione non risolve condizione di Legendre, allora quello non è minimo.

Definizione 8.4 – Condizione di Legendre

Se u_0 è minimo di $\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx$ con condizioni al bordo fissate ($u(a)$ e $u(b)$ fissati) e $F \in C^2$ allora $F_{pp}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geq 0$ e questa è la condizione di Legendre.

Osservazione 8.1
Nel caso in cui $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$, allora F_{pp} è una m matrice e si intende

$$F_{p_ip_j}(x, u_0(x), u_0'(x))\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \forall\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

(ossia la forma quadratica associata alla matrice è definita positiva).

Teorema 8.5

Se u_0 di minimo allora u_0 soddisfa la condizione di Legendre. Con $F \in C^2$ e $u \in C^1$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u_0+\varepsilon\varphi) &= \int_a^b F(x,u_0+\varepsilon\varphi,u_0'+\varepsilon\varphi')dx\\ &= \int_a^b F(x,u_0,u_0')+\varepsilon\int_a^b(F_z\varphi+F_p\varphi')+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_a^b[\langle F_{zz}\varphi,\varphi\rangle\\ &+\langle F_{zp}\varphi,\varphi'\rangle+\langle F_{pp}\varphi',\varphi'\rangle]+o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

$\int_a^b(F_z\varphi+F_p\varphi')$ va a 0 per EL. così

$$\mathcal{F}(u_0+\varepsilon\varphi)=\mathcal{F}(u_0)+\frac{\varepsilon^2}{2}\int[]+o(\varepsilon^2)$$

se u_0 è minimo, l'integrale $\geq 0\ \forall\varphi$.
Fissato $x\in(a,b)$, fissato $\underline{\xi}\in\mathbb{R}^n$, fissato $\delta>0$, scegliamo φ :

disegno

ossia che abbia valori solo nella direzione scelta. (si può pensare che ξ abbia norma 1. Questa funzione non è C^∞, ma ci fidiamo. Nel senso che riusciamo a smussarla negli angolini. Allora

$$\begin{aligned}\int_a^b[] &= \int_{x-\delta}^{x+\delta}[\langle F_{zz}\varphi,\varphi\rangle+2\langle F_{zp}\varphi,\varphi'\rangle+\langle F_{pp}\varphi',\varphi'\rangle]\\ &\leq \int_{x-\delta}^{x+\delta}|F_{zz}|\delta^2|\xi|^2+2|F_{zp}|\delta|\xi|^2+\langle F_{pp}\xi,\xi\rangle\end{aligned}$$

poichè $\varphi'(x)=\begin{cases}\xi & se\ x\in(x-\delta,x)\\ -\xi & se\ x\in(x,x+\delta)\end{cases}$, ma $\langle F_{pp}(-\xi),\xi\rangle=\langle F_{pp}\xi,\xi\rangle$. Se $\langle F_{pp}\xi,\xi\rangle$ fosse negativo in qualche x e qualche ξ troveremmo δ molto piccolo tale che si violi $0\leq\int[]$ □

Esempio: Sia

$$\begin{cases}\mathcal{F}(u)=\frac{1}{2}\int_a^b[u^2(x)-(u')^2(x)]dx\\ u(a)=0\\ u(b)=0\end{cases}$$

Si ha $F(x,z,p)=\frac{1}{2}(z^2-p^2)$ e $F_z=z, F_p=-p$. Allora per E.L. abbiamo $\frac{d}{dx}(-u')=u$ ossia $u''+u=0$ e questa ha soluzione $u(x)=A\cos x+B\sin x$. Vediamo ora cosa succede se consideriamo la derivata seconda: $F_{pp}=-1$. Questo ci dice non ci sono minimi tra le funzioni regolari. (questo esempio è una banalità, lo si vedeva direttamente dalla sua espressione, infatti $\inf\mathcal{F}=-\infty$. Se però uno non se ne fosse accorto e si fosse messo a testa bassa a far conti avrebbe ottenuto questo).

8.2 Dualità convessa

Consideriamo H spazio di Hilbert separabile e siano $f:H\to(-\infty,+\infty]$. Se f è una funzione di questo tipo definiamo $dom(f)=\{x\in H:f(x)<+\infty\}$ e l'epigrafico di f sarà $epi(f)=\{(x,y)\in H\times\mathbb{R}:y\geq f(x)\}$.

DISEGNO

Definizione 8.6 – Convessità

f è convessa se $\forall\lambda \in (0,1)$

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

se x o y non sta in dominio questa è gratis. quindi è sufficiente controllarla per $x, y \in dom(f)$

Osservazione 8.2
f è convessa $\iff$ $epi(f)$ è convesso (per vedere che è un segmento è contenuto basta vedere che la sua proiezione su grafico sia contenuto)

Definizione 8.7

f è semicontinua inferiormente (s.c.i) se quando $x_k \to x$ allora

$$f(x) \leq \liminf_k f(x_k)$$

se f è continua, chiaramente è s.c.i. Funzione con discontinuità di primo tipo è s.c.i , ma non è continua.

Osservazione 8.3
f è semicontinua inferiormente $\iff$ $epi(f)$ è chiuso

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Siano $(x_k, y_k)\overset{H\times\mathbb{R}}{(x,y)}$ con $y_k \geq f(x_k)$. Vorremmo $y \geq x$, ma se $x_k \to x$, essendo f s.c.i, allora $f(x) \leq \liminf f(x_k) \Rightarrow f(x) \leq y$.
$\Leftarrow$: Sia $x_k \to x$ e $y = \liminf f(x_k)$. $y_j = f(x_{k_j}) \to y$, così $(x_{k_j}, y_j) \in epi(f)$. POichè epi chiuso e $(x_{k_j}, y_j) \to (x,y)$ allora $\liminf f(x_n) = y \geq f(x)$ e ho sci. $\square$

9 Lezione 27/03

9.1 Dualità di Fenchel-Moreau

Lavoriamo con $f : H \to (-\infty, +\infty]$ con $(H, \cdot)$ Hilbert dove $\cdot$ è il suo prodotto scalare.

Definizione 9.1

Data f possiamo definire la *funzione polare* f^*

$$f^*(y) = \sup_{x \in H} [y \cdot x - f(x)]$$

dove $H^* = H$.

DISEGNO

Ossia stiamo prendendo la retta più grande che sta sotto alla funzione.

$$f^*(y) \geq y \cdot x - f(x) \Rightarrow f(x) \geq y \cdot x - f^*(y)$$

(useremo idea di funzioni che separano grafici)

Osservazione 9.1
Se $dom f \neq \emptyset$, cioè $\exists \bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = +\infty$, allora $f^*(y) > -\infty$ $\forall y$ perchè $f^*(y) \geq y \cdot \bar{x} - f(\bar{x}) > -\infty$.

Osservazione 9.2
Se $dom f \neq \emptyset$ e f è convessa[9] e s.c.i., vale che $dom f^* \neq \emptyset$ cioò $\exists \bar{y}$ tale che $f^*(\bar{y}) = +\infty$. (f^* potrebbe avere valori infiniti, ma non tutti). Infatti sappiamo che $\exists \bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) < +\infty$, ma allora esiste una funzione lineare affine della forma $x \to \bar{y} \cdot x + q$, dove $\bar{y}$ è la pendenza, tale che

$$\begin{cases} \bar{y} \cdot x + q \leq f(x) & \forall x \in H \\ \bar{y} \cdot \bar{x} + q \geq f(\bar{x}) - 1 \end{cases}$$

Potremmo dire $\bar{y} \cdot \bar{x} + q \geq f(\bar{x})$ se fossimo in dimensione finita. (sarebbe idea geometrica di risultato di teorema di Hahn-Banach).
Vogliamo ora dire $f^*(\bar{y}) = \sup_x \bar{y} \cdot x - f(x) < +\infty$. Vediamo quindi che $\forall x$ si ha che è piccola la seguente quantità $\bar{y} \cdot x - f(x)$. Da quanto visto

$$\bar{y} \cdot x - f(x) \leq f(x) - q - f(x) = -q \leq \bar{y} \cdot \bar{x} - f(\bar{x}) + 1 \quad \forall x$$

Quindi passando al sup

$$f^*(\bar{y}) \leq \bar{y}\bar{x} - f(\bar{x}) + 1 < +\infty$$

Osservazione 9.3
Data una qualunque f, allora f^* è convessa e s.c.i. , infatti f^* è l'estremo

[9]l'ipotesi s.c.i se consideriamo f definita su un aperto è superflua, infatti se f è convessa è anche continua

superiore di funzioni lineari affini continue[10] (viste come funzioni in y) $\Rightarrow$ convesse, s.c.i

$$f^*(y) = \sup_x L_x(y)$$

ma il sup di funzioni convesse è una funzione convessa e il sup di funzioni s.c.i. è s.c.i. Infatti vediamo che, dato $\lambda \in [0,1]$, si ha

$$f^*((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \leq (1-\lambda)f^*(y_1) + \lambda f^*(y_2)$$

Questo è vero poichè $f^* = \sup_x L_x$ con L_x convessa, ma quindi

$$\begin{aligned}(1-\lambda)L_x(y_1) + \lambda L_x(y_2) &\leq (1-\lambda)L_x(y_1) + \lambda L_x(y_2)\\ &\leq (1-\lambda)f^*(y_1) + \lambda f^*(y_2) \quad \forall x\end{aligned}$$

dove per l'ultima disuguaglianza si ha che $f^* \geq L_x$ $\forall x$ e si è passati al sup.
Il secondo punto si fa similmente: se $f_x = \sup_x L_x$ con L_x s.c.i. allora $y_k \to \bar{y}$ sappiamo

$$L_x(\bar{y}) \leq \liminf_k L - x(y_k) \leq \liminf_k f^*(y_k)$$

□

Consideriamo $\Gamma = \{f : H \to (-\infty, +\infty] : f \text{ convessa, s.c.i, } dom f \neq \emptyset\}$. Se $f \in \Gamma \Rightarrow f^* \in \Gamma$, ossia $* : \Gamma \to \Gamma$.

Osservazione 9.4
Vale che $f^{**} = f$, ossia che $*$ è effettivamente una dualità. (questo ha bisogno della convessità di f)

Dimostrazione. Vediamo doppia disuguaglianza:

a) Vediamo che $\forall x$ si ha $f^{**}(x) \leq f(x)$. Ricordiamo $f^{**}(x) = \sup_y x \cdot y - f^*(y)$. Poichè $f^* = \sup \cdot$, fissati x, y, si ha

$$xy - f^*(y) \leq xy - (yx - f(x)) = f(x)$$

e poichè vale $\forall x, y$, passando al sup si ha $f^{**}(x) \leq f(x)$

b) Vediamo ora $f^{**}(x)$. Supponiamo per assurdo che esista $\bar{x} \in dom(f)$ tale che $f^{**}(\bar{x}) < f(\bar{x})$. Si fa argomento per separazione:

disegno

se $\bar{x} \in dom(f)$ allora ok, se $x \notin dom(f)$ per trovare sta retta bisogna fare più fatica.
Ossia $\exists \bar{y}$ tale che:

$$\begin{cases} \bar{y} \cdot x + q \leq f(x) \ \forall x \\ \bar{y} \cdot \bar{x} + q \geq f(\bar{x}) - \varepsilon \end{cases}$$

Ma

$$f^{**}(\bar{x}) = \sup_y y \cdot \bar{x} - f^*(y) \geq \bar{y} \cdot \bar{x} - f^*(\bar{y})$$

NON GLI TORNA UN CAZZO, SE LO RIVEDE ALONE E LO FA PROSSIMA VOLTA

[10]continue perchè $x \cdot y$, dove $\cdot$ è il prodotto scalare di cui è dotato H, è una funzione continua per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

$\square$

Lo scopo di tutto ciò è di dire che esiste questa trasformata di Fenchel-Moreau. Vediamo come ci può essere utile nel calcolo delle variazioni in cui prende il nome di *trasformata di Legendre*. Data $f^*(y) = \sup_x y \cdot x - f(x)$, supponendo di avere le ipotesi necessaria per poter dire che sup in realtà è un massimo, f derivabile. Allora nel punto di massimo $\bar{x}$ si annulla la derivata, ossia $y - f'(\bar{x}) = 0 \Rightarrow y = f'(\bar{x})$. Quindi $f^*(y) = f'(\bar{x}) \cdot \bar{x} - f(\bar{x})$. Se $\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u')dx$, fissati x, z chiamiamo $f(p) = F_p(x, z, p)$, definiamo la funzione

$$H(x, z, q) = f^*(q)$$

e si chiama *Hamiltoniana* corrispondente alla Lagrangiana F. (in fisica sono interessato a minimizzare l'azione, che è l'integrale della lagrangiana)

Si considera la funzione:

$$V(x, z) = \inf \left\{ \int_a^x F(t, u(t), u'(t))dt : u(a) = u_a, u(x) = z \right\}$$

Questo V sarebbe la minimizzazione di, esempio in brachistocrona, di curve che vanno da u_a a z.

Osservazione 9.5
Vale che

$$V(x + h, z + hp) \leq V(x, z) + \int_x^{x+h} F(t, z + (t - x), p)dt$$

dove potremmo mettere al posto di F (in cui si considera u lineare in $[x, x + hp]$, una qualsiasi curva che congiunga z con $z + hp$. (percorso minimo da $x + h$ a $z + hp$ sarà sempre minore di quello da x a z e poi qualsiasi percorso per finire). Ma allora

$$\frac{V(x + h, z + hp) - V(x, z)}{h} \leq \fint_x^{x+h} F(t, z + (t - x)p, p)dt$$

per $h \to 0$ va a $F(x, z, p)$. Ma questo limite, supponendo che derivata esista e che $V(x, z)$ è differenziabile, sarebbe

$$V_x(x, z)1 + V_z(x, z)p = \frac{d}{dh}|_{h=0} V(x + h, z + hp) \leq F(x, z, p)$$

(abbiamo usato regola di composizione)

Lemma 9.2

$$\Rightarrow V_x(x, z) + V_z(x, z)p \leq F(x, z, p) \quad \forall x, z, p$$

Teorema 9.3

Se u è ottimale con dato $u(a) = u_1, u(x) = z$ (ossia inf è un minimo) allora

$$V_x(x, u) + V_z(x, u)u' \geq F(x, u, u')$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}V(x,z) &= \int_a^x F(t,u(t),u'(t))dt = \int_a^{x-\varepsilon} F(t,u,u') + \int_{x-\varepsilon}^x F(t,u,u') \\ &= V(x-\varepsilon, u(x-\varepsilon) + \int_{x-\varepsilon}^x F(t,u,u')\end{aligned}$$

(se è ottimale fino a x lo è anche fino a un punto prima). Cosa succede se facciamo tendere $\varepsilon \to 0$?

$$\frac{V(x,z) - V(x-\varepsilon, u(x-\varepsilon))}{\varepsilon} \geq \fint_{x-\varepsilon}^x F(t,u(t),u'(t))dt \xrightarrow{\varepsilon\to 0} F(x,u(x),u'(x))$$

quindi, se derivata esiste e se V è differenziabile

$$\frac{d}{dh}|_{h=0} \frac{V(x,z) - V(x-\varepsilon, u(x-\varepsilon))}{\varepsilon} = V_x(x,u(x)) + V_z(x,u(x))u'(x)$$

$\square$

Osservazione 9.6
Quindi il teorema ci dice che in caso ottimale vale anche disuguaglianza opposta e dunque abbiamo l'uguaglianza. (abbiamo situazione che assomiglia a contesto di calibrazioni)

10 Lezione 30/03

RECUPERA

11 Lezione 03/04

RECUPERA

12 Lezione 06/04

RECUPERA

13 Lezione 17/04

registrazione 14.15

Primi 15 minuti discorso motivazionale su filosofia di metodologia:

l'idea è che posso dotare gli spazi di varie topologie più o meno forti. più la topologia è più forte più è facile essere continui e meno compatti.

Abbiamo visto che $\Gamma \subseteq L^p$ per $p > 1$ allora Γ limitato $\iff$ Γ debolmente $*$ compatto. (freccia non ovvia, $\Rightarrow$ è Banach-Alouolu)

Per L^1 basta pensare a f_n che è alta n su intervallo di $\frac{1}{n}$. Stanno in L^1, ma convergono a δ di Dirac.

Abbiamo visto però risultato fondamentale:

Γ si equiintegrabile $\forall \varepsilon \exists \delta \Rightarrow \int_A |u| < \varepsilon$ per qualsiasi $u \in \Gamma$. Si è visto il seguente risultato

Γ è equiintegrabile $\iff$ $\forall \varepsilon \exists M$ tale che $\int_{\{|u|>M\}} |u| < \varepsilon \ \forall u \in \Gamma$ $\iff$ $\exists \varphi$ convessa più che lineare tale che $\int \varphi(|u|) \leq 1$ (la terza caratterizzazione sarà usata una/due volte) (ogni volta che dico uniformemente intendo che non dipendo da dove sto

equi non dipende dagli elementi di una classe)

Ma noi stavamo parlando di compattezza, che c'entra?

