A.A. 2018/2019
Equazioni alle Derivate Parziali

Nicola Visciglia

Appunti completi del corso

Matteo Stefanini

Questi appunti sono stati presi direttamente a lezione e non sono stati revisionati quindi è molto probabile che siano presenti degli errori. Se volete potete segnalarmi quelli presenti e vi manderò nel più breve tempo possibile la versione rimodificata. L'indice è stato creato copiandolo dal registro delle lezioni. Spero che vi siano d'aiuto e buono studio!

Indice

LEZIONE 01

Titolo nota 25/02/2019

DIFFERENZE TRA

ODE ⟵ $u(t) \in \mathbb{R}$ INCOGNITA, $t \in \mathbb{R}$ RELAZIONE DEL TIPO

$$f(t, u, \dots, u^{(n)}(t)) = 0$$

PDE ⟶ $u(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$F(x, u(x), \nabla u, D^2 u(x), \dots, D^n u(x)) = 0$$

OBBIETTIVO: RICERCA DELLE SOLUZIONI DI P.D.E

STORICAMENTE ⟶ ODE ⟶ LEGATE ALLA LEGGE DI NEWTON $\ddot{x} = \vec{F}(x)$

STORICAMENTE ⟶ PDE ⟶ PROBLEMI FISICI

QUANTITÀ DI CALORE COME EVOLVE

DIPENDENTE $u(\overbrace{t, x, y, z}^{\text{VARIABILI IND.}})$

ASSUMENDO LA LEGGE DI FOURIER

$$\partial_t u - \partial^2_x u - \partial^2_y u - \partial^2_z u = 0$$

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \qquad \underline{\text{EQUAZIONE DEL CALORE}}$$

$$\partial^2_t u - \Delta u = 0 \qquad \underline{\text{EQUAZIONE DELLE ONDE}}$$

<u>ESEMPIO IN $\mathbb{C}$</u> $u(x+iy)$ è OLOMORFA $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = 0}_{\text{EQUAZIONE DI CAUCHY RIEMANN}}$

$$u(x+iy) = u(x, y)$$

CERCHIAMO DI CAPIRE LA PIÙ FACILE PDE:

- 2 VARIABILI VANNO PRESE
- SOLO DERIVATE PRIME

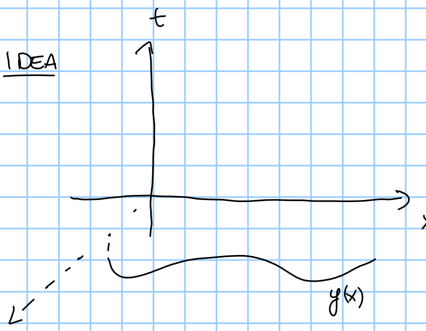
$\}$ P.D.E DI ORDINE 1 IN 2 VARIABILI

$$\boxed{f(\underset{\Omega \subseteq \mathbb{R}^2}{x}, \underset{\mathbb{R}}{u}, \underset{\mathbb{R}^2}{\nabla u}) = 0}$$

TEORIA DELLE CARATTERISTICHE

POSSIAMO COLLEGARE UNA P.DE A UN SISTEMA DI ODE.

IDEA



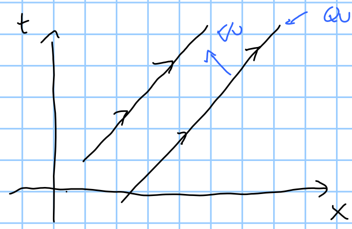
$$\boxed{\partial_t u + \partial_x u = 0}$$ EQUAZIONE DEL TRASPORTO

SOL SEMPLICI: $u \equiv$ COSTANTE

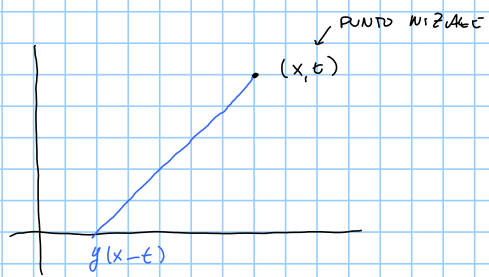
VEDIAMO COSA SUCCEDE SE AGGIUNGIAMO UNA CONDIZIONE DI CAUCHY

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

ANALISI GEOMETRICA $\nabla_{(t,x)} u \cdot (1,1) = 0$ IL ∇ È ORTOGONALE A $(1,1)$



QUI SOPRA LA u È COSTANTE



ALLORA $u(t,x) = g(x-t)$

VEDIAMO COME GENERALIZZARE: n VARIABILI

X ESERCIZIO

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_{x_1} u + \dots + \partial_{x_n} u \\ \partial(0,x) = g(x) \end{cases}$$

TROVARE LE SOLUZIONI

DOVREBBE ESSERE $g\left(t - \frac{x}{n}\right)$

COMPLICANDO

$$\begin{cases} a(t,x)\,\partial_t u + a_1(t,x)\,\partial_{x_1} u + \dots + a_n(t,x)\,\partial_{x_n} u = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

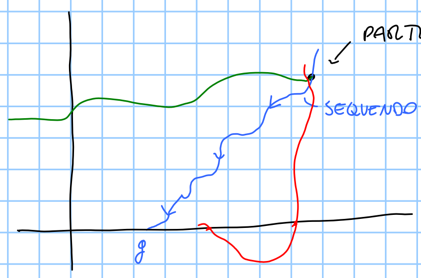
DICO CHE ESISTE UN SISTEMA DI ODE EQUIVALENTE

CERCO $\left(t(s), x_1(s), \dots, x_n(s)\right)$ CURVA NELLO SPAZIO (t, x)

SISTEMA DELLE CARATTERISTICHE ASSOCIATO ALL'EQ DEL TRASPORTO

$$(*)\quad \boxed{\begin{cases} \dot t(s) = a(t,x) \\ \dot x_1(s) = a_1(t,x) \\ \vdots \\ \dot x_n(s) = a_n(t,x) \end{cases}}$$

QUESTE CURVE NELLO SPAZIO (t,x) SONO IMPORTANTI DA STUDIARE PERCHÈ $u(t,x)$ SARÀ COSTANTE SU QUESTE CURVE



PARTO DA QUI

SEQUENDO LA CURVA TROVO QUELLO CHE VOGLIO

$\sim$ PROBLEMA 1: NON RITROVO LA g

$\sim$ PROBLEMA 2: POTREBBE NON ESSERCI UNICITÀ GLOBALE

<u>PROP</u> SE $\left(t(s), x_1(s), \dots, x_n(s)\right)$ RISOLVE $(*)$

$$\Rightarrow \quad u\left(t(s), x_1(s), \dots, x_n(s)\right) \equiv \text{COSTANTE}$$

<u>DIM</u> $\frac{d}{ds} u\left(t(s), \dots, x_n(s)\right) = \frac{d}{ds} u\left(t(s), x(s)\right) =$

$$= \partial_t u(t(s),x(s))\,\dot t(s) + \partial_{x_1} u(t(s),x(s))\,\dot x_1(s) + \dots + \partial_{x_n} u(t(s),x(s))\,\dot x_n(s) =$$

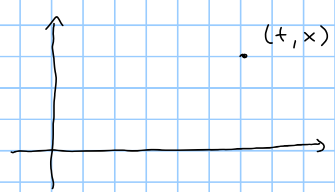
$$= \partial_t u(t(s),x(s))\,a(t(s),x(s)) + \partial_{x_1} u(t(s),x(s))\,a_1(t(s),x(s)) + \dots + \partial_{x_n} u(t(s),x(s))\,a_n(t(s),x(s)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(t(s), x(s)) \equiv \text{COSTANTE}$$

TORNANDO ALL'ESEMPIO SEMPLICE

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \qquad a(t,x) = 1 = a_1(t,x)$$

$$\begin{cases} \dot t(s) = 1 \\ \dot x(s) = 1 \end{cases}$$



<u>STEP 1</u> IMPONGO $(t(0), x(0)) = (t, x)$ FISSATO

<u>STEP 2</u> RISOLVO $\;t(s) = s + t$

FUNZIONE AL VARIARE DI s — VALORE FISSATO INIZIALE

$$x(s) = s + x$$

<u>STEP 3</u> VOGLIO VEDERE COSA SUCCEDE QUANDO $t(s) = 0$ PER USARE $u(0,x) = g(x)$

$$t(s) = 0 \iff s = -t \;\Rightarrow\; x(-t) = -t + x$$

QUINDI L'UNICO PUNTO SULL'ASSE X IN CUI LA U ASSUME LO STESSO VALORE DI $U(t,x)$ È $x-t \Rightarrow U(t,x) = g(x-t)$

