

# Esercizi Ultrafiltri dal 16/10/23 in avanti

a.snaidero

January 2024

## 1 16/10/23

### 1.1 Esercizio 1 (Schur forte)

Dimostrare Schur forte, ovvero  $\forall \mathbb{N} = C_1 \dots C_r$  esiste un colore  $C_i$  e esistono infinite  $a \in C_i$  per cui esistono infiniti  $b \in C_i$  tali che  $a + b \in C_i$ .

Basta affermare che data una  $r$ -colorazione dei naturali esiste un colore tale che per ogni  $n$  esista un  $a > n$  con la proprietà sudetta. Fissimo dunque una  $r$ -colorazione  $\mathbb{N} = C_1 \dots C_r$  e un naturale  $n$ . Per il teorema delle differenze siano  $i$  e  $H = \{x_1 < x_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$  infinito tali che  $H \ominus H \subset C_i$ . Senza perdita di generalità possiamo supporre  $x_1 > n$ , basta intersecare  $H$  con  $(n, +\infty)$ . Chiamati dunque  $a = x_2 - x_1$  e  $b_i = x_{i+2} - x_2$  si ha  $a, b_i, a + b_i = x_{i+2} - x_1 \in H \ominus H \subset C_i$  come voluto.

### 1.2 Esercizio 2

Trovare una 2-colorazione di  $\mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \neq 0$ ,  $n$  e  $2n$  non siano monocromatici.

Sia  $C_1 = \{4^k(2h+1) | k, h \in \mathbb{N}\}$  e  $C_2 = \{4^k(2h+1)2 | k, h \in \mathbb{N}\}$ , tale colorazione è quella cercata.

### 1.3 Esercizio 3

Sia  $(X, B, \mu, T)$  un *measure preserving system* e  $A \in B$  non trascurabile, si dimostri che  $\mu(\{x \in A | \exists n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in A\}) = \mu(A)$ .

Sia  $A_0 = \{x \in A | \nexists n : T^n(x) \in A\}$ , vale che  $A_0 = A \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} T^{-n}[A]$  dunque è misurabile. La tesi segue verificando che  $A_0$  abbia misura nulla. Siano  $A_n = T^{-n}[A_0]$ , tutti questi insiemi sono disgiunti infatti se per assurdo  $A_n \cap A_{n+m} \neq \emptyset$  allora si avrebbe che  $T^n[A_n] \cap T^n[A_{n+m}] \neq \emptyset$  cioè  $A_0 \cap A_m \neq \emptyset$  da cui l'assurdo  $A \supset A_0 \supset T^m[A_0] \cap A_0 \supset T^m[A_0 \cap A_m] \neq \emptyset$ . Se per assurdo  $\mu(A_0) > 0$  allora  $\exists n : 1 < \mu(\bigcup_{i=0}^n A_i) \leq \mu(X) = 1 \quad \zeta$ .

## 1.4 Esercizio 4

Si dimostri che ogni campo ordinato che estende  $\mathbb{R}$  non è archimedeo.

Sia  $\mathbb{K}$  un campo ordinato che estende i reali e sia  $x \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$ , a meno di cambiare il segno possiamo supporre  $x$  positivo. Si consideri  $A$  l'insieme di tutti i reali minori di  $x$ . Poiché  $A \subset \mathbb{R}$  si danno due casi: o  $A$  è illimitato dentro i reali oppure esiste, e lo chiamiamo  $y$ , il  $\sup$  in  $\mathbb{R}$  di  $A$ . Nel primo caso si deve avere che  $\forall r \in \mathbb{R} \ x^{-1} < r$  altrimenti troviamo  $r \in \mathbb{R} : r^{-1} \geq x$ , ovvero  $x$  è più piccolo di tutti i reali dunque dei reciproci dei naturali cioè la tesi. Nel secondo caso per ogni naturale  $n$  si ha che  $|x - y| < n^{-1}$ , altrimenti per un qualche naturale  $n$  si troverebbe il numero reale  $y \pm n^{-1}$  fra  $y$  e  $x$  contro la costruzione di  $y$ .

## 1.5 Esercizio 5

Dato un campo ordinato  $\mathbb{K}$  che estende  $\mathbb{R}$ , si dimostri che le seguenti proprietà sono equivalenti:

1.  $\mathbb{K}$  non è archimedeo;
2. esistono numeri infinitesimi in  $\mathbb{K}$
3.  $\mathbb{Q}$  non è denso in  $\mathbb{K}$
4.  $\mathbb{N}$  è limitato in  $\mathbb{K}$

**1.  $\implies$  2.**

Sia  $x \in \mathbb{K}$  tale che per ogni  $n$  naturale  $x < n^{-1}$ , allora dato un reale positivo  $r$ , preso un naturale  $n$  tale che  $n^{-1} < r$ , si ha che  $x < n^{-1} < r$  dunque  $x$  è minore di tutti i reali positivi cioè è un infinitesimo.

**2.  $\implies$  3.**

Sia  $x \in \mathbb{K}$  un infinitesimo positivo, fra  $x$  e  $2x$  non esistono reali, in particolare razionali, altrimenti detto  $q \in \mathbb{Q} : x < q < 2x$  si avrebbe che  $\frac{q}{2} < x$  contraddicendo il fatto che  $x$  è un infinitesimo.

**3.  $\implies$  4.**

Siano  $x, y \in \mathbb{K} \ x < y$  tali che  $\nexists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$ . Chiamiamo  $z$  il  $\sup$  in  $\mathbb{R}$  dei reali minori di  $x$ , poiché i razionali sono densi nei reali non esiste nemmeno un reale  $r$  tale che  $x < r < y$  allora o  $z \leq x$  o  $y \geq z$ . Non può esistere un naturale  $n$  tale che  $n^{-1} < y - x$  altrimenti  $x < z \pm n^{-1} < y$  assurdo per quanto detto. Allora  $\mathbb{N}$  è limitato in  $\mathbb{K}$  da  $(y - x)^{-1}$ .

**4.  $\implies$  1.**

Sia  $x \in \mathbb{K}$  che limita i naturali, allora  $x^{-1}$  è minore del reciproco di ogni naturale.

## 2 18/10/2024

### 2.1 Esecizio 6

Dimostrare che data una colorazione finita dei naturali  $\mathbb{N} = C_1 \cup \dots \cup C_n$  esiste un insieme monocromatico con densità asintotica positiva.

Dimostriamo una cosa più forte, ovvero che la densità asintotica è subadditiva, allora poiché la densità dell'unione dei "colori" è  $\bar{d}(\mathbb{N}) = 1$  si deve avere che la somma delle densità sia maggiore o uguale a 1 da cui almeno una delle densità deve essere positiva.

