GEOMETRIA PROIETTIVA

▸ SPAZIO PROIETTIVO

- Sia V uno spazio vettoriale. Lo spazio $\mathbb{P}(V)$ associato a V è:
$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} /_{\sim}$$
dove $\underline{v} \sim \underline{w} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \underline{v} = \lambda \underline{w}$
- $\dim \mathbb{P}(V) := \dim V - 1$
- Se $V = \mathbb{K}^n$: $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

▸ TRASFORMAZIONI AFFINI

- Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ funzione tra spazi proiettivi.
f è trasformazione proiettiva se $\exists\ \varphi : V \to W$ lineare tale che:
$$f([\underline{v}]) = [\varphi(\underline{v})] \qquad \forall\, \underline{v} \in V \setminus \{0\}$$
Si dice "f indotta da φ."
- PROPRIETÀ
  1) Se f trasformazione proiettiva, indotta da φ, allora φ iniettiva.
  2) Se φ lineare iniettiva, allora induce f, $f([\underline{v}]) = [\varphi(\underline{v})]$.
  3) Tutte le trasformazioni proiettive sono iniettive.
- Le trasformazioni proiettive costituiscono una CATEGORIA.

- ISOMORFISMO PROIETTIVO

Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazione proiettiva. Equivalgono:
1) f surgettiva
2) f iniettiva
3) $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$
4) f invertibile e $f^{-1} : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$ trasformazione proiettiva

Allora f è ISOMORFISMO PROIETTIVO.

- Se $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, è isomorfismo proiettivo, si chiama PROIETTIVITÀ.
- OSS: i punti fissi di $f = [\varphi]$ sono in bigezione con gli autospazi di dimensione 1 di φ: $f([\underline{v}]) = [\underline{v}] \iff \varphi(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

- ## Sottospazio Proiettivo

- Un SOTTOSPAZIO PROIETTIVO S di $\mathbb{P}(V)$ e' $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ tale che per $\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ la proiezione di V, ho che $S = \pi(H \setminus \{0\})$ per H sottospazio vettoriale di V

- **PROPRIETÀ**

  - Siano S_i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, $i \in I$.
    Allora $\bigcap_{i \in I} S_i$ e' sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$.
  - L'unione di sottospazi in generale non e' sottospazio proiettivo.

- **SOTTOSPAZIO GENERATO**

  Sia $A \subseteq \mathbb{P}(V)$. Il SOTTOSPAZIO GENERATO da A e' il più piccolo sottospazio proiettivo per inclusione che contiene A.
  Si indica $L(A)$.

- **PROPRIETÀ**

  - Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ sottospazi proiettivi, $\mathbb{P}(H_1) = S_1$, $\mathbb{P}(H_2) = S_2$.
    Allora $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$.
  - Formula di Grassmann Proiettiva

    Siano S_1, S_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$. Allora:

    $$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

  - Corollario

    Siano S_1, S_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, tali che $S_1 \subseteq S_2$.
    Allora $\dim S_1 \leq \dim S_2$.
    In particolare $\dim S_1 = \dim S_2 \iff S_1 = S_2$

SISTEMI di PUNTI

- **DEF. Punti indipendenti**

Siano $P_1, \dots, P_k$ punti di $\mathbb{P}(V)$. Posti $P_i = [\underline{v}_i]$ $\forall\, i = 1, \dots, k$, $P_1, \dots, P_k$ sono INDIPENDENTI se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ linearmente indipendenti.

- **DEF. Posizione generale**

Siano $P_1, \dots, P_k$ punti di $\mathbb{P}(V)$. Sono in POSIZIONE GENERALE se ogni famiglia $P_{i_1}, \dots, P_{i_h}$ con $h \leq n-1$ è data da punti indipendenti.

- **DEF. Riferimento proiettivo**

Un RIFERIMENTO PROIETTIVO di $\mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = n$, è una $(n+2)$-upla ordinata $P_0, \dots, P_{n+1}$ di punti in posizione generale.

- **DEF. Base normalizzata**

Una BASE NORMALIZZATA associata al riferimento proiettivo $P_0, \dots, P_{n+1}$ è una base vettoriale $(\underline{v}_0, \dots, \underline{v}_n)$ di V tale che:

$$P_i = [\underline{v}_i] \quad \text{per } i = 0, \dots, n \qquad \text{e} \qquad P_{n+1} = [\underline{v}_0 + \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_n]$$

In particolare P_i, $i = 0, \dots, n$ sono PUNTI FONDAMENTALI e P_{n+1} è PUNTO UNITÀ.

- **TEOREMA**

Ogni riferimento proiettivo ammette basi normalizzate.
Date $(\underline{v}_0, \dots, \underline{v}_n)$ e $(\underline{w}_0, \dots, \underline{w}_n)$ basi normalizzate dello stesso riferimento proiettivo, esse differiscono per moltiplicazione per uno scalare.

- **TEOREMA**

Siano $f, g : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazioni proiettive.
Siano $\varphi, \psi : V \to W$ lineari tali che $f = [\varphi]$, $g = [\psi]$.
Dato $\mathcal{R}$ riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, sono equivalenti:

1) $f = g$
2) $f(P) = g(P)$ $\forall\, P \in \mathcal{R}$
3) $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* : \varphi = \lambda \psi$

- Corollario

Il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$, chiamato $\mathbb{P}GL(V)$, e' isomorfo a $GL(V)/_N$ con $N = \{ \lambda Id : \lambda \in \mathbb{K}^* \} \triangleleft GL(V)$.

- TEOREMA FONDAMENTALE delle TRASFORMAZIONI PROIETTIVE

Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi su $\mathbb{K}$, $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$ e con $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ rispettivi riferimenti proiettivi.
Allora $\exists!\ f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazione proiettiva tale che: f manda ordinatamente $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$.

- DEF. Coordinate omogenee

Sia $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, $\dim \mathbb{P}(V) = n$.
Sia $(\underline{v}_0, \dots, \underline{v}_n)$ base normalizzata di V rispetto a $\mathcal{R}$.
Preso $P \in \mathcal{R}$, $P = [\underline{v}]$. Ho che $\underline{v} = \sum_{i=0}^{n} a_i \underline{v}_i$ con $a_i \in \mathbb{K}$.
Allora la $(n+1)$-upla di COORDINATE OMOGENEE per P e' $(a_0, \dots, a_n)$, rispetto al riferimento proiettivo $\mathcal{R}$.

- ISOMORFISMO PROIETTIVO

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \\ P &\longmapsto [a_0 : \dots : a_n] \end{aligned}$$

non dipende dalla base normalizzata scelta per il riferimento $\mathcal{R}$.

- MATRICI ASSOCIATE a f

Siano $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ riferimenti proiettivi con basi normalizzate $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.
Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazione proiettiva, $f = [\varphi]$.
Allora $M = m_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(\varphi)$ rappresenta f, nel senso che:

$$\forall\ P = [\underline{v}] \in \mathbb{P}(V) : \qquad f(P) = [M \cdot \{\underline{v}\}_{\mathcal{B}_1}]$$

M e' unica a meno di moltiplicazione per scalare.

- RAPPRESENTAZIONE SOTTOSPAZI

- RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

Sia $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo, S sottospazio di $\mathbb{P}(V)$: $S = \mathbb{P}(W)$.
Siano $\mathcal{R}$ riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ con $\mathcal{B}$ base normalizzata.

Esiste M matrice che descrive W:

$$M\{\underline{v}\}_B = \underline{0} \iff \underline{v} \in W$$

Allora S e' rappresentato da M nel senso:

$$M\{\underline{v}\}_B = \underline{0} \iff [\underline{v}] = P \in S$$

- <u>RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA</u>

Sia $(\underline{w}_0, \dots, \underline{w}_k)$ base di W. Posso definire W sottospazio di V come immagine di: $\varphi : \mathbb{K}^{k+1} \longrightarrow V$, $\underline{e}_i \longmapsto \underline{w}_i$

Data M associata a φ:

$$P = [\underline{v}] \in S = \mathbb{P}(W) \iff \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^{k+1} : \quad \{\underline{v}\}_B = M \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

- **DEF.** <u>Prospettività</u>:

Sia $\mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = 2$. Siano r, s rette proiettive distinte.
Sia $\{A\} = r \cap s$, $O \in \mathbb{P}(V) \setminus \{r \cup s\}$.
Dato $P \in r$, considero $L(P, O)$. $\Pi_O(P) = s \cap L(P, O)$
Allora $\Pi_O : r \longrightarrow s$ e' PROSPETTIVITA' di centro O.

- <u>PROPRIETA'</u>
  - Π_O e' trasformazione proiettiva.
  - Sia $f : r \to s$ trasformazione proiettiva tale che $f(A) = A$.
    Allora f e' PROSPETTIVITA': $\exists\, O \in \mathbb{P}(V) \setminus \{r \cup s\} : f = \Pi_O$.

Carte Affini e Punti all'Infinito

- Ogni $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo su $\mathbb{K}$ di dimensione finita è isomorfo ad un $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ per $n \in \mathbb{N}$.

  $\forall i = 0, \dots, n$ poniamo:

  $$H_i = \{x_i = 0\} \quad \text{e} \quad U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i$$

- **TEOREMA**

  $\forall i = 0, \dots, n$ c'è una bigezione naturale $J_i : \mathbb{K}^n \to U_i$.

- **DEF.** Carta affine e punti all'infinito

  $J_i : \mathbb{K}^n \to U_i$ è CARTA AFFINE.

  H_i è l'insieme dei PUNTI all'INFINITO.

  $\Rightarrow \quad \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0 = J_0(\mathbb{K}^n) \cup H_0$

- **PROPRIETÀ**

  - Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sottospazio proiettivo di dimensione k.
    Allora $J_0^{-1}(V \cap U_0)$ è sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$, di dimensione k.
    Esso è PARTE AFFINE di V.
  - Sia $W \subseteq \mathbb{K}^n$ sottospazio affine di dimensione k.
    Allora $\exists!$ sottospazio proiettivo $\overline{W} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ tale che
    $$J_0^{-1}(\overline{W} \cap U_0) = W \qquad \text{di dimensione } \dim \overline{W} = k.$$
    Esso si chiama CHIUSURA PROIETTIVA di W.

[
- PROIETTIVO $\Rightarrow$ AFFINE: si pone $x_0 = 1$ nel proiettivo
- AFFINE $\Rightarrow$ PROIETTIVO: si sostituisce $x_i \to \frac{x_i}{x_0}$ e si toglie il denominatore.
]

Curve Algebriche Piane

▸ **Richiami**

- $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e' un UFD, cioe' $\forall p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$
  $\exists\, a \in \mathbb{K}^*;\ p_1, \dots, p_k \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ irriducibili; $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
  tali che $p = a\, p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$.
- **DEF.** Polinomio irriducibile
  Un polinomio $p \neq 0$ e' irriducibile se, ogni volta che $p = q \cdot s$ con $q, s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ allora q o s sono invertibili.

▸ **DEF.** Curva Affine

Una curva affine (piana) e' un elemento di $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_1, x_2])$, cioe' una classe di equivalenza di polinomi non nulli in due variabili tale che $p \sim q \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* : p = \lambda q$

Noteremo: $C = [f]$

- **Proprietà**
  → GRADO della CURVA: $\deg C = \deg f$, dove $C = [f]$.
  → C e' IRRIDUCIBILE $\iff$ f e' IRRIDUCIBILE.
  → $C' = [g]$ e' COMPONENTE IRRIDUCIBILE di $C = [f]$ se $g \mid f$.
  → Date $C = [f]$, $C' = [g]$, $C + C' = [f \cdot g]$
  → C curva algebrica $\exists!\, C_1, \dots, C_k$ irriducibili, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $C = n_1 C_1 + \ldots + n_k C_k$
  → C e' RIDOTTA se nella composizione $n_1 = \ldots = n_k = 1$.

▸ **DEF.** Supporto di C

Sia C curva affine. Il SUPPORTO di C e':

$$V(C) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0 \}$$

→ Siano C, C' curve. Allora:

$$V(C+C') = V(C) \cup V(C')$$

▸ **DEF. Polinomio Omogeneo**

Un polinomio $p \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ si dice OMOGENEO di grado d se e' somma di monomi di grado d.

Lo spazio vettoriale di questi polinomi e' $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$.

▸ **DEF. Curva Proiettiva**

Una curva proiettiva (piana) e' un elemento di $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0 \dots x_2]_d)$ cioe' $C = [p]$ dove p e' un polinomio omogeneo e:

$$p \sim q \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : p = \lambda q$$

→ OSS: $p \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d \iff p(tx_0, tx_1, tx_2) = t^d p(x_0, x_1, x_2)$

▸ **DEF. Supporto di C**

Sia $C = [p]$. Il suo SUPPORTO e':

$$V(C) = \{ Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid p(Q) = 0 \}$$

- **PROPRIETÀ**

→ $p \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$, $q \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$. Allora:

$$q \mid p \implies q \text{ omogeneo}$$

→ Sia p_{x_i} la derivata parziale formale di p rispetto a x_i:

$$p = x_0 \cdot p_{x_0} + x_1 \cdot p_{x_1} + x_2 \cdot p_{x_2}$$ IDENTITÀ di EULERO

→ Siano C, C' curve proiettive di equazioni f, g.

$$C + C' = [f \cdot g]$$

→ Sia $C = [p]$. Allora $\deg C = \deg p$.