ESEMPIO
$$\begin{cases} \partial_t U + x\,\partial_x U = 0 \\ U(0,x) = g(x) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot t(s) = 1 \\ \dot x(s) = x \\ t(0) = t \\ s(0) = x \end{cases} \rightsquigarrow U(t,x)$$

SPERO DI TROVARE

$$t(s) = s + t \qquad x(s) = x e^{s}$$

$\Rightarrow 0 = t(s) \iff s = -t$ UNICA INT. CON ASSE X OK

$x(-t) = x e^{-t} \to$ È L'X CERCATO SULL'ASSE X

$$\Rightarrow \boxed{U(t,x) = g(x e^{-t})}$$

PROBLEMA SITUAZIONI SEMPLICI DOVE QUESTO METODO NON AIUTA

ESEMPIO:
$$\begin{cases} t\,\partial_t U + \partial_x U = 0 \\ U(0,x) = g(x) \end{cases}$$

(OSS: SE AVESSI POSTO $U(t,0) = h(t)$ SAREBBE SOLO IL PROBLEMA DI PRIMA SCAMBIATO)

$$\begin{cases} \dot t(s) = t \\ \dot x(s) = 1 \\ t(0) = t \\ x(0) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t(s) = t e^{s} \\ x(s) = x + s \end{matrix}$$

PROBLEMA 1 $t(s) = 0$ NON HA SOLUZIONE SE $t \neq 0$

LE CURVE NON INTERSECANO L'ASSE X

DIMOSTRIAMO CHE IN GENERALE QUESTA EQ NON HA SOLUZIONE

SE L'EQ È VERIFICATA LO È ANCHE PER $t = 0$

$0 \cdot \partial_t U + \partial_x U = 0 \Rightarrow \partial_x U(0,x) = g'(x) = 0 \Rightarrow g$ È COSTANTE

SE $g =$ COSTANTE $\Rightarrow$ LA SOLUZIONE È QUELLA COSTANTE.

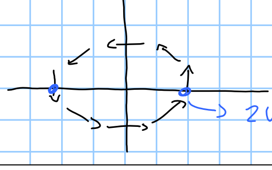
APPENA g NON È COSTANTE LE COSE SALTANO.

ESEMPIO
$$\begin{cases} -x\,\partial_t u(x) + t\,\partial_x u = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

PER ESERCIZIO: i) VEDERE CHE NON ESISTE SOL GLOBALE IN GENERALE

ii) SE $g(x)$ È PARI $\exists$ SOL GLOBALE.

IDEA GEOMETRICA IL CAMPO $(-x, t)$ HA ORBITE DEL TIPO



2 INTERSEZIONI

g NON PARI TROVO 2 INTERSEZIONI CON 2 VALORI DISTANTI

SE g È PARI IN QUEI 2 PUNTI VALE UGUALE QUINDI VA BENE.

ESEMPIO $\begin{cases} \partial_t u + i \partial_x u = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$ PUÒ ESISTERE UNA SOLUZIONE DEL PROBLEMA

(OVVIAMENTE $u(t,x) \in \mathbb{C}$)

IN GENERALE SE $g(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ NON HA SOLUZIONE

POICHÈ $u(t,x)$ È UN'ESTENSIONE OLOMORFA DI g. MA LE FUNZIONI OLOMORFE HANNO ZERI ISOLATI MENTRE QUALUNQUE PROLUNGAMENTO DELLA $g(x)$ NON PUÒ AVERE ZERI ISOLATI

QUINDI SERVE UNA $g(x)$ ANALITICA REALE PER AVERE SOLUZIONI

PARENTESI: FAMIGLIE DI PDE.

$\rightsquigarrow$ LINEAR PDE SE $F(x, u(x), \nabla u, \dots, D^\alpha u(x)) = \mathcal{L}(u)$

e $\begin{cases} \mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v) \\ \mathcal{L}(\lambda u) = \lambda \mathcal{L}(u) \end{cases}$

AD ESEMPIO EQ. DEL TRASPORTO.

$\rightsquigarrow$ NON LINEARI NEGLI ALTRI CASI.

ESERCIZIO: $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u - u^2 = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$

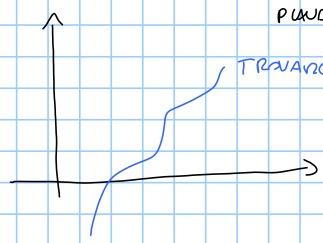
STUDIARE CON IL METODO DELLE CARATTERISTICHE

1) CALCOLARE LE CARATTERISTICHE
2) SOST. NELL'EQUAZIONE $u(t(s), x(s))$
3) OTTENERE UN'ODE IN $u(t(s), x(s))$ LA RISOLVO
4) TRARRE LE CONCLUSIONI

COSA CHE SEMPLIFICA: LA PARTE PRINCIPALE DELL'EQ. È $\partial_t u + \partial_x u$ È LINEARE E L'ALTRA PARTE $-u^2$ DIPENDE SOLO DA u E NON DALLE SUE DERIVATE

OBBIETTIVO (GENERALIZZANTE)

$$(*) \quad F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$$



PIANO DELLE X

TROVARE UNA CURVA

$x(s)$

$z(s) = u(x(s))$

$t(s) = \nabla u(x(s))$

DOMANDONE: SE LA u RISOLVE $(*)$ TROVO UN SISTEMA IN $\underset{x}{n} + \underset{z}{1} + \underset{t}{n}$ EQUAZIONI (LUI HA SCRITTO VARIABILI) PER $(x(s), z(s), t(s))$

FINE LEZIONE

SVOLGIMENTO ESERCIZI ASSEGNATI

1) $\begin{cases} -x\,\partial_t u(x) + t\,\partial_x u = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$

PER ESERCIZIO i) VEDERE CHE NON ESISTE SOL GLOBALE IN GENERALE

ii) SE $g(x)$ È PARI $\exists$ SOL GLOBALE.

i) PROVO CON IL METODO DELLE CARATTERISTICHE

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = -x(s) \\ \dot{x}(s) = t(s) \\ t(0) = t \\ x(0) = x \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i$$

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \qquad x = iy \qquad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\cos s + i \sin s)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix}}_{\varphi_1(s)} + i\underbrace{\begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}}_{\varphi_2(s)}$$

$$\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \sin s + c_2 \cos s \\ c_1 \cos s + c_2 \sin s \end{pmatrix} \qquad \text{SE } [0, 2\pi]$$

$$\begin{pmatrix} t(0) \\ x(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t(s) = -t \sin s + x \cos s \\ x(s) = t \cos s + x \sin s \end{cases}$$

PROVANDO A PORRE $t(s) = 0$

$$-t \sin s + x \cos s = 0 \qquad (\text{SUPPONENDO } t \neq 0)$$

$$\operatorname{tg} s = \frac{x}{t}$$ QUESTA EQUAZIONE HA 2 SOLUZIONI DISTINTE IN $[0, 2\pi]$

SUPPONIAMO AD ESEMPIO (t,x) NEL I QUADRANTE

$$s_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{t}\right) \qquad s_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{t}\right) + \pi$$

$$X(s_1) = t\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{t}\right)\right) + x\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{t}\right)\right) > 0$$

$$X(s_2) = t\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{t}\right)+\pi\right) + x\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{t}\right)+\pi\right) = -X(s_1) < 0$$

QUINDI SE $g(X(s_1)) \neq g(X(s_2))$ NON POSSO AVERE UNA SOL GLOBALE

ii) PER QUANTO VISTO SE g È PARI $g(X(s_1)) = g(-X(s_1)) = g(X(s_2))$

E QUINDI POSSO RESTARE SULLA CURVA CARATTERISTICA

PRESERVANDO LA CONDIZIONE AL CONTORNO $u(0\,x) = g(x)$

2)
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u - u^2 = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

CERCO LE CARATTERISTICHE
$$\begin{cases} \dot{t}(s) = 1 \\ \dot{X}(s) = 1 \\ t(0) = t \\ X(0) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} t(s) = s + t \\ X(s) = s + x \end{array}$$

$$u(s) = u(s+t,\, s+x) \Rightarrow \partial_t u + \partial_x u = \dot{u}(s)$$

QUINDI SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE OTTENGO

$$\dot{u}(s) = u^2(s)$$

$$u(s) = \frac{-1}{s+c} \qquad \text{QUANDO } t(s) = 0 \Rightarrow s = -t$$

$$\Rightarrow X(s) = x - t$$

$$u(-t) = g(x-t)$$

$$\Rightarrow g(x-t) = -\frac{1}{-t+c} \qquad \text{SE } g(x-t) \neq 0$$

$$c = t - \frac{1}{g(x-t)}$$

LEZIONE 02

Titolo nota 27/02/2019

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \qquad F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) \in \mathbb{R}$, $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^n$; x, z, p