Quando sono debolmente compatto in L^1? (debolemtne * compatto, non esiste)

Teorema 13.1

Sia $\Gamma \subseteq L^1$ limitato (se non sei limitato non puoi essere compatto) allora Γ è equiintegrabile $\iff$ Γ è debolmente sequenzialmente relativamente compatto. (relativamente vuol dire a meno di chiusura)

Ricorda che L^1 con topologia debole non è metrico quindi non è vero che compattezza uguale a compatezza per successioni. In questo corso la compatezza secondo heine borel non ci interessa, vogliamo trovare successioni che vanno a inf!!

Lemma 13.2

Se $v_h \rightharpoonup^* v$ in L^∞, allora $\|v\|_{L^1} \leq \liminf \|v_h\|_{L^1}$

Dimostrazione. $\|v\|_{L^1} = \int |v| = \int v sgn(v) = \lim_{h\to+\infty} \int (sgn v) v_h \leq \liminf_{h\to+\infty} \int |v_h|$ visto che in dimensione finita $sgn(v) \in L^1$. (a sx ho limite vero che è anche liminf, mentre a destra nessuno mi dice che esiste) (unica cosa usata è di essere in spazio di dimensione finita!!!) □

si è usato che se $\varphi_k \rightharpoonup^* \varphi$ in L^∞ allora $\int \varphi_k f \to \int \varphi f$ in L^1

Dimostrazione. in questa dimostrazione se ho L^1 su spazio di dimensione infinita, basta mettersi in caso finito e vedere il primo come limite del secondo.

$\Rightarrow$): Sia $\{u_j\} \subseteq L^1$ una successione. Chiamo u_j^k la troncata di u_j al livello k, ossia $u_j^k = sgn(u_j)\min(u_k, k)$.

DISEGNO

Le troncate per definizione sono in L^∞. Per argomento diagonale, esiste una sottosuccessione tale che $\forall k \in \mathbb{N}$ $u_j^k \rightharpoonup^*_\infty \omega^k$.

Se penso a convergenza debole devo pensare al seguente prototipo: una funzione che converge debole a 1 è la funzione che fa alternativamente 0 , 2 su intervalli più piccoli.

Idea è vero quindi che troncare e conv debole commutano? no!! se tronco a 1 le parziali allora queste convergono deboli a 1/2, mentre le altre va a 1 (per questo prima il limite lo chiama ω^k, non so chi sia) ⌟

Usiamo l'equiinte: $\forall \varepsilon \exists \Gamma : \forall n \in \Gamma, \int_{|u|>M} |u| < \varepsilon$. Se $k, k' > M$ allora (voglia successione di Cauchy) con $k < k'$

$$\omega_k - \omega_{k'} \leftharpoonup^* u_j^k - u_k^{k'}$$

Per il lemma di prima

$$\|\omega^k - \omega^{k'}\|_{L^1} = \liminf_j \int |u_j^k - u_j^{k'} = \liminf \int_{\{|u|>k\}} |u_j^k - u_j^{k'}| < \liminf \int_{\{|u_j|>k\}} |u_j| < \varepsilon$$

(stai usando che le successioni chiaramente è monotona). Quindi la ω^k è successione di Cauchy in L^1. Ossia $\omega^k \to^{L^1} u$ fortemente. Concludiamo se diciamo che $u_j \rightharpoonup^*_{L^1} u$. Unica cosa su cui non dobbiamo perderci è chi va prima all'infinito: Sia $\varphi \in L^\infty$ e vogliamo che $\int \varphi(u_j - u) \to 0$.

$$\left| \int \varphi(u_j - u) \right| \leq |\int \varphi(u_j - u_j^k)| + |\int \varphi(u_j^k - \omega^k)| + |\int \varphi(\omega^k - u)|$$

(moduli restan fuori, sennò ti dai zappa sui piedi da soli).
Fisso $\varepsilon > 0$ (dobbiamo trovare k furbo) io so che il terzo termine è $< \frac{\varepsilon}{3}$ se scelgo k grande (non dipende da j) visto che ho convergenza forte.
il primo pezzo c'è la j, ma per modo di dire:

$$\int |\varphi||u_j - u_j^k| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{\{|u_j|>k\}} |u_j| < \frac{\varepsilon}{3}$$

per un k abbastanza grande tale che $\int_{\{|u_j|>k\}} |u_j| < \frac{\varepsilon}{3\|\varphi\|_\infty}$.
Studio il secondo pezzo: dal primo e dal terzo ho scelto, quindi ormai quello è fissato: ho preso ω^k come limite debole in L^1, visto che $\varphi \in L^\infty$ e ho misura finita allora $\varphi \in L^1$, quindi posso dire che il limite su j è 0.
$\Leftarrow$): (a differenza di quanto capita di solito questa freccia è più difficile e meno interessante)

Idea Ridursi ad una successione di volta in volta più semplice ⌟

Supponiamo che Γ non sia equiintegrabile (usiamo la definizione base) $\exists \varepsilon > 0$ ed esiste $\{u_j\} \subseteq \Gamma$ e una classe $\{A_j\}$ di insiemi tali che: $\mu(A_j) \leq \frac{1}{2^j}$ e $\int_{A_j} |u_j| > \varepsilon$. Vogliamo vedere che questo è assurdo: una successione già ce l'ho: $\{u_j\}$. A meno di sottosuccessione, $u_j \rightharpoonup u$.

Idea Questa cosa è troppo oscura, ci sono troppe complicazioni: limite u, moduli, insiemi A_j come sono tra di loro? Vado a semplificare ⌟

Chiamo $\tilde{u_j} = u_j - u$, $\tilde{u_j} \rightharpoonup 0$ e $\tilde{A_j} = A_j$.

$$\int_{A_j} = \int_{A_j} |u_j - u| \geq \int_{A_j} |u_j| - \int_{A_j} |u| > \frac{\varepsilon}{2} = \tilde{\varepsilon}$$

Quindi ora abbiamo $|\tilde{A_j}| < \frac{1}{2^j}$, $\int_{\tilde{A_j}} |tildeu| > \tilde{\varepsilon}$ e $\tilde{u_j} \rightharpoonup 0$.

Voglio ora insiemi disgiunti: Chiamo $\tilde{\tilde{u_j}} = u_{\tilde{\alpha(j)}}$ con $\alpha(0) = 0$ e chiamo $\tilde{\tilde{A_j}} = \tilde{A}_{\alpha(j)} \cup_{l>j} \tilde{A}_{\alpha(l)}$.

Devo capire come costruire $\alpha(n)$: la prima e terza condizione restano vere gratis, la più critica è la terza

$$\int_{\tilde{A}_0} |\tilde{u_0}| > \tilde{\varepsilon}$$

Se $|B| < \eta_0$ allora $\int_B |\tilde{u_0}| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{16}$
Definisco quindi $\alpha(1)$ tale che $\frac{2}{2^{\alpha(1)}} < \eta_0$ ossia

$$\int_{\tilde{\tilde{A}}_0} |\tilde{u}_0| > \tilde{\tilde{\varepsilon}}$$

(non mi devo preoccupare di aver coperto tutto perchè integrale positivo) Quindi ora ho $\tilde{\tilde{A_j}} < \frac{1}{2^j}$ DIGIUNTI, e $\int_{\tilde{\tilde{A}}_j} |\tilde{\tilde{u}}_j > \tilde{\tilde{\varepsilon}}, \tilde{\tilde{u}}_j \rightharpoonup 0$ e ho anche che (da non dimeticare)

$$\int_{\cup_{l>1} \tilde{\tilde{A}}_l} |\tilde{\tilde{u}}_j| < \frac{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}{8}$$

Ora ci resta da sistemare il segno:

posso lavorare con i tripli tilde in modo da dire che su A triplo avrò che u_j o è tutta positiva o è tutta negativa (diverso per ogni j) così insiemi han misura sempre $< 1/2^j$ e restan disgiunti, ho $|\int utiltiltil| > \tilde{3}\varepsilon$ così (da metterne 3 tilde)

$$\int_{\cup_{l>1} \tilde{\tilde{A}}_l} |\tilde{\tilde{u}}_j| < \frac{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}{4}$$

Allora passo 5: avrò $|B_j| < \frac{1}{2^j}$, disgiunti, $v_j \rightharpoonup 0$, $|\int_{B_j} v_j| > \varepsilon'$ e $\int_{\cup_{l>j} B_l} |v_j| < \frac{\varepsilon'}{2}$ (hai anche che v_j è di segno costante su B_j)

l'unica cosa nuova è stata di aggiungere il passato: $\left|\int_{\cup_{l<j}} v_j\right| < \frac{\varepsilon'}{4}$. ho che $\varepsilon' = \frac{\varepsilon 3til}{2}$ e $v_j = u_{\beta(j)}$ 3 til e $B_j = A_{\beta(j)}$ 3 til. (tutte le condizioni tranne l'ultima sono gratis, vediamo l'ultima).

$\beta(0) = 0$. (prima non ho niente). Come scelgo $\beta(1)$? vorrei

$$|\int_{B_0} \tilde{\tilde{\tilde{u}}}_j| < \frac{\varepsilon'}{4}$$

e visto che vado a 0 non ho problemi. Tutti gli altri passaggi sono uguali: se ho scelto fino a $\beta(n)$, come scelgo $\beta(n+1)$?

$$|\int_{B_0 \cup B_n} v_j| < \frac{\varepsilon'}{4}$$

(ho funzione caratteristica in L^∞ che mi fa concludere)

Ora vediamo di trovare assurdo con i 5 pallini: (non mi interessa condizione di insiemi disgiunti)

$$0 \leftarrow \int \varphi v_j = \int_{B_j} v_j + \int_{\cup_{l>j}} v_j + \int_{\cup_{l<j}} v_j$$

con $\varphi = \chi_{\cup_{l \in \mathbb{N}} B_l}$.

se $v_j > 0$ su B_j allora Io so che il primo o è $> \varepsilon'$
il secondo è $> \frac{\varepsilon'}{2}$
il terzo è $> -\frac{\varepsilon'}{4}$ quindi $\int \varphi v_j > \frac{\varepsilon}{4}$

se invece $v_j < 0$ su B_j allora Io so che il primo o è $< \varepsilon'$
il secondo è $< \frac{\varepsilon'}{2}$
il terzo è $< \frac{\varepsilon'}{4}$ quindi $\int \varphi v_j < -\frac{\varepsilon}{4}$

ASSURDO

$\square$

14 Lezione 20/04

Inizio registrazione 11.19

Definizione 14.1

Una funzione u si dice assolutamente continua se $\forall \varepsilon, \exists \delta$ tale che $\sum |b_i - a_i| < \delta \Rightarrow |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$

(in unif continua lavoro con un intervallo in ass continu con tanti intervallini)

È chiaro che lipschitziana $\Rightarrow$ assolutamente continua $\Rightarrow$ uniformemente continua $\Rightarrow$ continua. (vedere opportuni controesempi)

se μ è una misura assolutamente continua allora $\forall \varepsilon, \exists \delta$ con $|A| < \delta \Rightarrow \mu(A) < \varepsilon$ (assoluta continuità dell'integrale).

Abbiamo definito le ass continue e poi ce le siamo dimenticate. Ora vdediamo che tornano comode.

Sia u assolutamente continua su $[0,1]$. Lavoro con intervalli $[\frac{1}{j}, \frac{1}{j+1}]$. Definisco la funzione sui nodi $\frac{1}{j}$ e considero poi la funzione affine a tratti (la sto approssimando con spezzata)

DISEGNO

Chiaramente, basta unif cont, vale $u_j \to u$ uniformemente. Le funzioni affini a pezzi in particolare sono C^1 a tratti. Quindi vuol dire u_j' è definita quasi ovunque (non nei pezzi in cui ho spigoli). $u_j' \in L^1$ infatti è costante a tratti su un numero finito di tratti. Se calcoliamo la norma L^1 vediamo di cosa ci possiamo accorgere. Se $j > \frac{1}{\delta(1)}$ allora $\frac{1}{j} < \delta(1)$ e questo vuol dire che

$$\forall n \in \{0, j-1\} |u(\frac{n+1}{j}) - u(\frac{n}{j})| < 1$$

(basta unif cont). Ma allora

$$\int |u_j'| = \sum_{int} |u_j'| = \sum |u(\frac{n+1}{j}) - u(\frac{n}{j})| < j$$

Se j è enorme posso prendere il più piccolo multiplo di $\frac{1}{j}$ come delta e la stima continua a valere , ma fa schifo. Usando la ass cont in realtà ho

$$< \frac{2}{\delta(1)}$$

Questo per dire che le norme L^1 sono limitate. Chiamo $M = \sup \|u_j'\|_{L^1}$ ($M < \frac{2}{\delta(1)}$).

Abbiaamo la limitatezza in L^1, non è che per caso siamo equiintegrabili?

Fisso $\varepsilon > 0$ e considero $\delta(\varepsilon)$. Vorrei capire se le u_j' sono equiintegrabili: ossia vorrei che $\exists \bar{\delta}$ tale che $|A| < \bar{\delta}$ allora $\int_A |u_j'| < \varepsilon$. Detto $I_n = [\frac{n}{j}, \frac{n+1}{j}]$. Cerchiamo di dimostrarlo e poi vedremo chi è il $\bar{\delta}$ giusto. Sia A qualsiasi con $|A| < \bar{\delta}$ e chiamiamo $A_n = A \cap I_n$. Voglio capire quanto vale $|A \cap I_n|$. In media mi aspetto che sia $< \frac{\bar{\delta}}{j}$. Come l'ho scritta, me la devo dimenticare. Chiamo $S_1 = \{n \in \{0, \dots, j-1\} | |A_n| < \frac{\smile}{j}\}$ e $S_2 = \{\cdots : |A_n| > \frac{\smile}{j}\}$. Capiremo poi chi deve essere $\smile$.

$$\sum_{n\in S_1}\int_{A_n}|u_j'| = \sum_{n\in S_1}\int_{I_n\cap A}|u_j'| = \sum_{n\in S_1}\frac{|A_n|}{|I_n|}\int_{I_n}|u_j'| < \smile M$$

io voglio che questo sia $< \varepsilon$, quindi ci basterebbe che $\smile < \frac{\varepsilon}{M}$. Vediamo di capire S_2

Idea La mia idea è che quelli che sono grossi siano pochi ⌟

Qual è la cardinalità di S_2? Sarà $\frac{\smile}{j} < \bar{\delta}$. Ossia $\#S_2 < \frac{\bar{\delta}j}{\smile}$. Qui son fregato apparentemente perchè se $\smile$ è piccolo, visto j piccolo, ho roba enorme. Ma io ancora devo scegliere $\bar{\delta}$, quindi posso porre $\smile = \sqrt{\bar{\delta}}$ e poi scelgo $\bar{\delta}$. Così

$$\sum_{n\in S_1}\frac{|A_n|}{|I_n|}\int_{I_n}|u_j'| < \sqrt{\bar{\delta}}M$$

quindi mi basta segliere $\bar{\delta}^2 < \frac{\varepsilon}{M}$ (il quadrato me lo suggerisce S_2, a S_1 basterebbe senza).

Ma allora $\#S_2 < \sqrt{\bar{\delta}}j$ con j che va a infinito. Calcoliamo (usando la roba di prima)

$$\sum_{n\in S_2}\int_{A_n}|u_j'| \leq \sum_{n\in S_2}\int_{A_n}|u_j'| = \sum_{n\in S_2}|u(\frac{n+1}{j} - u(\frac{n}{j})| \overset{?}{<} \varepsilon$$

Infatti $\frac{|A_n|}{|I_n|} < 1$. Ma la ? è vera? Lo è se $\sum$ distanze è $< \delta(\varepsilon)$. Ma $\sum < \frac{1}{j}\#S_2 < \delta(\varepsilon)$, dove ultimo $<$ è vero se $\bar{\delta} < \delta(\varepsilon)$.

Quindi $\bar{\delta} := \sqrt{\min\{\frac{\varepsilon}{2M}, \delta(\frac{\varepsilon}{2})\}}$.

Quindi abbiamo scoperto che data una ass continua qualsiasi, se la vado ad approssimare con affine a pezzi, le derivate dei pezzi sono equiintegrabili.