→ $V(C+C') = V(C) \cup V(C')$

→ $C = [p]$ e' irriducibile $\iff$ p e' irriducibile

EQUIVALENZA AFFINE / PROIETTIVA di CURVE

[IDEA: definire un'azione di proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sulle curve proiettive tale che $V(f(C)) = f(V(C))$]

▸ **DEF** Azione proiettività su curve

Sia $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ proiettività indotta da $\varphi: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ lineare e bigettiva. Data $C = [p]$ curva proiettiva:

$$f_*(C) := f(C) = [p \circ \varphi^{-1}]$$

- PROPRIETÀ

→ Siano f, g proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, C curva proiettiva.

$$f(g(C)) = (f \circ g)(C)$$

→ Siano f proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, C curva proiettiva.

$$V(f(C)) = f(V(C))$$

▸ **DEF.** Equivalenza proiettiva

Due curve proiettive C e C' si dicono PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI se $\exists f$ proiettività, $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ tale che $f(C) = C'$

CLASSIFICAZIONE PROIETTIVA delle CONICHE

- **DEF. Conica**

Una CONICA è una curva algebrica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ di grado 2.

> RAPPRESENTAZIONE CONICA

Sia $C = [f]$, $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_2$.

$$f(x_0, x_1, x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{02}x_0x_2$$

Allora per $x = (x_0, x_1, x_2)$ e A matrice simmetrica $(a_{ij})_{i,j}$

$$f(x) = x A {}^t x$$

> CLASSIFICAZIONE PROIETTIVITÀ

Sia $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ proiettività, $g = [M]$, $M \in GL_3(\mathbb{K})$.

Sia C curva conica associata ad $[A]$.

Allora: $$g(C) = [{}^tM^{-1} A M^{-1}]$$

- **DEF. Conica Degenere (non)**

Sia $C = [A]$ conica.

- C è NON DEGENERE $\iff$ $rk\,A = 3$
- C è DEGENERE $\iff$ $rk\,A < 3$

- **TEOREMA Classificazione proiettiva di coniche su $\mathbb{C}$**

Ogni curva proiettiva su $\mathbb{C}$ è equivalente proiettivamente a una tra:

$C_1 = [x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$ $\quad rk\,A = 3 \to$ irriducibile

$C_2 = [x_0^2 + x_1^2]$ $\quad rk\,A = 2 \to$ due rette incidenti

$C_3 = [x_0^2]$ $\quad rk\,A = 1 \to$ una retta doppia

Ovvero il RANGO è invariante COMPLETO.

- **TEOREMA** Classificazione proiettiva di coniche su $\mathbb{R}$

Ogni conica proiettiva su $\mathbb{R}$ è equivalente proiettivamente a una tra:

$C_1 = [x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$ → conica vuota

$C_2 = [x_0^2 + x_1^2 - x_2^2]$ → conica non degenere / non vuota

$C_3 = [x_0^2 + x_1^2]$ → un punto

$C_4 = [x_0^2 - x_1^2]$ → due rette incidenti

$C_5 = [x_0^2]$ → una retta doppia

Curve Affini <-> Proiettive

▸ Proiettiva → Affine

- **DEF.** Parte Affine

La PARTE AFFINE C° di C e' la curva affine di $\mathbb{K}^2$ definita:

$$f(x,y) = F(1,x,y) \qquad \text{dove } C = [F].$$

· **OSS:** $V(C^\circ) = j_0^{-1}(V(C) \cap U_0)$

· **PROP:** se $x_0 \nmid F$, $\deg f = \deg F$

▸ Affine → Proiettiva

- **DEF.** Chiusura Proiettiva

La CHIUSURA PROIETTIVA $\overline{C}$ e' la curva proiettiva definita:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \qquad d = \deg f$$

· **PROP:** $\deg F = \deg f$

▸ Affine <-> Proiettiva

Le definizioni date danno una BIGEZIONE per $d > 0$ fissato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{curve affini in } \mathbb{K}^2 \\ \text{di grado } d \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{curve proiettive di } \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \text{, grado } d \\ \text{e } H_0 \text{ non loro componente} \end{array} \right\}$$

▸ DEF. Punto all'infinito

Sia C una curva affine. I suoi PUNTI ALL'INFINITO sono:

$$V(\overline{C}) \cap H_0 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$$

- **PROP.**

Sia C curva affine di grado d. Allora:

- $\#(V(\overline{C}) \cap H_0) \leq d$
- Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ allora $V(\overline{C}) \cap H_0 \neq \emptyset$

- Corollario 1

Sia $\mathcal{D}$ curva proiettiva di grado d, $\ell \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ retta che non sia componente di $\mathcal{D}$.

Allora $\#(V(\mathcal{D}) \cap \ell) \leq d$ e se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ allora $\neq \emptyset$.

- Corollario 2

Sia $\mathcal{D}$ curva proiettiva di grado d, $\ell \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ retta.

Se $\#(V(\mathcal{D}) \cap \ell) > d$ allora ℓ componente di $\mathcal{D}$.

Rette Tangenti e Molteplicità Intersezioni

▶ CASO AFFINE

• **DEF.** Molteplicità di Intersezione

La molteplicità di intersezione di $C = [f]$ e retta ℓ in $P_0 \in \ell$ è data da

$$I(C, \ell, P_0) = \sup\{k \in \mathbb{N} : (t-t_0)^k \mid p(t)\}$$

dove $p(t) = f(a+\alpha t, b+\beta t)$ parametrizzazione di ℓ con $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, t_0 valore che individua P_0 in ℓ.

- PROPRIETÀ

• $I(C, \ell, P_0) = 0 \iff P_0 \notin V(C) \cap \ell$

• $I(C, \ell, P_0) \geq 1 \iff P_0 \in V(C) \cap \ell$

• ℓ componente di $C \iff p(t)$ polinomio nullo

• **DEF.** Retta Tangente Affine

Sia C curva affine, ℓ retta, $P_0 \in V(C) \cap \ell$.
ℓ è TANGENTE a C in $P_0 \iff I(C, \ell, P_0) \geq 2$

▶ CASO PROIETTIVO

Sia $C = [F]$ curva proiettiva, $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$ e $\ell \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ retta. Dati $P = [\underline{v}]$, $Q = [\underline{w}]$ punti distinti di ℓ, il punto generico della retta ℓ è:

$$P_{\lambda,\mu} = [\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}] \quad \text{con } [\lambda,\mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$$

Definisco la parametrizzazione di ℓ su F:

$$G(\lambda,\mu) = F(\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) = F(\lambda v_0 + \mu w_0, \lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)$$

• **DEF.** Molteplicità di Intersezione

La molteplicità di intersezione di $C = [F]$ e ℓ in $P_0 = P_{\lambda_0\mu_0}$ è

$$I(C, \ell, P_0) = \sup\{k \in \mathbb{N} : (\lambda\mu_0 - \mu\lambda_0)^k \mid G(\lambda,\mu)\}$$

- PROPRIETÀ

• $I(C, \ell, P_0) = 0 \iff P \notin V(C) \cap \ell$

• $I(C, \ell, P_0) \geq 1 \iff P \in V(C) \cap \ell$

• ℓ componente di $C \iff I(C, \ell, P) = +\infty$

- PROP. su Polinomi Omogenei

Sia $G(\lambda,\mu)$ un polinomio omogeneo. Allora:

1) $G(\lambda_0, \mu_0) = 0 \iff \lambda\mu_0 + \mu\lambda_0 \mid G(\lambda,\mu)$.

2) se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $G(\lambda,\mu)$ si scompone in soli fattori lineari.

3) se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $G(\lambda,\mu)$ si scompone in fattori di grado 1 o 2.

- PROP. indipendenza molteplicità:

Il numero $I(C, \ell, P)$:

• non dipende dalla scelta di $\underline{v}, \underline{w}$, i parametri per ℓ.

• e' invariante per proiettività $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, cioe':

$$I(C, \ell, P) = I(f(C), f(\ell), f(P))$$

▶ AFFINE e PROIETTIVA

Le nozioni definite su affine e proiettivo sono compatibili.

Sia $C = [f]$ curva affine, $\ell \subseteq \mathbb{K}^2$ retta, $P_0 \in \ell$.

Per chiusura proiettiva: $\overline{C} = [F]$, $\overline{\ell} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Allora:

$$I(C, \ell, P) = I(\overline{C}, \overline{\ell}, P)$$

• Corollario

→ Nel caso affine, $I(C, \ell, P)$ non dipende dalla parametrizzazione di ℓ.

- **PROP.** Intersezioni retta

Sia C curva proiettiva di grado d, ℓ retta non componente di C. Allora:

$$\sum_{P \in V(C) \cap \ell} I(C, \ell, P) \leq d$$

e vale l'uguaglianza per $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

· **Corollario**

→ Sia C curva affine di grado d, $\ell \subseteq \mathbb{K}^2$ retta non componente di C. Allora:

$$\sum_{P \in V(C) \cap \ell} I(C, \ell, d) \leq d$$

e vale l'uguaglianza per $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e punto all'infinito di $\overline{\ell}$ non sta in $V(\overline{C})$.

▸ **DEF.** Retta Tangente

Sia C una curva proiettiva e $\ell \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ retta.
Si dice che ℓ è tangente a C in P_0 se:

$$I(C, \ell, P_0) \geq 2$$

Punti Lisci e Singolari

- **DEF.** Molteplicità di un punto

Sia C una curva (affine o proiettiva). Sia P punto.
Allora la molteplicità di C in P è:

$$m_P(C) = \min\{I(C, r, P) \mid r \text{ retta passante per } P\}$$

- **DEF.** Punto singolare e liscio

Sia $P \in V(C)$. P si dice SINGOLARE per C se $m_P \geq 2$.
P si dice LISCIO per C se $m_P = 1$.

- **DEF.** Curva singolare e liscia

Sia C una curva algebrica. C si dice LISCIA se ogni suo punto è liscio, altrimenti C è SINGOLARE se ha almeno un punto singolare.

- **PROP.** Corrispondenza affine/proiettivo

Sia C curva affine, $P \in \mathbb{K}^2$. Pensando $\mathbb{K}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ con la solita carta affine: $m_P(C) = m_P(\overline{C})$

- **Criterio per P liscio in C**

  - **GRADIENTE**

Siano $f \in \mathbb{K}[x,y]$, $F \in \mathbb{K}_d[x_0, x_1, x_2]$. Il GRADIENTE è:

$$\nabla f = (f_x, f_y) \qquad \nabla F = (F_{x_0}, F_{x_1}, F_{x_2})$$

con elementi le derivate parziali formali.

  - **TEOREMA** (Affine)

Siano $C = [f]$ curva affine, $P \in V(C)$. Allora:

1) P liscio per C $\iff$ $\nabla f(P) \neq (0,0)$

2) P liscio per C $\Rightarrow$ $\exists!$ tangente a C in P: per $P = (a,b)$

$$f_x(P) \cdot (x-a) + f_y(P) \cdot (y-b) = 0$$

- TEOREMA (Proiettivo)

Sia $\mathcal{C} = [F]$ curva proiettiva, $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Allora:

1) $\nabla F(P) = 0 \iff P$ singolare in $\mathcal{C}$

2) $P \in V(\mathcal{C})$ e $\nabla F(P) \neq 0 \iff \exists!$ tangente a $\mathcal{C}$ in P:

$$x_0 \cdot F_{x_0}(P) + x_1 \cdot F_1(P) + x_2 \cdot F_{x_2}(P) = 0$$

→ OSS: ∇F non e' una ben definita funzione $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^3$.
Lo diventa a meno di moltiplicazione per scalari, perchè:

$$\nabla F(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^{d-1} \cdot \nabla F(a, b, c)$$

→ CASO PARTICOLARE (Conica)

Sia $\mathcal{C}$ una conica proiettiva. $\mathcal{C} = [F] = [A]$ dove:

$$F(x) = F(x_0, x_1, x_2) = x^T A x$$

Allora $\nabla F(x) = 2 \cdot A \cdot x$

Tangente Principale

▸ **DEF. Tangente Principale**

Sia C una curva affine o proiettiva, sia $P \in V(C)$.
Una retta r (affine o proiettiva) è TANGENTE PRINCIPALE a C in P se $I(C, r, P) > m_P(C)$

▸ **Calcolo Tangenti Principali** (caso affine)

Sia $C = [f]$ curva affine, sia $P = (0,0)$, suppongo $P \in V(C)$, ovvero $d \geq 1$ dove la decomposizione in omogenee è:

$$f = f_d + f_{d+1} + \ldots + f_n \qquad \text{con } \deg f = n,\ f_d \neq 0$$

Allora:

1) $m_P(C) = d$
2) la retta con giacitura $\mathrm{Span}\langle(\alpha,\beta)\rangle$ è tangente principale a C in P $\iff$ $f_d(\alpha,\beta) = 0$
3) una retta di equazione $ax + by = 0$ è tangente principale a C in P $\iff$ $ax + by \mid f_d$
4) in $P = (0,0)$, C ha al più $m_P(C)$ tangenti principali

▸ **DEF. Asintoto**

Sia C una curva affine di $\mathbb{K}^2$. Un ASINTOTO di C è una retta affine r la cui chiusura proiettiva $\bar{r}$ è tangente principale a $\bar{C}$ in un punto improprio di $\bar{C}$.

- **TEOREMA - Lemma di Bezout**

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ curve proiettive di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $n = \deg \mathcal{C}$, $m = \deg \mathcal{D}$.