POSSO VEDERE $F(x, z, p)$

CERCO $u(x)$ T.C. RISOLVE L'EQUAZIONE

__ESEMPIO__ $a(t,x)\,\partial_t u + b(t,x)\,\partial_x u = 0$

$$F(x, z, p) = a(t,x)\,p_t + b(t,x)\,p_x \quad \text{con } p = (p_t, p_x)$$

NELL'ESEMPIO CONSIDERATO PONENDO $\begin{cases} \dot{t}(s) = a(t,x) \\ \dot{x}(s) = b(t,x) \end{cases}$ SI OTTENGONO LE CURVE CARATTERISTICHE

LA COSA CHE RENDE SEMPLICE È LA LINEARITÀ DELLA F NELLE VARIABILI z E p

__ESEMPIO (NON LINEARE)__ $\partial_t u + u\,\partial_x u = 0 \leftarrow$ EQ DI BURGER

$$F(t, x, z, p_t, p_x) = \underbrace{p_t + z\,p_x}_{\text{EQ NON LINEARE}}$$

È QUASI LINEARE PERCHÈ È LINEARE A z FISSATO.

__FILOSOFIA GENERALE__

$$F(x, u, \nabla u) = 0$$

$$F(\underbrace{x}_{(x_1 \dots x_n)}, z, \underbrace{p}_{(p_1 \dots p_n)})$$

RIUSCIREMO A TROVARE UN SISTEMA ORDINARIO DI $2n+1$ EQUAZIONI DIFFERENZIALI CHE MI DIRANNO COME DEVONO ESSERE $x(t)$ $z(t)$ E $p(t)$ AFFINCHÈ

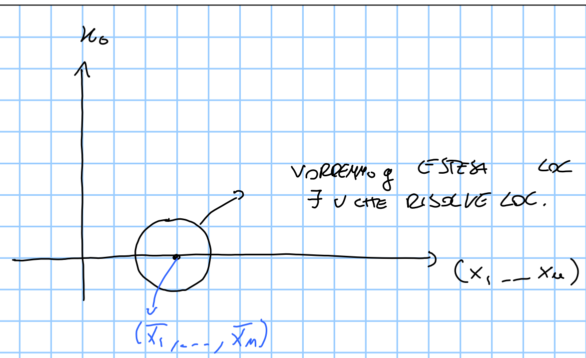
$$F(x(t), z(t), p(t)) = 0$$

__DEF__ DATA $F(x, z, p)$ DEFINIAMO $\Sigma_F = \{(x, z, p) : F(x, z, p) = 0\}$

__OSS__ SE $\Sigma_F = \emptyset$ ALLORA NON PUÒ ESISTERE UNA $u(x)$ CHE RISOLVE

NOTAZIONE $X = (x_0, x_1, \dots x_n)$

PRIVILEGIATA



VORREMMO g ESTESA LOC TALE CHE
$\exists\, u$ CHE RISOLVE LOC.

SUPPONIAMO DI CERCARE UNA SOL $u(x)$ tc

$$u(0, x_1, \dots x_n) = g(x_1 \dots x_n)$$

COSA DOBBIAMO RICHIEDERE PER SPERARE DI AVERE ALMENO UNA SOL LOC!

DOBBIAMO CHIEDERE $F\Big((0,\bar{x}),\ \underset{\substack{\parallel \\ u(0,\bar{x})}}{g(\bar{x})},\ ?\ ,\ \partial_{x_1} g(\bar{x}), \dots, \partial_{x_n} g(\bar{x})\Big)$

$? =$ CHI È LA CANDIDATA $\partial_{x_0} u(0,\bar{x})$?

DEVE ESSE UN VALORE CHE $\exists\, p_0$ tc $F\big((0,\bar{x}), g(\bar{x}), p_0, \partial_{x_1} g(\bar{x}), \dots, \partial_{x_n} g(\bar{x})\big) = 0$

CIOÈ DEVO STARE IN Σ_F

SE TROVO p_0 POI CERCHERÒ UNA CARATTERISTICA CHE SI EVOLVE PARTENDO DA QUEL PUNTO, MA SE IN QUEL PUNTO NON ESISTE p_0 NON HO SPERANZA DI PARTIRE

MA NON BASTA! DEVO GARANTIRMI CHE PER $x \in (x_1, \dots x_n)$ VICINI A $\bar{x}$ QUESTA CONDIZIONE SIA VERIFICATA (OVVERO TROVO UN p_0 QUINDI CONOSCO IL VALORE DI u e ∇u) SI FA CON IL TEO DEL DINI.

TEOREMA

SIA $\pi : \Sigma_F \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (AVEVA SCRITTO $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ MA C'È UN PROB. DIM.)

$$(x, z, p) \longrightarrow (x, z, p_1 \dots p_n)$$

i) SUPPONIAMO CHE $\left((0,\bar{x}), g(\bar{x}), \partial_{x_1} g(\bar{x}), \dots, \partial_{x_n} g(\bar{x})\right) \in \pi(\Sigma_F)$

$$\iff \exists\, p_0(\bar{x}) \text{ tc } \left((0,\bar{x}), g(\bar{x}), p_0(\bar{x}), \partial_{x_1} g(\bar{x}), \dots, \partial_{x_n} g(\bar{x})\right) \in \Sigma_F$$

ii) SUPPONIAMO INOLTRE $\partial_{p_0} F\left((0,\bar{x}), g(\bar{x}), p_0(\bar{x}), \partial_{x_1} g(\bar{x}), \dots, \partial_{x_n} g(\bar{x})\right) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ E UNA FUNZIONE $p_0 : \mathcal{B}^n(\bar{x}, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\text{tc } F\left((0,x), g(x), p_0(x), \partial_{x_1} g(x), \dots, \partial_{x_n} g(x)\right) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}^n(\bar{x}, \delta)$$

DIM BASTA USARE TEO DEL DINI E QUESTO CI DÀ ANCHE CHE $p_0(x)$ HA LA STESSA REGOLARITÀ DI F

OSS SE

$$\partial_t u + G\left(t, x, u(t,x), \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u\right) = 0 \quad \text{(PROBLEMI DI EVOLUZIONE)}$$

↓ (GIOCA IL RUOLO DI x_0)

$$F = p_0 + G(t, x, z, p_1 \dots p_n) = 0$$

LA CONDIZIONE È SEMPRE SODDISFATTA

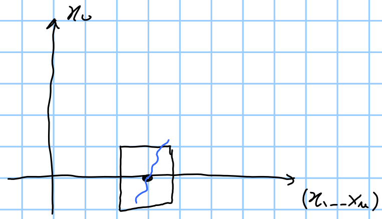
IN QUESTO CASO SPECIFICO HO ANCHE L'UNICITÀ.

DOMANDA SIA $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ $u(x)$ UNA SOL. SU $\mathcal{B}^{n+1}(0, \bar{x})$

RIESCO A TROVARE UNA CURVA $x(s) = (x_0(s), \dots, x_n(s))$

TALE CHE DETTA $z(s) = u(x(s))$

e $p(s) = \nabla u(x(s))$



IN MODO CHE SIANO COLLEGATE TRA LORO

DA UN SISTEMA DI ODE?

SE CI RIESCO BASTERÀ IMPORRE $(x(0), z(0), p(0)) = \left((0,\bar{x}), u(0,\bar{x}), \nabla u(0,\bar{x})\right)$

OSS STIAMO PROCEDENDO IN MODO EURISTICO: SUPPONIAMO DI CONOSCERE U(X) SOL.