Ricominciando: data $u \in AC$, chiamo u_j le approssimazioni affini e $u_j' \rightharpoonup \omega$ in L^1 e $u_j \to u$ unif. Io so che $\forall x, y \in [0,1]$ ho

$$u(y) - u(x) \longleftarrow u_j(y) - u_j(x) = \int_x^y u_j'(t)dt \longrightarrow \int_x^y \omega(t)dt$$

questo assomiglia molto a teorema fondamentale calcolo integrale.

Definiamo lo spazio

$$W^{1,p}(I) = \{u : [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ continue, tali che } \exists u' \in L^1 \text{ tale che } \forall x, y \in [0,1] \text{ si ha } u(y)-u(x) = \int_x^y u'(t)dt\}$$

Si chiama derivata debole e con abuso di notazione viene indicata con u'. Al posto di u continua potremmo anche dire $u \in L^1([0,1])$ e $\forall x, y$ punti di lebesgue. (volevo continuità perchè sennò $u(y) - u(x)$ non è ben definito. lo è se lo faccio sui punti di lebesgue).

In $W^{1,1}$ definiamo la norma $\|u\|_{W^{1,1}} = \|u\|_{L^1} + \|u'\|_{L^1}$. Dalla linearità di integrale segue che $W^{1,1}$ è spazio vettoriale reale. È Banach? Supponiamo che $\{u_n\}$ sia di Cauchy in $W^{1,1}$. Questo vuol dire che $\{u_n\}, \{u_n'\}$ sono di Cauchy in L^1, dunque $u_n \overset{L^1}{\to} u$ e $u_n' \overset{L^1}{\to} \omega$. Vorrei vedere $\omega = u'$:

$$u(y) - u(x) \leftarrow u_n(y) - u_n(x) = \int_x^y u_n'(t)dt \to \int_x^y \omega(t)dt$$

per la $\leftarrow$ mi serve convergenza puntuale, ma convergenza forte L^1 implica convergenza puntuale $q.o.x$. è più naturale la definizione con $u \in L^1$, ma sono equivalenti. se ho u continua allora la convergenza è per ogni x.

Consideriamo $i : W^{1,1} \to L^1 \times L^1$ con $i(u) = (u, u')$. Ovviamente i è lineare, continua. Addirittura è un'isometria per definizione di $\|u\|_{W^{1,1}}$. Ma allora induce $i^* : (L^1 \times L^1)^* \to (W^{1,1})^*$. Poichè $(L^1 \times L^1)^* = (L^1)^* \times (L^1)^* = L^\infty \times L^\infty$ allora voglio capire la dualità di $W^{1,1}$.

$$\langle i^*(\varphi, \psi), u \rangle = \langle (\varphi, \psi), i(u) \rangle = \int \varphi u + \int \psi u'$$

Se $u_n \overset{W^{1,1}}{\rightharpoonup} u$ allora $\forall \varphi, \psi \in L^\infty \times L^\infty$

$$\langle i^*(\varphi, \psi), u_n \rangle \to \langle i^*(\varphi, \psi), u \rangle$$

ossia

$$\int \varphi u_n + \psi u_n' \to \int \varphi u + \psi u'$$

Siccome vale per ogni φ, ψ posso considerarle come $\equiv 0, \equiv 1$ e allora ho

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \\ u_n' \rightharpoonup u' \end{cases}$$

Invece vale al contrario? Data $v \in L^1$, chiamiamo $j(v)(x) = \int_0^x v(t)dt$. Chiaramente $j(v) \in L^\infty$ ($\|j(v)\|_{L^\infty} \leq \|v\|_{L^1}$). Ma allora $j(v) \in W^{1,1}(I)$. Noto che $j : L^1 \to W^{1,1}$ è lineare (ovvio) e continua (guardo le norme, finezza).

$v_n \rightharpoonup 0$ in L^1. Allora $j(v_n)(x) = \int_0^x v_n(t)dt \to 0$. Ma per convergere debolmente devo essere limitato quindi

$$\|j(v_n)\|_{L^\infty} \leq \|v_n\|_{L^1} \leq COST$$

Ma allora $j(v_) \to 0$ fortemente in L^1.

Se $\Phi \in (W^{1,1})^*$ allora $j^*(\Phi) \in (L^1)^*$. Quindi

$$\langle \Phi, j(v_n) \rangle = \langle j^*(\Phi), v_n \rangle \to 0$$

ossia

$$j(v_n) \overset{W^{1,1}}{\rightharpoonup} 0$$

Quindi, se $v_n \overset{L^1}{\rightharpoonup} 0$ allora $j(v_n) \overset{W^{1,1}}{\rightharpoonup} 0$ e $j(v_n) \overset{L^1}{\to} 0$. Supponiamo di avere $\{u_n\} \subseteq W^{1,1}$ tale che $\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \\ u_n' \rightharpoonup 0 \end{cases}$ entrambe in L^1. Allora

$$j(u_n') = \int_0^x u_n'(t)dt = u_n - u_n(0)$$

cioè che $u_n - u_n(0) \overset{L^1}{\to} 0$ e $u_n - u_n(0) \overset{W^{1,1}}{\rightharpoonup} 0$. Avevamo osservato che $u_n(y) - u_n(x) \leq \|u_n'\|_{L^1}$ ossia che $\{u_n(0)\}$ è limitata. Visto che sono in $\mathbb{R}$ so $u_n(0) \to$

$\alpha \in \mathbb{R}$. Ciò vuol dire $u_n(0) \xrightarrow{W^{1,1}} \alpha$. Ma allora $u_n \overset{W^{1,1}}{\rightharpoonup} \alpha$ e, in particolare, $u_n \xrightarrow{L^1} \alpha$. Ma allora $u \equiv \alpha$. Ossia abbiamo scoperto che

$$\begin{cases} u_n \overset{W^{1,1}}{\rightharpoonup} u \\ u_n \xrightarrow{L^1} u \\ u \text{ costante} \end{cases}$$

Supponiamo ora $\begin{cases} u_n \overset{L^1}{\rightharpoonup} u \\ u_n' \overset{L^1}{\rightharpoonup} \omega \end{cases}$, vorrei dire $u' = \omega$. Chiamo $V = j(\omega)$, allora $\begin{cases} u_n - V \overset{L^1}{\rightharpoonup} u - V \\ (u_n - V)' \overset{L^1}{\rightharpoonup} 0 \end{cases}$. Siamo nella situazione di prima: abbiamo che

$$\begin{cases} u_n - V \overset{W^{1,1}}{\rightharpoonup} u - V \\ u_n - V \xrightarrow{L^1} u - V \\ u_V = \text{ cost} \end{cases}$$

Essendo $V \in L^1$ ho

$$\begin{cases} u_n \overset{W^{1,1}}{\rightharpoonup} u \\ u_n \xrightarrow{L^1} u \end{cases}$$

e $u - V = \text{cost}$ assicura $(u - V)' = 0 \Rightarrow u' = V' = \omega$. $\square$Abbiamo scoperto che $u_n \overset{W^{1,1}}{\rightharpoonup} u$ con $u' = \omega \iff \begin{cases} u_n \xrightarrow{L^1} u \\ u_n' \xrightarrow{L^1} u' \end{cases}$

Osservazione 14.1
$W^{1,1} = AC$ (AC= funzioni assolutamente continue)

Dimostrazione. $\subseteq$: ovvia per assoluta continuità dell'integrale.
$\supseteq$: se $u \in AC$ allora $u_j \xrightarrow{L^1} u$ e $\{u_j'\}$ sono equiintegrabili $\Rightarrow u \in W^{1,1}$. Vero per la caratterizzazione di convergenza in $W^{1,1}$. $\square$

Quindi la definizione di ass contin che sembrava buttata lì a caso, ha senso che venga scelta.

Quindi otteremo risultati considerando problemi in cui $u \in AC$ con

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 F(x, u(x), u'(x))dx$$

con $u(0) = A, u(1) = B$.

15 Lezione 24/04

16 Lezione 27/04

inizio registrazione 11.32

Sia F continua, non convessa in p. Allora $\exists(\bar{x}, \bar{z}, p_1, p_2)$ tali che

$$F(\bar{x}, \bar{z}, tp_1 + (1-t)p_2) > tF(\bar{x}, \bar{z}, p_1) + (1-t)F(\bar{x}, \bar{z}, p_2)$$

DISEGNO

dove la costruzione è la stessa di quella dell'altra volta. Come esercizio fai conti, non vale la semicontinuità.

Se invece F non continua? Basta prendere un punto di Lebesgue e rifaccio lo stesso ragionamento. (questo è per mostrare che la convessità è necessaria)

Vogliamo togliere la non dipendenza da x, z. Vediamo il seguente:

Teorema 16.1 – Semicontinuità inferiore di Tonelli

Il funzionale $\mathcal{F}$ è sequenzialmente continuo inferiormente debolemente $W^{1,1}$ se F è convessa in p, F e F_p sono continue, $F \geq m(x) \in L^1$.

Osservazione 16.1

Ricordiamo che convesso implica che quasi ovunque sono C^1. Vedremo che la continuità nella x non ci interesserà. la condizione $F \geq m(x)$, richiama la condizione di $F \geq 0$ della scorsa volta. (consideriamo $F - m(x) \geq 0$ dove energia cambia per integrale di m che però è finito quindi ok)

Lemma 16.2

Se $u_j \rightharpoonup u$ in L^1, $\omega_j \to \omega$ puntualmente q.o. con $\|\omega_j\|_{L^\infty} \leq cost$, allora $u_j\omega_j \rightharpoonup u\omega$ in L^1.

Idea minuto 11.45 Convergenza puntuale è la stessa di convergenza di convergenza uniforme , a meno di un insieme di misura epsilon. questa stima mi viene data dalla limitatezza di ω_j. Quindi ho debole epr forte , ossia debole ⌟

Dimostrazione. Sia $\omega_j \to \omega$ q.o.x allora $\exists J \subseteq I, |J| < \delta$ tale che $\omega_j \to \omega$ uniformemente su $I \backslash J$. (severini egorof). COme scelgo δ?

$$\int_I u_j\omega_j\varphi = \int_J u_j\omega_j\varphi + \int_{I\backslash} u_j\omega_j\varphi$$

ora mi rendo conto che mi serve dire che, siccome $u_j \rightharpoonup u$, per ogni $\varepsilon, \exists\delta : \forall |J| < \delta, \|u_j\|_{L^1(J)} < \varepsilon$. Quindi ora che ho δ riprendo conto di prima

$$|\int_J u_j\omega_j\varphi| \leq \int_J |u_j|\|\varphi\|_{L^\infty} cost \leq \varepsilon\|\varphi\|_{L^\infty} cost$$

$$\int_{I\backslash J} u_j\omega_j\varphi - u\omega\varphi = \int_{I\backslash J} u_j(\omega_j - \omega)\varphi + \int (u_j - u)\omega\varphi \to 0 + 0$$

Idea La roba che tende debole ha bisogno di essere scontrata contro qualcosa di fisso, se invece convergo forte posso scontrarmi contro roba che varia ⌟

Secondo va a 0 ok, il primo perchè: ho $\omega_j - \omega$ che a 0 perchè converge uniformemente, mentre u_j convergendo debolmente ha la norma L1 limitata quindi ok.

$$\liminf_{j\to\infty} |\int_I u_j\omega_j\varphi - u\omega\varphi| \leq \varepsilon\|\varphi\|_\infty cost + \int_J u\omega\varphi \leq \varepsilon$$

□

minuto 12.00 per cosa importante che ti sei perso

Dimostrazione. Sia $u_j \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$. Devo dimostrare che energia di u_j minore di energia di u. Le u_j sono uniformemente limitate (perchè convergono uniformemente ad una funzione continua). Non ho limitazione su u_j', ma convergendo in $W^{1,p}$, sono equiintegrabili. (compatezza a meno di qualcosa tipo). Per convessità sappiamo che (con disegnino non ti sbagli)

$$F(x,z,p) \geq F(x,z,q) + (p-q)F_p(x,z,q)$$

Idea Io avrei bisogno che $p = u_j'$ e $q = u'$ ⌟

$$F(x,u_j,u_j') \geq F(x,u_j,u') + (u_j'-u')F_p(x,u_j,u')$$

ovviamente ho bisogno che u' non sia troppo grosso. Considero quindi $J = \{|u'| > k\}$.

$$\mathcal{F}(u_j) - \int_J F(x,u_j,u_j') + \int_{I\setminus J} F(x,u_j,u_j') \geq \int_J m(x) + \int_{I\setminus J} F(x,u_j,u') + \int (u_j'-u')F_p(x,u_j,u')$$

primo lo so fare. per il terzo invece so che $(u_j'-u')$ converge debolemente a 0 e essendo F_p continua , ho convergenza punutalmente q.o a $F_p(x,u,u')$. E, per costruzione, in $I\setminus J$ ho che tutte le funzioni in gioco sono limitate uniformemente. quindi per il lemma so che tendo debolemente a $0 \cdot F_p(x,u_j,u')$. Quindi quando $j \to +\infty$, convergo a 0. Per il secondo? spero che converga a $\int_{I\setminus J} F(x,u,u')$. essendo la F continua e essendo limitata su un chiuso limitato allora convergenza dominata, tendo proprio a quello. Quindi abbiamo scoperto che

$$\liminf_{j\to+\infty} \mathcal{F}(u_j) \geq \int_{\{|u'|>k\}} m(x) + \int_I F(x,u,u')\chi_{\{x:|u'(x)|\leq k\}}$$

$$\geq \int m(x) + \int F(x,u,u')\chi_{\{|u'|\leq k, F(x,u,u')>0\}}$$

PERSO TOTALMENTE !! (da usare convergenza monotona con seguente scrittura che non hai capito come ha ottenuto

$$\liminf \mathcal{F}(u_j) \geq \int_J m(x) + \int_I F(x,u_j,u') - \int_I F(x,u,u')\chi_{\{x:|u'|>k, F(x,u,u')>0\}}$$

□

Definizione 16.3

Il convessificato di $A \subseteq E$, con E normato, è il più piccolo convesso che contiene A:

$$co(A) = \{\sum_{i=1}^{M} \lambda_j a_j, M \in \mathbb{N}, \{a_j\} \subseteq A, \lambda_j \geq 0, \sum \lambda_j = 1\}$$

Lemma 16.4 – Lemma di Caratheodory

Se $A \subseteq \mathbb{R}^N$, allora nella definizione di $co(A)$ allora è sufficiente che $M \leq N + 1$.

Dimostrazione. Se ho $n+1$ vettori $b_1, \ldots, b_{n+1}$ in $\mathbb{R}^n$, non sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \exists \alpha, \ldots, \alpha n + 1 \neq \underline{0}$ con $\sum \alpha_i b_i = 0$. Voglio farla diventare una combinazione convessa: se ho $n+2$ vettori in $\mathbb{R}^n$, allora $\exists \alpha_1, \ldots \alpha_{n+1} \neq \underline{0}, \sum \alpha_i b_i = 0, \sum \alpha_i = 0$. Basta considerare $(b_i, 1)$ con $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Sia $v \in co(A)$ tale che si possa scrivere con M elementi di A, ma non $M-1$, con $M > N+1$. Quindi $v = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i a_i$ (combinazione convessa). Esistono degli α_i tale che $\sum \alpha_i = 0$ e $\sum \alpha_i a_i = 0$. (visto che non sono tutti nulli e somma totale è zero, alcuni sono positivi, altri negativi). Chiamo $\bar{\alpha} = \min\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i}, \alpha_i > 0\}$. Vuol dire che $\lambda_i \geq \alpha_i \bar{\alpha} \forall i$. (per negativi è ovvia, per positivi è per definizione). Allora

$$v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \alpha_i \bar{\alpha}) a_i$$

con $\lambda_i - \alpha_i \bar{\alpha} \geq 0$ e sono in somma 1. Ma visto che $\exists i$ tale che $\bar{\alpha}$ è realizzato la combinazione di v è con $M-1$ elementi, assurdo per minimilità $\square$

Osservazione 16.2

Sappiamo che la topologia debole e la topologia forte sono molte diverse. essere chiuso forte molto easy, chiuso debole no. Se A è convesso so che chiusura forte se e solo se chiusura debole

$\bar{A} \subseteq \overline{\overline{co}}(A)$.

Detto $A = \{u_j\}$ se $u_j \rightharpoonup u$ allora $\Rightarrow u \in \bar{A} \Rightarrow u \in \overline{\overline{co}}(A)$. Allora $\exists \varphi_n \to u$ con $\varphi_n = \sum \lambda_j u_j$

con

$$\varphi_n = \sum_{j=M_n}^{M_{n+1}-1} \qquad M_0 = 0$$

Lemma 16.5 – Lemma di Mazur

Sia B Banach, se $u_j \rightharpoonup u$ allora $\exists M_n, \lambda_j$ con $\varphi_n \to u$ dove $\varphi_n = \sum_{j=M_n}^{M_{n+1}-1} \lambda_j u_j$ in combinazione convessa.