Siano dunque dati due insiemi  $A, B \subset \mathbb{N}$  e chiamiamo  $C = A \cup B$ , siano  $a_n = |A \cap [1, n]| \cdot n^{-1}$ ,  $b_n = |B \cap [1, n]| \cdot n^{-1}$ ,  $\beta_n = |(B \setminus A) \cap [1, n]| \cdot n^{-1}$  e  $c_n = |C \cap [1, n]| \cdot n^{-1}$ . Ovviamente si ha  $c_n = a_n + \beta_n$ , dunque  $\bar{d}(C) = \limsup_n c_n = \limsup_n a_n + \beta_n \leq \limsup_n a_n + \limsup_n \beta_n \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n = \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$

### 2.2 Esecizio 7

Trovare un insieme spesso di numeri naturali  $A$  con densità asintotica superiore nulla.

Si consideri l'insieme  $A = \{n \in \mathbb{N} | \exists k : 2^k < n \leq 2^k + k\}$ .  $A$  è chiaramente spesso, calcoliamo la sua densità asintotica. Chiamiamo  $a_n = |A \cap [1, n]| \cdot n^{-1}$ , per ogni  $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$  si ha che  $a_n \leq a_{2^k+k}$ , allora  $\bar{d}(A) = \limsup_k a_{2^k+k} = \limsup_k |A \cap [1, 2^k+k]| \cdot (2^k+k)^{-1} \leq \limsup_k (\sum_{i=0}^k i) \cdot 2^{-k} = \limsup_k k(k-1) \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-k} = 0$

### 2.3 Esercizio 8

Dimostrare che le seguenti sono equivalenti:

1.  $A$  è spesso
2.  $\mathcal{F} = \{A\} \cup \{A - n | n \in \mathbb{N}\}$  ha la *FIP*
3.  $\forall F \subset \mathbb{N}$  finito esiste  $a \in A$  tale che  $a + F \subset A$ .

**1.  $\implies$  2.**

Si consideri  $\{A - n_1, A - n_2, \dots, A - n_k\}$  un qualsiasi sottoinsieme di  $\mathcal{F}$  e sia  $n = \max(n_1, \dots, n_k)$ . Poiché  $A$  contiene un intervallo lungo almeno  $n$ , cioè  $[x, x+n] \subset A$ , allora per ogni  $1 \leq i \leq k$  si ha che  $x \in [x, x+n-n_i] \subset A - n_i$ ,

allora  $x \in \bigcap_{i=1}^k A - n_i$ , cioè  $\mathcal{F}$  ha la *FIP*.

**2.  $\implies$  3.**

Sia  $F \subset \mathbb{N}$  finito, sia  $n = \max(F)$ , sia  $a \geq n$  tale che  $a \in \bigcap_{i=0}^n A - i$ , che esiste perché  $\mathcal{F}$  ha la *FIP*, allora  $\forall i : 0 \leq i \leq n$  si ha  $a - i \in A$ , dunque

$$a + F \subset [a, a + n] \subset A.$$

**3.  $\implies$  1.**

Sia  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario, consideriamo l'insieme finito  $[0, n]$ , per 3.  $\exists a : [a, n + a] \subset A$ , dunque  $A$  contiene un intervallo lungo  $n$ .

## 2.4 Esecizio 9

Si dimostriche le seguenti famiglie di sottoinsiemi di  $\mathbb{N}$  sono SPR:

1.  $\{A \mid \bar{d}(A) > 0\}$
2. Gli insieme AP-rich, ossia che contengono progressioni aritmetiche infinite.
3. Come sopra ma con le progressioni geometriche

**1.** Questo segue immediatamente notando che, come mostrato in precedenza (esercizio 6), la densità asintotica positiva è subadditiva, dunque l'unione di insiemi con densità asintotica superiore nulla ha densità superiore nulla, cioè la contronominale.

**2.** Sia  $A$  un insieme AP-rich, diamone una colorazione  $A = C_1 \cup \dots \cup C_r$ . Per concludere basta far vedere che fissata una lunghezza  $l$  esiste  $i$  tale che  $C_i$  contiene una progressione aritmetica lunga  $l$ . Sia  $n$  tale che ogni  $r$ -colorazione di  $[1, n]$  è tale per cui esiste un colore che contiene una progressione aritmetica lunga  $l$ , tale  $n$  esiste per il teorema di Van Der Waerden e compattezza combinatoria. Poiché  $A$  è AP-rich, contiene una progressione aritmetica lunga  $n$ , ovvero  $\exists x_0, d, :$  per ogni  $k \in [0, n]$  si ha  $x_k = x_0 + kd \in A$ . Sia  $D_i$  una  $r$ -colorazione di  $[1, n]$  tale che  $m \in D_i \iff x_m \in C_i$ , per la scelta di  $n \exists i$  tale che  $D_i$  contiene una progressione lunga  $l$ , ovvero  $\exists y_0, d', :$  per ogni  $k \in [0, l]$  si ha  $y_k = y_0 + kd' \in D_i$ , allora per ogni  $k \in [0, l]$  si ha che  $z_k = x_{y_k} = x_0 + y_0d + kdd' \in C_i$ , cioè  $C_i$  contiene una progressione aritmetica lunga  $l$ .

**3.** Sia  $A$  un insieme contenente progressioni geometriche arbitrariamente lunghe, diamone una colorazione  $A = C_1 \cup \dots \cup C_r$ . Per concludere basta far vedere che fissata una lunghezza  $l$  esiste  $i$  tale che  $C_i$  contiene una progressione geometrica lunga  $l$ . Sia  $n$  tale che ogni  $r$ -colorazione di  $[1, n]$  è tale per cui esiste un colore che contiene una progressione aritmetica lunga  $l$ , tale  $n$  esiste per il teorema di Van Der Waerden e compattezza combinatoria. Poiché  $A$  contiene progressioni geometriche arbitrariamente lunghe, contiene una progressione geometrica lunga  $n$ , ovvero  $\exists x_0, d, :$  per ogni  $k \in [0, n]$  si ha  $x_k = x_0d^k \in A$ . Sia  $D_i$  una  $r$ -colorazione di  $[1, n]$  tale che  $m \in D_i \iff x_m \in C_i$ , per la scelta di  $n \exists i$  tale che  $D_i$  contiene una progressione lunga  $l$ , ovvero  $\exists y_0, d', :$  per ogni  $k \in [0, l]$  si ha  $y_k = y_0 + kd' \in D_i$ , allora per ogni  $k \in [0, l]$  si ha che  $z_k = x_{y_k} = x_0d^{y_0+kd'} = x_0d^{y_0}(d^{d'})^k \in C_i$ , cioè  $C_i$  contiene una progressione geometrica lunga  $l$ .

## 2.5 Esercizio 10

Sia  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  chiuso per sovrainsiemi, dimostra che  $\mathcal{F}^* = \{B \subset X \mid \forall A \in \mathcal{F} B \cap A \neq \emptyset\}$ .

$\square$  Preso  $A \in \mathcal{F}$  e  $B \in \mathcal{F}^*$ , supponiamo per assurdo che  $A \cap B = \emptyset$  allora  $A \subset B^c$  e poiché  $\mathcal{F}$  è chiuso per sovrainsiemi  $B^c \in \mathcal{F}$ , cioè  $B \notin \mathcal{F}^*$  per definizione di famiglia duale  $\zeta$ .