NOTAZIONE: · DERIVATE RISPETTO A S

$$\dot{z}(s) = \dot{x}(s) \cdot \nabla_x u(x(s)) = \dot{x}(s) \cdot p(s)$$

$$\dot{p}_i(s) = \sum_{j=0}^{n} \dot{x}_j(s) \frac{\partial^2 u(x(s))}{\partial x_i \partial x_j} \qquad i = 0, \dots, n$$

SAPPIAMO CHE $F(x, u(x), \nabla u) = 0$

$$\Rightarrow \partial x_i \left[F(x, u(x), \nabla u) \right] = 0$$

PER RICORDARE CHE PRIMA VALUTO E POI DERIVO

$$\partial x_i F(x, u, \nabla u) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}(x, u(x), \nabla u(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

COSA NATURALE È IMPORRE $\boxed{\dot{x}_j(s) = \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s))}$

DA CUI $\boxed{\dot{p}_i(s) = -\frac{\partial F}{\partial x_i}(x(s), z(s), p(s)) - \frac{\partial F}{\partial z}(x(s), z(s), p(s)) \cdot p_i(s)}$

$$\boxed{\dot{z}(s) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s)) \cdot p_j(s)}$$

ABBIAMO OTTENUTO IL $\boxed{\text{SISTEMA DELLE CARATTERISTICHE}}$ ASSOCIATO AD $F(x, z, p)$ SI SCRIVE

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \nabla_p F(x(s), z(s), p(s)) \\ \dot{z}(s) = \nabla_p F(x(s), z(s), p(s)) \cdot p(s) \\ \dot{p}(s) = -\nabla_x F(x(s), z(s), p(s)) - \partial_z F(x(s), z(s), p(s))\, p(s) \end{cases}$$

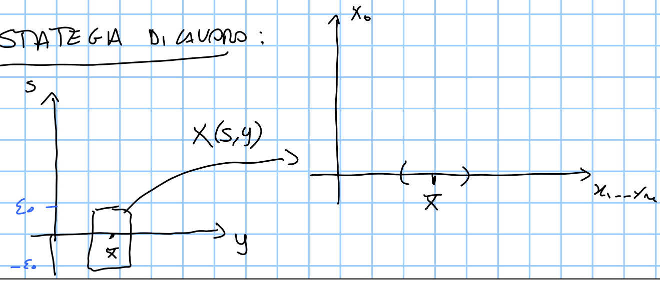
NON È UN PRODOTTO SCALARE MA SOLO PRODOTTO

SE LA F È ABB REGOLARE TIPO C^2 IN MODO CHE RHS SIA LIP.

DOMANDE: i) RISOLVENDO IL SISTEMA $x(s)$ È UN BUON CAMBIAMENTO DI VARIABILI CHE MI DA IL DIFFEO LOCALE?

ii) SE RIUSCISSI A INVERTIRE È VERO CHE LA $u(x)$ CHE TROVO È SOLUZIONE?

STRATEGIA DI LAVORO:



$\forall y \in B^n(\bar{x}, \delta) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \longrightarrow X(s, y)$

È DEFINITA DAL SISTEMA DELLE CARATTERISTICHE

DOVREMMO VERIFICARE CHE $X(S,y)$ È UN DIFFEO LOCALE

E LO AVREMO DAL TEO DEL DINI. FATTO QUESTO $u(X(s,y)) = z(s,y)$
(VERIFICHEREMO LA PROSSIMA VOLTA).

DIMOSTRIAMO CHE PARTENDO DA $(x(0), z(0), p(0)) \in \Sigma_F \Rightarrow (x(s), z(s), p(s)) \in \Sigma_F$

Σ_F È INVARIANTE PER IL FLUSSO DEL SISTEMA DELLE CARATTERISTICHE

dim SAPENDO CHE $F(x(0), z(0), p(0)) = 0 \Rightarrow$ SE $\frac{d}{ds} F(x(s), z(s), p(s)) \equiv 0$ HO FINITO

$$\forall i \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \dot{z} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \cdot p_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot p_i \right) \equiv 0$$

LUNEDÌ NON CI SARÀ LEZIONE.

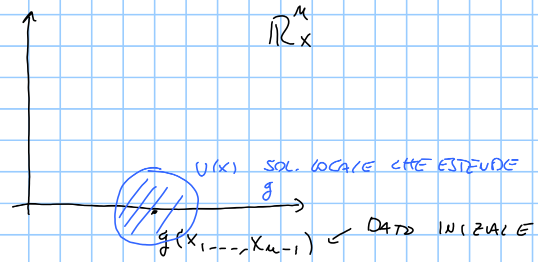
LA PROSSIMA VOLTA CI CHIEDEREMO SE $p(X(s,y)) = \nabla u(X(s,y))$.

LEZIONE 03

Titolo nota 06/03/2019

TROVARE SOLUZIONI DI

$F(x, u, \nabla_x u) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n$



SUPPONIAMO $\frac{\partial F}{\partial p_n} \neq 0$ QUESTO SERVIVA PER RICOSTRUIRE $\frac{\partial u}{\partial x_n}$ PERCHÉ $\nabla_{(x_1 \dots x_{n-1})} u = \nabla g$ SU $x_n = 0$

DATO INIZIALE $\left((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, 0, g(x_1^0, \dots x_{n-1}^0), \partial_{x_1} g(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0), \dots, \partial_{x_{n-1}} g(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0), q(x_1^0, \dots x_{n-1}^0) \right)$

$\cap$

Σ_F

LO POSSO FARE CON MAPPA IMPLICITA UNA VOLTA IMPOSTA LA CONDIZIONE $\frac{\partial F}{\partial p_n} \neq 0$

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \nabla_p F \\ \dot{y}(s) = p \cdot \nabla_p F \\ \dot{z}(s) = -\nabla_x F - \partial_z F \cdot p \end{cases}$$

$(x(0), y(0), z(0))$ Σ_F e SONO QUEL DATO DI SOPRA

CERCHIAMO DI RISOLVERE IL SISTEMA

$x(s), \; y(s), \; z(s)$

$(x(0), z(0), p(0)) \in \Sigma_F$

$\shortparallel$

$(y, \; z(0,y), \; p(0,y))$

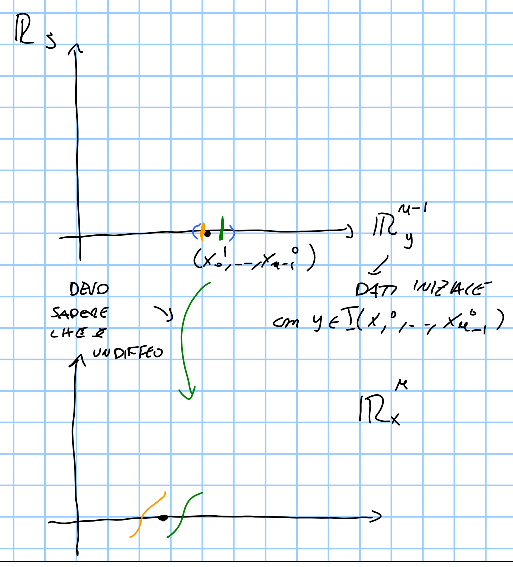
$\qquad \shortparallel$

$\qquad g(y)$

IDEA

$z(s,y) = u(x(s,y))$

$\nabla_x u(x(s,y)) = p(x(s,y))$



QUINDI PER VEDERE CHE QUELLA U FUNZIONA RESTA DA VEDERE 2 COSE :

1) LEMMA $(s,y) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times B^{n-1}((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0), \delta_0) \longrightarrow X(s,y) \in \mathbb{R}^n_x$

$(0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) \longrightarrow (0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$

$(0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0) \longrightarrow (0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0)$

LA MAPPA È UN DIFFEO A PATTO DI RESTRINGERE IL CODOMINIO AD UN OPPORTUNO INTORNO DI $(0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$

2) LEMMA SE $\overset{\text{DEFINISCO}}{\vee}$ $u(X(s,y)) = z(s,y)$ (CHE HA SENSO PERCHÉ X È UN DIFFEO E QUINDI È UN CAMBIO DI VARIABILI) ALLORA

$\nabla u(X(s,y)) = p(s,y)$

SCHEMA DI IDEE :

SE HO LEMMA 1 $\rightsquigarrow$ LA U DEL LEMMA 2 È BEN DEFINITA $\rightsquigarrow$ SE HO LEMMA 2

$\rightsquigarrow$ $F(x, u, \nabla_x u) = 0$ IN $x \in B^n_\delta(x_0^1, \dots, x_{n-1}^0, 0)$

DIMOSTRIAMO QUESTO

$(X(0,y), z(0,y), p(0,y)) \in \Sigma_F$ INOLTRE Σ_F È INVARIANTE PER IL FLUSSO DEL CAMPO DEL SISTEMA DELLE CARATTERISTICHE

$\Rightarrow \forall s \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ $(X(s,y), z(s,y), p(s,y)) \in \Sigma_F$ OVVERO

$\Rightarrow F(X(s,y), z(s,y), p(s,y)) = 0$

$F(X(s,y), u(X(s,y)), \nabla_x u(X(s,y))) = 0$

$F(x, u(x), \nabla_x u(x)) \circ X(s,y) = 0$

SICCOME È DIFFEO

$\Rightarrow F(x, u(x), \nabla_x(u(x)))$ ERA GIÀ ZERO $\square$

DIM LEMMA 1 SI USA IL TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE.