Dimostrazione. BOH $\square$

17 Lezione 04/05

inizio lezione 11.20

La richiesta di f continua è un po' troppo stringente. Vogliamo cercare di ridurla. Prima introduciamo la convergenza forte-debole.

Definizione 17.1 – Convergenza forte-debole

Diciamo che $(u_j, v_j) \to (u, v)$ forte debole se $u_j \to u$ e $v_j \rightharpoonup v$.

Osservazione 17.1

Se $v = u'$ ritroviamo la convergenza $W^{1,1}$.

Teorema 17.2 – Teorema di Ioffe

Detta $\mathcal{F}(u, v) = \int F(x, u(x), v(x))$, $\mathcal{F}$ è s.c.i sequenzialmente forte-debole se $F \geq 0, F$ convessa nella terza variabile e F s.c.i su seconda e terza e F boreliana.[a]

[a] condizioni più deboli possibili

Dimostrazione. Consideriamo $(u_j, v_j) \xrightarrow{FD} (u, v)$. Sappiamo che esiste una funzione $\varphi \geq 0$, convessa, più che lineare e tale che $\int \varphi(v_j) \leq 1$ poichè $\{v_j\}$ sono equiintregrabili. Ci sono due idee importanti

Idea Vogliamo qualcosa che sia più debole di φ ma che sia sempre più forte di t. ⌟

Idea Utilizzo soprendente lemma di Mazur ⌟

Definiamo $H(t) = \sqrt{t\varphi(t)}$. Vale che $\frac{H(t)}{t} \to +\infty$ e $\frac{H(t)}{\varphi(t)} \to 0$. (da ricordare dimostrazione di paolini su tre condizioni per equiintegrabilità per minuto 11.32)

Definiamo un oggetto intermedio: $\xi_j = H(|v_j|)$. (molto più lenta di $\varphi(v_j)$). (il problema è che v_j sono vettoriali, mentre u è scalare). Abbiamo bisogno di un certo tipo di compattezza.

Le ξ_j sono equiintegrabili (attenzione che queste sono scalari) (avessi applicato le φ avrei avuto qualcosa di equilimitato in L^1 e sappiamo che c'è una bella differenza da equiintegrabilità). Infatti, detta $\Phi = \varphi \circ H^{-1}$, si ha che Φ è più che lineare, infatti

$$\frac{\Phi(t)}{t} = \frac{\varphi(H^{-1}(t))}{t} = \frac{\varphi(s)}{H(s)} \to +\infty$$

e d'altra parte

$$\int \Phi(\xi_j) = \int \varphi(H^{-1}(\xi_j)) = \int \varphi(|v_j|) \leq 1$$

quindi sono equiintegrabile. (≤ 1 lo ho per ipotesi).

Possiamo supporre gratis che $F(u_j, v_j) \to \liminf F(u_j, v_j)$.

Abbiamo che $u_j \to u$ forte in L^1, $v_j \rightharpoonup v$ in L^1 e $\xi_j \rightharpoonup \xi$ in L^1. A questo punto utilizzo il lemma di Mazur: esistono $\lambda_j \geq 0, N_h \to +\infty$ crescente tale che

$$\sum_{N_h}^{N_{h+1}-1} \lambda_j = 1$$

e

$$\gamma_h \to v, \eta_h \to \xi$$

$$\gamma_h = \sum \lambda_j v_j, \eta_h = \sum \xi_j$$

(abbiamo applicato mazur due volte. la seconda non su successioni originali, ma su quelle che hai dopo prima applicazione) $\hat{u}_h = \sum \lambda_j u_j$. A meno di sottosuccessione posso supporre che $\hat{u}_h, \gamma_h, \eta_h \to u, v, \xi$ puntualmente quasi ovunque.

Idea Uso caratheodory in maniera bella. io vorrei passare al limite su j. Se blocchi avessero tutti la stessa lunghezza, sarebbe molto nice, ma io, come mi posso aspettare, avrò blocchi sempre più lunghi. L'idea di Ioffe è: fregatene. *Claim*: $\forall x$ tale che $\hat{u}_h(x), \gamma_h(x), \eta_h(x) \to u(x), v(x), \xi(x)$, si ha che

$$F(x, u(x), v(x) \leq \liminf \alpha_h$$

dove

$$\alpha_h = \sum_{N_h}^{N_{h+1}-1} \lambda_j F(x, u_j(x), v_j(x))$$

sarebbe la combinazione a blocchi. ⌟

Se ho claim, la tesi segue subito poichè

$$\mathcal{F}(u, v) = \int F(x, u(x), v(x)) \leq \int \liminf \alpha_h \leq \liminf \int \alpha_h$$

$$= \liminf \int \sum F(x, u_j(x), v_j(x) = \liminf \sum \int F(x, u_j(x), v_j(x) = \liminf \mathcal{F}(u_j, v_j)$$

(questo liminf in realtà è limite perchè lo abbiamo supposto gratis).

La cosa bella è che il claim ci fa passare in uno spazio finito dimensionale, su cui quindi posso applicare Caratheodory.

Visto che x fissata, abuso di notazione la omettiamo in quello che scriviamo ora.

$$\mathbb{R}^{n+2} \ni (\hat{u}_h, \gamma_h, \eta_h) = \sum_{j=N_h}^{N_{h+1}-1} \lambda_j (u_j, v_j, \xi_j)$$

Caratheodory mi dice che esistono $\beta_{h,l}$ tali che $\beta_{h,l} \geq 0, \sum_{l=1}^{n+3} \beta_{h,l} = 1$ e $j(h, l) \in \{N_h, N_h + 1, \ldots, N_{h+1} - 1\}$ tali che

$$(\hat{u}_h, \gamma_h, \eta_h) = \sum_{l=1}^{n+3} \beta_{h,l}(u_{j(h,l)}, v_{j(h,l)}, \xi_{j(h,l)})$$

Possiamo supporre gratis che $\beta_{h,l} \overset{h\to\infty}{\to} \beta_l$ e $\sum \beta_l = 1$.

$\boxed{\text{Non ho capito cosa vogliamo fare minuto 12.05 (qualcosa su successione dei vettori)}}$

Sia $v_{j(h,l)}$. Questa o $v_{j(h,l)} \overset{h\to\infty}{\to} \omega_l$ oppure $|v_{j(h,l)}| \to +\infty$. Chiamo L quelli belli, ossia $L = \{1 \leq l \leq n+3 | v_{j(h,l)} \to \omega_l\}$. Noi sappiamo

$$\sum_{l=1}^{n+3} \beta_{h,l} v_{j(h,l)} \to v(x)$$

posso dire che questo

$$\Rightarrow \sum_{l \in L} \beta_l \omega_l = v(x)?$$

Entrano in gioco ξ_j in maniera fondamentale. Sappiamo che

$$\xi \leftarrow \eta_h = \sum \beta_{h,l} \xi_{j(h,l)}$$

sono termini positivi la cui somma converge $\Rightarrow$ sono limitati. Ossia $\exists C$ tale che $0 \leq \beta_{h,l}\xi_{j(h,l)} \leq C$. (questo ragionamento non lo posso fare su i v_j perchè sono vettori, non ha senso dire positivi). Quindi $C \geq \beta_{h,l}\xi_{j(h,l)} = \beta_{h,l} H(|v_{j(h,l)}|) >> |\beta_{h,l} v_{j(h,l)}$ poichè H più che lineare. Ma allora per gli l cattivi, abbiamo che $|v_j| \to +\infty \forall l \notin L$, ossia:

$$\frac{H(|v_{j(h,l)}|}{|v_j|} \to +\infty \quad |v_j| \to +\infty$$

allora moltiplico e divido per $\beta_{h,l}$ e

$$\frac{\beta_{h,l} H(|v_{j(h,l)}|}{\beta_{h,l}|v_j|} \to +\infty$$

ma essendo la roba sopra limitata, l'unico modo che questo esploda è che denominatore vado a 0. Quindi abbiamo scoperto che $\forall l \notin L$ si ha $\beta_{h,l}|v_{j(h,l)} \to 0$. Allora posso passare al limite (per l buoni è ovvio) e ho

$$\sum_{l=1}^{n+3} \beta_{h,l} v \Rightarrow \sum_{l \in L} \beta_l \omega_l = v(x)$$

Possiamo dimostrare il claim:

$$F(x, u(x), v(x)) \leq \sum_{l \in L} \beta_l F(x, u(x), \omega_l) \leq \sum_{l \in L} \beta_l \liminf F(x, \hat{u}_{j(h,l)}, v_{j(h,l)}$$

$$\leq \liminf \sum \beta_l F(x, \hat{u}_{j(h,l)}, v_{j(h,l)} = \liminf \sum \beta_{l,h} F(x, \hat{u}_{j(h,l)}, v_{j(h,l)} = (*)$$

primo $\leq$ per convessità, secondo $\leq$ per s.c.i., terzo $\leq$ per $F \geq 0$. (ho sostituito β_l con $\beta_{l,h}$ perchè se limitato ok vado a zero, sennè esplodo e ok).

Poichè all'inizio abbiamo preso che che $F(x, u_j(x), v_j(x)) \to \liminf F(x, u_j, v_j)$ allora

$$(*) \leq 1 \cdot \liminf F(x, u_j, v_j)$$

(sto sommando solo su β_l con $l \in L$. Ma la somma di tutti i β_l era 1) $\square$

vediamo esercizio che ha dato ieri a qualcuno che ha fatto l'orale di ecv

> *Esercizio 17.1*
> Consideriamo $u(0) = 0, u(1) = 1$, vogliamo minimizzare $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \sin(u(x)^2)u'(x)^2 dx$. Quindi $F(x, z, p) = \sin(x^4)p^2$.

Risoluzione: Abbiamo convessità in p? per $[-(\pi)^{\frac{1}{4}}, (\pi)^{\frac{1}{4}}t]$ sono convesso in p. (sono in zona in cui seno è positivo). Avremo esistenza? (lemma di esistenza dobbiamo ancora farli, ma spoiler daremo condizioni in modo da avere equiintegrabilità, che sarà qualcosa che pago in termini di derivata.) Qui ho problemi dove seno fa 0, ossia 0. Quindi in questo esercizio non possiamo usare questi lemmi. Devo provare a farlo a mano. Prendo successione minimizzante $\{u_j\}$, vorrei vedere che $\{u_j'\}$ sono equiintegrabili. HAI SEGUITO IDEA, DA COPIARE APPUNTI

18 Lezione 08/05

registrazione 14.17

Per avere l'esistenza servono due cose: semicontinuità (ce la dà Ioffe) e la compattezza. Vediamo un attimo di teoria del controllo:

Sia $u(0) = z_0$ e $u(1) \in K$ compatto. Lavoriamo con $u'(t) = A(t, u(t)) + B(t, u(t))v$ con $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. A funzione vettoriale B è matrice $n \times n$. Problema standard del "controllo ottimo", dove di solito $K = \{z_1\}$.

$$u'(t) = A(t, u(t)) + B(t, u(t))v$$

$$u(0) = z_0$$

$$u(1) \in K \textit{ compatto}$$

Ma possiamo integrare la u'? Vediamo una variante di teorema di Cauchy.

Lemma 18.1

Il problema $\begin{cases} u'(t) = D(t, u(t)) \\ u(0) = z_0 \end{cases}$ ammette una soluzione $u \in AC$ per qualsiasi $z_0 \in \mathbb{R}^n$ se A è misurabile in t e continua in z e $|A(t,z)| \leq m(t) \in L^1$. La soluzione è unica se $D(t, \cdot)$ è Lipschitz.

Dimostrazione. Identica a quella che si fa al primo anno con teorema di Peano. Consideriamo una successione $\{u_j\} \subseteq W^{1,1}$ definita come $\begin{cases} u_j'(t) = D(t, u_j(\lfloor \frac{t}{j} \rfloor j)) \\ u_j(0) = z_0 \end{cases}$.

Vale che $|u_j'(t)| \leq m(t)$, quindi $\{u_j'\}$ è equiintegrabile e quindi $u_j' \overset{L^1}{\rightharpoonup} u'$ e $u_j \overset{unif}{\to} u$. Poichè $\forall t$ so che[11]

$$u_j(t) = z_0 + \int_0^t D(t, u(\lfloor \frac{t}{j} \rfloor j))dt$$

Guardando l'integranda vogliamo capire se puntualmente vale o meno che

$$u_j(\lfloor \frac{t}{j} \rfloor j) \to u(t)$$

perchè, se è vero, per convergenza dominata, abbiamo la tesi, ossia

$$u(t) = z_0 + \int_0^t D(t, u(t))dt$$

Guardiamo l'identità: voglio dire $u_j(\lfloor \frac{t}{j} \rfloor j) - u(t) \to 0$

$$u_j(\lfloor \frac{t}{j} \rfloor j) - u(\lfloor \frac{t}{j} \rfloor j) + u(\lfloor \frac{t}{j} \rfloor j) - u(t)$$

e le due differenze vanno a zero perchè la funzione u è assolutamente continua. Per l'unicità non cambia nulla rispetto al caso di Peano. (vedi con Gronwall, unicità punto fisso) □

[11] essendo AC sono definite ovunque senza problemi

Teorema 18.2 – Esistenza per il controllo ottimo

Se F verifica le condizioni di Ioffe, ossia $\mathcal{F}$ è sequenzialemente semicontinuo forte-debole, e

- A misurabile in x, continua in z, $|A| \leq m(x) \in L^1$
- B misurabile in x, continua in z, $|B| \leq C$
- l'insieme $Ad := \{\text{risolvo 18}\} \neq \emptyset$
- $F(x,z,p) \geq \varphi(|p|)$ con φ più che lineare (quindi abbiamo convessa)

Allora esiste un minimo di $\mathcal{F}$.

Osservazione 18.1
Le hp qui son ottimale: se non sono più lineare all'infinito, magari ho derivate che non sono equiintegrabili. Senza non potrò mai fare un teorema generale. Non posso rinunciare a continuità perchè devo passare sotto segno di integrale.

Osservazione 18.2
In calcolo delle variazioni, che è quello che ci interessa, $A \equiv 0$, $B = Id$.

Osservazione 18.3
Data v, abbiamo che u si può integrare (grazie a lemma di prima).

Dimostrazione. Siccome l'insieme Ad è non vuoto, allora ammette inf $\neq -\infty$. Quindi esiste $(u_j, v_j) \in Ad$ minimizzante. Sappiamo che[12]

$$\mathcal{F}(u_j, v_j) = \int F(x, u_j, v_j) > \int \varphi(|v_j|)$$

Questo ci dice che le $\{v_j\}$ sono equiintegrabili. Ci serve che anche $\{u_j'\}$ sia equiintegrabile. Ricordiamo $u_j' = A(t, u_j) + B(t, u_j)v_j$. Chiaramente, equiintegrabile per limitata, ho che $\{B(t, u_j)v_j\}$ è equiintegrabile. E poichè $A(t, u_j) \leq m(t)$, non dipende da j, anche lei è equiintegrabile $\Rightarrow$ $\{u_j'\}$ equiintegrabile. Quindi a meno di sottosuccessione possiamo supporre

$$\begin{cases} v_j \rightharpoonup v \\ u_j' \rightharpoonup u' \\ u_j \overset{unif}{\to} u \end{cases}$$

Ora mi devo convincere che (u, v) è soluzione:

$$\mathcal{F}(u, v) \leq \liminf \mathcal{F}(u_j, v_j)$$

questa implica la tesi purchè $(u, v) \in Ad$. Poichè $u_j(0) = z_0$ e le $u_j \to u$ uniformemente, sto apposto. Per la terza condizione basterebbe K chiuso, per convergenza uniforme. Va verificata la ODE: da definizione

$$u_j(t) = z_0 + \int_0^t A(\tau, u_j(\tau))d\tau + \int_0^t B(\tau, u_j(\tau))v_(\tau)d\tau$$

[12]di per sè l'energia del sistema non dipende dal mio controllo. La v mi dice solo cosa fa la u. Non scrivo u' perchè u è solo L^1, non sappiamo se è derivabile o meno

Visto che abbiamo convergenza uniforme, possiamo passare al limite su j. $u_j(t) \to u(t), z_0 \to z_0$ gratis. $A(\tau, u_j(\tau))d\tau \to A(\tau, u(\tau))d\tau$ per argomento uguale a prima (continuità in seconda variabile + convergenza dominata). Vediamo che

$$B(\cdot, u_j)v_j \overset{L^1}{\rightharpoonup} B(\cdot, u)v$$

Ma questo segue, perchè

$$B(\cdot, u)v_j + (B(\cdot, u_j) - B(\cdot, u))v_j$$

e $B(\cdot, u)v_j \overset{L^1}{\rightharpoonup} B(\cdot, u)v$ poichè debole per uniforme(ho B fissata). Voglio che l'altra vada a 0. Ho situazione $f_j g_j$, con f_j che va a 0 puntualmente ed è limitata in L^∞, mentre le g_j sono equilimitate. e questa cosa, abbiamo visto, ci implica che andiamo a 0. Quindi si ha

$$u(t) = z_0 + \int_0^t A(\tau, u(\tau)) + B(\tau, u(\tau))v(\tau)d\tau$$

ossia $(u, v) \in Ad$. □

discorso motivazionale 15:20 - 15:33
se abbiamo il *fenomeno di Laurentieff*, ossia

$$\inf\{\mathcal{F}(u) : u \in W^{1,1}\} < \inf\{\mathcal{F}(u) : u \in C^1\}$$

allora considerare il problema rilassato su $W^{1,1}$ è inutile. Se invece non c'è possiamo essere contenti perchè possiamo usare la teoria di Sobolev.