1) se $|\mathbb{K}| = +\infty$ e $|V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})| > m \cdot n$ allora hanno almeno una componente irriducibile in comune.

2) se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e $n \geq 1$, $m \geq 1$ allora $V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D}) \neq \emptyset$.

- OSS: data una definizione di $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P)$ allora:

$$\sum_{P \in V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})} I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) \leq m \cdot n$$

- Applicazione

Sia $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$. Se $\mathcal{C}$ e' una curva proiettiva LISCIA, di grado ≥ 1 allora e' IRRIDUCIBILE.

TOPOLOGIA

▸ SPAZIO METRICO

• **DEF.** Spazio Metrico

Uno SPAZIO METRICO e' una coppia (X, d) dove X e' un insieme e $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:

- $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$

• **DEF** Immersione isometrica / Isometria

Siano (X, d) e (Y, d') spazi metrici. Una IMMERSIONE ISOMETRICA (o EMBEDDING ISOMETRICO) e' una funzione $f: (X,d) \to (Y, d')$ tale che: $d(x,y) = d'(f(x), f(y))$.
Sia f anche bigettiva, allora f ISOMETRIA.

→ OSSERVAZIONI

- Se f embedding isometrico, allora f iniettiva
- Se f isometria, allora f^{-1} isometria
- Composizione di embedding isometrici e' embedding isometrico (ossia $Isom(X,d)$ e' un gruppo)

• **DEF.** Palla Aperta

Sia (X, d) spazio metrico. La PALLA APERTA di centro $x_0 \in X$ e raggio $R > 0$ e':

$$B(x_0, R) = \{x \in X : d(x, x_0) < R\}$$

• **DEF.** Aperto

Sia (X,d) spazio metrico. Un $A \subseteq X$ sottoinsieme e' APERTO se: $\quad \forall x_0 \in A \quad \exists \delta > 0 : \quad B(x_0, \delta) \subseteq A$

- **DEF.** Funzione Continua (Metrici)

Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici. Una FUNZIONE CONTINUA $f:(X,d) \to (Y,d')$ e' una funzione tale che:

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
- $x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$
- $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

Una tale f e' CONTINUA se e' continua in x_0 $\forall x_0 \in X$.

- **PROP.**

$f:(X,d) \to (Y,d')$ continua $\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y$ aperto, $f^{-1}(A)$ aperto

- **LEMMA**

Le palle aperte sono sottoinsiemi aperti.

- **PROP.**

Sia $\tau_d = \{A \subseteq X : A \text{ e' } d\text{-aperto}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Valgono:

- $X, \emptyset \in \tau_d$
- $A_1, A_2 \in \tau_d \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau_d$
- $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_d \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_d$

▸ SPAZIO TOPOLOGICO

• **DEF.** <u>Spazio Topologico</u>

Uno SPAZIO TOPOLOGICO è una coppia (X, τ) dove X è un insieme, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ è detta TOPOLOGIA tale che:

1) $X, \emptyset \in \tau$
2) $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$
3) $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

• **DEF.** <u>Aperto / Chiuso</u>

Sia (X, τ) spazio topologico. $A \in \tau$ si dice APERTO. $C \subseteq X$ si dice CHIUSO se $X \setminus C \in \tau$.

→ <u>OSSERVAZIONI</u>

- Siano $A_1, \dots, A_k \in \tau$. Dalla prop. 2 segue che
  $A_1 \cap \dots \cap A_k \in \tau$
- Esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi.
- <u>Definizione equivalente</u> con i chiusi si dà con le prop:
  1') $X, \emptyset$ sono chiusi
  2') C_1, C_2 chiusi $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ chiuso
  3') $\{C_i\}_{i \in I}$ famiglia di chiusi $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i$ chiuso

→ <u>TOPOLOGIA INDOTTA</u>

Sia (X, d) spazio metrico. Allora (X, τ_d) è spazio topologico con la TOPOLOGIA INDOTTA da d.

• **DEF.** <u>Spazio topologico Metrizzabile</u>

Uno spazio topologico (X, τ) è METRIZZABILE se esiste d distanza su X tale che $\tau = \tau_d$.

- **DEF.** Distanze equivalenti

Siano d, d' distanze su X insieme. Allora d, d' EQUIVALENTI se $\tau_d = \tau_{d'}$.

→ **LEMMA**

Siano d, d' distanze su X. Se $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tali che:

$$d \leq \alpha \cdot d' \quad \text{e} \quad d' \leq \beta d$$

allora d e d' sono equivalenti topologicamente.

→ **PROP.**

Sia $X = \mathbb{R}^n$. Le norme d_1, d_E, d_∞ sono equivalenti:

- $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
- $d_E(x,y)$ euclidea
- $d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \text{ tale che } i = 1, \dots, n\}$

- **DEF.** Funzione Continua (Topologici)

Siano $(X, \tau), (Y, \tau')$ spazi topologici. Una FUNZIONE CONTINUA $f: (X,\tau) \to (Y, \tau')$ e' una funzione tale che $f^{-1}(A) \in \tau \quad \forall A \in \tau'$.

- **DEF.** Omeomorfismo

Un OMEOMORFISMO e' una funzione $f: (X,\tau) \to (Y,\tau')$ continua e bigettiva e con inversa f^{-1} continua.

→ **PROP.**

Sia (X, τ) spazio topologico metrizzabile. Allora τ e' indotta anche da una metrica d limitata, addirittura tale che $d(x,y) \leq 1 \quad \forall x, y \in X$.

- ESEMPI

1) TOPOLOGIA INDOTTA

Sia (X, d) spazio metrico. Allora (X, τ_d) è uno spazio topologico indotto da d.

2) TOPOLOGIA DISCRETA

Sia X insieme qualsiasi. La topologia discreta su X è data da $\tau_{disc} = \mathcal{P}(X)$.

3) TOPOLOGIA INDISCRETA

Sia X insieme qualsiasi. La topologia indiscreta su X è data da $\tau_{indisc} = \{\emptyset, X\}$

4) TOPOLOGIA COFINITA

Sia X un insieme. Poniamo:

$$\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : |X \setminus A| < +\infty\}$$

In maniera equivalente, i chiusi di (X, τ) sono tutti e soli i sottoinsiemi finiti di X.

5) TOPOLOGIA di ZARISKI

Sia I un insieme di polinomi in n variabili su $\mathbb{K}$, $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Poniamo:

$$V(I) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \ \forall f \in I\}$$

La topologia dei $V(I)$ al variare di $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è la topologia di Zariski.

Chiusura e Parte Interna

Sia (X, τ) uno spazio topologico $Z \subseteq X$ sottoinsieme.

- **DEF.** Chiusura

La CHIUSURA di Z, indicata $\overline{Z}$, e' il più piccolo chiuso di X che contiene Z.

- **DEF.** Parte Interna

La PARTE INTERNA di Z, indicata $\mathring{Z}$ o $\mathrm{int}(Z)$, e' il più grande aperto contenuto in Z.

- **OSS:** $\mathring{Z} = X \setminus (\overline{X \setminus Z})$

- **DEF.** Frontiera Topologica

La FRONTIERA TOPOLOGICA (o bordo) di Z e':

$$\partial Z = \overline{Z} \setminus \mathring{Z}$$

- **DEF.** Punto Aderente / di Accumulazione

Sia (X, τ) topologico, $Z \subseteq X$, $P \in X$. Allora P si dice:

- ADERENTE a Z se $P \in \overline{Z}$
- di ACCUMULAZIONE per Z se $P \in \overline{Z \setminus \{P\}}$

- **PROP.**

Sia $Z \subseteq X$, allora:

P punto aderente a Z $\Leftrightarrow$ $\forall A$ aperto, $P \in A$ si ha $A \cap Z \neq \emptyset$

FINEZZA di una TOPOLOGIA

Sia X un insieme, siano τ e τ' topologie su X.

- **DEF.** Finezza

Sia X con le due topologie τ e τ'. τ e' PIU' FINE di τ' se $\tau \supseteq \tau'$, cioe' ogni aperto di τ' e' aperto di τ.

- OSS: la finezza ($\prec$) e' relazione d'ordine parziale.

La topologia PIU' FINE e' (X, τ_{disc})

La topologia MENO FINE e' (X, τ_{indisc})

- OSS: la proprietà $\tau \prec \tau'$ e' vera se e solo se

$$id : (X, \tau') \longrightarrow (X, \tau) \text{ e' continua}$$

- PROP.

Siano d, d' distanze su X.

Se $\exists\, k > 0 : \ d \leq k \cdot d'$ allora $\tau_d \prec \tau_{d'}$

Basi e Prebasi di una Topologia

- **Lemma**

Siano τ_i, $i \in I$ topologie su X. Allora $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ topologia

- **Def.** Topologia Generata

Sia X un insieme, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. La TOPOLOGIA GENERATA da S e': $\tau_S := \bigcap_{\substack{\tau \text{ topol.} \\ S \subseteq \tau}} \tau$

- **Def.** Base

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una BASE della topologia e' un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tale che:

$\forall A \in \tau \quad \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} : \quad A = \bigcup_{\mathcal{B}' \ni B} B$

- OSS: la definizione di BASE e' equivalente a dire:

$A \subseteq X$ aperto di $\tau \iff \forall x \in A \ \exists B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq A$

- **Prop.**

Un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ e' base di qualche topologia se e solo se valgono le proprietà:

1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} : \quad B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$

- **Def.** Prebase

Una PREBASE di (X, τ) spazio topologico e' $\mathcal{U} \subseteq \tau$ tale che $\mathcal{B} = \{ U_1 \cap \ldots \cap U_k \mid U_i \in \mathcal{U}, k \in \mathbb{N} \}$ e' base.

TEOREMA

Sia X un insieme, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora:

τ topologia generata da S $\iff$ $S \cup \{X\}$ è una prebase di τ

PROP.

Sia una funzione $f: X \to Y$ tra spazi topologici. Equivalgono:

1) f è CONTINUA.
2) $\exists\, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ base di Y : $\forall B \in \mathcal{B}$ $f^{-1}(B) \subseteq X$ aperto.
3) $\exists\, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ prebase di Y : $\forall U \in \mathcal{U}$ $f^{-1}(U) \subseteq X$ aperto.

DEF. II - Numerabile

Uno spazio topologico X si dice II - Numerabile (soddisfa il II assioma di numerabilità) se ammette una base di cardinalità al più numerabile.

DEF. Sottoinsieme denso / Separabile

Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ di un topologico si dice DENSO se $\overline{Y} = X$.

X si dice SEPARABILE se ha un sottoinsieme denso e al più numerabile.

TEOREMA

Uno spazio metrico X è II - Numerabile $\iff$ X separabile.

(In particolare $\implies$ vale in generale per spazi topologici)

Corollario

$\mathbb{R}^n$ è II - Numerabile.

INTORNI e SFI

▸ **DEF.** Intorno di un punto

Un INTORNO di $x_0 \in X$ e' un sottoinsieme $U \subseteq X$ tale che $\exists A$ aperto di X : $x_0 \in A$, $A \subseteq U$.

Scriveremo $I(x_0) = \{ U \subseteq X \mid U \text{ intorno di } x_0 \}$.

• **PROPRIETÀ**

→ $U \in I(x_0) \iff x_0 \in \mathring{U}$

→ Se $U \in I(x_0)$ e $U \subseteq V$ allora $V \in I(x_0)$

→ Se $U, V \in I(x_0)$ allora $U \cap V \in I(x_0)$

▸ **PROP.**

1) $A \subseteq X$ aperto $\iff$ $A \in I(x)$ $\forall x \in A$

2) $Z \subseteq X$ sottoinsieme. $\overline{Z} = \{ x \in X : \forall U \in I(x),\ Z \cap U \neq \emptyset \}$

2') $Z \subseteq X$ chiuso $\iff$ "$x \in X : \forall U \in I(x),\ Z \cap U \neq \emptyset \implies x \in Z$"

▸ **DEF.** Funzione Continua in un punto

Una funzione $f: X \to Y$ si dice continua in $x_0 \in X$ se $\forall U \in I(f(x_0))$ $\exists V \in I(x_0)$: $f(V) \subseteq U$.

[Equivalentemente $f^{-1}(U) \in I(x_0)$ $\forall U \in I(f(x_0))$]

▸ **PROP.**

$f: X \to Y$ e' CONTINUA $\iff$ f CONTINUA in x $\forall x \in X$

▸ **DEF.** Sistema Fondamentale Intorni (SFI)

Un Sistema Fondamentale di Intorni, SFI, di $x_0 \in X$ e':

$J \subseteq I(x_0)$: $\forall U \in I(x_0)$ $\exists V \in J$: $V \subseteq U$.

▸ **DEF.** **I-Numerabile**

Uno spazio X si dice I-Numerabile (soddisfa il I assioma di numerabilità) se ogni $x_0 \in X$ ha un SFI al più numerabile.

(oss: gli SFI sono un concetto "locale" di base)

> **PROP.**

Se X è II-Numerabile, allora X è I-Numerabile.

SUCCESSIONI e LIMITI (in Topologici)

- **DEF.** Successione

Una SUCCESSIONE in uno spazio topologico X e' una funzione $\mathbb{N} \to X$, denotata $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$.