$\square$  Sia  $B \subset X$  tale che per ogni  $A \in \mathcal{F}$  si abbia  $A \cap B \neq \emptyset$ , allora per ogni  $A \in \mathcal{F}$  si ha che  $\neg B \subset A^c$ , in particolare  $B \neq A^c$  cioè  $B \in \mathcal{F}^*$  per definizione di famiglia duale.

## 2.6 Esercizio 11

Gli ultrafiltri sono gli unici insiemi autoduali?

No, ad esempio su  $X = \{1\}$ ,  $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$  è autoduale. In realtà si possono fare esempi meno banali, infatti dato un insieme  $X$ , ogni  $F$  sottoinsieme delle parti di  $X$  tale che nessun elemento di  $F$  è il complementare di un altro suo elemento può essere esteso a una famiglia autoduale per ricorsione trasfinita (o per Zorn, esattamente come si dimostra che ogni filtro si può estendere a un ultrafiltro). Si procede bene ordinando le parti di  $X$ , e costruendo  $F_{\alpha+1}$  per ricorsione aggiungendo a  $F_\alpha$  l' $\alpha$ -esimo elemento di  $\mathcal{P}(X)$  se e sole se il suo complementare non sta già in  $F_\alpha$  e ovviamente facendo le unioni agli ordinali limite.

## 2.7 Esercizio 12

Dimostrare che valgono le seguenti implicazioni e che sono strette: spesso  $\implies$  IP-set  $\implies$   $\Delta$ -set.

$\square$  spesso  $\implies$  IP-set Sia  $A$  un insieme spesso, si costruisca per ricorsione la seguente successione a valori naturali  $x_0 = \min(A)$ , e, dati  $x_0, \dots, x_n$ , chiamato  $m_n = \max(FS(x_0, \dots, x_n))$  (dove poniamo  $\max(\emptyset) = 0$ ), chiamato  $x$  tale che  $[x, x+1+x_n+m_n] \subset A$ , allora definiamo  $x_{n+1} = x+1+x_n$ . Si dimostra per induzione che la successione è crescente e che contiene  $FS(x_0, \dots, x_n)$  per ogni  $n$ . Infatti  $FS(x_0) = \emptyset$ , e  $FS(x_0, \dots, x_{n+1}) \setminus FS(x_0, \dots, x_n) \subset [x_{n+1}, x_{n+1}+m_n] \subset A$  per la scelta di  $x_{n+1}$ , dunque supponendo che  $FS(x_0, \dots, x_n) \subset A$  allora  $FS(x_0, \dots, x_{n+1}) \subset A$ .

$\square$  IP-set  $\implies$   $\Delta$ -set Sia  $X = \{x_1 < x_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$  infinito e sia  $A$  tale che  $FS(X) \subset A$  allora sia  $Y = \{y_1 = x_1 < y_2 = x_1 + x_2 < \dots < y_n = x_1 + \dots + x_n < \dots\}$  allora si ha che  $Y \ominus Y \subset A$ , infatti presi  $y_n < y_m$  si ha  $y_m - y_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m \in FS(X) \subset A$ .

$\square$  IP-set  $\not\implies$  spesso Si consideri la seguente successione definita per ricorsione:  $x_1 = 0$ , e dati  $x_1, \dots, x_n$  si definisce  $x_{n+1} = m_n = \max(FS(x_1, \dots, x_n)) + 2$  dove ancora poniamo  $\max(\emptyset) = 0$ . Consideriamo l'insieme  $X = FS(\{x_1, x_2, \dots\})$ .

$X$  chiaramente è un IP-set, ma non è spesso, infatti non contiene nemmeno intervalli lunghi 2, dimostriamolo. Ovviamente la successione  $m_n$  è crescente, allora ci basta dimostrare per induzione su  $n$  che  $X \cap [0, m_n]$  non contiene intervalli lunghi due. Per  $n = 0$  è ovvio. Supponiamolo per  $n$  e dimostriamolo per  $n + 1$ : sia per assurdo  $x, x + 1 \in X \cap [0, m_{n+1}]$ , per ipotesi induttiva possiamo assumere che  $x, x + 1 \in X \cap [m_n + 1, m_{n+1}]$ . Sia  $x = \sum_{j=0}^k x_{i_j}$ , poiché per ogni  $l > n + 1$  si ha che  $x_l > m_{n+1} \geq x$ , sappiamo che  $\max(i_j)_j \leq n + 1$ , d'altra parte si ha che se  $\max(i_j)_j < n + 1$  si avrebbe  $x \in FS(x_1, \dots, x_n)$  da cui  $x < m_n < x$ , allora  $\max(i_j)_j = n + 1$ , allora  $x - x_{n+1}, x + 1 - x_{n+1} \in FS(x_1, \dots, x_n) \subset X \cap [0, m_n]$ , il che è assurdo per ipotesi induttiva  $\zeta$ .

$\Delta$ -set  $\not\Rightarrow$  IP-set Si consideri  $X = \{10^k | k \in \mathbb{N}\}$ , sia  $A = X \ominus X$ . Ovviamente  $A$  è un  $\Delta$ -set, ma non è un IP-set. Infatti se per assurdo fosse  $Y = \{y_0 < y_1 < y_2 < \dots\}$  tale che  $FS(Y) \subset A$ , si avrebbe  $y_0, y_1 \in A$  ma allora devono esistere  $k_0 < h_0, k_1 < h_1$  tali che  $y_0 = 10^{h_0} - 10^{k_0}$  e  $y_1 = 10^{h_1} - 10^{k_1}$ , da cui deduciamo che  $h_0 \leq h_1$ . Allora si ha  $y = y_0 + y_1 = 10^{h_0} - 10^{k_0} + 10^{h_1} - 10^{k_1} = 10^h - 10^k \in A$  per un qualche  $h, k$ . Notiamo che  $10^h - 10^{h-1} \leq y < 10^h$  e poiché  $10^{h_1} - 2 \cdot 10^{h_1-1} < y < 2 \cdot 10^{h_1}$  si deve avere che  $h_1 = h$ . Allora risulta che  $10^k = 10^{k_1} - 10^{h_0} + k_0$  che è una potenza di 10 se e solo se  $h_0 = k_1, k = k_0$ . Prendiamo allora un terzo  $y_2 = 10^{h_2} - 10^{k_2} \in Y$ , poiché si ha  $y_1 < y_2$  deduciamo che  $h_1 < h_2$ . Per gli stessi ragionamenti, poiché  $y_2 - y_1, y_2 - y_0 \in A$ , si ha che  $h_2 = k_1$  e  $h_2 = k_0$ , da cui  $k_1 = k_0$  il che è assurdo perché come abbiamo detto prima  $h_0 = k_1$  ma  $h_0 > k_0$ .

### 3 23/10/2024

#### 3.1 Esercizio 13

Dimostrare che se un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{Z}$  ha densità di Banach 1 allora è spesso.