> *Esercizio 18.1*
> Si minimizzi $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (1 - u'^2)^2 + u$ con $u(0) = u(1) = 0$.

Risoluzione: come visto a inizio corso, con $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (1 - u'^2)^2 + u^2$ non c'è soluzione. Il fatto di avere u è di poter andare nei negativi.

Abbiamo la classica funzione doppio posso (disegno!!) , quindi non siamo convessi. l'inf sarà negativo, ma sarà $-\infty$? se u ha minimo $= -M$, allora

$$\mathcal{F}(u) \geq -M + \int 1 - 2u'^2 + u'^4 \geq -M + \int -2u'^2 + u'^4 = (*)$$

e poichè

$$-2a^2 + a^4 > 0 \iff |a| > \sqrt{2}$$

così

$$(*) \geq -M - 8 + \int_{|u'|>2} \frac{1}{10} u'^4 \sim (M-2)^4$$

quindi so che $\mathcal{F}(u) = 0$ e $\mathcal{F}(u) > 0$ se $min u < -10$. Stiamo cercando un tappo dal basso: quindi se considero

$$\tilde{\mathcal{F}}(u) = \int_0^1 (1 - u'^2)^2 + \max\{u, -10\}$$

visto che l'energia se scendo sotto -10 esplode, il problema con $\tilde{\mathcal{F}}$ o $\mathcal{F}$ è uguale, però $\tilde{\mathcal{F}}$ è limitato dal basso. Io ora però vorrei qualcosa di convesso: considero G^{**}

(è il suo convessificato, fuori da $0, 1$ è uguale, dentro è 0 a tappeto) (DISEGNO) con $G(p) = (1 - p^2)^2$. Consideriamo quindi

$$\hat{\mathcal{F}}(u) = \int_0^1 G^{**}(u') + \max u, 10$$

Il problema ora è DIVERSO. Questo però è convesso quindi posso applicare i miei risultati, poi spero di avere qualcosa di buono per tornare indietro. Per questa $\hat{\mathcal{F}}$, applicando un qualsiasi risultato, so che il minimo esiste $\bar{u}$. Vedremo, ora diamolo per buono, che vale l'equazione di eulero-lagrange per funzioni più generale.

$$\frac{d}{dx} F_p = F_z$$

poichè $\tilde{\mathcal{F}} \neq \bar{\mathcal{F}}$ su $(-1, 1)$ mi concentro su questo. Ma su questo

$$0 = \frac{d}{dx} F_p = F_z = 1$$

quindi l'insieme $\{\bar{u}' \in (-1, 1)\}$ è trascurabile. Poichè

$$\tilde{\mathcal{F}}(\bar{u}) = \bar{\mathcal{F}}(\bar{u}) \leq \bar{\mathcal{F}}(u) \leq \tilde{\mathcal{F}}(u)$$

quindi la $\bar{u}$ ottimale per una, lo è anche per l'altra.

19 Lezione 09/05

LEZIONE EXTRA DI TOPOLOGIA DEBOLE
inizio registrazione 9.11 (su ipad non su telefono)

Definizione 19.1 – Spazio duale

Definiamo come spazio duale

$$X' := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ lineare e continua }\}$$

o equivalentemente, essendo lineari, definendo $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, l'insieme delle limitate con questa norma.

Osservazione 19.1
Notiamo che X', se X è Banach, allora X' è anche Banach. Se X è Hilbert, tramite teorema Rietsz, ho che X' è isomorfo a X (non sono la stessa cosa!!) tramite iso banale che manda x in prodotto scalare contro di lui.

Ricordiamo il metodo diretto del calcolo delle variazioni:

se ho i sottolivelli compatti e semicontinui allora ho minimo (o qualcosa del genere min 9.22)

Quindi i nostri problemi si riconducono sempre a questioni di semicontinuità e compattezza. (io voglio avere una successione minimizzante, compatezza, il cui limite rispetta, semicontinuità)

La topologia di cui dotiamo gli spazi è irrilevante ai fini di trovare il minimo, rompe solo per quanto riguarda compatezza e semicontinuità.

più aperti ho più è facile essere semicontinuo e più è difficile essere compatto, meno ne ho viceversa.

Ogni spazio di Banach ha la topologia indotta dalla metrica, ma scopriamo che questa è troppo forte, ha troppi aperti.Ad esempio uno spazio di dimensione è infinita $\iff$ la palla unitaria non è compatta. Quindi il funzionale norma non ha sottolivelli compatti. Questa topologia rende estremamente facile essere semicontinuo, mentre incasina troppo essere compatto.

Ma abbiamo visto che dato X è comodo lavorare con X'.

Se $x_n \to x$ allora $f(x_n) = \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle = f(x)\ \forall f \in X'$, quindi è troppo facile. Ma se io non sapessi che $x_n \to x$? In realtà la seconda è quella che mi interessa, dà info anche senza sapere la prima. Però non implica il viceversa:

esempio: $e_n \in \ell^2$ con e_n successione nulla che ha $n-$elemento $= 1$. Questa non va a 0, perchè tutti hanno norma 1. Se considero $s \in \ell^2$ ho

$$\langle e_i, s \rangle = s_i \to 0$$

Questa prende il nome di convergenza debole

Definizione 19.2 – Convergenza debole

Si dice che x_n converge debolmente a x, si indica, $x_n \rightharpoonup x$ se $\forall f \in X'$ vale che

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$$

Quindi abbiamo che convergenza forte $\Rightarrow$ convergenza debole, mentre non vale $\Leftarrow$. (quello di sopra è un controesempio). (in $\mathbb{R}^n$ queste due coincidono).

> *Esercizio 19.1*
> In realtà $x_n \rightharpoonup x \iff x_n \to x$ su ℓ^1. Questo ci dà un esempio di spazio di dimensione infinita in cui abbiamo un'equivalenza.

Idea Si parla di convergenza, quando abbiamo una topologia di riferimento. Normalmente si definisce una topologia e poi si vede come si definisce una convergenza. ⌟

Si può vedere che c'è una topologia che induce questa convergenza, questa si chiama *topologia debole*. Attenzione che questa topologia non è metrica: compatezza e compatezza per successioni sono cose diverse. (ha meno aperti, convergo più facilmente)

Osservazioni importanti:

Osservazione 19.2
Se $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \|x_n\| \leq C$.

(su $\mathbb{R}^n$ ho se e solo se)

Idea Se ho qualcosa che esplode , allora c'è un funzionale che se ne accorge: esplode su quell'elemento. (oppure usi banach steinhaus) ⌟

In realtà posso anche dire che

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$$

(segue da Hahn-Banach). Questo mi dice che la norma è semicontinua inferiore.

Con la topologia debole però non abbiamo ancora risolto del tutto i problemi di compatezza. Possiamo migliorare ancora un po' il risultato:

Definizione 19.3 – Convergenza debole star

Siano $\{f_n\} \subseteq X'$, diciamo che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ se $\forall x \in X$

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$$

Ricordiamo che $X \subseteq X''$ sempre, questo perchè banalmente X si immerge facilmente su X''. Abbiamo degli spazi tali che

Definizione 19.4

X si dice riflessivo se $X \equiv X''$ con la $\Phi : X \to X''$ ovvio

$$\langle \Phi(x), f\rangle_{X'',X'} = \langle f, x\rangle_{X'.X}$$

Allora da definizione la convegenza debole star è più debole della topologia debole (ho controllo su più elementi). Quindi la topologia debole non è la più debole. con la debole star abbiamo che la compatezza è gratis.

Dal teorema di Hahn - Banach in forma geometrica abbiamo che su spazi convessi chiusura debole $\iff$ chiusura forte. (in generale hai che (??? minuto 09.55) forte $\Rightarrow$ forte)

Esempio: sfera chiusa. In topologia forte questa è chiusa. In topologia debole? No, perchè sennò limiti starebbero sopra, assurdo.

Vale che spazio di dimensione infinita $\iff$ sfera unitaria non è chiusa debole.

Teorema 19.5 – Banach-Alouglu-Bourbaki

Se $C \subseteq X'$ è limitato allora è relativamente compatto debole * .

Dimostrazione. Visto che chiuso in compatto è compatto per qualsiasi spazio, basta vederlo per la sfera unitaria.
Sia $f_n \subseteq C = \{\|f\|_{X'} \leq 1\} \subseteq [-1,1]^{X_1}$. Per Tychonov sappiamo che $[-1,1]^{X_1}$ è compatto e la topologia debole star coincide con quella prodotto. Visto che C è chiuso, abbiamo che C è compatto. □

Corollario 19.6 – Banach-Alouglu-Bourbaki

Se $C \subseteq X'$ è limitato allora è relativamente compatto debole * per successioni se X separabile.

Dimostrazione. Se X è separabile abbiamo che C è metrizzabile debole (con metrica equivalente a topologia debole star). Ma dal teorema sopra ho compatezza $\Rightarrow$ ho compatezza per successioni. □

Idea La convergenza debole più utile è la versione debole star. Dà automaticamente compattezza. ⌟

Discorsi filosofici su problemi di L^1 (non ha scritto niente) minuto 10.05

voorei fare qualcosa in L^1. Non lo so fare però posso vedere che mi immergo facilmente prendendo $f \in L^1$ e mandandolo in $f\lambda_1$. Quindi L^1 si immerge nello spazio delle misure dotato della norma

$$|\mu(X)| = \|\mu\| = \sup(\int f d\mu : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

che sostanzialemente è la variazione dello spazio. Per Radon-Nikodin mi posso concentrare sulla direzione della misura. (uso teorema di Radon - Nikodin)

Per gli altri spazi si usa l'equiintegrabilità.

Cosa centra questo con gli spazi di sobolev? Ricordiamo

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega)\ \forall |\alpha| \leq k\}$$

dove

$$\int D^\alpha f \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int D^\alpha \varphi f$$

(assomiglia alla dualità , ma non lo è proprio. Introduce concetto di distribuzione)

Se $A \subseteq B$ denso allora $B* \subseteq A*$, senza la condizione di densità è falso.

Si può vedere che $W^{1,p}$ è riflessivo ($p \neq 1, \infty$) (chiuso in riflessivo è riflessivo).

latex morto, vai su ipad

20 Lezione 15/05

inizio registrazione 14.33

Esercizio 20.1
Sia $u(0) = a, u(1) = b$, si minimizzi

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 x^\alpha |u'|^q$$

con $q > 1$.

Risoluzione: notiamo che se $q = 1$ l'esercizio è banale. Disegno. se $\alpha > 0$ prendo la funzione costante a b (è il minimo) che però non è continua quindi minimo non esiste. se $\alpha < 0$ allora resto costante in a. Se $q < 1$ analogamente (per concavità della funzione) non ho minimo.

Idea Mi conviene sbrigarmi per salire, ma non troppo sennò, per la presenza di $q > 1$, lo pago tanto ⌟

Questa funzione è semicontinua[13]. Per Lebesgue tonelli , non mi interessa cosa sia la funzione di x, purchè questa sia positiva (non si deve annullare mai) , vista la convessità in p ho fatto. Allora $\alpha \leq 0$ esiste una soluzione per Lebesgue-Tonelli. Visto che la lagrangiana è C^1 su aperto, allora si ha che la soluzione verifica l'eq di eulero lagrange.

$$F(x, z, p) = z^\alpha |p|^q$$

quindi

$$\frac{d}{dx}(qx^\alpha |u|'^{q-2}u') = 0$$

Idea Riconosco eq di secondo grado, come è giusto che sia. quando cerco minimi ho sempre qualcosa della forma laplaciano $= \cdots$ ⌟

Posso scrivere

$$x^\alpha |u|'^{q-2}u' = cost$$

sappiamo che il minimo avrà segno costante (positivo se $b > a$, negativo $b < a$). Vediamo che

$$|u'| \equiv x^{\frac{-\alpha}{q-1}}$$

(per avere che il prodotto sia costante). Ma allora deve essere

$$u(x) = a + x^{1-\frac{\alpha}{q-1}}(b - a)$$

allora

$$|u'| = |b - a|(1 - \frac{\alpha}{q-1})x^{\frac{-\alpha}{q-1}}$$

Così

$$|u'| = |b - a|^{q-1}x^{-\alpha}(1 - \frac{\alpha}{q-1})^{q-1}$$

[13](per la semicontinuità se volete ioffe è sparare con il bazooka all'uccellino)

e effettivamente $|u'|x^\alpha = cost$.

Stiamo un po' imbrogliando però: la lagrangiana è regolare ma il minimo lo è? (eulero lagrange si può usare se minimo è C^1). Per il momento ci fidiamo che in un qualche senso valga eulero-lagrange. Vedremo poi.

Ma se $\alpha > 0$? Abbiamo un punto in cui funziona si annulla, non posso usare lebesgue tonelli. Vediamo che

$$1 - \frac{\alpha}{q-1} > 0 \iff \alpha < q - 1$$

(questo perchè ci basta che esponente sia positivo così che in 0 faccia 0 e in 1 faccia 1. se esponente diventa negativo, rogne). Quindi per tutti gli $\alpha < q - 1$ abbiamo ragionamento con eulero lagrange.

Con $\alpha > 0$ Ioffe continua a valere. Cerchiamo di usare Tonelli: se troviamo successione minimizzante che è equiintegrabile abbiamo vinto. Sia $\{u_j\} \subseteq W^{1,1}$ minimizzante. Calcoliamo[14]

$$\int_0^1 |u_j'|^q = \int_0^1 |u_j'|^q x^{\alpha q} x^{-\alpha q} \leq \|u_j' x^\alpha\|_{L^?}$$

stiamo cercando di usare Hölder, introduciamo fattori di cui so norme. La cosa bella è $\frac{q}{\alpha+1} > 1$, quindi consideriamo $1 < \beta < \frac{q}{\alpha+1}$. Ma allora

Idea minuto 15.10 ⌟

$$\int_0^1 |u_j'|^\beta = \int_0^1 |u_j'|^\beta x^{\frac{\alpha\beta}{q}} x^{-\frac{\alpha\beta}{q}} \leq \|u_j'^\beta x^{\frac{\alpha\beta}{q}}\|_{L^{\frac{q}{\beta}}} \|x^{\frac{-\alpha\beta}{q}}\|_{L^{(\frac{q}{\beta})'}}$$

dove il coniugato è $\frac{q-\beta}{q}$

$$= (\int_0^1 |u_j'|^q x^\alpha)^{\frac{\beta}{q}} (\int_0^1 x^{\frac{\alpha\beta}{q}\frac{q}{q-\beta}})^{\frac{q\beta}{q}}$$

voglio che il secondo integrale sia finito:

$$\frac{\alpha\beta}{q-\beta} < 1 \Rightarrow (\alpha+1)\beta < q$$

Ma allora $u_j' \rightharpoonup \omega$ in L^β. Visto che siamo su intervallo $L^1 \supseteq L^\beta$ e quindi convergo debolmente anche in L^1

E se $\alpha > q - 1$? Abbiamo intuito che non c'è minimo. Mostro a mano una successione in cui l'energia tende a 0 che però è inf, non si può realizzare. Gioco con

$$\varepsilon^\alpha \frac{(b-a)^q}{\varepsilon^q}$$

Se $\alpha = q - 1$? Vorrei usare potenza, ma non posso. cosa si comporta come lui? Logaritmo e anche in questo caso trovo controesempio.

$$u_\varepsilon = a + (b-a)\frac{\log(1+\frac{x}{\varepsilon})}{\log(1+\frac{1}{\varepsilon})}$$

(possibile esercizio da esame) □

Andiamo ora a studiare meglio il fenomeno di Laurentieff:

[14] Avere norma limitata in L^k con $k > 1$ è tanta roba

Teorema 20.1

Non c'è il fenomeno di Laurentieff se F verifica alcune ipotesi:

- continua in (z, p)
- Si ha la stima

$$m^-(x) + c_1|p|^\alpha \leq F(x, z, p) \leq c_2|p|^\alpha + m^+(x) + \psi(z)$$

con $\alpha > 1, 0 < c_1 < c_2$, $m^+, m^- \in L^1$ e ψ limitata sui limitati (la puoi supporre anche continua, è stessa cosa)

Dimostrazione. Per dire che non c'è il fenomeno di Laurentieff, data $u \in W^{1,1}$ vogliamo $\{u_j\} \subseteq C^1$ tale che $\mathcal{F}(u_j) \to \mathcal{F}(u)$. Inoltre deve essere $u_j(0) = u(0) = a, u_j(1) = u(1) = b$. Vogliamo fare convoluzione su tutto $\mathbb{R}$. La estendo costantemente[15], ossia $u_j = u_j = u_{est} * \rho_{\frac{1}{j}} + AFF$ dove ρ è mollificatore e AFF sistema i punti agli estremi. Per definizione abbiamo che $u_j \to u$ uniformemente. E vale anche che $u_j' \to u$ forte in L^1. Ci chiediamo ora se

$$F(x, u_j, u_j') \longrightarrow F(x, u, u')$$

Viste le convergenze precedenti sia u_j che u_j' convergono puntualmente quasi ovunque a u, u'. Allora essendo F continua ho che

$$\tau_j = F(x, u_j, u_j') \to F(x, u, u') = \tau \quad \text{per quasi ogni x}$$

questa cosa ci implica o no che $\tau_j \xrightarrow{L^1} \tau$? Usando il lemma di Vitali: vediamo che $\{\tau_j\}$ equiintegrabili. Visto che

$$\tau_j \leq m^+ + \psi(u_j) + c_2(u_j')^\alpha$$

se () è equiintegrabile ho fatto (roba più piccola di roba equiintegrabile ho vinto).