- **DEF.** Successione Convergente

La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ si dice CONVERGENTE a $x \in X$ e scriviamo $x_n \longrightarrow x$ se $\forall\, U \in I(x)$ si ha $x_n \in U$ definitivamente.

- **DEF.** Proprietà vera definitivamente / frequentemente

- $P(n)$ e' vera DEFINITIVAMENTE se $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$: $\forall\, n \geq \bar{n}$, $P(n)$ e' vera
- $P(n)$ e' vera FREQUENTEMENTE se $\forall\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ $\exists\, n > \bar{n}$: $P(n)$ e' vera

- **PROP.** Caratterizzazione Chiusi

Sia X I-Numerabile. Allora:

$C \subseteq X$ chiuso $\iff$ "$\forall$ successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tale che $x_n \in C$ freq. e $x_n \to x$, allora $x \in C$"

- **DEF.** Chiuso per successioni

Sia $C \subseteq X$ topologico. Allora C e' CHIUSO per SUCCESSIONI se:

$(\{x_n\} \subseteq X,\ x_n \in C \text{ freq},\ x_n \to x) \implies x \in C$

- **PROP.** Caratterizzazione Aperti

Sia X I-Numerabile. Allora:

$A \subseteq X$ aperto $\iff$ "$\forall$ successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tale che $x_n \to x$, $x \in A$, allora $x_n \in A$ definit."

- **DEF.** Aperto per successioni

Sia $A \subseteq X$ topologico. Allora A è APERTO per SUCCESSIONI se: $(\{x_n\} \subseteq X,\ x_n \to x,\ x \in A) \Rightarrow x_n \in A$ definit.

- **PROP.** Caratterizzazione Continuità

Sia X I-Numerabile, $f: X \to Y$ funzione tra topologici.

f CONTINUA $\Leftrightarrow$ $\forall \{x_n\} \subseteq X$ tale che $x_n \to x$ si ha che $f(x_n) \to f(x)$

- **DEF.** Continuità per successioni

Sia X, Y topologici. Sia $f: X \to Y$. f è CONTINUA per SUCCESSIONI se: $(\{x_n\} \subseteq X,\ x_n \to x) \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

[FATTO: vi è una definizione di limite in spazi topologici indicizzati anche su insiemi più che numerabili, che rendono vere le caratterizzazioni pure fuori dai I-Numerabili.]

- **DEF.** Spazio Sequenziale

Sia uno spazio topologico X. X è SEQUENZIALE se:

$C \subseteq X$ chiuso $\Leftrightarrow$ C chiuso per successioni

- **OSS:** I-Numerabile $\Rightarrow$ Sequenziale

SOTTOSPAZI TOPOLOGICI

▸ **DEF.** Topologia di Sottospazio

Sia X spazio topologico, $Y \subseteq X$ sottoinsieme, τ topologia di X. La TOPOLOGIA di SOTTOSPAZIO (o INDOTTA) su Y, denotata $\tau|_Y$, e' la topologia meno fine su Y che rende $i: Y \hookrightarrow X$ continua.
Allora $(Y, \tau|_Y)$ e' SOTTOSPAZIO TOPOLOGICO di (X, τ).

- OSS: data $f: Y \to X$, la topologia meno fine di $Y \subseteq X$ che rende f continua e' $f^{-1}\tau := \{ f^{-1}(A) \mid A \subseteq X \text{ aperto} \}$

> **PROP.**

- $B \subseteq Y$ aperto per $\tau|_Y \iff \exists A \subseteq X$ aperto $: B = i^{-1}(A) = A \cap Y$
- $D \subseteq Y$ chiuso per $\tau|_Y \iff \exists C \subseteq X$ chiuso $: D = i^{-1}(C) = C \cap Y$

> **OSSERVAZIONI**

- Sia $\mathcal{B}$ base di (X, τ). Allora $\mathcal{B}|_Y$ base di $(Y, \tau|_Y)$ dove $\mathcal{B}|_Y = \{ B \cap Y \mid B \in \mathcal{B} \}$
- Sia X topologico, $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio. Se Y e' APERTO in X allora:
  $A \subseteq Y$ aperto in $X \iff A \subseteq Y$ aperto in Y
- Sia X topologico, $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio. Se Y e' CHIUSO in X allora:
  $C \subseteq Y$ chiuso in $X \iff C \subseteq Y$ chiuso in Y
- Siano X, Z topologici, $Y \subseteq X$. Data $f: X \to Z$ sia $f|_Y : Y \to Z$ la restrizione di f a Y. Allora:
  f continua $\Rightarrow f|_Y$ continua

- **PROPRIETÀ UNIVERSALE TOPOLOGIA di SOTTOSPAZIO**

- **PROP.**

Sia $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione di un sottospazio. Sia $f : Z \to Y$ funzione tra topologici. Allora:

$$f \text{ è continua} \iff i \circ f \text{ continua}$$

- **PROP.** (Proprietà universale)

Sia (X, τ) spazio topologico, sia $(Y, \tau|_Y)$ topologia di sottospazio di $Y \subseteq X$. $\tau|_Y$ è l'UNICA topologia per cui vale:
" $i : (Y, \tau') \to X$ è continua (dove τ' topologia Y) e dati Z spazio topologico, $f : Z \to (Y, \tau|_Y)$, allora se $i \circ f$ è continua anche f è continua. "

- **PROPRIETÀ TOPOLOGICHE EREDITATE**

- **TEOREMA**

Sia X topologico, $Y \subseteq X$. Allora:

1) se X è I-Numerabile, allora Y è I-Numerabile.
2) se X è II-Numerabile, allora Y è II-Numerabile.
3) se X è metrizzabile, allora Y è metrizzabile.
($d|_Y$ induce su Y la stessa topologia di quella di sottospazio)
4) se X è metrico separabile, allora Y metrico separabile.
5) se X separabile, <u>non</u> è detto che Y sia separabile.

MAPPE APERTE e CHIUSE

▸ **DEF.** Mappa Aperta / Chiusa

Siano X, Y spazi topologici. Una funzione $f: X \to Y$ è:
- APERTA se $\forall A$ aperto di X, $f(A)$ aperto di Y
- CHIUSA se $\forall C$ chiuso di X, $f(C)$ chiuso di Y

> **FATTO**

Sia $f: X \to Y$ continua e bigettiva. Allora:

f è aperta $\Leftrightarrow$ f è omeomorfismo $\Leftrightarrow$ f è chiusa

> **FATTO**

Sia $f: X \to Y$ mappa aperta. Allora $\operatorname{Im} f$ è aperto di Y.

IMMERSIONI TOPOLOGICHE

▸ **DEF.** Immersione Topologica

Una IMMERSIONE TOPOLOGICA è un omeomorfismo con la sua immagine, cioè è una $f: X \to Y$ continua che induce un omeomorfismo con $f(X)$.

> **TEOREMA**

Sia $f: X \to Y$ iniettiva e continua. Allora:
- f chiusa $\Rightarrow$ f immersione topologica
- f aperta $\Rightarrow$ f immersione topologica

Prodotti Topologici

▸ **DEF.** Insieme Prodotto

Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di insiemi. L'insieme prodotto è:

$$\prod_{i\in I} X_i = \{ f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \;:\; f(i) \in X_i \;\forall i \in I \}$$

▸ **DEF.** Topologia Prodotto

La TOPOLOGIA PRODOTTO su $\prod_{i\in I} X_i$ è la topologia meno fine che rende le proiezioni $\pi_i : X \to X_i$ continue.

▸ **DEF.** Proiezione

La PROIEZIONE di $\prod_{i\in I} X_i$ su X_i è: $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$

definita: $\pi_i(f) = f(i)$ oppure $\pi_i((x_i)_{i\in I}) = x_i$

• **OSS.**

La topologia discreta su $\prod_{i\in I} X_i$ rende le proiezioni continue.

• **OSS.**

L'intersezione di topologie è topologia.

▸ **PROP.** Alternative definizioni

- Una PREBASE della topologia prodotto τ è data da:

  $\mathcal{U} = \{ \pi_i^{-1}(A) \mid i \in I,\ A \in \tau_i \}$

- Una BASE della topologia prodotto τ è data da:

  $\mathcal{B} = \{ \pi_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_k) \mid k \in \mathbb{N},\ i_j \in I,\ \tau_{i_j} \ni A_j \}$

• **OSS.** gli aperti per la topologia prodotto sono:

$\pi_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_k) = \prod_{i\in I} Y_i$ dove in particolare

$Y_i = A_i$ per $i = i_1, \dots, i_k$ e $Y_i = X_i$ altrimenti

▸ **TEOREMA** Continuità:

Sia Y topologico, sia $f: Y \to \prod_{i \in I} X_i$. Allora:

f e' continua $\iff$ $\pi_i \circ f$ e' continua $\forall i \in I$

▸ **TEOREMA** Metrizzabilità:

Siano X, Y spazi metrizzabili. Allora $X \times Y$ metrizzabile.

Siano d, d' distanze che inducono le topologie su X, Y, allora la topologia di $X \times Y$ e' indotta equivalentemente da:

- $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2)$
- $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = [d(x_1, x_2)^2 + d'(y_1, y_2)^2]^{1/2}$
- $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}$

> **Corollario**

$\forall k, h \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^{h+k}$ sono omeomorfi.

▸ **TEOREMA**

$\forall i \in I$ la mappa $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ e' APERTA.

> **LEMMA**

Sia $f: X \to Y$ e la base $\mathcal{B}$ di X.

f e' aperta $\iff$ $f(B)$ aperto in Y $\forall B \in \mathcal{B}$

▸ **PROPOSIZIONE**

Siano X_α, $\alpha \in A$, spazi topologici. Sia $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Fissiamo $\bar{\alpha} \in A$, $\forall \beta \neq \bar{\alpha}$ in A, $x_\beta \in X_\beta$.

Allora la funzione $i: X_{\bar{\alpha}} \to X$ data da:

$$i(x) = f_x \quad \text{con} \quad f_x(\alpha) = \begin{cases} x & \text{se } \alpha = \bar{\alpha} \\ x_\beta \text{ se} & \text{se } \alpha = \beta \neq \bar{\alpha} \end{cases}$$

e' un' IMMERSIONE TOPOLOGICA.

- **PROPOSIZIONE** (Generalizzata)

Sia $A' \subseteq A$. Fissiamo $x_\beta \in X_\beta$ $\forall \beta \notin A'$. Allora

$i : \prod_{\alpha \in A'} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ data da:

$$i((x_\alpha)_{\alpha \in A'}) = (y_\alpha)_{\alpha \in A} \quad \text{con} \quad y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{se } \alpha \in A' \\ x_\beta & \text{se } \alpha = \beta \notin A' \end{cases}$$

e' un' IMMERSIONE TOPOLOGICA.

→ **TOPOLOGIA di CONVERGENZA PUNTUALE**

- Sia Y spazio topologico, X un insieme. Definisco:

$$F(X,Y) = \{ f : X \to Y \text{ funzioni} \} = \prod_{x \in X} Y = Y^X$$

la topologia prodotto su Y^X e' chiamata topologia della convergenza puntuale.

- **PROP.**

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F(X,Y)$. Sia $f \in F(X,Y)$. Allora:

$$f_n \to f \iff \forall x \in X \quad f_n(x) \to f(x) \text{ in } Y$$

Assiomi di Separazione

- **DEF.** Assiomi di Separazione

Uno spazio topologico X soddisfa l'assioma / e':

- T_0: $\forall x \neq y \in X$, $\exists U$ aperto di X tale che:
  $x \in U \wedge y \notin U$ oppure $x \notin U \wedge y \in U$
- T_1: $\forall x \neq y \in X$, $\exists U, V$ aperti di X tali che:
  $x \in U \wedge y \notin U$ e $x \notin V \wedge y \in V$
- T_2: $\forall x \neq y \in X$, $\exists U, V$ aperti di X tali che:
  $x \in U \wedge y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$
- T_3: $\forall x \in X, \forall C$ chiuso X, $\exists U, V$ aperti di X tali che:
  $x \in U \wedge C \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$
- T_4: $\forall C, D$ chiusi di X, $C \cap D = \emptyset$, $\exists U, V$ aperti X tali che:
  $C \subseteq U \wedge D \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$

- **OSS:** $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$
  Se X e' T_1 allora: $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$

- **PROP.** Metrico e' T_2

Sia X uno spazio metrico. Allora e' T_2.

Caratterizzazione Assiomi

- T_0: X e' $T_0 \iff \forall x \neq y \in X$, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ in X
- T_1: X e' $T_1 \iff$ I PUNTI sono CHIUSI: $\forall x \in X: \{x\} = \overline{\{x\}}$
  $\iff$ La topologia e' più fine della COFINITA
- T_2: X e' $T_2 \iff \Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ e' chiuso in $X \times X$
- T_3: X e' $T_3 \iff \forall x \in X$, U aperto di X tale che $x \in U$,
  $\exists V$ aperto di $X \mid x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

- **Corollari**

1) $f: X \to Y$ continua, Y e' T_2. Allora:
   $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ e' chiuso.
2) $f, g: X \to Y$ continue, Y e' T_2. Allora:
   $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ e' chiuso.
3) $f, g: X \to Y$ continue, Y e' T_2. Se $f = g$ su un insieme denso di X, allora $f = g$ su X.
4) $f: X \to X$ continua, X e' T_2. Allora:
   $\text{Fix}(f)$ e' chiuso.