$J\, X(s,y)\Big|_{(s,y) = (0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)} \in Mat(n \times n)$

OSSERVIAMO CHE $X(0,y)=y \Rightarrow JX_{(s,y)} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \nabla_p F \\ 0 \cdots 0 & \end{pmatrix} =$ DAL SISTEMA DELLE CARATTERISTICHE

PER COME

$$= \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \\ \hline 0\,0\,0\,0 & \frac{\partial F}{\partial p_n} \neq 0 \end{array}\right)$$ PER I POTES.

QUINDI IL DET DELLO JACOBIANO $\neq 0 \Rightarrow$ È UN DIFFEO LOC

DIM LEMMA 2

$$\nabla u[x(s,y)] - p(s,y) = 0 \qquad \text{con } u(x(s,y)) = z(s,y)$$

BASTA PROVARE CHE $\nabla u(x(s,y)) - p(s,y)$ È ORTOGONALE AD UNA BASE OPPORTUNA DI $\mathbb{R}^n$ PER DIRE CHE È NULLO

$\mathcal{B} = \{\partial_s X, \partial_{y_1} X, \dots, \partial_{y_{n-1}} X\}$ È UNA BASE PERCHÈ SONO LE COLONNE DELLO JAC DI $X(s,y)$ E PER CONTINUITÀ DEL DET È $\neq 0$ NELL'INTORNO TROVATO NEL LEMMA 1

VEDIAMO LA $\perp$ CON $\partial_s X$

$$\underbrace{\nabla u(x(s,y))\cdot \partial_s x(s,y)} - p(s,y)\cdot \partial_s x(s,y) \overset{?}{=} 0$$

$$\partial_s z(s,y) - p(s,y)\,\nabla_p F = 0$$ PER IL SISTEMA DELLE CARATTERISTICHE

VEDIAMO $\partial_{y_i} X$

$$\nabla u(x(s,y))\cdot \partial_{y_i} X(s,y) - p(s,y)\cdot \partial_{y_i} X(s,y) \overset{?}{=} 0 \quad \forall i=1,\dots,n-1$$

$$\Updownarrow$$

$$\partial_{y_i} z(s,y) - p(s,y)\cdot \partial_{y_i} X(s,y) = 0$$

OSS 1 SE CONSIDERO I PUNTI $(0,y)$ L'UGUALIANZA È VERIFICATA

$$\partial_{y_i} z(0,y) = \partial_{y_i} g(y)$$

USANDO DI NUOVO $X(0,y)=y \Rightarrow \partial_{y_i} X(0,y) = e_i$

$$p(0,y) = \nabla g(y)$$

$$\partial_{y_i} g(y) - \overbrace{\nabla g(y)\cdot e_i}^{\partial_{y_i} g(y)} = 0$$

CHIAMO $G(s) = \partial_{y_i} z - p \cdot \partial_{y_i} x$

SE DIMOSTRO CHE $\frac{\partial G}{\partial s}(s) = H(s) \cdot G(s) \quad \left(+ \, G(0) = 0 \right)$

USANDO IL LEMMA DI GRONWALL POSSO CONCLUDERE $G = 0$ A TEMPO.

$$\frac{d}{ds}\left[\partial_{y_i} z - p\, \partial_{y_i} x \right] = \partial^2_{s y_i} z - \partial_s p \cdot \partial_{y_i} x - p\, \partial^2_{s y_i} x = (*)$$

DAL SISTEMA DELLE CARATTERISTICHE $\partial_s z = \partial_s x \cdot p$

$\downarrow$ DERIVO IN y_i

$$\partial^2_{s y_i} z = \partial^2_{s y_i} x \cdot p + \partial_s x \cdot \partial_{y_i} p$$

$$(*) = \cancel{\partial^2_{s y_i} x \cdot p} + \partial_s x\, \partial_{y_i} p - \partial_s p\, \partial_{y_i} x - \cancel{p\, \partial^2_{s y_i} x} =$$

USANDO LE CARATTERISTICHE

$$= \nabla_p F \cdot \partial_{y_i} p + \partial_{y_i} x \cdot \left(\nabla_x F + \partial_z F \cdot p \right) =$$

$$\frac{d}{ds}\left[\partial_{y_i} p - \partial_{y_i} z \right] = \nabla_p F \cdot \partial_{y_i} p + \partial_{y_i} x \cdot \nabla_x F + \left(\partial_{y_i} x \cdot p \right) \cdot \partial_z F$$

RICORDIAMO CHE $F\left(x(s,y), z(s,y), p(s,p) \right) = 0$

DERIVANDO RISPETTO A y_i

$$\nabla_x F \cdot \partial_{y_i} x + \partial_z F \cdot \partial_{y_i} z + \nabla_p F \cdot \partial_{y_i} p = 0$$

$$\frac{d}{ds} G(s) = -\partial_z F \cdot \partial_{y_i} z + \partial_{y_i} x \cdot p \cdot \partial_z F =$$

$$= \underbrace{\partial_z F}_{H} \underbrace{\left(\partial_{y_i} x \cdot p - \partial_{y_i} z \right)}_{G}$$

<u>OSS</u> SE $F \in C^2$ TUTTI I CONTI SONO LECITI E INOLTRE LA SOL $u \in C^2$ TROVATA È ANCHE UNICA LOCALMENTE.

ESEMPIO: PROBLEMI NEL CERCARE SOL GLOBALI

$\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$ (BURGER)

RIENTRANO NELLA CATEGORIA DI CASI DOVE C'È CONSERVAZIONE ENERGIA

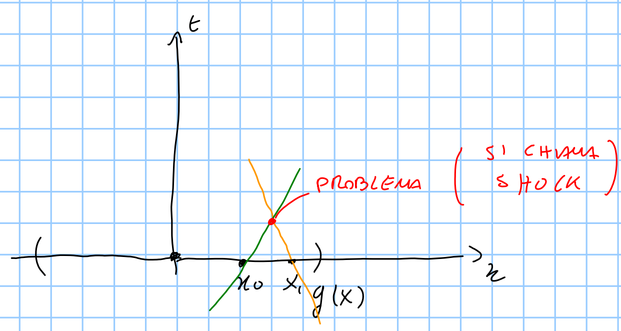
$$\partial_t u + \partial_x\big(F(u)\big) = 0$$

$$F(t, x, z, p_t, p_x) = p_t + z p_x$$

IL SISTEMA DELLE CARATTERISTICHE ASSOCIATO È

$$\begin{cases} \dot t(s) = 1 \\ \dot x(s) = z \\ \dot z(s) = p_t + z p_x = F = 0 \\ \dot p_t(s) = -p_x p_t \\ \dot p_x(s) = -p_x^2 \end{cases}$$

QUINDI NON MI SERVE STUDIARE p_t e p_x PERCHÉ RIESCO



$$\begin{cases} t(0) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ z(0) = g(x_0) \end{cases}$$

$z(s) = g(x_0)$ LUNGO PERCHÉ $\dot z(s) = 0$

$x(s) = g(x_0)\cdot s + x_0$

(OSS IN QUESTO CASO $s = t$ QUINDI LA $x(s)$ È PROPRIO LA $x(t)$.)

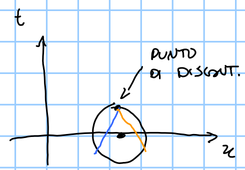
SE $g(x_0) > g(x_1)$

LE E SI INCONTRANO

LEZIONE 04

Titolo nota 11/03/2019

$$\begin{cases} \partial_t u + u\,\partial_x u = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$



ABBIAMO DETTO CHE LOCALMENTE NON HO PROBLEMI MA ABBIAMO VISTO CHE LE CARATTERISTICHE SI INCONTRANO

NELLE PDE HO 2 TIPI DI DISCONTINUITÀ: ESPLODE LA FUNZIONE / ESPLODE LA DERIVATA

TEORIA GLOBALE

$u(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ IN CHE SENSO È SOLUZIONE?