Il primo termine non dipende da j, ok. Il secondo è limitato, quindi anche lì trovo una costante, ok. Vogliamo che

$$\int |u_j'|^\alpha < cost$$

Per $\alpha > 1$ ho aiutino, prova a pensarci per giovedì. In caso lo fa lui (è utile da fare) □

Lemma 20.2 – Lemma di Vitali

Se $\tau_j \to \tau$ puntualmente quasi ovunque e $\{\tau_j\}$ equiintegrabile, allora $\tau_j \rightharpoonup \tau$

Dimostrazione. Visto che τ_j sono equiint sappiamo che $\tau_j \rightharpoonup \eta$. Dobbiamo vedere $\tau = \eta$. Definiamo i seguenti insiemi:

$$A_n := \{x : |\tau_j - \tau| < 1^{16} \ \forall j < n, \tau_j(x) \to \tau(x), \eta(x) > \tau(x)\}$$

[15] per $x > b$ prendo $u(x) = b$ e per $x < a$ $u(x) = a$

[16] voglio usare poi convergenza dominata

$$B_n := \{x : |\tau_j - \tau| < 1^{17}\ \forall j < n, \tau_j(x) \to \tau(x), \eta(x) < \tau(x)\}$$

Se $\tau \neq \eta$ allora questa definitivamente sta o in A_n o in B_n. Calcoliamo

$$\int_{A_n} \tau_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} \int_{A_n} \eta$$

(poichè τ_j convergono debolmente). Ma per convergenza dominata so che

$$\int_{A_n} \tau_j \to \int_{A_n} \tau$$

Visto che $\eta > \tau$ necessariamente (affinchè integrale sia uguale) ho $|A_n| = 0$. Analagamente per B_n. □

Quindi questione Eulero-Lagrange?

Sia $u \in AC$ un minimo locale di $\mathcal{F}$. Data $\varphi \in C_0^\infty([0,1])$, definiamo

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^1 F(x, u + \varepsilon\varphi, u' + \varepsilon\varphi')dx$$

Penso ad una $F \in C^1$. Mi viene tanta voglia di derivare dentro: che so dire su τ? Sicuramente $\tau \in C^1$ e

$$0 = \tau'(0) = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \int_0^1 F(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi')dx = \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} F(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi') = (*)$$

(supponiamo di poter portare la derivata dentro, come fatto con paolini)

$$(*) = \int_0^1 F_z(x, u, u')\varphi + F_p(x, u, u')\varphi'$$

Quindi ora penso anche $F_z(x, u, u'), F_p(x, u, u') \in L^1$. Ah ma quindi ho scoperto che

$$\frac{d}{dx} F_p(x, u, u') = F_z(x, u, u')$$

(dove la derivata è intesa in senso debole. nel senso che se $\frac{d}{dx} f = g$ in senso $W^{1,1}$ ho $f(b) - f(a) = \int_a^b g$)

Quindi vale eulero -Lagrange in senso debole (se io avessi il permesso di farlo). Quand'è che posso portare la derivata dentro? Se $\int_0^1 F(x, u + \varepsilon\varphi, u' + \varepsilon\varphi')$ è uniformemente integrabile , ma questo è vero se $F_p\varphi', F_z\varphi$ sono in L^p uniformemente. Quindi

Lemma 20.3

Se $u \in AC$, minimo locale di $\mathcal{F}$ e se $F \in C^1$, $F_p(x, u, u'), F_z(x, u, u') \in L^1$ allora

$$(F_p(x, u(x), u'(x))' = F_z(x, u, u')$$

in senso debole.

Idea nella maggior parte dei casi l'energia finita mi assicura che F_z, F_p siano in L^1 (idea minuto 16.05) ⌟

[17] voglio usare poi convergenza dominata

21 Lezione 18/05

inizio registrazione minuto 11.19
Vediamo che le $|u_j'|^\alpha$ della scorsa volta sono equiintegrabili:
Ricordando che
$$\|f * g\|_\alpha \leq \|f\|_1 \|g\|_\alpha$$
Allora se $u_j = u * \rho_{i_j}$, poichè $\mathcal{F}(u) > \|u'\|_{L^\alpha}^\alpha - c$, allora $\|u_j'\|_{L^\alpha} \leq C$.

Poichè $u_j' \overset{L^\alpha}{\rightharpoonup} u'$ spererei che questo implichi $|u_j'|^\alpha \overset{L^1}{\rightharpoonup} |u'|^\alpha$. Ma in generale questa è falsa, vale però $\Leftarrow$. Esempio con $\alpha = 2$ e la funzione $u_n = \sqrt{n}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{\sqrt{n}}]}$.

Dobbiamo giocare con le convoluzioni. Sappiamo che $u_j' \xrightarrow[q.o.x]{L^1} u'$.

Idea Se io sapessi che $\|u'\|_{L^\infty} \leq C$ allora avrei $\|u_j'\|_{L^\infty} \leq C$ ma quindi, per convergenza dominata
$$\int |u_j' - u'|^q \longrightarrow 0$$
Non avendo questa cosa, sfruttiamo il fatto di avere una convoluzione ⌟

Sia $\omega \in L^\infty$ con $\|\omega - u'\|_{L^\alpha} < \varepsilon$ (esiste perchè L^∞ è denso in L^α) Ma quindi
$$\limsup \|u_j' - u'\|_{L^\alpha} \leq \limsup \|u' * \rho_{\frac{1}{j}} - \omega * \rho_{\frac{1}{j}}\|_{L^\alpha} + \|\omega * \rho_{\frac{1}{j}} - \omega\|_{L^\alpha} + \|\omega - u'\|_{L^\alpha} \leq 2\varepsilon$$
Quindi $u_j' \xrightarrow{L^\alpha} u'$. Da questo vorrei dedurre $|u_j'|^\alpha \overset{L^1}{\rightharpoonup} |u'|^\alpha$ (basterebbe convergenza debole). Vediamo che vale questa implicazione , con Holder, [18]
$$\||u_j'|^\alpha - |u'|^\alpha\|_{L^1} \leq \alpha \||u_j' - u'|(u_j'^{\alpha-1} + u'^{\alpha-1}\|_{L^1} \leq \alpha \|u_j' - u'\|_{L^\alpha} \|u_j'^{\alpha-1} + u'^{\alpha-1}\|_{L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$
$$\leq \alpha \|u_j' - u'\|_{L^\alpha} (\|u_j'^{\alpha-1}\| + \|u'^{\alpha-1}\|_{L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}})$$
□

Abbiamo visto che vale Eulero-Lagrange: la funzione $x \to F_p(x, u(x), u'(x)) \in W^{1,1}$ con derivata $= F_z(x, u(x), u'(x))$. Quindi se u estremale e $F_z, F_p \in L^1$ vale Eulero-Lagrange.

Queste condizioni sono abbastanza facili da ottenere, ad esempio sono implicate se[19] $|F_z| \leq M(|z| + |x|)(1 + |p|^\alpha)$.

Teorema 21.1 – Teorema di regolarità (totale)

Se $F \in C^2$ e (solite ipotesi di crescita, convessita , crescita derivate)

1. $F \geq C|p|^\alpha - m$ con $\alpha > 1$, $m \in L^1$ [a]
2. $F_{pp} > 0$ (dovremo invertire una matrice)
3. $|F_z| + |F_p| \leq M(|z|)(1 + |p|^\alpha)$

Allora esiste u minimo locale e $u \in C^2$. Inoltre se $F \in C^k (k > 2)$ allora $u \in C^k$.

[a] il discorso di m è sempre il solito, si può scrivere come non. tanto è gratis

[18] visto che $|a^\alpha - b^\alpha| \leq \alpha|a - b|(|a|^{\alpha-1} + |b|^{\alpha-1}|)$
[19] si mette $|x|$ per intervalli illimitati, se non lo sono si può togliere gratis

Osservazione 21.1
commenti su varie condizioni minuto 11.45. (avere $F_{pp} > 0$ è meglio di dire che F convessa. why?)

Dimostrazione. L'esistenza del minimo è ovvia per il teorema di Tonelli. Sia quindi u minimo locale, dimostriamo che $u \in C^2$.
Step 1: Vediamo che $u \in C^1$. Definiamo

$$\tau(x) = F_p(x, u(x), u'(x))$$

che è ben definita perchè F_p continua (ocio che non puoi comporre a random. misurabile composta conrtnua è non sense. Non puoi fare composizione di due misurabili, ti basta meno di continuità ma qualcosa sui boreliani ti serve). Per Eulero-Lagrange (posso per ipotesi 3 + u ha energia finita)

$$\tau(x) = \int_0^x F_z(x, u(\tau), u'(\tau))d\tau + F_p(0, u(0), u'(0))$$

quindi τ è assolutamente continua.

Idea Dobbiamo capire chi è u' ⌟

Definiamo[20]

$$\Phi(x, p) = F_p(x, u(x), p) - \tau(x)$$

così $\Phi(x, u'(x)) = 0$. Sappiamo che $\Phi : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$. $D_p\Phi$ è invertibile ($F_{pp} > 0$). Allora per il teorema della funzione implicita esiste $p(x) \in C^0$ in un intorno di $\bar{x}$ tale che $\Phi(x, p(x)) = 0$. In particolare $p(x)$ è l'unico vettore tale che $\Phi(x, p(x)) = 0$ (per teorema di invertibilità locale è l'unico lì vicino, ma è unico per stretta convessità). Allora $u'(x) = p(x) \Rightarrow u'(x)$ è continua.
Step 2: se $F \in C^k$ e $u \in C^{k-1} \Rightarrow u \in C^k$ (con $k \geq 2$). In queste ipotesi sappiamo che $\tau \in C^{k-2}$. Ma anche $F_z \in C^{k-2}$ quindi in realtà $\tau \in C^{k-1}$. Proviamo a vedere con $k = 2$. Ricordiamoci che[21] $\tau = F_p(x, u(x), u'(x))$. Allora calcoliamo

$$\tau' = (F_p(x, u(x), u'(x))' = F_{px}(x, u, u') + F_{pz}(x, u, u')u' + F_{pp}(x, u, u')u''$$

Visto che $\tau' \in C^0$ allora anche roba a dx = è C^0. Vediamo che ho tutte robe continue tranne una ($F_{px}(x, u, u'), F_{pz}(x, u, u')u'$ sono continua): deve essere continua anche lei. Ma quindi $F_{pp}(x, u, u')u'' = \psi$ continua. Poichè $F_{pp}(x, u, u'')$ è continua e invertibile (con inversa continua)

$$u'' = (F_{pp}(x, u, u')^{-1}(\psi)$$

allora u'' è continua.
Torniamo a k generico: calcoliamo[22] $\tau^{(k-1)}$:

$$\tau^{(k-1)} = (F_p(x, u, u'))^{(k-1)} = (F_{px} + F_{pz}u' + F_{pp}u'')^{(k-2)}$$

Procedendo con il conto, facendo Leibnitz, avremo al massimo k derivate di F e la sua valutazione su x, u, u' sarà sempre continuo. Avremo anche al massimo k

[20]andiamo verso la funzione implicita
[21]dimentichiamoci dell'esistenza di $\tau' = \int$
[22]non vogliamo una formula induttiva, ci ragioniamo solo

derivate di u. In tutti altri modi avremo una qualche combinazione di derivate di F e di u. Quindi questa roba sarà

$$= \text{ Somma di } F_i u^j u'^k u''^l$$

avrò tutti termini continui tranne per uno: quello, che è anche l'unico, in cui compare $u^{(k)}$. Quindi

$$\tau^{(k-1)} = \sum \cdots + F_{pp}(x, u, u')u^{(k)}$$

e ragioniamo come prima per ottenere la continuità di $u^{(k)}$. □

Esempio: vediamo esempio in cui è ovvio chi sia il minimo e vediamo come andrebbe con il teorema: siano $u(-1) = 0, u(1) = 1$ e

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^{1} u(x)^2 (u'(x) - 2x)^2 dx$$

Risoluzione: disegno

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ x^2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Ma chiaramente non è C^2. Quindi capiamo quale ipotesi salta del teorema: F^{C^∞}, F_z, F_p limitate. $F_{pp} = z^2p^2 - 4xpz^2 + 4x^2z^2 > 0$. Ho una crescita più di p^2? (chiaramente deve essere $\alpha = 2$ da espressione). $F > p^2$ se $z \neq 0$. La convessità è stretta, ma non è invertibile in un punto. Quindi le ipotesi valgono in un punto a meno di ε.

Teorema 21.2 – Teorema di regolarità (parziale) di Tonelli

Sia $F \in C^\infty$ e $F_{pp} > 0$. Se $u \in \mathrm{AC}$ ed è minimo locale allora $\forall x \; \exists$

$$[u'(x)] := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} \in [-\infty, +\infty]$$

e la funzione

$$x \longrightarrow [u'(x)]$$

è continua. Detto poi $E = \{x \in [u'(x)] \notin \mathbb{R}\}$, allora E è chiuso trascurabile (complementare è aperto di misura piena) e $u \in C^\infty(I \backslash E)$. (con $I = [0, 1]$).

(con questo e con un controesempio di questo teorema (Controesempio di Davis) finisce il corso. Vediamo il teorema per $n = 1$, vale anche per n generico. Ma noi faremo giochi con $\geq, \leq$)

Corollario 21.3

Si ha che $E = \emptyset$ (ossia $u \in C^\infty$) se:

- $\frac{F(x,z,p)}{|p|} \to +\infty$ se $|p| \to +\infty$
- Una tra $F_x(x, u, u')$ e $F_z(x, u, u') \in L^1$

Osservazione 21.2
Una grossa parte delle funzioni che ci interessano non dipendono da x o da z. Quindi la seconda condizione è vera a vuota.