Troviamo un intervallo lungo  $l$  in  $A$ . Chiamiamo  $x_n = \max_{x \in \mathbb{Z}} |A \cap [x + 1, x + n]| n^{-1}$ . Poiché  $BD(A) = \lim_n x_n = 1$ , sia  $m : \forall n > m x_n > 1 - l^{-1}$ , si prenda poi  $dl$  il primo multiplo intero di  $l$  maggiore di  $m$ . Sia  $x : |A \cap [x + 1, x + dl]| (dl)^{-1} > 1 - l^{-1}$  allora  $|A \cap [x + 1, x + dl]| > dl - d$ , dunque deve un  $0 < k \leq d$  tale che  $[x + (k - 1)d + 1, x + kd] \subset A$ .

#### 3.2 Esercizio 14

Dimostrare che

1. Se  $A$  è sintetico a tratti ha densità di Banach positiva
  2. Se  $A$  è sintetico allora ha densità asintotica superiore positiva
1. Sia  $A = B \cap C$  con  $B$  spesso e  $C$  con "buchi limitati da  $k$ " (cioè  $\forall n [n + 1, n + k] \cap C \neq \emptyset$ ). Definiamo  $x_n = \max_{x \in \mathbb{Z}} |A \cap [x + 1, x + n]| n^{-1}$  e dimostriamo che  $x_{nk}$

è maggiore uguale di  $k^{-1}$ . Sia fissato  $n$ , sia  $x$  tale che  $[x+1, x+nk] \subset B$  allora per ogni  $0 \leq h < n$   $[x+hk+1, x+hk+k] \cap A = [x+hk+1, x+hk+k] \cap B \cap C = [x+hk+1, x+hk+k] \cap C \neq \emptyset$ , allora  $|[x+1, x+nk] \cap A| \geq n$  da cui la tesi.  
**2.** Sia  $A$  con "buchi limitati da  $k$ ". Allora analogamente a prima  $|[1, nk] \cap A| \geq n$ , per cui  $\bar{d}(A) \geq \lim_n k^{-1} - n^{-1} = k^{-1} > 0$ .

### 3.3 Esercizio 15

Trovare dei controesempi ai viceversa dell'esercizio precedente.

**1.** Dato un insieme  $A$ , chiamiamo  $P_A(k, l)$  la seguente proprietà:  $\forall x [x+1, x+l] \cap A$  ha dei buchi lunghi  $k$  (cioè ognuno degli intervalli  $[x+1, x+l]$  ammette un sottointervallo lungo  $k$  che è contenuto nel complementare di  $A$ ). Dobbiamo trovare un insieme con densità di Banach positiva che non sia sindetico a tratti, ovvero tale che per  $\forall k \exists l : P_A(k, l)$ .

Costruiamo per ricorsione una successione di naturali strettamente crescente  $l_i$  tale che  $L_i := \sum_{j=1}^i l_j \leq l_i$  e una di successione di insiemi  $I_i \subset [0, l_i - 1]$  tali che  $\forall j \leq i$  valga  $P_{I_i}(j, l_j)$  e  $|I_i| l_i^{-1} > 4^{-1}$ . Poniamo  $I_1 := \{1, 2\}$ ,  $l_1 := 4$  e

$$I_{i+1} := \bigcup_{j=1}^m (I_i + i + 1 + jl_i) = \{x + i + 1 + jl_i | x \in I_i, 1 \leq j \leq m\}$$

$$l_{i+1} := 2i + 2 + ml_i$$

Dove  $m$  è tale che  $l_{i+1} \geq L_{i+1}$  e  $|I_{i+1}| l_{i+1}^{-1} > 4^{-1}$ , osserviamo che se  $|I_i| l_i^{-1} > 4^{-1}$  tale  $m$  esiste. Diamo una visione euristica della costruzione fatta e spieghiamo come mai  $\forall j \leq i$  valga  $P_{I_i}(j, l_j)$ . Dobbiamo vedere ogni  $I_{i+1}$  come "lungo"  $l_{i+1}$  (cioè pensiamo semplicemente  $I_{i+1} \in \mathcal{P}([0, l_{i+1} - 1])$ ), in questo modo  $I_i$  risulta formato da uno "spazio vuoto" iniziale e uno finale ciascuno lungo  $i + 1$ . Nel mezzo  $I_{i+1}$  è formato giustapponendo  $m$  volte l'insieme  $I_i$  (da immaginare come lungo  $l_i$ ). In questo modo qualunque intervallo lungo  $l_j \leq l_i$  o sta interamente in un traslato di  $I_i$  e quindi contiene un buco lungo  $i$  per costruzione di  $I_i$ , oppure sta in mezzo a due traslati di  $I_i$  (o fra un traslato e lo "spazio vuoto" iniziale o finale), in ogni caso contiene un buco lungo  $j$  perché a loro volta gli insiemi  $I_i$  erano costruiti con "spazi vuoti" iniziali e finali lunghi  $i$ . Chiaramente anche un intervallo lungo  $l_{i+1}$  contiene un buco lungo  $i + 1$ .

Poniamo

$$A := \bigcup_i I_i + L_i = \bigcup_i \{x + L_i | x \in I_i\}$$

Cioè  $A$  è formato giustapponendo gli insiemi  $I_i$ . Dimostriamo che vale  $P_A(i, 3l_i)$  per ogni  $i$ .

Sia per assurdo  $I = [x+1, x+3l_i]$  un intervallo che non contiene buchi lunghi  $i$ , se  $x < -l_i$ , allora poiché  $A$  è a valori non negativi  $I$  contiene un intervallo lungo  $l_i$  e  $i \geq l_i$  perché  $l_i$  è strettamente crescente. Se invece  $x > -l_i$  allora  $I$  contiene  $2l_i$  valori non negativi, dunque poiché  $L_i \leq l_i$ , contiene un intervallo  $J$  lungo  $l_i$  tale che esiste un  $j \geq i$  per cui  $J$  sta tutto dentro il traslato di  $I_j$ ,

ovvero  $A \cap J = (I_j + L_j) \cap J = (I_j \cap (J - L_j)) + L_j$  che contiene un buco lungo  $i$  per costruzione. Chiaramente  $BD(A) \geq \lim_i |I_i| l_i^{-1} > 4^{-1}$ , anzi addirittura  $\bar{d}(A) \geq \limsup_n L_{n+1}^{-1} \sum_{i=1}^n |I_i| > 4^{-1} \not\leq$ .

2. Si consideri l'insieme  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 \cdot 10^k \leq x < 10^{k+1}\}$ , chiaramente  $\bar{d}(A) \geq 10^{-1}$  ma per ogni  $k$  si ha  $[10^k, 9 \cdot 10^k - 1] \subset A^c$  cioè  $A$  non è sintetico.

### 3.4 Esercizio 16

Dimostrare che un funzione  $f$  tale che per ogni infinitesimo  $\epsilon$ ,  $f(x + \epsilon) \sim f(x)$  è continua.