- **PROP. Successione in T_2**

Sia X un T_2, sia $\{x_n\}$ successione in X tale che $x_n \to x$ e $x_n \to y$. Allora $x = y$.

- **PROPRIETA' EREDITATE**

→ Sottospazi di spazi T_i sono T_i, per $i = 0,1,2,3$
→ Prodotti di spazi T_i sono T_i, per $i = 0,1,2,3$.
→ Raffinamenti di spazi T_i sono T_i, per $i = 0,1,2$.
→ Sottospazi CHIUSI di un T_4 sono T_4.

- **DEF. Regolare / Normale**

Sia X uno spazio topologico. Si dice:
- REGOLARE se X e' T_1 e T_3.
- NORMALE se X e' T_1 e T_4.

- **LEMMA**

Sia $d_A(x) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$. Allora:
$d_A: (X, d) \longrightarrow [0, +\infty)$ e' 1-Lipschitziana

- LEMMA

Sia $C \subseteq X$ chiuso. Allora $d_C^{-1}(\{0\}) = C$.

- PROP. Metrico è Normale

Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora lo spazio topologico (X, τ_d) è normale.

RICOPRIMENTI FONDAMENTALI

- **DEF.** Ricoprimento

Un RICOPRIMENTO di uno spazio topologico X e' una famiglia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che: $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Un RICOPRIMENTO APERTO e' un ricoprimento $\{A_i\}$ con A_i aperti di X.

- **DEF.** Ricoprimento Fondamentale

Un ricoprimento $\{A_i\}_{i \in I}$ si dice FONDAMENTALE se:

$$Y \subseteq X \text{ aperto} \iff Y \cap A_i \subseteq A_i \text{ aperto di } A_i \ \forall i \in I$$

- **TEOREMA**

Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento fondamentale di X e $f: X \to Y$ una funzione tra spazi topologici. Allora:

$$f \text{ e' continua} \iff f|_{A_i}: A_i \to Y \text{ e' continua } \forall i \in I$$

- **TEOREMA**

1) I ricoprimenti APERTI sono fondamentali.
2) I ricoprimenti CHIUSI e LOCALMENTE FINITI sono fondamentali.

- **DEF.** Localmente finito

Un ricoprimento $\{A_i\}$ e' localmente finito se

$$\forall x \in X \ \exists U \in I(x) \mid \{i \in I \mid U \cap A_i \neq \emptyset\} \text{ e' finito}$$

- **TEOREMA**

Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia localmente finita di X. Allora:

$$\bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} Y}$$

- **ESEMPIO: Cammini**

- **DEF.** Cammino

Un CAMMINO a valori in uno spazio topologico X e' una funzione continua $\gamma : [0,1] \to X$.

- **Giunzione di cammini**

Dati 2 cammini $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ tali che $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, la loro giunzione e':

$$\gamma_1 * \gamma_2 (x) = \begin{cases} \gamma_1(2x) & \text{se } x \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2x-1) & \text{se } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

- **PROP.**

La giunzione di cammini e' un cammino.

Connessione e Connessione per Archi

→ DEF. Connessione

Sia X spazio topologico. X è SCONNESSO se vale una delle seguenti condizioni:

1) $\exists$ A, B aperti non vuoti di X tali che $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$
2) $\exists$ C, D chiusi non vuoti di X tali che $C \cup D = X$, $C \cap D = \emptyset$
3) $\exists$ $A \subseteq X$ aperto e chiuso, $A \neq \emptyset, X$

▸ TEOREMA (Spazio $[0,1]$)

Lo spazio topologico $[0,1]$ con τ_{eucl} è connesso.

▸ DEF. Convesso

Definisco $C \subseteq \mathbb{R}^n$ CONVESSO se $\forall\, x, y \in C$, $\forall\, t \in [0,1]$:

$$t \cdot x + (1-t) \cdot y \in C$$

→ DEF. Connessione per Archi

Sia X spazio topologico. X si dice CONNESSO per ARCHI se, dati 2 punti $p, q \in X$ $\exists$ $\gamma : [0,1] \to X$ cammino tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$.

▸ TEOREMA

X connesso per archi $\Rightarrow$ X connesso.

→ TEOREMA

Sia $f : X \to Y$ continua.

1) Se X è connesso allora $f(X)$ è connesso.
2) Se X è connesso per archi allora $f(X)$ è connesso per archi.

> <u>CONNESSI in $\mathbb{R}$</u>

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Sono fatti equivalenti:

1) A e' un intervallo (cioe' A convesso).

2) A e' connesso per archi.

3) A e' connesso.

Componenti Connesse

- **Lemma**

Sia X spazio topologico, $Y_i \subseteq X$ per $i \in I$ sono sottospazi connessi. Se $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$ allora $\bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq X$ connesso.

- **DEF.** Componente Connessa

Dato $x_0 \in X$, la sua COMPONENTE CONNESSA in X, denotata $C(x_0)$, è il più grande sottospazio connesso di X contenente x_0.

- **PROP.** $C(x_0)$ chiuso

Sia X spazio topologico, $x_0 \in X$. Allora $C(x_0)$ chiuso.

- **PROP.** Partizionamento

Considero la famiglia $\{C(x_0)\}_{x_0 \in X}$. Essa è una partizione di X.

- **Corollario**

Se X ha un numero finito di componenti connesse, allora queste sono aperti di X.

- **DEF.** Totalmente Sconnesso

Uno spazio topologico X si dice TOTALMENTE SCONNESSO se $C(x) = \{x\}$ $\forall x \in X$.

- **DEF.** Equivalenza per Archi

Siano $x, y \in X$. Allora $x \sim y \iff$ $\exists$ cammino $\gamma : [0,1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

- **DEF.** Componente Connessa per Archi (CCPA)

Sia $x_0 \in X$. La sua componente connessa per archi in X, denotata $A(x_0)$, è la classe di equivalenza di x_0 rispetto alla relazione $\sim$.

- **OSS.** Partizione / Def. equivalente

Le CCPA di X formano una partizione di X.
In particolare la CCPA di x_0 è il più grande sottospazio di X connesso per archi che contiene x_0.

- **DEF.** Localmente Connesso (per Archi)

Uno spazio topologico X è LOCALMENTE CONNESSO (per ARCHI) se $\forall x \in X$ $\exists$ un SFI di X costituito da intorni connessi (per archi).

- **PROP.** (Loc. Conn. per Archi $\Rightarrow$ CCPA $\rightarrow$ CC)

Sia X localmente connesso per archi. Allora le CCPA sono aperti di X e coincidono con le componenti connesse.

- **Corollario** (Loc. Conn. per Archi $\Rightarrow$ CCPA $\equiv$ CC)

Se X è localmente connesso per archi e $U \subseteq X$ aperto, allora U è connesso $\Leftrightarrow$ U è connesso per archi.

- **ESEMPI in $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$)**
  - $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è connesso.
  - $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è connesso per archi.
  - $\mathbb{R}^n \setminus S$, con S al più numerabile, è connesso per archi.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

- **PROP.** Connessione nel Prodotto

- Siano X e Y spazi topologici connessi. Allora $X \times Y$ connesso.
- Dati X_i spazi topologici connessi, $i \in I$, allora $\prod_{i \in I} X_i$ connesso.
- Siano X e Y spazi topologici connessi per archi. Allora $X \times Y$ connesso per archi.
- Dati X_i spazi topologici connessi per archi, $i \in I$, allora $\prod_{i \in I} X_i$ connesso per archi.

- **DEF.** $\pi_0(X)$

Sia X uno spazio topologico. Definiamo:

$$\pi_0(X) = \{\text{componenti connesse per archi di } X\} = X/_\sim$$

- **DEF.** $\pi_0(f)$

Sia $f: X \to Y$ continua. Definiamo:

$$\pi_0(f): \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$$

- **PROPRIETÀ**

- $\pi_0(id_X) = id_{\pi_0(X)}$
- Date $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ continue, allora:

$$\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$$

- **PROP.** (π_0 è functore)

π_0 è un FUNCTORE dalla categoria degli spazi topologici alla categoria degli insiemi:

$$\begin{aligned} \pi_0 : \mathrm{Top} &\longrightarrow \mathrm{Set} \\ X &\longmapsto \pi_0(X) \\ f: X \to Y &\longmapsto \pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(Y) \end{aligned}$$

- **Corollario**

Se $f: X \to Y$ omeomorfismo, allora $\pi_0(f)$ bigezione.

COMPATTEZZA

- **DEF. Compatto**

  Uno spazio topologico X si dice COMPATTO se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ammette un sottoricoprimento finito ($\exists J \subseteq I$ finito : $X = \bigcup_{j \in J} U_j$).

- **OSS.** Se (X, d) è uno spazio metrico e (X, τ_d) compatto, allora d è limitata.

- **TEOREMA** (Spazio $[0,1]$)

  Lo spazio $[0,1]$ con τ_{eucl} è compatto.

- **TEOREMA** (Compattezza tramite continuità)

  Sia $f : X \to Y$ continua. Se X è compatto allora $f(X)$ compatto.

- **Corollario**

  Siano X e Y omeomorfi. X compatto $\Leftrightarrow$ Y compatto.

- **DEF. Proprietà dell'Intersezione Finita**

  La famiglia $\{Y_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi di X insieme ha la proprietà di intersezione finita se $\forall J \subseteq I$ finito si ha $\bigcap_{i \in J} Y_i \neq \emptyset$.

- **TEOREMA** (Caratterizzazione Compatti)

  Sia X topologico. Allora X è compatto $\Leftrightarrow$ $\forall \{C_i\}_{i \in I}$ famiglia di chiusi che ha la proprietà della intersezione finita vale $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

- <u>Corollario</u>

Se X spazio compatto, $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ successione di chiusi non vuoti tali che $\forall i \in \mathbb{N}$ $C_{i+1} \subseteq C_i$, allora vale che $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$

COMPATTEZZA e SOTTOSPAZI

- <u>PROP.</u>

$Y \subseteq X$ e' compatto se e solo se $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ aperti di X tali che $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, $\exists J \subseteq I$ finito : $Y \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$.

- <u>TEOREMA</u>

Sia X compatto, $C \subseteq X$ chiuso. Allora C e' compatto.

COMPATTEZZA e PRODOTTI

- <u>TEOREMA</u>

Siano X, Y spazi compatti. Allora $X \times Y$ e' compatto.

- <u>LEMMA</u>

Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di uno spazio X.
Se da ogni ricoprimento di X con elementi di $\mathcal{B}$ si può estrarre un sottoricoprimento finito, allora X e' compatto.

- <u>TEOREMA di HEINE - BOREL</u>

Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora:

Y e' compatto $\iff$ Y e' chiuso e limitato

COMPATTEZZA e ASSIOMA T_2

- <u>TEOREMA</u>

Sia X spazio topologico T_2. $Y \subseteq X$ compatto $\Rightarrow$ Y chiuso.

- **PROP.**

Sia X compatto e T_2. Allora X è regolare ($T_1 + T_3$).

- **TEOREMA**

Sia X compatto e T_2. Allora X è normale ($T_1 + T_4$).

COMPATTEZZA e MAPPE

- **TEOREMA** (Weierstrass)

Sia X uno spazio topologico compatto, sia $f: X \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ha massimo e minimo.

- **Corollario**

Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti (inducono la stessa topologia).

- **TEOREMA**

Sia X uno spazio compatto, Y uno spazio T_2.
Sia $f: X \to Y$ continua, allora f è mappa chiusa.

- **Corollario**

Se X compatto, Y è T_2 ed $f: X \to Y$ biunivoca, allora f è omeomorfismo.

COMPATTIFICAZIONE di ALEXANDROV

- **Costruzione**

Sia X uno spazio topologico. Sia $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, con $\infty \notin X$.
Doto $\hat{X}$ della topologia: $A \subseteq \hat{X}$ aperto se:

- se $\infty \notin A$, A aperto di X.
- se $\infty \in A$, $X \setminus A$ chiuso compatto di X.

- TEOREMA

1) Questa costruzione definisce una topologia.

2) $i : X \to \hat{X}$ è immersione topologica aperta.

3) $\hat{X}$ è compatto.

PROIEZIONE STEREOGRAFICA

- DEF. Sfera n-dimensionale

La sfera n-dimensionale $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è:

$$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$$

Poniamo $N = (0,0,\dots,0,1) \in S^n$ come "polo nord".

- DEF. Proiezione Stereografica

La proiezione stereografica è la mappa:

$$\pi : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$$

che associa ad ogni $P \in S^n \setminus \{N\}$ il punto di intersezione tra $\overline{NP}$ e l'iperpiano $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ identificato con $\mathbb{R}^n$.

In particolare:

$$\pi((x_1,\dots,x_n,x_{n+1})) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$$

- TEOREMA

La proiezione stereografica π è un omeomorfismo.

COMPLETEZZA

- **DEF.** Sequenzialmente compatto

Uno spazio topologico X è SEQUENZIALMENTE COMPATTO se ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente.

- **PROP.**

Sia X uno spazio I-Numerabile e compatto, allora X è sequenzialmente compatto.

- **PROP.**

Sia X uno spazio II-Numerabile. Allora:

X compatto $\iff$ X sequenzialmente compatto

- **DEF.** Successione di Cauchy

Sia (X, d) spazio metrico. Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ è di CAUCHY se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

- **DEF.** Spazio Metrico Completo

Uno spazio metrico è COMPLETO se ogni successione di Cauchy converge.