Dimostrazione del corollario. Sia $\tau(x) = F_p(x, u(x), u'(x))$ allora $\tau'(x) = F_z(x, u(x), u'(x))$. Sia $J \subseteq I \backslash E$ intervallo massimale e sia $\bar{x} \in \partial J \in E$. Vogliamo l'assurdo ($J$ dovrà coincidere I). Sappiamo che τ è limitato in J. Vogliamo vedere che

$$|F_p(x, u(x), p)| \to +\infty \textit{ se } |p| \to +\infty \text{ uniformemente per } x \in J$$

da qui segue immediatamente la tesi perchè se esplodo in maniera uniforme ho che $F_p = \infty$, ma sappiamo che τ è limitata. Andiamo per assurdo: supponiamo che $\exists \{x_j\} \subseteq J, \{p_j\} \subseteq \mathbb{R}$ tale che $F_p(x_j(u(x_j)), p_j)$ limitato per $p_j \to +\infty$. Sappiamo che F è convessa in p, ossia

$$F(x, u(x), k) \leq F(x, u(x), 0) + kF_p(x, u(x), k)$$

Allora

$$C \geq F_p(x_j, u(x_j), p_j) \geq F_p(x_j, u(x_j), k) \geq \frac{F(x_j, u(x_j), k) - F(x_j, u(x_j), 0)}{k}$$

ma se consideriamo $k \to +\infty$ ho $\frac{F(x_j, u(x_j), k) - F(x_j, u(x_j), 0)}{k} \to +\infty$ perchè il secondo pezzo va a 0 e il primo a infinito per ipotesi. Assurdo.
Se invece è $F_x \in L^1$ allora si usa $F_x = \frac{d}{dx}(F - F_p \cdot p)$ e si fa analogamente. $\square$

22 Lezione 19/05

Inizio registrazione 9.22

Lemma 22.1

Sia $F \in C^\infty$, $F_{pp} > 0$. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, $\delta, M > 0$. Allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che: per ogni $(x_0, u_0) \in A$ e per ogni $\alpha, \beta \in (-M, M)$, $\exists!$ soluzione di Eulero-Lagrange in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ con $u(x_0) = u_0 + \alpha, u'(x_0) = \beta$. Detta $u(x, \alpha, \beta)$ questa funzione si ha che

1. $u \in C^\infty((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (-M, M)^2)$
2. $\frac{\partial u}{\partial \alpha} > \frac{1}{2}, |u' - \beta| < \delta$
3. $sgn \frac{\partial u}{\partial \beta} = sgn(x - x_0)$

Idea se io a α aggiungo η, allora so che mi sposterò di $> \frac{\eta}{2}$.

La cosa del segno: se mi inclino di più a sx resto sotto a quella originale e a dx resto sopra ⌟

Dimostrazione. Eulero-Lagrange, essendo $F \in C^\infty$, si può riscrivere come

$$F_z = F_{px} + F_{pz} u' + F_{pp} u''$$

che è come dire

$$u'' = F_{pp}^{-1}(F_z - F_{px} - F_{pz} u')$$

Dunque abbiamo un problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'' = F_{pp}^{-1}(F_z - F_{px} - F_{pz} u') \\ u(x_0) = u_0 + \alpha \\ u'(x_0) = \beta \end{cases}$$

Essendo la F C^∞, appena sono su un compatto, F è Lipschitz, quindi per il teorema di Cauchy abbiamo esistenza e unicità della soluzione[23]. Le dipendenze C^∞ da tutti i dati seguono per dipendenza continua dai dati iniziali.
Studiamo ora $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x_0, \alpha, \beta) = 1$. (sempre dipendenza continua dai dati, potevamo mettere $|\frac{\partial u}{\partial \alpha} - 1| < \delta$, similmente per l'altra stima.

Per il punto 3, avendo C^∞:

$$\frac{\partial u'}{\partial \beta}(x_0, \alpha, \beta) = \frac{\partial}{\partial \beta}\beta = 1$$

Ma (per schwartz)

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \beta}(x_0, \alpha, \beta) = \frac{\partial u'}{\partial \beta}(x_0, \alpha, \beta)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \beta}(x_0, \alpha, \beta) = 0$$

[23] attenzione: non stiamo dicendo che c'è un'unica soluzione regolare. Stiamo dicendo che c'è un'unica soluzione e questa è regolare

Quindi se g C^1 con $g(x_0) = 0$ e $g'(x_0) > 0$ allora è positiva a dx e negativa a sx. □

Osservazione 22.1
M, δ possono essere qualsiasi. La cosa che penso però è che M sia grandissimo, δ piccolissimo. Perchè M mi dà quanto mi posso alzare al massimo, δ quanto preciso sono. Se delta piccolo è come se avessi fascio di rette

Lemma 22.2

Sia $F \in C^\infty, F_{pp} > 0$, Siano[a] $k, \rho > 0$. Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\forall x_0 < x_1$ e u_0, u_1: $0 < x_1 - x_0 < \varepsilon$, $|u_0| < k$ e $\frac{|u_1 - u_0|}{x_1 - x_0} < k$.
Allora $\exists! \tilde{u}$ con $\tilde{u}(x_0) = u_0$ e $\tilde{u}(x_1) = u_1$, $\tilde{u} \in C^\infty$, che risolve Eulero-Lagrange, ed è l'unico minimo dell'energia fra le funzioni v assolutamente continue con $\|v - \tilde{u}\|_{L^\infty} < \rho$. Varrà anche $\|\tilde{u} - u_0\|_{L^\infty} < \rho$. (Puoi pensare anche $\|v - u_0\|_{L^\infty} < \rho$ così hai già intorno su cui muoverti)

[a] penserò k grande, ρ piccolo

Dimostrazione. Dobbiamo applicare il lemma 1 che sostanzialmente ci dice come costruire funzioni. Dobbiamo riuscire ad appiccicarci bene. Vanno scelti i vari dati:
Poniamo $A = [0, 1] \times [-(k + \rho), k + \rho]$ (per scrivere idea del perchè minuto 9.55) e van scelti M, δ: sicuramente $M > k$, servirà altra condizione che vedremo con i conti ($> 4\rho$, prenderò massimo). Invece $\delta < M - k$, poi verrà rimpicciolito. Dal lemma 1 trovo $\varepsilon > 0$ (che ovviamente rimpiccioliremo). Con i nostri x_0, u_0 si ha $u(x, \alpha, \beta)$ tali che .... Come uso x_1, u_1? Vorremo porre $\tilde{u}(\cdot) = u(\cdot, \alpha_0, \beta_0)$. Visto che in x_0 devo fare u_0 sarà $\alpha_0 = 0$. (vedi pb Cauchy di prima). Consideriamo $u(x_0, 0, M)$ ($\beta = M$):

$$u(x_1, 0, M) > u_0 + (x_1 - x_0)(M - \delta) > u_0(x_1 - x_0)k > u_1$$

Invece

$$u(x_1, 0, -M) < u_0 + (-M + \delta)(x_1 - x_0) < u_0 - k(x_1 - x_0) < u_1$$

Quindi vedo che se parto con derivata massima possibile, $\beta = M$, allora scappo. Ma visto che , a dx essendo $x_1 > x_0$, il segno della derivata è sempre positivo, sono strettamente crescente, quindi per continuità esiste unico $\beta_0 \in (-M, M)$ tale che $\tilde{u} = u(\cdot, 0, \beta_0)$ verifica $\tilde{u}(x_1) = u_1$. Sappiamo che $|\tilde{u}' - \beta_0| < \delta$ dunque $|\tilde{u}'| < M + \delta \Rightarrow \|\tilde{u} - u_0\|_{L^\infty} < (M + \delta)\varepsilon < \rho$. (primo istante in cui uso ρ).

Va visto che è l'unico minimo dell'energia. Dobbiamo innanzitutto assicurarci di non avere altre scelte. (minimo sai che esiste per compattezza)

Sia v un minimo dell'energia con quei dati iniziali, vogliamo dire che $v = \tilde{u}$. Per il teorema di regolarità , ipotesi le verifico in un intorno, ho che $v \in C^k$. In realtà no, perchè le verifico solo localmente, non so di essere limitato, ho un po' barato.

v almeno C^1 la ho per step di dim di ieri. Posso trovare $\bar{x}$ tle che $|v'(\bar{x})| < k$. Allora posso applicare il lemma 1 con dato iniziale $x_0 = \bar{x}$. Dunque $|v' - v'(\bar{x})| < \delta$. Ma allora $|v'(x_0)| < k + \delta < M$

Idea MINUTO 10.22 - 10.32 ⌟

Quindi da che avevo un solo punto in cui la derivata era $< M$, lo so dire su tutto l'intervallo. Ma quindi $v(\cdot) = u(\cdot, 0, \beta')$. Quindi poichè $\beta' = v'(x_0)$. se fosse $\beta' > \beta$ (analogo con ¡) avrei che $v(x_1) > \tilde{u}(x_1)$ ma noi sappiamo che su x_1 coincidono. Quindi $\beta' = \beta_0 \Rightarrow v = \tilde{u}$.

Non abbiamo proprio finito: chi mi vieta di avere altre soluzioni di Eulero-Lagrange? Bisogno utilizzare i campi estremali di Weierstrass (inizio corso, cit parte più pallosa). Voglio immergere $\tilde{u}$ in un campo estremale. vogliamo

$$f(x, c) = (x, \varphi(x, c))$$

Con $\varphi(x, c) = u(x, c, \beta_0)$. ($\tilde{u}$ sta in fibra con $c = 0$). Con $|c| < M$ posso definire $\varphi(x, c)$ che mi dà un campo in cui tutte le fibre verificano E-L. basta far vedere che ricopro tutto il rettangolo: **non ho capito perchè minuto 10.41** □

Possiamo vedere il primo step della dimostrazione di teorema tonelli:

Dimostrazione. Step 1: Sia x tale che $\liminf_{y \to \bar{x}^+} \frac{|u(y) - u(\bar{x})|}{|y - \bar{x}|} < +\infty$. Allora $u \in C^\infty$ in un intorno destro di $\bar{x}$. Applico il lemma 2 con ρ tale che u è minimo in intorno L^∞ di 2ρ e con $k = 2 \liminf \cdots$ (posso pensare $k > 2\|u\|_{L^\infty}$). Il lemma ci dà $\varepsilon > 0$. Sia $y \in (x, x + \varepsilon)$ con $\left| \frac{u(y) - u(\bar{x}}{y - \bar{x}} \right| < k$. Allora hai una funzione $\tilde{u}$ che dista meno di ρ da $u(\bar{x})$ ed è l'unica che minimizza l'energia. Se u è minimo locale, allora se prendo due punti, sarà minimo anche qua sopra. Allora (con deduzioni troppo veloci, minuto 10.49) abbiamo che $u = \tilde{u}$ su $(\bar{x}, y)$. Così, per ogni punto in cui ho liminf destro, sono C^∞ su un intorno destro.
Step 2: se $\bar{x}$ è tale che

$$\liminf_{y \to \bar{x}^+} \left| \frac{u(y) - u(\bar{x}}{y - \bar{x}} \right| < +\infty$$

$$\liminf_{y \to \bar{x}^-} \left| \frac{u(y) - u(\bar{x}}{y - \bar{x}} \right| < +\infty$$

allora u è C^∞ in un intorno di $\bar{x}$. Non proprio immediato, ma quasi: sono C^∞ a dx e a sinistra di $\bar{x}$. $\bar{x}$ può essere punto angoloso? essendo C^∞ sui due pezzi, sono anche lipschitziano, riapplico lemma 2 e quindi sarò C^∞ ovunque. □

23 Lezione 25/05

inizio registrazione 11.29

L'ultima volta abbiamo visto che

$$\liminf_{x \to x_0^+} \left| \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \right| < +\infty \Rightarrow u \in C^\infty((x_0, x_0 + \varepsilon))$$

Analogo con $\liminf_{x \to x_0^-}$. Ma allora se son finiti ho $u \in C^\infty(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. (magari in x_0 ho un angolo, ma chissene)

Definiamo ora $E = \{x : \limsup = +\infty\}$. Siccome $u \in W^{1,1} \Rightarrow u' \in L^1$. Se x_0 è di Lebesgue per u'

$$\frac{u(x_0 + \delta) - u(x_0 - \delta)}{2\delta} = \fint_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} u'(t) dt \to u'(x_0)$$

Ma quindi $x_0 \notin E$ e inoltre ho un intorno che sta in E. Ma quindi E è un chiuso trascurabile.

Dobbiamo dimostrare che la derivata, in senso debole o forte, esiste. Per i punti non in E è ovvio, essendo $u \in C^\infty$. Sia $x_0 \in E$. Questo mi assicura che esista $x_j \to x_0$ tale che $\lim_{j \to +\infty} \frac{u(x_j) - u(x_0)}{x_j - x_0} = \pm\infty$. Suppongo che sia $+\infty$.

Se $y_j < z_j$ con $y_j \to x_0$ e $z_j \to x_0$. Allora voglio dimostrare

$$\lim_{j \to \infty} \frac{u(z_j).u(y_j)}{z_j - y_j} = +\infty \quad (*)$$

Quest'ultima cosa mi assicura che $[u'(x_0)] = +\infty$. (La derivata in senso generalizzato esiste sempre. nei punti di E fa o + o $-$ infinito.) Vediamo che è continua. Se $[u'] \notin C^0$, $\exists w_j 1 to x_0$ tale che $[u'(w_j)] < M$. Allora esiste $\tilde{w}_j$ tale che $|\tilde{w}_j - w_j| < \frac{1}{2^j}$ e $\frac{u(w_j) - u(\tilde{w}_j)}{w_j - \tilde{w}_j} < M$. Ma allora $\{y_j, z_j\} = \{w_j, \tilde{w}_j\}$ è una successione con la proprietà $(*)$ di sopra. Quindi $u'(y_j)$ infinito, assurdo, perchè limitato.

Dobbiamo dimostrare $(*)$: (disegno) se ho un comportamento locale come quello di disegno considero x_0, usando il lemma 1, dati α, M si ha

$$u(x, \alpha, M) = u(x) \;\; se \;\alpha = \alpha(x)$$

Vogliamo dire che $u(x, M, M) > u(x)$. Per il lemma

$$u(x, M, M) > u(x_0, M, M) - \frac{M}{2} = u(x_0) + \frac{M}{2}$$

Analogamente

$$u(x, -M, M) < u(x_0) - \frac{M}{2}$$

D'altra parte, siccome u è assolutamente continua, (mi interessa uniformemente continua). Se $|x - x_0| < \varepsilon$ allora $|u(x) - u(x_0)| < \frac{M}{2}$. Ma quindi

$$u(x_0) + \frac{M}{2} > u(x)$$

$$u(x_0) - \frac{M}{2} < u(x)$$

Idea Se parto a distanza M la funzione non ce la fa a superarmi in un tempo ε, se parto vicino si (disegno) ⌟

Ma quindi $\exists! \alpha(x)$ tale che $u(x, \alpha(x), M) = u(x)$. (minuto 12.04) (lo step tre di questa dimostrazione è stato definire α) Vogliamo dimostrare che $(**)$ la funzione $\alpha(x)$ è monotona crescente.

Vediamo che da $(**)$ segue $(*)$, e poi dimostriamola.

Step 4: $(**) \Rightarrow (*)$ (che implica tesi): Fissato M abbiamo trovato $\varepsilon, \alpha(x)$. Se $j >> 1$, allora $y_j, z_j \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Allora

$$\frac{u(z_j) - u(y_j)}{z_j - y_j} = \frac{u(z_j, \alpha(z_j), M) - u(y_j, \alpha(y_j), M)}{z_j - y_j} \geq \frac{u(z_j, \alpha(y_j), M) - u(y_j, \alpha(y_j), M)}{z_j - y_j} = (\smile)$$

dove l'ultimo passaggio segue da $(**)$ essendo u crescente nella seconda variabile. Allora $u(\cdot, \alpha(y_j), M)$ ha derivata tra $(M-1, M+1)$. Quindi

$$(\smile) > M - 1$$

Passando al $\liminf$: (visto che per tutti i j abbastanza grandi vale la stima vale anche al limite, non proprio limite perchè non so se esiste, ma liminf)

$$\liminf_{j \to +\infty} \frac{u(z_j) - u(y_j)}{z_j - y_j} \geq M - 1$$

A questo punto il liminf è un numero, non dipende da j. Visto che vale per ogni M allora $\liminf = +\infty \Rightarrow \lim = +\infty$

Step 5: vediamo che vale $(**)$: Teniamo a mente che M è fissato. Vogliamo vedere che la α associata è monotona crescente. vediamo prima che è monotona, poi che è crescente. Poichè $u(x) = u(x, \alpha(x), M)$ e $u(x)$ è continua, allora se α fa un salto lo deve fare anche $u(x, \alpha, M)$ ma questa è continua. Quindi α è continua (si potrebbe vedere che in realtà è 2 lipschitz, ma non ci interessa).

Avendo una funzione continua su un intervallo questa o è strettamente monotona o ha due punti in cui ha lo stesso valore. Se non fosse monotona, esistono $a < c < b$ tali che $\alpha(a) = \alpha(b)$ e diversi da $\alpha(c)$. Allora sostituendo in (a, b) la u originale con $u(\cdot, \alpha(a), M)$ (data da lemma 2), per l'unicità della energia in realtà le due coincidono. Cosa che non può succedere perchè $\alpha(b) \neq \alpha(c)$. Quindi α è monotona[24]

Vediamo che è crescente: si è visto che la α deve essere positiva a destra e negativa a sinistra. Considero $\{x_j\}$ allora

$$\frac{u(x_j) - u(x_0)}{x_j - x_0} = \frac{u(x_j, \alpha(x_j), M) - u(x_0, \alpha(x_j), M) + u(x_0, \alpha(x_j), M) - u(x_0)}{x_j - x_0}$$

Quando $j >> 1$ si ha

$$\frac{u(x_j, \alpha(x_j), M) - u(x_0, \alpha(x_j), M)}{x_j - x_0} < M + 1$$

e poichè per ipotesi $\frac{u(x_j) - u(x_0)}{x_j - x_0} \to +\infty$ vuol dire che

$$\frac{u(x_0, \alpha(x_j), M) - u(x_0)}{x_j - x_0} \to +\infty$$

[24]con un po' di fatica potremmo vedere che lo è strettamente, ma in realtà nello step 4 ci basta che sia monotona, quindi evitiamo la fatica

ma $\frac{u(x_0,\alpha(x_j),M)-u(x_0)}{x_j-x_0} = \frac{\alpha(x_0)}{x_j-x_0}$. Quindi prendendo un x_j qualsiasi (per monotonia) il segno è quello che vogliamo (se son a destra α positiva, sennò negativa) ma allora α è crescente.