Sia  $x_i \rightarrow x$  un qualunque successione che tende ad  $x$ . Supponiamo per assurdo che  $f(x_i) \not\rightarrow f(x)$ , equivalentemente  $x_i$  ammette una sottosuccessione  $x_{i_j}$  tale per cui esiste  $\epsilon > 0 : |f(x_{i_j}) - f(x)| > \epsilon$  per ogni  $j$ . Sia  $[\sigma]$  tale che  $\sigma(j) = x_{i_j} - x$ .  $[\sigma]$  è un infinitesimo, dunque ponendo  $\epsilon = [\sigma]$  si ha  $|f(x + \epsilon) - f(x)| < * \epsilon$ , ovvero l'insieme  $A$  degli indici  $j : |f(x_{i_j}) - f(x)| < \epsilon$  appartiene a un ultrafiltro, in particolare non è vuoto  $\not\leq$ .

## 4 25/10/2024

### 4.1 Esercizio 17

Dimostrare che data una successione reale  $(a_n)_n$  si ha  $\lim_n a_n = l \iff \forall \mathcal{V} \in * \mathbb{N} \setminus \mathbb{N} a_{\mathcal{V}} \sim l$

Innanzitutto prendiamo un ultrafiltro non principale sui naturali  $U$  e definiamo

$$* \mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{U}$$

e osserviamo che se  $[\sigma]$  è un ipernaturale infinito e  $A \in U$  allora  $\sigma(A)$  è illimitato.

$\boxed{\implies}$  Supponiamo per assurdo che esista  $\mathcal{V} = [\sigma]$  ipernaturale infinito tale che  $a_{\mathcal{V}} - l$  non è infinitesimo, allora per un qualche  $r$  reale positivo si ha  $|a_{\mathcal{V}} - l| > r$ , da cui esiste  $A \in U$  tale che per ogni  $x \in A$   $a_{\sigma(x)} - l > r$ , ovvero  $\forall x \in \sigma(A) |a_x - l| > r$  e poiché  $\sigma(A)$  è illimitato si ottiene l'assurdo  $a_x \not\rightarrow l \not\leq$

$\boxed{\impliedby}$  Sia per assurdo  $a_n \not\rightarrow l$  allora  $a_n$  ammette una sottosuccessione  $a_{n_i}$  tale per cui esiste  $a_{n_i} \rightarrow l_0 \neq l$ . Poiché  $\mathcal{V} = [i \mapsto n_i]$  è ipernaturale infinito si ha  $a_{\mathcal{V}} - l$  infinitesimo per ipotesi, cioè per ogni  $r \in \mathbb{R}$  si ha  $|a_{\mathcal{V}} - l| < *r$ , da cui l'assurdo  $|a_{n_i} - l| < r$  per infiniti  $i$ .

### 4.2 Esercizio 18

Sia  $a_n$  una successione reale. Mostrare che i limiti delle successioni di  $a_n$  che ammettono limiti coincidono con il valore di  $a_n$  valutata su ipernaturali non finiti. Cioè  $\{l \mid \exists n_i \rightarrow \infty : \lim_i a_{n_i} = l\} = \{st(a_{\mathcal{V}}) \mid \mathcal{V} \text{ è ipernaturale infinito}\}$ .



□ Sia  $\lim_i a_{n_i} = l$ . Consideriamo la successione  $b_i = a_{n_i}$  e i numeri iper-naturali infiniti  $\mathcal{V}_1 = [Id_{\mathbb{N}}]$  e  $\mathcal{V}_2 = [i \mapsto n_i]$ . Per l'esercizio precedente si ha che  $\lim_i b_i = st(b_{\mathcal{V}_1}) = st(a_{\mathcal{V}_2})$ .

□ Sia  $\mathcal{V} = [\sigma]$  un ipernaturale infinito tale che  $a_{\mathcal{V}}$  è finito.  $a_{\mathcal{V}} - {}^*st(a_{\mathcal{V}})$  è infinitesimo, allora per ogni  $r$  reale positivo  $a_{\mathcal{V}} - {}^*st(a_{\mathcal{V}}) < r$  cioè  $|a_{\sigma(n)} - st(a_{\mathcal{V}})| < r$  per ogni  $n \in A_r$  per un qualche  $A_r \in U$ . Allora presa  $n_i$  tale che  $n_i \in \sigma(A_{i-1})$ , per ogni reale positivo  $r$  per ogni naturale  $i$  si ha  $|a_{n_i} - st(a_{\mathcal{V}})| < r$  definitivamente cioè  $\lim_i a_{n_i} = st(a_{\mathcal{V}})$ .

## 5 30/10/2023

### 5.1 Esercizio 19

Trovare  $A, B \subset \mathbb{Z}$  con densità asintotica superiore positiva tali che  $A \oplus B$  non sia sintetico. Sia dunque  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [6^i, 2 \cdot 6^i)$ ,  $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [5 \cdot 6^i, 6^{i+1})$ , la tesi si ottiene osservando che per ogni  $i$  si ha  $[2 \cdot 6^i, 3 \cdot 6^i) \cap B \oplus A = \emptyset$ . Infatti presi  $a < b$  con  $a \in [6^i, 2 \cdot 6^i)$  e  $b \in [5 \cdot 6^j, 6^{j+1})$  si deve avere  $i \leq j$  dunque  $a < 2 \cdot 6^j$  da cui  $b - a \in [3 \cdot 6^j, 6^{j+1})$  che è disgiunto da  $[2 \cdot 6^k, 3 \cdot 6^k)$  per ogni  $k$ .

### 5.2 Esercizio 20

Data  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $U$  ultrafiltro sui naturali dimostrare  $f_*(U) = \{A \subset \mathbb{N} \mid f^{-1}[A] \in U\}$  è un ultrafiltro generato da  $\{f(A) \mid A \in U\}$  e che  $f_*(\bigsqcup_{\alpha} U_{\alpha}) = \bigsqcup_{\alpha} f_*(U_{\alpha})$ .

Che è un ultrafiltro segue dal fatto che anche  $U$  lo è. Vediamo il fatto sui generatori: ovviamente per ogni  $A \in U$  si ha  $f^{-1}[f[A]] = A \in U$  quindi  $f(A) \in f_*(U)$ . Viceversa preso  $A \in f_*(U)$  si ha che  $A$  è un sovrainsieme di  $f[f^{-1}[A]]$ . Per quanto riguarda l'ultimo fatto si osserva che se  $[\sigma] \in {}^*A$  allora  $[f \circ \sigma] \in {}^*f[A]$ .

### 5.3 Esercizio 21

$f \equiv_U g \implies f_*(U) = g_*(U)$

Sia  $C \in U$  su cui  $f$  e  $g$  coincidono, allora preso  $B = f(C) \in F := \{f(A) \mid A \in U\}$  si ha  $B \supset f(C \cap A) = g(C \cap A) \in G := \{g(A) \mid A \in U\}$ , e viceversa, cioè  $F$  e  $G$  generano lo stesso filtro quindi per l'esercizio precedente si ha  $f_*(U) = g_*(U)$ .