- **Lemma**

Sia $\{x_n\} \subseteq X$ di Cauchy e con una sottosuccessione convergente. Allora $\{x_n\}$ converge allo stesso limite.

- **TEOREMA** (Seq. comp $\Rightarrow$ Completo)

Sia (X, d) spazio metrico. Se (X, d) sequenzialmente compatto, allora (X, d) completo.

- Corollario

$\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è completo.

- DEF. Totalmente Limitato

Uno spazio metrico (X, d) si dice TOTALMENTE LIMITATO se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ricoprimento finito di X costituito da palle aperte di raggio ε.

- PROP.

Se (X, d) è totalmente limitato, allora è limitato.

- Lemma

Se (X, d) è totalmente limitato, allora è II-Numerabile.

- TEOREMA (Caratterizzazione Compattezza)

Sia (X, d) uno spazio metrico, sono equivalenti:

1) X è compatto.

2) X è sequenzialmente compatto.

3) X è totalmente limitato e completo.

NUMERO di LEBESGUE

- DEF. Numero di Lebesgue

Sia X metrico e Ω ricoprimento di X.

Allora Ω ammette il NUMERO di LEBESGUE $\varepsilon > 0$ se:

$$\forall x \in X \quad \exists U \in \Omega \mid B(x, \varepsilon) \subseteq U$$

- TEOREMA

Sia X metrico compatto. Allora ogni ricoprimento Ω ammette numero di Lebesgue.

Continuità Uniforme

- **DEF. Continuità uniforme**

Sia $f: X \to Y$ funzione tra spazi metrici. f è UNIFORMEMENTE CONTINUA se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall x_0 \in X, \quad f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

o equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \ d(x,y) < \delta \ \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

- **TEOREMA**

Sia $f: X \to Y$ funzione tra spazi metrici con X compatto.

f continua $\Rightarrow$ f uniformemente continua

- **TEOREMA**

Siano X, Y metrici, $A \subseteq X$ e $f: A \to Y$ funzione uniformemente continua.

Allora f si estende in modo unico alla funzione:

$\bar{f}: \bar{A} \to Y$ continua se Y completo.

TOPOLOGIA QUOZIENTE

- **DEF.** Topologia Quoziente

Sia X uno spazio topologico e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Sia $X/\sim$ l'insieme quoziente.
La TOPOLOGIA QUOZIENTE è $X/\sim$ con la topologia:

$$A \subseteq X/\sim \text{ aperto} \iff \pi^{-1}(A) \subseteq X \text{ aperto}$$

dove $\pi : X \to X/\sim$ è la proiezione.

- OSS: equivalentemente si definisce sui chiusi

- **TEOREMA** Caratterizzazione $X/\sim$

La topologia quoziente $X/\sim$ è la topologia più fine che rende π continua.

- **TEOREMA**

Siano X, Y topologici, $X/\sim$ topologia quoziente.
Sia $f : X \to Y$ tale che

$$f = \bar{f} \circ \pi$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

cioè tale che il diagramma commuti.
Allora f continua $\iff$ $\bar{f}$ continua.

- **DOMANDA**: definire uno spazio Y omeomorfo a $X/\sim$

- Svolgimento

1) trovare candidato per Y
2) costruire $f : X \to Y$ tale che $x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
   e continua ($\Rightarrow \bar{f}$ ben definita e continua)
3) dimostrare che $\bar{f}$ è omeomorfismo
   ($\bar{f}$ iniettiva - $\bar{f}$ surgettiva - $\bar{f}^{-1}$ continua)

- **DEF. Identificazione**

Una funzione $f: X \to Y$ è un' IDENTIFICAZIONE se valgono le seguenti proprietà:

- f surgettiva
- $A \subseteq Y$ è aperto $\iff$ $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto

(equivalentemente coi chiusi)

- **TEOREMA (identif => omeo)**

Sia $f: X \to Y$ identificazione. Sia $\sim$ relazione di equivalenza su X tale che:

$$x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

Allora la mappa $\tilde{f}: X/\sim \to Y$ ottenuta col passaggio al quoziente di f è un omeomorfismo.

- **PROPOSIZIONE** (cont / surg / aperta => ident)

Sia $f: X \to Y$ continua e surgettiva

1) Se f è aperta, f è identificazione
2) Se f è chiusa, f è identificazione

- **DEF. Sottoinsieme f-saturo**

Sia $f: X \to Y$. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è f-SATURO se $f^{-1}(f(A)) = A$.

(Equivalentemente: $x_1 \in A$ e $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_2 \in A$)

- **PROPOSIZIONE**

$A \subseteq X/\sim$ è aperto $\iff$ A immagine di aperto π-saturo

$A \subseteq X/\sim$ è chiuso $\iff$ C immagine di chiuso π-saturo

- **OSS.** Bigezione

$$\{\text{aperti di } X/\sim\} \xrightarrow{\pi^{-1}} \{\text{aperti saturi di } X\}$$
$$\{\text{aperti saturi di } X\} \xrightarrow{\pi} \{\text{aperti di } X/\sim\}$$

- **TEOREMA:** $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

QUOZIENTI per AZIONI di GRUPPI

- **DEF.** Azione di Gruppo

Sia X un insieme e G un gruppo.
Un'azione (sinistra) di G in X è una funzione

$$\varphi : G \times X \longrightarrow X$$

tale che:
- $\varphi(e,x) = x \quad \forall x \in X$
- $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h,x)) \quad \forall x \in X\ \forall g,h \in G$

- **DEF.** Proprietà di Azioni

1) ORBITA: per ogni $x \in X$, l'orbita di x è:
$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$
2) STABILIZZATORE: per ogni $x \in X$, lo stabilizzatore di x è:
$$Stab(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$
3) L'azione è FEDELE se $\ker \varphi = \{e\}$
4) L'azione è LIBERA se $\forall x \in X$, $Stab(x) = \{e\}$
5) L'azione è TRANSITIVA se esiste un'unica orbita

- **OSS:** le orbite rappresentano una PARTIZIONE di X cioè una relazione d'equivalenza $\sim$ su X.
$\Rightarrow$ Lo SPAZIO delle ORBITE è $X/G = X/\sim$.

Si considera d'ora in avanti: X topologico e azione φ continua in X, cioè $\forall g \in G$:

$\quad \varphi_g : X \to X$ continua.

- **OSS.**

Sia $A \subseteq X$. È insieme π-saturo ($\pi : X \to X/G$) $\iff$ A è G-invariante cioè $G \cdot A = A$

- **PROPOSIZIONE**

La proiezione $\pi : X \to X/G$ è aperta sempre.

- **Corollario**

Se G è finito, allora $\pi : X \to X/G$ è chiusa.

QUOZIENTI di AZIONI e ASSIOMI T_i

- **LEMMA**

X/G è T_1 $\iff$ Le classi di equivalenza sono CHIUSI di X

- **DEF.** Proprietà di Azioni

1) L'azione è VAGANTE se $\forall x \in X$ $\exists U \in I(x)$ tale che $\{ g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset \}$ sia FINITO
2) L'azione è PROPRIAMENTE DISCONTINUA se $\forall x \in X$ $\exists U \in I(x)$ tale che $g \cdot U \cap U = \emptyset$ $\forall g \neq e$
3) L'azione è PROPRIA se $\forall K \subseteq X$ compatto vale che $\{ g \in G \mid K \cap g \cdot K \neq \emptyset \}$ sia FINITO

- **FATTO 1**

Sia X un T_2. Allora:

φ propriamente discontinua $\iff$ φ vagante e libera

- FATTO 2

Sia X localmente compatto (SFI di compatti $\forall x \in X$).

φ propria $\iff$ $\forall x, y \in X$ $\exists U \in I(x)$, $V \in I(x)$ tali che

$\{ g \cdot U \cap V \neq \emptyset \}$ sia finito

- TEOREMA

Sia X un T_2, localmente compatto. Sia l'azione propria.

Allora X/G e' un T_2.

- DEF. Dominio Fondamentale

Sia $G \times X \to X$ azione di gruppo. Sia $D \subseteq X$.

D e' un DOMINIO FONDAMENTALE se:

1) $\overline{\mathring{D}} = D$ (in particolare D chiuso)

2) $\bigcup_{g \in G} g \cdot D = X$ (cioe' $\pi|_D : D \to X/\sim$ surgettiva)

3) $g\mathring{D} \cap \mathring{D} = \emptyset$ $\forall g \neq e$ (cioe' $\pi|_{\mathring{D}} : \mathring{D} \to X/\sim$ surgettiva)

4) $\{ g \cdot D, \ g \in G \}$ e' una famiglia localmente finita.

- TEOREMA

Sia X localmente compatto, $G \times X \to X$ azione di gruppo tale che $D \subseteq X$ dominio fondamentale.

1) Se X e' T_2 $\Rightarrow$ X/G e' T_2

2) Vale che $X/\sim \ \cong D/\sim'$ dove $\sim'$ e' restrizione di $\sim$.

Topologia dei Proiettivi

▸ Costruzione

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R} / \mathbb{C}$. Per definizione, il proiettivo è:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

dove $v \sim v' \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid v = \lambda v'$.

Considero cioè l'azione di gruppo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^* \times (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda v \end{array}$$

Allora, da $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ dotato della topologia euclidea, $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è uno spazio topologico quoziente.

> Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

L'azione non è propria, ma si nota subito che $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ incontra tutte le classi di equivalenza:

- **Teorema**

Vale che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^n / \pm 1$

- Corollari:

Segue che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2, compatto, connesso per archi.

- **Teorema**

Sia $D^n = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1 \}$ e sia $\sim$ relazione definita:

$$v \sim v' \iff \text{"} v = v' \text{"} \text{ o } \text{"} \|v\| = \|v'\| = 1 \text{ e } v = -v' \text{"}$$

Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong D^n / \sim$

> Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- **Teorema**

Vale che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$

- **Prop. 1**

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e' compatto e connesso per archi.

- **Prop. 2**

Vale che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \cong S^{2n+1}/\sim'$ dove $\sim'$ e' definita da:

$v_1 \sim' v_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^*, |\lambda| = 1$ tale che $v_1 = \lambda v_2$

- **Prop. 3**

Le carte affini sono omeomorfismi con l'immagine e gli $U_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sono aperti in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (per $\mathbb{K} = \mathbb{R}/\mathbb{C}$).

VARIETÀ TOPOLOGICHE

- **DEF.** Varietà Topologica

Uno spazio topologico X è una varietà topologica n-dimensionale (o n-varietà) se:

1) $\forall p \in X \ \exists U$ intorno aperto di p omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$
2) X è T_2
3) X è a base numerabile

- **OSS.**

Sono equivalenti tra loro i seguenti fatti:

1) ogni $p \in X$ ammette intorno aperto omeomorfo ad un intorno aperto di $\mathbb{R}^n$
2) ogni $p \in X$ ammette intorno aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^n$
3) ogni $p \in X$ ammette intorno aperto omeomorfo a $B(0,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$

TEORIA dell' OMOTOPIA

▸ **DEF. Omotopia**

Siano $f, g : X \to Y$ mappe continue. Un' OMOTOPIA tra f e g è una mappa continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tale che:

$$H(x,0) = f(x) \qquad H(x,1) = g(x) \qquad \forall x \in X$$

In tal caso f e g si dicono OMOTOPE ($f \sim g$).

• **NOT.** (H_s)

Sia $s \in [0,1]$, si indica $H_s : X \to Y$ la mappa

$$H_s(x) = H(x,s) \qquad \forall x \in X$$

> **Prop.**

Dato $C(X,Y) = \{$funzioni continue da X a $Y\}$, essere omotope è una relazione di equivalenza.

▸ **DEF. Stellato o Convesso**

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme. Allora:

- Ω è STELLATO rispetto a $x_0 \in \Omega$ se $\forall x_1 \in \Omega$:

$$[x_0, x_1] = \{ t x_0 + (1-t) x_1 \mid t \in [0,1] \} \subseteq \Omega$$

- Ω è CONVESSO se è stellato rispetto ad ogni suo punto.

> **Prop**

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato, sia X qualsiasi. Allora tutte le mappe $X \to \Omega$ continue sono omotope tra loro.

• **NOT** ($[X,Y]$)

Dati X e Y spazi topologici:

$$[X,Y] = \{ \text{classi di omotopia delle mappe } X \to Y \}$$

▸ **Prop**

Siano X, Y, Z spazi topologici. Siano:

$$f, f' : X \to Y \quad \text{e} \quad g, g' : Y \to Z$$

tali che $f \sim f'$ e $g \sim g'$. Allora $g \circ f \sim g' \circ f'$.

▸ **DEF. Inversa Omotopica**

Sia $f : X \to Y$. Una INVERSA OMOTOPICA di f e' una mappa $g : Y \to X$ (con f, g continue) tale che:

$$f \circ g \sim id_Y \qquad g \circ f \sim id_X$$

Se f ammette inversa omotopica, si dice EQUIVALENZA OMOTOPICA ed X, Y si dicono OMOTOPICAMENTE EQUIVALENTI.

· OSS: omeomorfismi sono equivalenze omotopiche

▸ **DEF. Contraibile**

Uno spazio si dice CONTRAIBILE se e' omotopicamente equivalente ad un punto.

▸ **Prop**

Essere omotopicamente equivalenti e' una relazione di equivalenza tra spazi topologici.