E CHE SENSO HA $u(0,x) = f(0)$

SOLUZIONI DISTRIBUZIONALI (DETTE A VOLTE DEBOLI)

DEF UNA LEGGE DI CONSERVAZIONE È UN'EQ DEL TIPO

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x\big(f(u)\big) = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \qquad \left(\text{AD ESEMPIO } f(u) = \frac{u^2}{2} \text{ BURGER}\right)$$

PUÒ TOCCARE $t=0$ E QUINDI VEDO $g(x)$

SE HO UNA SOLUZIONE CLASSICA $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \partial_t u\,\varphi + \partial_x f(u)\cdot\varphi = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

INTEGRIAMO L'EQUAZIONE

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \partial_t u\,\varphi\,dx\,dt + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \partial_x f(u)\,\varphi\,dt\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \partial_t(\varphi\cdot u)\,dx\,dt - \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\,\partial_t\varphi\,dt\,dx + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \partial_x\big(f(u)\,\varphi\big) - \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(u)\,\partial_x u\,dx\,dt$$

$$\int_{t=0} \nu_{ext}\cdot(u\cdot\varphi)\,dx = -\int u(0,x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$f(u)\,\varphi\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad \varphi \text{ È A SUPP. COMPATTO}$$

$$= - \int u(0,x) g(x) dx$$

DEF una funzione $u(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ si dice sol debole di

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

se e solo se

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\, \partial_t \varphi \, dx\, dt + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(u)\, \partial_x \varphi \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(0,x)\, dx = 0}$$

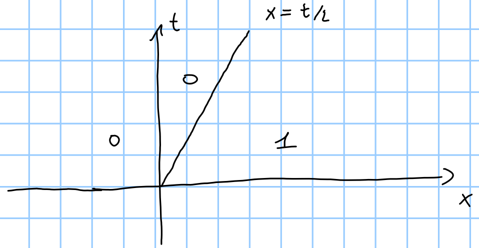
$\forall \varphi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}^+ \times \mathbb{R})$

Formalmente basterebbe $g \in L^1$ ma noi vogliamo fare una teoria L^∞ quindi prendiamo $g(x) \in L^\infty$

Il problema è che avendo indebolito così tanto la nozione di soluzione perdiamo ad esempio l'unicità

ESEMPIO
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \\ u(0,x) = \chi_{(0,+\infty)}(x) \end{cases}$$

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & x < t/2 \\ 1 & x > t/2 \end{cases}$$



Dico che è una sol debole.

Sia $\varphi(t,x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

$$0 \overset{!}{=} \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u(t,x) \partial_t \varphi(t,x)\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u^2 \varphi(t,x)\, dx\, dt + \int_0^{+\infty} \varphi(0,x)\, dx$$

$$\underbrace{\int_0^{+\infty}\int_{t/2}^{+\infty} \partial_t \varphi(t,x)\, dx\, dt}_{R_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{+\infty}\int_{t/2}^{+\infty} \varphi(t,x)\, dx\, dt}_{R_1} + \int_0^{+\infty} \varphi(0,x)$$

VOGLIO USARE TEO DIV AL PRIMO E AL SECONDO INTEGRALE (LO POSSO FARE PERCHÉ φ È A SUPP. COMPATTO?)

$$\iint_{\partial R_1} \nu_{ext}^{(t,x)} \cdot (\varphi, 0) = \int_0^{+\infty} -\varphi(0,x)\, dx + \int_{\{x=t/2\}} \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi \, d\sigma$$

$$\nu_{ext} \ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$$

$$\frac{1}{2}\iint_{\partial R_1} \nu_{ext}\, (0,\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underbrace{(-1,0)(0,\varphi)}_{=0} dx +$$

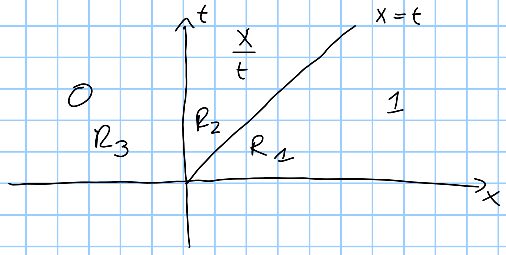
$$+\frac{1}{2}\int_{\{x=\frac{t}{2}\}} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\varphi \, d\sigma = -\int_{\{x=\frac{t}{2}\}} \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi\, d\sigma$$

SI VEDE CHE LA SOMMA FA ZERO

QUINDI ABBIAMO TROVATO UNA SOLUZIONE GLOBALE.

VEDIAMO PERÒ CHE ESISTE UN'ALTRA SOLUZIONE GLOBALE

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t \\ 1 & x > t \end{cases}$$



OSS QUESTA u È ALMENO CONTINUA

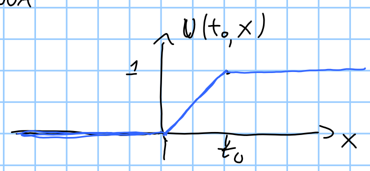
MA NON ESSENDO DERIVABILE

POSSO INCLUDERLA SOLO NELLA

DEF DI SOLUZIONE DEBOLE.

QUINDI $\forall\, t$ FISSATO HO UNA FUNZIONE CONTINUA

in $t = t_0$



$$\underbrace{\int_0^{+\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} u\, \partial_t \varphi}_{①} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} u^2 \varphi}_{②} + \int_0^{+\infty} \varphi(0,x)\, dx \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$$

$$① = \iint_{R_1} \partial_t \varphi + \iint_{R_2} \frac{x}{t}\, \partial_t \varphi \, dt\, dx = -\int_0^{+\infty} \varphi(0,x)\,dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\{x=t\}} \varphi\, d\sigma +$$

$$+ \iint_{R_2} \partial_t\left(\frac{x}{t}\varphi\right) + \iint_{R_2} \frac{x}{t^2}\varphi =$$

$$= \underbrace{-\int_0^{+\infty} \varphi(0,x)\,dx}_{\text{SI CANCELLA}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\{x=t\}} \varphi\, d\sigma} \cancel{-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\{x=t\}} \underset{\overset{\|}{\frac{x}{t} \text{ CHE LÌ VALE } 1}}{1}\, \varphi\, d\sigma} + \iint_{R^2} \frac{x}{t^2}\varphi\, d$$

② $\frac{1}{2}\iint_{R_2} \frac{x^2}{t^2}\partial_x \varphi \, dt\,dt + \frac{1}{2}\iint_{R_1} 1^2 \partial_x \varphi\, dt\,dx =$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\iint_{R_2} \partial_x\left(\frac{x^2}{t^2}\varphi\right)}_{\text{ANCORA DIV.}} - \underbrace{\iint_{R_2} \frac{x}{t^2}\varphi}_{\text{SI CANCELLA COL PEZZO DI PRIMA}} + \int_0^{+\infty} \underset{\overset{\|}{0}}{(-1,0)(0,\varphi)}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\{x=t\}} \varphi\, d\sigma =$$

$$= 1\int_{\{x=0\}} 0 \, d\sigma + \cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\{x=t\}} \overset{=1}{\frac{x^2}{t^2}}\varphi\, d\sigma} \cancel{- \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\{x=t\}} \varphi\, d\sigma}$$

QUINDI TUTTO È ANDATO A 0.

QUINDI SOTTO QUALI ULTERIORI CONDIZIONI RITROVO L'UNICITÀ E SCELGO QUALI SONO MIGLIORI?

CRITERIO DI UNICITÀ (SOLUZIONE ENTROPICHE) KRUŽKOV (TEOREMA + BELLO DA PARTE DEL PROF)

<u>DEF</u> $u(t,x) \in L^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R})$ SOLUZIONE DI $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$ DI UNA LEGGE DI CONSERVAZIONE, SI DICE SOLUZIONE ENTROPICA SE SODDISFA LA SEGUENTE DISEGUAGLIANZA $\forall \varphi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$ (φ e $-\varphi$ NON FUNZIONANO CONTEMPORANEAMENTE)

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \eta(u)\,\partial_t \varphi + \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}} q(u)\,\partial_x \varphi + \int_{\mathbb{R}} \eta(u(0,x))\varphi(0,x)\,dx \geq 0}$$

DISEGUAGLIANZA DI ENTROPIA

$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONVESSA $\qquad q'(u) = \eta'(u)\cdot f'(u)$

SE $\eta(u) = u$ HO LA DEF DI SOL DEBOLE

<u>OSS</u> QUALUNQUE PRIMITIVA PRENDO PER q (IND. DALLA COSTANTE)

L'INT. $\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} q(u)\,\partial_x\varphi$ NON CAMBIA PERCHÉ $\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} c\cdot\partial_x\varphi\, dx\,dt = 0$ (??)

TEOREMA (KRUŽKOV)

$\forall g(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ $\exists!$ SOL ENTROPICA $u(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \cap C_t(\mathbb{R}_t, L^1_{loc}(\mathbb{R}))$

CONTINUE IN t
A VALORI IN L^1_{loc}

ESERCIZIO SE $u(t,x)$ SOL. CLASSICA $\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0$

ALLORA $u(t,x)$ È UNA SOLUZIONE ENTROPICA DOVE $\geq$ DIVENTA $=0$

ESERCIZIO TROVA QUALE DELLE 2 SOLUZIONI DELL'ESEMPIO È QUELLA ENTROPICA

LEZIONE 05

Titolo nota 13/03/2019

$$\begin{cases} \partial_t + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$ LEGGI DI CONSERVAZIONE.