## 6 6/11/2023

### 6.1 Esercizio 22

Dimostrare che né l'insieme dei cubi né quello dei quadrati sono dei  $\Delta$ -set.

Siano  $X = \{x_1 < x_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ ,  $Y = X \oplus X$ . Si deve avere che in  $Y$  esistono coppie di numeri arbitrariamente grandi a distanza  $x_2 - x_1$  (ovvero  $x_i - x_2$  e  $x_i - x_1$ ), il che non accade nell'insieme dei cubi (né in quello dei quadrati)

poiché la distanza minima fra due cubi (o due quadrati) maggiori di  $M$  tende all'infinito per  $M$  che va all'infinito.

## 6.2 Esercizio 23

Nel modello dell'ultrapotenza  ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U$  non vale il  $\mathfrak{c}^+$  - *enlargement*.

Osserviamo preliminarmente che il modello ha cardinalità uguale a  $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$  dunque prendiamo  $f : \omega_\alpha \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  surgettiva con  $\aleph_\alpha = \mathfrak{c}$ . Costruiamo ricorsivamente  $(A_\beta)_\beta$  una  $\omega_\alpha$  successione di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  con la FIP:  $A_0 = \mathbb{R}$ ,  $A_{\beta+1} = A_\beta \setminus \sigma_\beta[\mathbb{N}]$  dove poniamo (usando scelta)  $[\sigma_\beta] = f(\beta)$ , e  $A_\lambda = \bigcap_{\beta \in \lambda} A_\beta$  quando  $\lambda$  è ordinale limite. Chiaramente  $f(\beta) \notin {}^*A_\gamma$  per  $\gamma > \beta$ . Inoltre la suddetta successione ha la FIP perché a ogni passo togliamo una quantità numerabile, cioè  $A_\beta = A_0 \setminus (\bigcup_{\gamma \in \beta} \sigma_\gamma[\mathbb{N}])$ , ma  $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$  dunque  $|\bigcup_{\gamma \in \beta} \sigma_\gamma[\mathbb{N}]| = \mathfrak{c}$  (necessario affinché  $A_\beta = \emptyset$ ) se e solo se  $\beta = \alpha$ . Propriamente la FIP segue osservando che la successione è decrescente per inclusione.

## 7 8/11/2023

### 7.1 Esercizio 23

Dato  $A \subset \mathbb{N}$  e  ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}/U$  il modello dell'ultrapotenza si dimostri che  $\exists \xi, \eta, \zeta \in {}^*A : \xi + \eta = \zeta \iff \exists x, y, z \in A : x + y = z$

La freccia verso sinistra è triviale poiché  ${}^*x + {}^*y = {}^*z$  e  ${}^*x, {}^*y, {}^*z \in {}^*A$ . Dimostriamo la freccia verso destra, scegliamo  $\sigma_{\mathcal{V}} \in {}^*\mathbb{N}A : [\sigma_{\mathcal{V}}] = \mathcal{V}$  al variare di  $\mathcal{V}$  tra  $\xi, \eta, \zeta$ . Sia  $B \in U$  su cui  $\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_\zeta$ , allora preso  $b \in B$  ponendo  $x = \sigma_\xi(b)$ ,  $y = \sigma_\eta(b)$ ,  $z = \sigma_\zeta(b)$  si ha la tesi.

### 7.2 Esercizio 24

1.  $\mathcal{O}_{A \cap B} = \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B$
2.  $\mathcal{O}_{A \cup B} = \mathcal{O}_A \cup \mathcal{O}_B$
3.  $\mathcal{O}_{A^c} = \mathcal{O}_A^c$

1. L'inclusione verso sinistra si ha per chiusura degli ultrafiltri per sovrainsiemi, l'inclusione verso sinistra si ha per chiusura per intersezione.
2. L'inclusione verso sinistra è dovuta alla seguente proprietà: dato  $U$  ultrafiltro se  $A \cup B = C \in U$  allora  $A \in U \vee B \in U$ . L'inclusione verso sinistra si ha per chiusura degli ultrafiltri per sovrainsieme.
3. Segue dalla seguente proprietà: dato  $U$  ultrafiltro su  $X$ , dato  $A \subset X$  si ha  $A \in U \iff A^c \notin U$ , da cui deduciamo  $U \in \mathcal{O}_{A^c} \iff A^c \in U \iff A \notin U \iff U \notin \mathcal{O}_A \iff U \in \mathcal{O}_A^c$

## 8 13/11/2023

### 8.1 Esercizio 25

Dimostrare Tychonoff con la caratterizzazione nonstandard.

Siano  $X_i$  spazi topologici compatti con  $i \in I$ . Chiamiamo  $X = \prod_{i \in I} X_i$  e costruiamo il modello non-standard  ${}^*X$  su un insieme di indici  $J$  abbastanza grande da far valere la proprietà del  $\kappa$ -enlargment dove  $\kappa$  è la cardinalità di una base di  $X$ . In questo modo vale la caratterizzazione non standard di compatto. Notiamo che ogni spazio  $X_i$  ammette una base di cardinalità di al più  $\kappa$ . Sia  $\xi \in {}^*X$ , si ha  $\xi = [(y_j)_{j \in J}]$  con  $y_j \in X$  al variare di  $j$  in un insieme di indici. Dunque  $y_j = (y_j^i)_{i \in I}$ , si consideri  $\xi_i = (y_j^i)_{j \in J} \in {}^*X_i$ , poiché  $X_i$  compatto, poiché vale il  $\kappa$ -enlargment,  $\exists z_i \in X_i$  tale che  $\xi_i \in \mu(z_i)$ . Dunque, chiamato  $z = (z_i)_{i \in I}$ , si ha  $\xi \in \mu(z)$ , infatti un qualunque intorno  $U$  di  $z$  è intersezione finita di controimmagini tramite le proiezioni di intorni di  $z_i$ , e dato che un ultrafiltro è chiuso per intersezione finita si ha la tesi.

### 8.2 Esercizio 26

Indichiamo con  ${}^*X$  un modello non standard di  $X$ , costruito con un ultrafiltro  $\mathcal{U}$ , tale da avere il  $\kappa^+$ -enlargment dove  $\kappa = \aleph_\alpha$  è la cardinalità di una base di  $X$ .