IL FUNCTORE π_0

- **DEF.** π_0

Sia X spazio topologico. Allora:

$$\pi_0(X) = \{\text{componenti connesse per archi}\} = X/\sim$$

dove $x \sim y \iff \exists\, \gamma : [0,1] \to X$ cammino continuo tale che

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y$$

- **Prop**

Se $f : X \to Y$ continua, allora f induce $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$

dove $$f_*([x]) = [f(x)]$$

- **Prop**

π_0 è un functore tra:

$$
\begin{array}{ccc}
(\text{Spazi topologici, funzioni continue}) & \longrightarrow & (\text{Insiemi, funzioni}) \\
X & \longmapsto & \pi_0(X) \\
f : X \to Y & \longmapsto & f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)
\end{array}
$$

- **TEOREMA**

Siano $f, g : X \to Y$ tali che $f \sim g$. Allora:

$f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ e $g_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ sono uguali.

- **Corollario**

$X \sim Y \Rightarrow \pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$ sono in bigezione.

Il numero di CCPA è invariante per omotopia.

RETRATTI e RETRATTI di DEFORMAZIONE

Siano X topologico e $Y \subseteq X$.

- **DEF. Retratto**

  Y e' un RETRATTO di X se esiste $r : X \to Y$ continua tale che $r(x) = x \quad \forall x \in Y$ (cioè $r \circ i = id_Y$).

  In tal caso, r è una RETRAZIONE.

- **DEF. Retratto di Deformazione**

  Y e' un RETRATTO di DEFORMAZIONE se esiste $H : X \times [0,1] \to X$ tale che:

  1) $H(x, 0) = x \quad \forall x \in X$
  2) $H(x, 1) \in Y \quad \forall x \in X$
  3) $H(x, s) = x \quad \forall x \in Y, s \in [0,1]$

- OSS: retratto di deformazione $\Rightarrow$ retratto

- Prop

  1) Sia X qualsiasi, $x_0 \in X$. Allora $\{x_0\}$ retratto di X.
  2) Y retratto di deformazione di $X \Rightarrow X \sim Y$
  3) $\{x_0\} \subseteq X$ retratto di deformazione $\Rightarrow X$ contraibile
  4) X contraibile $\Rightarrow X$ connesso per archi

Gruppo Fondamentale

- **DEF. Spazio dei Cammini**

Sia X topologico, $x_0, x_1 \in X$. Allora lo SPAZIO dei CAMMINI è

$$\Omega(X, x_0, x_1) = \{ \gamma : [0,1] \to X \text{ continua} \mid \gamma(0) = x_0 ,\ \gamma(1) = x_1 \}$$

- **DEF. Omotopia di Cammini ($\sim$)**

Sia $\Omega(X, x_0, x_1)$. Si pone $\sim$ relazione di equivalenza "OMOTOPIA di CAMMINI" dove $\gamma \sim \gamma'$ se:

$\exists\ H : [0,1] \times [0,1] \to X$ omotopia tale che:

1) $H_0 = \gamma$ e $H_1 = \gamma'$

2) $H(0,s) = x_0$ e $H(1,s) = x_1 \quad \forall s \in [0,1]$

> **Prop**

L'omotopia di cammini $\sim$ è relazione di equivalenza.

- **TEOREMA**

Se $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ in $\Omega(x_0, x_1)$ e $\gamma_2 \sim \gamma_2'$ in $\Omega(x_1, x_2)$ allora $\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma_1' * \gamma_2'$ in $\Omega(x_0, x_2)$.

- **DEF. Gruppo Fondamentale**

Sia $x_0 \in X$. Il GRUPPO FONDAMENTALE di X con punto base x_0 è: $\quad \pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0, x_0)/\sim$

cioè le classi di omotopia dei lacci (cammini con estremi uguali a x_0).

- **TEOREMA**

$\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo con l'operazione $*$:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] * [\beta] &\longmapsto [\alpha * \beta] \end{aligned}$$

- **LEMMA 1** (Invarianza per riparametrizzazione)

Sia $\alpha \in \Omega(x_0, x_1)$, $j : [0,1] \to [0,1]$ continua con estremi $j(0) = 0$ e $j(1) = 1$. Allora:

$$[\alpha] = [\alpha \circ j] \quad \text{in} \quad \Omega(x_0, x_1)/\sim$$

- **LEMMA 2** (Associatività $*$)

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Omega(x_0, x_0)$: $\quad (\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$

- **LEMMA 3** (Elemento Neutro)

L'elemento neutro per $\pi_1(X, x_0)$ è $[c_{x_0}]$ classe del cammino costante.

- **LEMMA 4** (Inverso per $*$)

Dato $\alpha \in \Omega(x_0, x_1)$ poniamo:

$$\alpha^{-1} \in \Omega(x_1, x_0) \quad \text{dove} \quad \alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$$

CAMMINI $\Omega(x_0, x_0)$ e MAPPE $S^1 \to X$

- **COSTRUZIONE**

Sia $j : [0,1] \to S^1$ dove:

$$j(t) = e^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

$\forall \alpha \in \Omega(x_0, x_0)\ \exists!\ \hat{\alpha} : S^1 \to X$ tale che $\alpha = \hat{\alpha} \circ j$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "j"'] & X \\
S^1 \arrow[ur, "\hat{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

- **FATTO**

$[\alpha] = 1 \iff \hat{\alpha}$ si estende in modo continuo a D^2

- **Prop**

La mappa $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ induce una ben definita:

$$\Psi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow [S^1, X]$$

- **TEOREMA**

1) X e' connesso per archi $\Rightarrow$ Ψ e' surgettiva
2) $\Psi(g) = \Psi(h)$ $\Leftrightarrow$ g e h coniugati in $\pi_1(X, x_0)$

- **FATTO**

Sia $D = D^2$ o $[0,1]\times[0,1]$. Sia $H : D \to X$ continua.
Sia γ_1 e γ_2 due archi complementari di ∂D che iniziano in p e finiscono in q, $p, q \in \partial D$.
Allora γ_1 omotopo a estremi fissi a γ_2.

IL FUNCTORE π_1

· **OSS.**

Sia $f: X \to Y$ con $f(x_0) = y_0$.

Siano $\alpha, \beta \in \Omega(x_0, x_0)$ tali che $[\alpha] = [\beta]$ in $\pi_1(X, x_0)$.

Allora $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$ cioè:

$$[f \circ \alpha] = [f \circ \;\;] \text{ in } \pi_1(Y, y_0)$$

(H omotopia tra α e β, allora $f \circ H$ omotopia tra $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$)

▸ **FATTO**

È ben definita:

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$
$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

▸ **Prop**

π_1 e' un FUNCTORE tra:

(Spazi topologici puntati, mappe continue puntate) e (Gruppi, omomorfismi)

· **LEMMA**

Sia $f: X \to Y$ continua, con $f(x_0) = y_0$. Allora:

$f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$ e' omomorfismo

· **Corollario**

Se f e' un omeomorfismo, allora f_* e' isomorfismo

▸ **DEF. Omotopia Puntata**

Siano $f, g: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ mappe puntate, cioè $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Un' OMOTOPIA PUNTATA tra f e g e' un' omotopia H tra f e g tale che $H(x_0, s) = y_0 \quad \forall s \in [0,1]$.

▸ **TEOREMA**

Siano $f, g: (X, x_0) \to (Y, y_0$

- TEOREMA

Siano $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ mappe puntate.
Se f e g sono omotope per omotopia puntata, allora
$f_* = g_*$ come mappe $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

DIPENDENZA di π_1 dal PUNTO BASE

- Oss.

Sia X topologico fissato, $\gamma \in \Omega(x_0, x_1)$ con $x_0, x_1 \in X$.
Allora γ induce una mappa:

$$\begin{aligned} \Omega(x_1, x_1) &\longrightarrow \Omega(x_0, x_0) \\ \alpha &\longmapsto \gamma * \alpha * \gamma^{-1} \end{aligned}$$

- Prop

Se $[\alpha] = [\beta]$ in $\pi_1(X, x_1)$ allora

$$[\gamma * \alpha * \gamma^{-1}] = [\gamma * \beta * \gamma^{-1}] \quad \text{in } \pi_1(X, x_0)$$

e allora la mappa γ definisce un omomorfismo di gruppi:

$$\gamma_{\#} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$$

- Prop

$(\gamma^{-1})_{\#} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ e' l'inversa di $\gamma_{\#}$

- Corollario

Se X e' connesso per archi, $\forall\, x_0, x_1 \in X$ vale:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

tramite isomorfismo non canonico: dipende dal cammino tra x_0 e x_1.

Invarianza di π_1 per equivalenze omotopiche non puntate

- **Prop**

  Sia X topologico, $x_0 \in X$ ed $f: X \to X$ omotopa a id_X.
  Allora $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, f(x_0))$ è ISOMORFISMO.

- **Teorema**

  Sia $f: X \to Y$ equivalenza omotopica.
  Allora $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ è ISOMORFISMO.

  $\Rightarrow$ Spazi equivalenti omotopicamente hanno π_1 isomorfi.

- **DEF. Semplicemente Connesso**

  X si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se è connesso per archi
  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ (vale $\forall x_0 \in X$).

- **Corollario**

  X contraibile $\Rightarrow$ X semplicemente connesso

- **Corollario**

  I domini stellati di $\mathbb{R}^n$ sono semplicemente connessi.

TEORIA dei RIVESTIMENTI

- **DEF. Omeomorfismo Locale**

Sia $f: X \to Y$. E' un OMEOMORFISMO LOCALE se $\forall x \in X$ esistono intorni aperti: $U \in I(x)$ e $V \in I(f(x))$ tali che:

$$f|_U : U \to V \quad \text{sia omeomorfismo}$$

- **Prop**

Un omeomorfismo locale e' una mappa aperta (non necess. chiusa)

- **DEF. Rivestimento**

Una funzione continua $p: E \to X$ si dice RIVESTIMENTO se:

1) X e' connesso per archi

2) $\forall x \in X$ $\exists$ intorno aperto U_x di $x \in X$ tale che

$$p^{-1}(U_x) = \coprod_{i \in I} V_i$$

dove V_i aperto in E e $p|_{V_i} : V_i \to U_x$ omeomorfismo $\forall i \in I$

Allora E e' lo SPAZIO TOTALE, X e' lo SPAZIO BASE e gli U_x sono INTORNI BEN RIVESTITI.

- **Prop**

Un rivestimento e' un omeomorfismo locale.

- **TEOREMA**

Sia $p: E \to X$ un rivestimento. Allora le FIBRE di p hanno cardinalità costante, cioe':

$$\forall x, y \in X \qquad |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$$

- **DEF. Fibra / Grado**

Sia $p: E \to X$ rivestimento, $p^{-1}(x) \subseteq E$ e' la FIBRA di $x \in X$ mentre $|p^{-1}(x)|$ e' il GRADO di p.

- **TEOREMA**

Sia X topologico connesso per archi, G gruppo. Sia un'azione:

$G \times X \to X$ propriamente discontinua.

Allora la proiezione $\pi : X \to X/G$ e' un RIVESTIMENTO.

- **Corollario**

$\forall n \geq 1$ la mappa $S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e' rivestimento di grado 2

$v \mapsto [v]$

Teoria dei Sollevamenti

[Tutti gli spazi saranno LOC. CONNESSI per ARCHI, cosicché:
Loc Connesso per Archi + Connesso $\Rightarrow$ Connesso per Archi]

▸ **Teorema** Unicità dei Sollevamenti

Siano $p: E \to X$ un rivestimento, Y connesso (per archi) ed $f: X \to Y$ continua.
Se $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to E$ sollevano f ($p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2 = f$) e $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$ allora $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}_1, \tilde{f}_2"] & X \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

▸ **Teorema** Unicità/Esistenza del Sollevamento di Cammini

Siano $p: E \to X$ un rivestimento, $\gamma \in \Omega(X, x_0, x_1)$ e sia $\tilde{x}_0 \in E$ un fissato punto di $p^{-1}(x_0)$. Allora:
$\exists!\ \tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ continuo con $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ e $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

• NOT: siano $\alpha : [0,1] \to X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$. Denotiamo:
$\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ l'unico sollevamento di α che parte da $\tilde{x}_0$

▸ **Teorema** Sollevamento di Omotopie

Sia $p: E \to X$ un rivestimento, $f: Y \to X$.
Sia $\tilde{f} : Y \to X$ sollevamento di f.
Sia $H: Y \times [0,1] \to X$ un'omotopia tale che $H_0 = f$.
Allora $\exists\ \tilde{H} : Y \times [0,1] \to E$ che solleva H ($p \circ \tilde{H} = H$).

▸ **Corollario** Sollevamento di Omotopie dei cammini

Sia $p: E \to X$ un rivestimento e $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0, x_1)$ omotopi come cammini. Sia $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.
Allora $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ e $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$ sono omotopi come cammini (stesso punto finale)

- **Corollario**

Sia $p: E \to X$ un rivestimento, $\tilde{x}_0 \in E$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$.
Allora: $p_*: \pi_1(E, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ e' iniettiva.

- **DEF. Azione Destra**

Siano G gruppo e X insieme. Un' AZIONE DESTRA e' una mappa
$$\begin{aligned} X \times G &\longrightarrow X \\ (x, g) &\longmapsto x \cdot g \end{aligned}$$
tale che:

a) $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in X$

b) $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h \quad \forall x \in X, g, h \in G$ (→ differente!)

- OSS: valgono le nozioni dell' azione SX.