SOL DEBOLE $u(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$

$$\iint u\, \partial_t \varphi \, dx\,dt + \iint f(u)\, \partial_x \varphi \, dt\,dx + \int g(x)\, \varphi(0,x)\, dx$$

SOL ENTROPICA $u(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \cap \underbrace{C_t(\mathbb{R}^+, L^1_{loc}(\mathbb{R}))}$

$\forall R>0 \quad t \to u(t,x)\chi_{[-R,R]}(x) \in L^1$

è UNA SOL DEBOLE + REGOLARE e IN PIÙ

$$\iint \eta(u)\, \partial_t \varphi \, dx\,dt + \iint q(u)\, \partial_x \varphi \, dt\,dx + \int \eta(g(x))\, \varphi(0,x)\, dx \geq 0$$

$$\forall \varphi \in C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}}^+ \times \mathbb{R}) \quad \varphi \geq 0$$

$$e \quad q' = f'\eta'$$

TEOREMA (KRUŽKOV) $\forall\, g \in L^\infty(\mathbb{R})$ $\exists!$ SOLUZIONE ENTROPICA DI $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0 \\ u(0,x) = g(x) \in L^\infty \end{cases}$

IDEA DELLA DIM

UNICITÀ (LIBRO DI EVANS PER I DETTAGLI)

IDEA $\int_K |u_1(t,x) - u_2(t,x)| \leq C\, \underbrace{|g_1(x) - g_2(x)|}_{\text{DATI INIZIALI DI } u_1 \text{ e } u_2}$

K COMPATTI NEI TEMPI CHE RICOPRONO $\mathbb{R}^+$

ESISTENZA: (COSTRUZIONE SENZA TUTTI I DETTAGLI)

METODO DI VANISHING-VISCOSITY

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

CONSIDERO

TRASCURO MOMENTANEAMENTE

$$\underbrace{\partial_t u - \varepsilon \partial_x^2 u}_{\text{SOL. CON TRASF. DI FOURIER}} + \cancel{\partial_x f(u)} = 0$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\varepsilon t \xi^2}\,\hat{g}(\xi)\,d\xi\right)$$

RINSERISCO IL TERMINE NON LINEARE

$$(\varepsilon)\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \varepsilon \partial_x^2 u_\varepsilon + \partial_x f(u_\varepsilon) = 0 \\ u_\varepsilon(0,x) = g(x) \end{cases}$$

SI PUÒ MOSTRARE:

$\exists !\ u_\varepsilon$ SOL. DI (ε) GLOBALE IN (x,t)

ED INOLTRE

$$\boxed{\inf g(x) \le u_\varepsilon(t,x) \le \sup g(x)}$$

COSA DIFFICILE DA MOSTRARE
MA È CIÒ CHE PERMETTE DI OTTENERE
SOL. GLOBALI E UNIF. LIMITATA IN NORMA L^∞

POI ESISTE UNA CONVERGENZA $u_\varepsilon(t,x) \to u(t,x)$ (CONVERGENZE DEBOLI)

E IL MIO LIMITE SODDISFA LE EQ. DI CONSERVAZIONE.

ADESSO MOSTRIAMO CHE LA SOLUZIONE TROVATA È ENTROPICA. (SOLO FORMALMENTE)

$$\partial_t(\eta(u_\varepsilon))\,\varphi = \qquad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \quad \varphi \ge 0$$

$$= \eta'(u_\varepsilon)\cdot \partial_t u_\varepsilon \cdot \varphi =$$

$$= \varepsilon\, \eta'(u_\varepsilon)\, \partial_x^2 u_\varepsilon\, \varphi - \eta'(u_\varepsilon)\, \partial_x f(u_\varepsilon)\, \varphi =$$

$$= \varepsilon\, \partial_x\left(\eta'(u_\varepsilon)\,\partial_x u_\varepsilon\right)\varphi - \underbrace{\varepsilon\, \eta''(u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon)\varphi}_{\ge 0 \ (\eta \text{ è convessa e } \varphi \ge 0)} - \overbrace{\eta'(u_\varepsilon) f'(u_\varepsilon)}^{q'(u_\varepsilon)}\partial_x u_\varepsilon\, \varphi \le$$

$$\le \varepsilon\, \partial_x\left(\eta'(u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon\right)\varphi - q'(u_\varepsilon)\,\partial_x u_\varepsilon\, \varphi$$

INTEGRANDO LA DISEGUAGLIANZA

INTEGRO PER PARTI E φ È A SUPP. COMPATTO

$$= \int_0^{+\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} \partial_t \eta(u_\varepsilon)\varphi - \varepsilon \int_0^{+\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} \partial_x\left(\eta'(u_\varepsilon)\partial_x(u_\varepsilon)\right)\varphi + \int_0^{+\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} q'(u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon \varphi \le 0$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} \partial_t(\eta(u_\varepsilon)\varphi)}_{\text{DIV}} - \int_0^{+\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} \eta(u_\varepsilon)\partial_t\varphi + \varepsilon \int_0^{+\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\eta'(u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon \partial_x \varphi}_{\text{CONTROLLABILE}} + \underbrace{\int_0^{+\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} \partial_x(q(u_\varepsilon))\varphi}_{\text{INTEGRO PER PARTI E USO SUPP. COMPATTO DI } \varphi}$$

$\downarrow \varepsilon \to 0$ $\qquad \to 0$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \eta(g(x))\,\varphi(0,x)\,dx - \int_0^{+\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} \eta(u)\,\partial_t\varphi - \int_0^{\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} q(u_\varepsilon)\,\partial_x\varphi \; dx\,dt \le 0 \qquad \square$$

PRENDIAMO $\vec{U}(t,x) \in \mathbb{R}^m$

$$\partial_t \vec{U}(t,x) \mathbb{R}^m + \partial_x\left(\vec{F}(\vec{U})\right) = 0 \qquad \vec{F} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$\exists !$ SOL GLOBALE $\forall$ SE $g(x) \in BV$ (VARIAZIONE LIMITATA) e $\|g(x)\|_{BV} < \varepsilon_0$

STAVOLTA L'UNICITÀ NON È FACILE.

$\boxed{\text{P.D.E DEL SECONDO ORDINE}}$

UNA DELLE EQ. PIÙ STUDIATE È EQ. DI LAPLACE.

$$\Delta u = 0 \qquad \partial^2_{x_1} u + \dots + \partial^2_{x_n} u = 0$$

DEF LE FUNZIONI CHE SODDISFANO $\Delta u = 0$ SONO ARMONICHE.

PERCHÉ UNA VARIABILE NEL LAPLACIANO NON È MAI IL TEMPO? (IL PROB. DI CAUCHY ASSOCIATO È MAL POSTO)

$$\begin{cases} \partial^2_t u + \partial^2_x u = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial^2_t u - \partial^2_x u = 0 & \text{EQ. DELLE DELLE ONDE} \\ u(0,x) = \varphi(x) & \longrightarrow \text{QUI ESISTENZA} \\ \partial_t u(0,x) = \psi(x & \text{E UNICITÀ DELLE SOL.} \end{cases}$$

QUI NO!