1.  $f : X \rightarrow Y$  è continua in  $x \iff \xi \sim {}^*x \rightarrow {}^*f(\xi) \sim {}^*f({}^*x)$ .
  2. Siano  $X, Y$  due spazi metrici. Osserviamo che il modello non standard  $({}^*X, {}^*d)$  di uno spazio metrico  $(X, d)$  ammette una distanza non standard  ${}^*d : {}^*X^2 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ . Presi  $\xi, \eta \in {}^*X$  diciamo  $\xi \sim \eta$  se  ${}^*d(\xi, \eta) < 1/n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .  
Sia  $f : X \rightarrow Y$  allora  $f$  è uniformemente continua  $\iff \xi \sim \eta \rightarrow {}^*f(\xi) \sim {}^*f(\eta)$
  3.  $f : K \rightarrow X$  continua con  $K$  spazio metrico compatto e  $X$  spazio metrico è uniformemente continua
1.  $\boxed{\implies}$  Sia  $V$  un intorno di  $y = f(x)$ , vogliamo mostrare che dato  $\xi \sim {}^*x$  si ha  ${}^*f(\xi) \in {}^*V$ . Sia  $U$  un intorno di  $x$  tale che  $f[U] \subset V$ . Sia  $\xi = [(\xi_i)]$ , sia  $A$  un insieme di indici che appartiene all'ultrafiltro che testimonia che  $\xi \in {}^*U$ , cioè tale che per ogni  $i \in A$  si ha  $x_i \in U$ , allora per ogni  $i \in A$  si ha  $f(\xi_i) \in V$  dunque  ${}^*f(\xi) \in {}^*V$ .
- $\boxed{\impliedby}$  Sia per assurdo  $f$  discontinua in  $x$ , sia  $\{U_i\}_{i \in \omega_\alpha}$  un sistema fondamentale di intorni di  $x$  (si può ottenere intersecando una base di  $X$  con l'insieme degli intorni di  $x$  sostituendo eventualmente l'insieme vuoto con un intorno qualunque). Poiché  $f$  è discontinua esiste  $V$  intorno di  $y = f(x)$  tale che per ogni  $U$  intorno di  $x$  si ha  $f[U] \setminus V \neq \emptyset$ . Allora sia per  $\kappa^+$ -enlargment  $\eta = [(\eta_i)_{i \in I}] \in {}^*Y$  tale che  $\eta \in \bigcap_{i \in \omega_\alpha} {}^*U_i \setminus V$ , scegliamo  $\xi = [(\xi_i)_{i \in I}]$  con  $f(\xi_i) = \eta_i$  dunque, dato che  $\eta = {}^*f(\xi) \notin {}^*V$ , si ha l'assurdo  $\xi \sim {}^*x \wedge {}^*f(\xi) \not\sim {}^*f({}^*x)$ .

2.  $\boxed{\implies}$  Sia  $\xi = [(\xi_i)] \sim \eta = [(\eta_i)]$ , sia  $n \in \mathbb{N}$ , vogliamo mostrare che  ${}^*f(\eta) \in {}^*B({}^*1/n, f(\xi)) := \{\zeta \in {}^*Y \mid {}^*d({}^*f(\xi), \zeta) < 1/n\}$ . Sia per uniforme continuità  $r$  tale che  $f[B(r, x)] \subset B(1/n, f(x))$ . Sia  $A \in \mathcal{U}$  un insieme di indici tali che  $d(\xi_i, \eta_i) < r$  per ogni  $i \in A$ , allora per ogni  $i \in A$  si ha  $d(f(\eta_i), f(\xi_i)) < 1/n$  da cui la tesi.
- $\boxed{\impliedby}$  Supponiamo per assurdo esista un raggio  $R \in \mathbb{R}$  tale per cui esistano  $x_n : f[B(1/n, x_n)] \not\subset B(R, f(x_n))$ . Dato che per il punto precedente  $f$  è continua possiamo assumere gli  $x_i$  tutti diversi. Chiamiamo  $U_n = B(1/n, x_n) \setminus f^{-1}[B(R, f(x_n))]$  e  $E_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}, i > n} \{x_i\}$ . Sia per  $\kappa^+$ -enlargement  $\xi = [(\xi_i)] \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^*E_n$ . Scegliamo  $\eta = [(\eta_i)]$  in modo tale che, se esiste  $n \in \mathbb{N} : \xi_i = x_n$ , allora  $\eta_i \in U_n$ . Per disuguaglianza triangolare si ha  $d(f(\eta_i), f(\xi_i)) > R$  per quasi tutti gli  $i$ , cioè  ${}^*f(\eta) \not\sim {}^*f(\xi)$ . Tuttavia preso  $n \in \mathbb{N}$  abbiamo  $\xi \in {}^*E_n$  cioè per quasi tutti gli  $i$  si ha  $\xi_i = x_j$  per un certo  $j > n$  dipendente da  $i$ , allora per costruzione  $\eta_i \in U_j$  quindi  $d(\xi_i, \eta_i) < 1/j < 1/n$ , cioè  $\xi \sim \eta$ , il che contraddice le ipotesi.
3. Siano  $\eta, \xi \in {}^*K$  con  $\eta \sim \xi$ , vogliamo mostrare  ${}^*f(\eta) \sim {}^*f(\xi)$ . Per compattezza esistono  $x, y \in K : \eta \sim {}^*x \wedge \xi \sim {}^*y$ , inoltre poiché per transitività si ha  ${}^*x \sim {}^*y$  si deve avere  $x = y$ . Per continuità dunque  ${}^*f(\eta) \sim {}^*f({}^*x) \sim {}^*f(\xi)$ .

## 9 15/11/2023

### 9.1 Esercizio 27

Dimostrare che esistono  $(x_n), (y_n)$  tali che  $FS(x_n) \cap FS(y_n) = \emptyset$   
 Siano  $x_0 = 1, y_0 = 2$  e definiamo ricorsivamente  $x_{n+1} = \max(FS(y_0, \dots, y_n)) + 1$   
 e  $y_{n+1} = \max(FS(x_0, \dots, x_n)) + 1$ . Se per assurdo esistesse  $x_{i_1} + \dots + x_{i_n} =$   
 $y_{j_1} + \dots + y_{j_m}$  con  $i_1 < \dots < i_n, j_1 < \dots < j_m$  avremmo per costruzione  
 l'assurdo  $i_n \leq j_m \wedge j_m < i_n$ .

### 9.2 Esercizio 28

Dimostrare che  $\mathbb{H} = \overline{\{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \mid \mathcal{U} \text{ è idempotente}\}}$   
 Sicuramente  $\mathcal{H}$  è chiuso in quanto un ultrafiltro contenente  $A$  che non è un  $IP$ -set è contenuto nell'aperto  $\mathcal{O}_A$  che è diusgiunto da  $\mathcal{H}$ . Adesso dobbiamo mostrare che preso  $X = \{x_1 < \dots < x_n < \dots\} \subset \mathbb{N}$  infinito esiste un ultrafiltro idempotente che contiene  $FS(X)$ . Sia  $X_i = \{x_n \mid n > i\}$  osserviamo che gli insiemi  $FS(X_i)$  hanno la  $FIP$  dunque  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{X_i}$  è non vuoto e essendo chiuso per somma e topologicamente, dotato della topologia di sottospazio è un semi-gruppo topologico destro compatto di hausdorff, dunque per il lemma di Ellis contiene un idempotente.