- **TEOREMA Azione di Monodromia**

Sia $p: E \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $F = p^{-1}(x_0)$.
Allora esiste una ben definita AZIONE di MONODROMIA:
$$\begin{aligned} F \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow F \\ \tilde{x}, [\alpha] &\longmapsto \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) \end{aligned}$$

- FATTO

$$\widetilde{(\alpha * \beta)}_{\tilde{x}} = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}} * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)}$$

- **TEOREMA**

Siano $p: E \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $F = p^{-1}(x_0)$. Allora:

1) l'azione di monodromia di $\pi_1(X, x_0)$ su F e' transitiva $\iff$ E e' connesso per archi.

2) $\forall \tilde{x} \in F \quad p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) = \mathrm{Stab}(\tilde{x})$

- **Corollario**

Se X ammette un rivestimento connesso non banale (grado $\neq 1$) allora $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$ $\forall x_0 \in X$ (X non e' semplicemente connesso)

> Corollario

S^1 non è semplicemente connesso

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con $n \geq 1$ non è semplicemente connesso

▸ TEOREMA

Fissato $p : \mathbb{R} \to S^1$ dove $p(t) = e^{2\pi i t}$ e $x_0 = 1$

la mappa: $\Psi : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ è ISOMORFISMO.

$\Rightarrow \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

> LEMMA

S^1 non è un retratto di D^2.

▸ TEOREMA di Brower del punto fisso

Sia $f : D^2 \to D^2$ continua. Allora f ha un punto fisso,

cioè $\exists\, x \in D^2 \mid f(x) = x$.

Calcolo del π_1

[Si introducono STRUMENTI per il calcolo del π_1 di spazi.]

Teorema di Van Kampen

Sia X topologico, siano A, B aperti di X tali che $X = A \cup B$, $x_0 \in A \cap B$.

Se $A, B, A \cap B$ sono connessi per archi allora vale che:

Siano $\begin{cases} i_A : A \hookrightarrow X \\ i_B : B \hookrightarrow X \end{cases}$ $\begin{cases} j_A : A \cap B \to A \\ j_B : A \cap B \to B \end{cases}$ le inclusioni

e un gruppo G con due omomorfismi:

$$\varphi_A : \pi_1(A, x_0) \to G \quad e \quad \varphi_B : \pi_1(B, x_0) \to G$$

tali che $\varphi_A \circ (j_A)_* = \varphi_B \circ (j_B)_*$

Allora $\exists!$ omomorfismo $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$ tali che:

$$\varphi_A = \varphi \circ (i_A)_* \quad e \quad \varphi_B = \varphi \circ (i_B)_*$$

Corollario

$\pi_1(X, x_0)$ è generato da $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$ e $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$

Corollario

Nelle ipotesi, se:

- A, B aperti semplicemente connessi
- $A \cap B$ connesso per archi

allora X è semplicemente connesso

Corollario

Per $n \geq 2$, S^n è semplicemente connesso.

Prodotto Libero e Amalgamato

▸ **DEF.** Prodotto Libero

Dati due gruppi G e H, il prodotto libero $G * H$ è il gruppo K che gode della seguente proprietà universale:
" $\exists$ omomorfismi $i_G : G \to K$ e $i_H : H \to K$ tali che $\forall \varphi_G : G \to Z$ e $\forall \varphi_H : H \to Z$ esiste un unico $\varphi : K \to Z$ tale che $\varphi_G = \varphi \circ i_G$ e $\varphi_H = \varphi \circ i_H$ "

• DIAGRAMMA

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "i_G"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_G"] & & \\
& K \arrow[r, dashed, "\varphi"] & Z \\
H \arrow[ur, "i_H"] \arrow[urr, bend right, "\varphi_H"'] & &
\end{tikzcd}$$

▸ **Teorema**

Sia $X = A \cup B$, A, B aperti tali che $A, B, A \cap B$ connessi per archi. Sia $x_0 \in A \cap B$ e supponiamo $A \cap B$ semplicemente connesso. Allora:

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$$

• Corollari

- $\pi_1(\underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n \text{ volte}}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$

- $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus F) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}} \qquad |F| = n$

▸ **DEF.** Gruppo libero su n generatori

Il prodotto libero di n copie di $\mathbb{Z}$ si chiama GRUPPO LIBERO su n generatori. Si indica $F(x_1, \dots, x_n)$.

- **Proprietà Universale** $F(x_1, \dots, x_n)$

"Dato l'insieme $\{x_1, \dots, x_n\} = X$ e data $\psi : X \to Z$

$\exists !$ omomorfismo $\varphi : F(x_1, \dots, x_n) \to Z$ tale che:

$\psi = \varphi \circ i$ dove $i : X \to F(X)$ $\quad i(x_j) = x_j \ \forall j$ "

> **TEOREMA**

$\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \{1\} \quad \forall n \geq 0$

- **DEF. Prodotto Amalgamato**

Siano G_1, G_2, H gruppi. K si dice PRODOTTO AMALGAMATO se soddisfa la proprietà universale:

" $\forall \varphi_1 : G_1 \to Z$ e $\varphi_2 : G_2 \to Z$ omomorfismi di gruppi tali che $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$ nel diagramma:

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\ H \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & & K \\ & G_2 \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

vale che $\exists ! \ \varphi : K \to Z$ tale che

$\varphi_1 = \varphi \circ i_1$ e $\varphi_2 = \varphi \circ i_2$ "

Si indica $K = G_1 *_H G_2$.

> **TEOREMA**

Il prodotto amalgamato di gruppi esiste ed è unico a meno di isomorfismi.

- **OSS.**

Per Van Kampen, nelle ipotesi del teorema:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A \cap B, x_0)} \pi_1(B, x_0)$$

Presentazione di Gruppi

- **DEF.** Presentazione di gruppo

Una PRESENTAZIONE (finita) di GRUPPO è del tipo:

" Un insieme finito di simboli $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ e un insieme di parole nei simboli, cioè $R \subset F(x_1, \dots, x_n)$ "

Si pone allora $G = F(x_1, \dots, x_n) / \langle\langle R \rangle\rangle = F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle$.

Si indica $G = \langle S \mid R \rangle$.

- **PROP.**

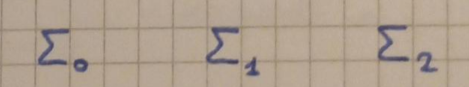
Siano $G = \langle S \mid R \rangle$ e un gruppo Z.

Una funzione $f : S \to Z$ induce un omomorfismo $\tilde{f} : G \to Z$ se e solo se l'estensione di f a $F(S)$ manda ogni $r_i \in R$ nell'identità di Z. Allora $\tilde{f}$ unico.

Superfici di Genere $g \geq 1$

- **FATTO**

Una superficie (varietà topologica di dimensione 2) compatta e orientabile è necessariamente omeomorfa a una delle seguenti: Σ_0 Σ_1 Σ_2 ...



...

- **Caso $g = 1$**: Toro

$$\pi_1(\Sigma_1) = F(a,b) / \langle\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle\rangle = \mathbb{Z}^2$$

- **Caso $g \geq 2$**

$$\pi_1(\Sigma_g) = \Gamma_g = F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) / \langle\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle\rangle$$

- **Prop.**

Per ogni $g \geq 2$: $\quad rk(\Gamma_g) = 2g$

- **Teorema**

Sono fatti equivalenti:

1) $g = g'$
2) Σ_g è omeomorfo a $\Sigma_{g'}$
3) Σ_g è omotopicamente equivalente a $\Sigma_{g'}$
4) $\pi_1(\Sigma_g) \cong \pi_1(\Sigma_{g'})$

RIVESTIMENTO UNIVERSALE

- **DEF. Rivestimento Universale**

  Un rivestimento $p: E \to X$ si dice UNIVERSALE se è connesso per archi e semplicemente connesso.

- **TEOREMA**

  Sia $p: E \to X$ rivestimento universale e $x_0 \in X$.
  Allora $|\pi_1(X, x_0)| = |p^{-1}(x_0)|$

- **Corollario**

  $\forall n \geq 2 \quad \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

- **DEF. Semilocalmente Semplicemente Connesso**

  Uno spazio X è SEMILOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO se $\forall x_0 \in X \; \exists U$ intorno di x_0 tale che, dato $i: U \hookrightarrow X$
  $i_*: \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è l'omomorfismo banale

- **OSS.**

  localmente semplicemente connesso $\Rightarrow$ semilocalmente semplicemente conn.

- **TEOREMA**

  X ammette un rivestimento universale $\Leftrightarrow$ X è semilocalmente semplicemente connesso

- **TEOREMA Sollevamento per mappe qualsiasi**

  Sia $p: E \to X$ rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.
  Sia $f: Y \to X$ tale che $y_0 \in Y$, $f(y_0) = x_0$ e che Y sia connesso per archi.

$$\begin{tikzcd} & (E, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

  Allora "$\exists! \; \tilde{f}: Y \to E$ con $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ e $p \circ \tilde{f} = f$
  $\Leftrightarrow \quad f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$"

Morfismi di Rivestimenti

D'ora in poi tutti gli spazi considerati saranno connessi per archi.

▸ **DEF.** Morfismo di Rivestimenti

Siano X spazio con due rivestimenti $p_1 : E_1 \to X$ e $p_2 : E_2 \to X$.
Un morfismo tra i rivestimenti p_1 e p_2 è una mappa $f : E_1 \to E_2$ tale che $p_1 = p_2 \circ f$.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

▸ **DEF.** Automorfismo di Rivestimenti:

Sia $p : E \to X$ un rivestimento. Se f morfismo di p ammette un morfismo inverso g tale che $f \circ g = g \circ f = id$ e che $p \circ g = p$, allora f e g sono automorfismi di p.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[ll, shift left, "g"] \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

• OSSERVAZIONI

- $id : E \to E$ è un automorfismo
- Composizione di automorfismi è automorfismo
- Gli automorfismi formano un gruppo $Aut(E \xrightarrow{p} X)$
- Sia $f \in Aut(E)$. $\forall x_0 \in X$: $f(p^{-1}(x_0)) = p^{-1}(x_0)$

▸ **PROP.**

L'azione di monodromia e quella degli automorfismi commutano.
Dati: $F = p^{-1}(x_0)$ e $\varphi \in Aut_X(E)$ allora $\forall \gamma \in \pi_1(X, x_0)$:

$$\varphi(\tilde{x} \cdot \gamma) = \varphi(\tilde{x}) \cdot \gamma \quad \forall \tilde{x} \in F$$

- **PROP.**

$Aut_X(E)$ agisce su E in modo propriamente discontinuo (in particolare allora in maniera libera).

- **TEOREMA**

Sia G un gruppo che agisce su uno spazio Y in modo propriamente discontinuo. Sappiamo che $p: Y \to Y/_G$ è un rivestimento.
Vale allora che $Aut(p) = G$.

- **DEF.** **Rivestimento Regolare**

Un rivestimento $p: E \to X$ si dice REGOLARE se per ogni fibra $F = p^{-1}(x) \subseteq E$, l'azione $Aut_X(E)$ su F è transitiva.

- **TEOREMA**

Siano $p: E \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ ed $F = p^{-1}(x_0)$.
Siano $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2 \in F$. Allora:

$\exists\, \varphi \in Aut_X(E) \mid \varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2 \iff p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2))$

- **Corollario**

I seguenti fatti sono equivalenti:
- $Aut_X(E)$ agisce transitivamente sulla fibra $F = p^{-1}(x_0)$
- $\exists\, \tilde{x} \in F$ tale che $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$
- $\forall\, \tilde{x} \in F$ vale che $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$

- **PROP.**

Sia $H < Aut_X(E)$ dove $p: E \to X$ e $q: E \to {}_H\backslash^E$ rivestimenti.
Osserviamo che $\forall\, h \in H$: $p \circ h = p$ ed esiste una ben definita $R: {}_H\backslash^E \to X$ tale che $p = R \circ q$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & {}_H\backslash^E \arrow[dl, dashed, "R"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Allora $R: {}_H\backslash^E \to X$ è un rivestimento.

- **OSS.**

Se $H = Aut_X(E)$ e $p: E \to X$ è regolare, allora il rivestimento

${}_{Aut_X(E)}\backslash^E \longrightarrow X$ è bigettivo, quindi isomorfismo.

- **PROP.**

Sia $p: E \to X$ rivestimento regolare, siano $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.
Allora $Aut_X(E) \cong \pi_1(X, x_0) / p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$

- **OSS.**

Sia E il rivestimento universale. $Aut_X(E) \cong \pi_1(X, x_0)$.

- **TEOREMA**

Supponiamo che X abbia un rivestimento universale $p: \tilde{X} \to X$.
Fissiamo $p(\tilde{x}_0) = x_0$.
I rivestimenti regolari di X sono in corrispondenza biunivoca con i sottogruppi normali di $\pi_1(X, x_0)$ a meno di isomorfismi di rivestimento.

- **LEMMA**

Sia $H < \pi_1(X, x_0)$. Nelle ipotesi del Teorema, $Aut_X(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$
dove $\alpha \longleftrightarrow g \iff \tilde{x}_0 \cdot \alpha = g(\tilde{x}_0)$
Ma allora ad $H < \pi_1(X, x_0)$ corrisponde $K < Aut_X(\tilde{X})$, cioè:

$$\varphi({}_K\backslash\tilde{X}) = H$$