Ora che ho finito la dimostrazione scopriamo anche che in realtà è strettamente monotona. (senti come minuto 12.43)

> *Esercizio 23.1*
> Che regolarità della u se $f \in C^k$? (in teoria o $k-1$ o $k-2$). da ripercorre dim tale e quale, non propriamente interessante.

Controesempio di Mania nel 34: (sistemato da davies nel 88).

Sia $A \subseteq [0,1]$ chiuso trascurabile. Allora esiste $v \in C^\infty(I\backslash E), \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\psi \in C^\infty$ con $\psi, \psi'' \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che $\varphi \circ v \in C^\infty(I)$ e inoltre, definito il funzionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 |\varphi \circ u - \varphi \circ v|^2 \psi(u') + \varepsilon u'^2$$

Chiaramente $\mathcal{F}$ è C^∞. son strettamente definito positivo. però questo funzionale (che non rientra in nessun teorema di esistenza) esiste minimo. Qualunque minimo è $C^\infty(I\backslash E)$ (quindi $A = E$) con $[u'] = \pm\infty$ su E. Inoltre c'è Laurentieff.

24 Lezione 30/05

inizio registrazione 14.23

Vediamo il controesempio di Manià: l'insieme delle funzioni ammissibili è $A := \{u \in AC, u(0) = 0, u(1) = 1\}$ con $v \in C^\infty(I \backslash E), \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\psi \in C^\infty$ con $\psi, \psi'' \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che $\varphi \circ v \in C^\infty(I)$ e inoltre, definito il funzionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 |\varphi \circ u - \varphi \circ v|^2 \psi(u') + \varepsilon u'^2$$

Che esista il minimo lo ho per teoremi di esistenza e regolarità parziale di tonelli sono C^∞ tranne su il trascurabile. Vediamo che saremo C^∞ anche su questo pezzo.

Idea Costruiremo funzioni convessa tramite funzioni affini a tratti (come fatto per equiintegrabilità con Paolini) ⌟

Visto che E trascurabile, possiamo vedere che $E = \cap U_k$ con $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_k$ con $|U_k| < \frac{1}{2^k}$. Posso inoltre farli tali che $U_k \supseteq \bar{U}_{k+1}$. Possiamo costruire[25] $g_k \in C_C^\infty(U_k, [0,1])$ con $g_k \equiv 1$ in $\bar{U}_{k+1}$. Consideriamo $\gamma = 1 + \sum g_k$. (sono tutte positive, quindi la posso definire. al massimo in qualche punto diverge). Se $x \notin U_k$ per qualche k allora $\gamma \in C^\infty$. Ma allora $\gamma \in C^\infty(I \backslash E)$ e $\gamma = +\infty$ su E. Quindi $\gamma \in L^p$ $\forall p \neq +\infty$. Definiamo una costante $\alpha = \int_0^1 \gamma(t)dt = \|\gamma\|_{L^1}$. Definiamo quindi

$$v(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \gamma(t)dt$$

Notiamo che v è una funzione strettamente crescente (ha derivata $\frac{1}{\alpha}$). è integrale di una L^1 quindi è assolutamente continua. Quando sono su E v ha derivata $= +\infty$. Siccome v è continua, definisco $F = v(E)$. F è compatto poichè immagine continua di un compatto ed inoltre ha parte interna vuota. [26] Potremmo dire che F è intersezione di aperti, ma non ci interessa. Quello che è interessante è che $I \backslash F$ è un aperto e un aperto lo posso scrivere come unione di aperti, che posso prendere inscatolati. $I \backslash F = \cup G_n$ con $\bar{G}_n \subseteq G_{n+1}$. (stavolta gli aperti son crescenti e non decrescenti). Avendo degli aperti inscatolati possiamo definire delle funzioni $h_n \in C_C^\infty(G_n, [0,1])$ con $h_n \equiv 1$ in $\bar{G}_{n-1}$. Definiamo $\varphi_n(x) = \int_0^x h_n$. Ci chiediamo cosa sia $\varphi_n \circ v0$? è $C^\infty(I)$. (no capito quando vale 0, minuto 14.44)

Se ho una successione di funzioni C^∞ quand'è che la serie sia C^∞? Introduco delle costanti:

$$\varphi = \sum \delta_n \varphi_n$$

dove

$$\delta_n = \frac{1}{\max\{|\varphi_j^{(l)}, 0 \leq j, l, \leq n\}} 2^n$$

Notiamo che tutti questi massimi fanno almeno 1. Questo ci garantisce che la serie converge ed essendo limite uniforme di continue è continua. è C^∞?

[25] solita funzione cutoff

[26] se avesse parte interna la potrei tirare indietro e avrei aperto in E, ma questi non hanno misura non nulla

Se derivo k volte ho che le prime k funzioni restano, mentre le altre avranno un massimo > 1, ma quindi potrò maggiorare con 2^n che converge e allora ok! (giochino elementare da rivedere). Quindi siamo sicuri che $\varphi \in C^\infty$ e che $\varphi \circ v \in C^\infty$. Vediamo ultima affermazione: sicuramente $\varphi \circ v$ è C^∞ fuori da E, dentro? Qualsiasi $\varphi_n \circ v$ è 0. Ma questo non basta per dire che sono C^∞ ovunque. (anche se io so che sono continuo). Devo dimostrare che tutte le derivate $\varphi \circ v$ vanno a 0 quando mi avvicino ad F: (minuto 14.53 per scrivere perchè succede)

Fa comodo inoltre notare che φ sia strettamente crescente: crescente ok perchè sono somma di crescenti. D'altra parte $\varphi_n' = h_n$ e valgo 1 su $\bar{G}_n$. Quindi in ogni G_n la funzione ha derivata almeno δ_n. Quindi sono strettamente crescente.

Definiamo (sostanzialmente è modulo di continuità del quadrato di modulo[27] di φ)

$$\eta(t) = \min\{(\varphi(x) - \varphi(y))^2 : |x - y| \geq \frac{t}{2\alpha}$$

Visto che φ strettamente crexcente, η è strettamente positiva. Inoltre η è crescente e $\eta(0) = 0$.

Noto che

$$(\varphi(x) - \varphi(y))^2 \geq \eta(2\alpha(|x - y|)$$

Definiamo inoltre $d_k = dist(E, U_k) > 0$ e d_k descresce verso 0. Definiamo la lineare a pezzi:

$$\rho(0, d_3] \to [\frac{1}{8\alpha}, +\infty)$$

con

$$\rho(d_j) = \frac{j - 2}{8\alpha}$$

Vogliamo vedere che vale

$$v'(x) \geq 8\rho(d(x, E))$$

se $x \in E$ ho $\infty > 0$, se invece $x \in U_k \backslash \bar{U}_{k+1}$. Allora $d(x, E) \geq d_{k+1}$. e allora $\rho(d(x, E)) \leq \rho(d_{k+1}) = \frac{k-1}{8\alpha}$. Poichè $\gamma' = \frac{1}{\alpha}\gamma$ quindi se $x \in U_k$ ho $k \leq \gamma \leq k + 1$. Ma quindi

$$8\rho(d(x, E)) \leq 8\rho(d_{k+1}) = \frac{k - 1}{\alpha} \leq \frac{k}{\alpha} \leq v'(x)$$

Siccome ρ è strettamente decrescente allora ha inversa $\rho^{-1} : [\frac{1}{8\alpha}, +\infty) \to (0, d_3]$ che è sempre strettamente decrescente. Consideriamo

$$h(t) = \frac{1}{\rho^{-1}(t)\eta(\rho^{-1}(t))}$$

Visto che η è sempre definito, h è definito dove è definito ρ^{-1}. Quindi h è definita su $[\frac{1}{8\alpha}, +\infty)$. Noto che h è strettamente monotona, cerchiamo di capire se crescente o decrescente: è crescente perchè per t che aumente ho numeratore che cresce e denominatore che diminuisce. Notiamo quindi che

$$h : [\frac{1}{8\alpha}, +\infty) \to \left[\frac{\frac{1}{8\alpha}}{d_3\eta(d_3)}, +\infty\right)$$

[27] $\frac{t}{2\alpha}$ messo solo per far tornare bene i conti

Estendo h in maniera stupida: fa 0 su $[0, B]$ e poi linearmente va a $\frac{\frac{1}{8\alpha}}{d_3\eta(d_3)}$. (a seconda di B cambia la funzione ottimale).

Restano da definire ψ e ε e da controllare che la tesi sia verificata. Sia

$$\psi(t) = \frac{t^2}{B^2} + \sum_{n\geq 1} h(n+1)\left(\frac{t}{n}\right)^{K_n}$$

dove $K_n \geq 2$ interi crescenti. Noto che se converge questa è convessa. Come scelgo K_n? Vogliamo far si che ψ abbiamo raggio di convergenza $+\infty$. A quel punto è chiaro che è C^∞ e strettamente convessa. Ricordando[28] che $\sum a_n t^n$ ha raggio di convergenza $(\limsup(|a_j|^{\frac{1}{j}})^{-1}$. Voglio vedere che

$$a_j^{\frac{1}{j}} \to 0$$

Ossia

$$\left(\frac{h(n+1)}{n^{K_n}}\right)^{\frac{1}{K_n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

ma questo è $\frac{(h(n+1))^{\frac{1}{K_n}}}{n}$. Basta scegliere K_n in modo che $h(n+1)^{\frac{1}{K_n}}$ sia 2, così convergo.

Scegliamo ora ε in modo che $8\alpha \int v'^2 < \frac{1}{\varepsilon}$. ($\gamma \in L^2$).

Così abbiamo definito tutto quanto. Con quella scelta di ε notiamo che

$$\min \mathcal{F} \leq \mathcal{F}(v) = \varepsilon \int v'^2 < \frac{1}{8\alpha}$$

Vogliamo dimostrare che una qualsiasi funzione C^1 ha energia $> \frac{1}{8\alpha}$, così abbiamo il fenomeno di Laurentieff. Possiamo vedere di più:

sia $u \in A$ con $|u'(t_0)| < +\infty$ con $t_0 \in E$. Allora $\mathcal{F}(u) \geq \frac{1}{8\alpha}$. (questo è molto più forte di Laurentieff. Oltre a questo, abbiamo anche che ??? minuto 15.34)

Supponiamo che $u(t_0) \leq v(t_0)$ (sennò prendo e ribalto tutto). Chiaramente, per r subito a destra di t_0 vale

$$u(r) - u(t_0) \leq \frac{1}{4}(v(r) - v(t_0))$$

e per r vicino a 1 è falsa. (parto da più basso per arrivare a stessa cosa). Quindi prendo r dopo t_0 per cui è vera e

$$s = \min\{t \in I : u(t) - v(t_0) = \frac{1}{2}(v(t) - v(t_0)\}$$

Quindi su (r, s) si ha che

$$u(t) - v(t_0) < \frac{1}{2}(v(t) - v(t_0))$$

Ma allora [29]

$$v(t) - u(t) = v(t) - v(t_0) - (u(t) - v(t_0)) > \frac{v(t) - v(t_0)}{2} > \frac{t - t_0}{2\alpha}$$

[28]vedi come si fanno le radici particolari in LaTeXche non te lo ricordi

[29]$v' \geq \frac{1}{\alpha}$ ovunque siamo

Poichè $(\varphi(x)-\varphi(y))^2 \geq \eta(2\alpha|x-y|)$ si ha che

$$(\varphi(v(t))-\varphi(u(t)))^2 \geq \eta(t-t_0)$$

Poichè ($s>r$ e v crescente si ha)

$$u(s)-v(t_0)=\frac{1}{2}(v(s)-v(t_0))>\frac{1}{2}(v(r)-v(t_0))$$

e da $u(r)-u(t_0) \leq \frac{1}{4}(v(r)-v(t_0))$

$$\Rightarrow u(s)-u(r) \geq \frac{1}{4}(v(s)-v(t_0))=\frac{1}{4}\int_{t_0}^{s} v'(\sigma)d\sigma)$$

$$\geq 2\int_{t_0}^{s}\rho(d(\sigma,E)d\sigma \geq 2\int_{t_0}^{s}\rho(\sigma-t_0)d\sigma = 2\int_{0}^{s-t_0}\rho(\sigma)d\sigma$$

(si deduce da $u(s)-u(t_0)=u(s)-u(r)+u(r)-u(t_0)$). Quindi abbiamo scoperto che

$$u(s)-u(r) \geq 2\int_{0}^{s-t_0}\rho(\sigma)d\sigma$$

Definiamo $G=\{t\in[r,s]:u'(t)\leq\rho(t-t_0)\}$ e $H=[r,s]\backslash G$. Vediamo

$$u(s)-u(r)=\int_G u'+\int_H u' \leq \int_H u'+\int_G \rho(t-t_0) \leq \int_H u'+\int_s^r \rho(t-t_0)$$

$$=\int_H u'+\int_{r-t_0}^{s-t_0}\rho \leq \int_H u'+\int_0^{s-t_0}\rho$$

e quindi

$$\int_H u' \geq \int_0^{s-t_0}\rho(\sigma)d\sigma \geq \frac{s-t_0}{8\alpha}$$

Quindi visto che

$$\psi(t)=\frac{t^2}{B^2}+\sum h(n+1)(\frac{t}{n})^{\frac{1}{K_n}}$$

se $n\leq t\leq n+1$ ho $\psi(t)\leq h(t)$ (minuto 16.06)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &\geq \int_r^s(\varphi(u)-\varphi(v))^2\psi(u') \geq \int_r^s \eta(t-t_0)\psi(u'(t))dt\\ &\geq \int_r^s \eta(t-t_0)h(u'(t))dt \geq \int_H \eta(t-t_0)h(u'(t))dt\\ &> \int_H \frac{u'(t)}{t-t_0}dt \geq \int_H \frac{u'(t)}{s-t_0}dt \geq \frac{1}{8\alpha}\end{aligned}$$

poichè $u'(t)>\rho(t-t_0)$ e $\rho^{-1}(u'(t))<t-t_0$. allora

$$h(u'(t))=\frac{u'(t))}{\rho^{-1}(u'(t))\eta(\rho^{-1}(u'(t)))}>\frac{u'(t)}{(t-t_0)\eta(t-t_0)}$$

Questo mi assicura laurentieff tra lipschitziane/c1 e AC. mi ha anche detto che minuto 16.16

Sia $u \in argmin\mathcal{F}$ e $u \in C^\infty(I \backslash E_0)$. Abbiamo visto che $E_0 \supseteq E$. Vogliamo dimsotrare che in realtà $E_0 = E$. Vediamo l'altra inclusione. Prendo una componente connessa di $I \backslash E_0$. Dobbiamo dimostrare che i suoi estremi sono in E. Supponiamo che la componente connessa sia (t_0, t). Suppongo per assurdo che $t \notin E$.

Potevamo osservarlo all'inizio, ma la u sicuramente è monotona (minuto 16.22). Poichè la $u \in C^\infty$ risolve Eulero-Lagrange in (t_0, t). Quindi

$$\frac{d}{dt} F_p(s, u(s), u'(s)) = F_z$$

Se considero $s \to t^-$ ho che $F_p(s, u(s), u'(s)) \to +\infty$. Due casi:

1. $u(t) \neq v(t)$. Allora

$$F_z = 2(\varphi(u) - \varphi(v))\varphi'(u)\psi(u')$$

   Ma allora $F_z \in L^1$ poichè φ' è limitato, $\varphi(u) - \varphi(v) \leq c(\varphi(u) - \varphi(v))^2$ essendo lontano da 0 e allora ho un pezzo di energia , che è finita. Assurdo perchè F_p non potrebbe esplodere

2. $u(t) = v(t)$. Ma u ha derivata infinita in t e la v la ha finita. Quindi $u < v$ a sinistra di t. Guardando F_z di prima ho $F_z < 0$ quindi ho F_p decrescente, non può esplodere.

Resterebbe da controllare che v non è il minimo.