### 9.3 Esercizio 29

Dimostrare che

1.  $\mathcal{U}$  idempotente  $\implies k\mathbb{N} \in \mathcal{U}$  per ogni  $k$ .
2. Non esistono idempotenti che contengono i quadrati
3. Sia  $\mathcal{U}$  idempotente allora per ogni  $A \in 2\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$  esistono  $a, d$  tali che  $a, a + d, a + 2d \in A$
4.  $\mathcal{U}$  idempotente se e solo se per ogni  $A \in \mathcal{U}$  esiste  $a \in A$  tale che  $A - a \in \mathcal{U}$ .
5.  $X = (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \oplus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$  è nowhere dense in  $\beta\mathbb{N}$ .
1. Mostriamo che il complementare di  $k\mathbb{N}$  non può essere un  $IP$ -set. Sia  $X$  infinito, allora  $FS(X)$  contiene multipli di  $k$  infatti per il principio dei cassetti contiene una quantità infinita di numeri congrui a  $h \pmod k$ , dunque la somma di  $k$  di questi numeri produce un numero multiplo di  $k$ .
2. Infatti i quadrati non sono  $IP$ -set.
3. Sia  $\mathcal{U}$  idempotente allora per ogni  $A \in 2\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$  esistono  $a, d$  tali che  $a, a + d, a + 2d \in A$
4. Se  $\mathcal{U}$  è idempotente la tesi è ovvia poiché per ogni  $A \in \mathcal{U}$  si ha  $\hat{A} := \{n | A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ . Dimostriamo l'implicazione opposta, sia  $A \in \mathcal{U}$ , mostriamo che  $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ , la tesi segue per massimalità degli ultrafiltri.
5. Osserviamo che  $X$  non contiene ultrafiltri principali ma ogni aperto di base (quindi tutti gli aperti) ne contengono almeno uno.

## 10 20/11/2023

### 10.1 Esercizio 30

1.  $A \subset \mathbb{N} \rightarrow \bar{A} = \mathcal{O}_A$ ;
2.  $X$  clopen se e solo se  $X = \mathcal{O}_A$  per qualche  $A$ ;
3. Sia  $U$  un aperto: allora  $\bar{U} = \mathcal{O}_{U \cap \mathbb{N}} = \overline{U \cap \mathbb{N}}$ : quindi la chiusura di un aperto è ancora un aperto. Un insieme con questa proprietà si dice estremamente disconnesso;
4.  $U, V$  aperti: allora  $\bar{U} \cap \bar{V} = \overline{U \cap V}$ ;
5. Se  $U$  è intorno di  $\mathcal{U}$  allora  $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ , ma non vale il viceversa;

*Proof.*

1. Sia  $U \in \bar{A}$  allora esiste  $B \in \mathcal{U}$  tale che esiste  $a \in A \cap B$ , dunque  $a \in \bar{A}$ .

2. Essendo  $X$  aperto scriviamo  $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{A_i}$ . Sia  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Se esiste  $J \subset I$  finito tale che  $A = \bigcup_{i \in J} A_i$  allora  $X = \bigcup_{i \in J} \mathcal{O}_{A_i} = \mathcal{O}_A$ . Se non esiste un tale insieme finito di indici dimostriamo che  $X$  non può essere chiuso. Chiaramente  $\mathcal{O}_A$  è la chiusura di  $X$ , infatti per ogni  $B \in \mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$  esiste  $i$  tale che  $B \cap A_i$  è non vuoto dunque  $\mathcal{O}_B \cap \mathcal{O}_{A_i}$  è non vuoto. Tuttavia l'insieme  $\{A \setminus A_i\}_{i \in I}$  ha la FIP, altrimenti esisterebbe l'insieme  $J$  prima menzionato, dunque può essere esteso a un ultrafiltro  $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$  il quale non può appartenere a nessun  $\mathcal{O}_{A_i}$  per alcun  $i$ .
3. Sia  $\mathcal{U} \in \overline{U}$ , mostriamo che  $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{U \cap \mathbb{N}}$ , l'altra inclusione è ovvia dato che  $\mathcal{O}_{U \cap \mathbb{N}} = \overline{U \cap \mathbb{N}}$  e  $U \cap \mathbb{N} \subset U$ . Sia  $\mathcal{O}_A$  un intorno aperto di  $\mathcal{U}$ , dobbiamo mostrare che  $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_{U \cap \mathbb{N}} \neq \emptyset$ . Dato che  $\mathcal{U} \in \overline{U}$  e  $U$  aperto, esiste un aperto di base non vuoto  $\emptyset \neq \mathcal{O}_{A'} \subset U \cap \mathcal{O}_A$ . Dunque  $\mathcal{O}_{A'} \subset \mathcal{U} \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ .
4. L'inclusione  $\supset$  è sempre vera, dimostriamo  $\subset$ . Prendiamo  $\mathcal{U} \in \overline{U} \cap \overline{V}$ , e dimostriamo  $\mathcal{U} \in \overline{U \cap V}$ . Per la caratterizzazione della chiusa di aperti del punto precedente abbiamo che  $U \cap \mathbb{N}, V \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$  e per la definizione di filtro  $U \cap V \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$  per cui, sempre usando il punto precedente abbiamo che  $\mathcal{U} \in \overline{U \cap V}$ .
5. Sia  $U'$  aperto tale che  $\mathcal{U} \in U' \subset U$ . Dato che  $\mathcal{U} \in U' = \overline{U'}$  si ha che  $U' \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$  per il punto precedente, dunque a maggior ragione  $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ . Come controesempio si consideri  $\mathbb{N}$ , si ha che  $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$  per ogni ultrafiltro  $\mathcal{U}$ , tuttavia  $\mathbb{N} \neq \beta\mathbb{N}$ , infatti esistono ultrafiltri non principali.

□

## 10.2 Esercizio 31

Se  $X \subset \beta\mathbb{N}$  allora  $\overline{X} = \hat{U} := \{\mathcal{U} \mid \mathcal{F}(X) \subset \mathcal{U}\}$ , dove  $\mathcal{F}(X)$  è il filtro  $\bigcap_{\mathcal{V} \in X} \mathcal{V}$ .

*Proof.*  $\boxed{\subset}$  Sia  $\mathcal{U} \in \overline{X}$ , sia  $A \in \mathcal{V}$  per ogni  $\mathcal{V} \in X$ , dobbiamo mostrare che  $A \in \mathcal{U}$ . Dato che  $\mathcal{O}_A \supset X$  è chiuso allora  $\mathcal{U} \in \overline{X} \subset \mathcal{O}_A$ .

$\boxed{\supset}$  Sia  $\mathcal{U} \in \hat{U}$ , sia  $A \in \mathcal{U}$ , dobbiamo mostrare che esiste  $\mathcal{V} \in X$  tale che  $A \in \mathcal{V}$ , e per definizione della topologia di  $\beta\mathbb{N}$  otteniamo la tesi. Se per assurdo così non fosse allora  $A^c \in \mathcal{V}$  per ogni  $\mathcal{V}$  dunque  $A^c \in \mathcal{U}$  poiché  $\mathcal{U} \in \hat{X}$ . □