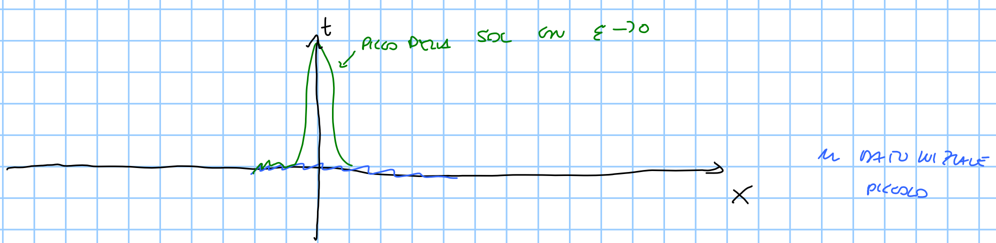
IL PROBLEMA È CHE SALTA LA STABILITÀ

TEOREMA PER LE FUNZIONI ARMONICHE $\exists$ DATI INIZIALI $\varphi_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ TALI CHE $\sup_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ QUANDO $\varepsilon \to 0$ E D INOLTRE

$$|u_\varepsilon(t_\varepsilon, 0)| \longrightarrow +\infty \quad \varepsilon \to 0 \qquad \text{DOVE } t_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \varepsilon \to 0$$

E u_ε È SOL DI

$$\begin{cases} \partial^2_t u_\varepsilon + \partial^2_x u_\varepsilon = 0 \\ u_\varepsilon(0,x) = \varphi_\varepsilon(x) \\ \partial_t u_\varepsilon(0,x) = 0 \end{cases}$$



DIM CERCHIAMO $\partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0$

$$u(t,x) = f(t)\cdot g(x)$$

$$f''(t)\,g(x) + f(t)\,g''(x) = 0$$

$$\frac{f''(t)}{f(t)} = -\frac{g''(x)}{g(x)} = \text{COSTANTE.}$$

$$\begin{cases} f'' = \lambda f \\ \lambda g + g'' = 0 \end{cases}$$

SUPPONGO $\lambda > 0$ $\quad f(t) = e^{\sqrt{\lambda} t} + e^{-\sqrt{\lambda}\, t}$

$\rightarrow g(t) = \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$

PRENDO AD ESEMPIO $\cos(\sqrt{\lambda}\, x)\left[e^{\sqrt{\lambda} t} + e^{-\sqrt{\lambda}\, t}\right]$ $\quad \lambda = \frac{1}{\varepsilon^2}$

$$u_\varepsilon(t,x) = \varepsilon \cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[e^{\frac{t}{\varepsilon}} + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right]$$

SERVE A RENDERE PICCOLA LA FUNZIONE.

$$|u_\varepsilon(0,x)| \le 2\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$$\partial_t u_\varepsilon(0,x) \equiv 0$$

$$u_\varepsilon(t,0) = \varepsilon\left(e^{\frac{t}{\varepsilon}} + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right)$$

PRESA $t_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

MA $u_\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}, 0) \longrightarrow +\infty$

LEZIONE 06

Titolo nota 18/03/2019

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \\ \partial_t u(0,x) \; \psi(x) \end{cases}$$

NON È BEN-POSTO

VEDIAMO CHE

$$\begin{cases} \overbrace{\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0}^{\text{EQ. DELLE ONDE}} \\ u(0,x) = f(x) \\ \partial_t u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

PROP

ESISTE UNICA SOL. CONTINUA DAI DATI

DIM ESISTENZA

$$(\partial_t - \partial_x)\circ(\partial_t + \partial_x) = \partial_t^2 - \partial_x^2$$

SE PRENDO v t.c. $\partial_t v + \partial_x v = 0 \Rightarrow \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = 0$

PERÒ VALE ANCHE

$$(\partial_t + \partial_x)\circ(\partial_t - \partial_x) = \partial_t^2 - \partial_x^2 \Rightarrow \quad \partial_t v - \partial_x v = 0 \Rightarrow \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = 0$$

LE SOLUZIONI DELLA PRIMA SONO DEL TIPO $\psi(x-t)$ E DELLA SECONDA SONO DEL TIPO $\varphi(x+t)$ CON φ e ψ ARBITRARIE

ALLORA $\forall \varphi, \psi$ $u(t,x)$ $\psi(x-t) + \varphi(x+t)$ È SOL DI $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$

ADESSO VOGLIO USARE L'ARBITRARIETÀ DI φ e ψ PER TROVARE LA $u(t,x)$ CHE RISOLVE LE CONDIZIONI INIZIALI

$$\left.\begin{aligned} u(0,x) &= \psi(x) + \varphi(x) = f(x) \\ \partial_t u(0,x) &= -\psi'(x) + \varphi'(x) = g(x) \end{aligned}\right\}$$

DERIVO LA PRIMA RELAZIONE

$$\begin{cases} \varphi'(x) + \psi'(x) = f'(x) \\ \varphi'(x) - \psi'(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)+g(x)}{2} \Rightarrow \varphi(x) = \int_0^x \frac{f'(s)+g(s)}{2}\,ds + a$$

$$\psi'(x) = \frac{f'(x)-g(x)}{2} \Rightarrow \psi(x) = \int_0^x \frac{f'(s)-g(s)}{2} + b$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2}\int_0^x g(s)\,ds + a$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{2}\int_0^x g(s)\,ds + b$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2} f(x+t) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} g(s)\,ds + a + \frac{1}{2} f(x-t) - \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{2}\int_0^{x-t} g(s)\,ds + b$$

OSSERVO $a+b = \varphi(0)+\psi(0) = f(0)$

CAMBIANDO SEGNO

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x+t)+f(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[\int_0^{x+t} g(s)\,ds + \int_{x-t}^{0} g(s)\,ds\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x+t)+f(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds$$

ESERCIZIO (VERIFICARE CHE RISOLVE L'EQUAZIONE DELLE ONDE 1-d)

UNICITÀ DATE u_1 e u_2 TALI CHE

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - \partial_x^2 u_1 = 0 \\ u_1(0,x) = f(x) \\ \partial_t u_1(0,x) = g(x) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \partial_t^2 u_2 - \partial_x^2 u_2 = 0 \\ u_2(0,x) = f(x) \\ \partial u_2(0,x) = g(x) \end{cases} \Rightarrow u_1 \equiv u_2$$

POICHÈ L'EQ È LINEARE $\Rightarrow$ $u_1 - u_2 = w$ È SOL DI

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \partial_x^2 w = 0 \\ w(0,x) = 0 \\ \partial_t w(0,x) = 0 \end{cases}$$

VORREI DIRE CHE $w \equiv 0$

DA RENDERE RIGOROSO

DIM. (FORMALE e SEMPLICE CHE IN ALTRI CONTESTI CONDUCE A CONCLUSIONI ERRATE).

NOTAZIONE (HO RICHIAMATO $u \equiv w$).

$$\partial_t u\left(\partial_t^2 u - \partial_x^2 u\right) = 0$$

$$\int \partial_t u\, \partial_t^2 u\, dx - \int \partial_t\, \partial_x^2 u\, dx = 0$$

$$\frac{1}{2} dt \int (\partial_t u)^2\, dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (\partial_x u)^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} dt\left[\int (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2\, dx\right] = 0$$

$$\Rightarrow \int \left(\partial_t u(t,x)\right)^2 + \left(\partial_x u(t,x)\right)^2\, dx \quad \forall t \Rightarrow \nabla u(t,x) \equiv 0 \Rightarrow u \text{ È COSTANTE}$$

$\Rightarrow$ POICHÉ IL DATO INIZIALE È NULLO $\Rightarrow$ u È COSTANTEMENTE NULLA.

PROVIAMO AD APPLICARE LO STESSO RAGIONAMENTO PER L'EQ. DEL CALORE.

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(0,x) = 0 \end{cases} \Rightarrow u \equiv 0 \ ? \qquad \underline{\text{FALSO!}}$$

$$\int u\,\partial_t u - \int u\,\partial_x^2 u = 0$$

$$\frac{1}{2}\,dt \int u^2\,dx + \int \partial_x u\,\partial_x u = 0 \Rightarrow t \to \int u(t,x)\,dx \searrow \Rightarrow u(t,x) = 0$$

$$\exists \ v(t,x) \not\equiv 0 \text{ t.c. } \begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 \\ v(0,x) = 0 \end{cases}$$

QUINDI ATTENZIONE AL CONTO FORMALE.

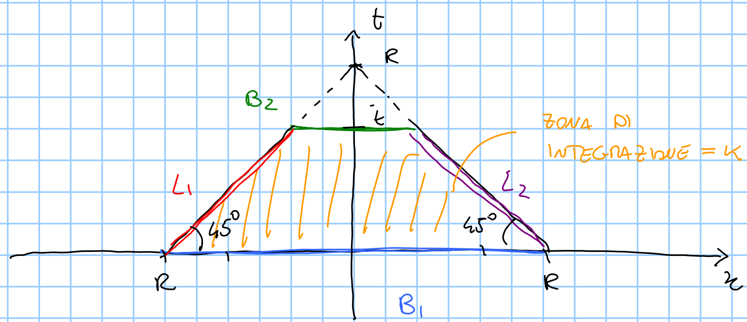
IL PROBLEMA DEL CONTO FORMALE È QUELLO DI TRASCURARE LE PROBLEMATICHE AL BORDO NELL'INTEGRAZIONE PER PARTI.

PER LE ONDE VEDREMO CHE I PROBLEMI AL BORDO SI SISTEMANO

__PROP__ (VELOCITÀ FINITA DI PROPAGAZIONE).

$$\begin{cases} \partial_t u^2 - \Delta u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x) \\ \partial_t u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

FISSIAMO $\bar{t} \in R > \bar{t}$

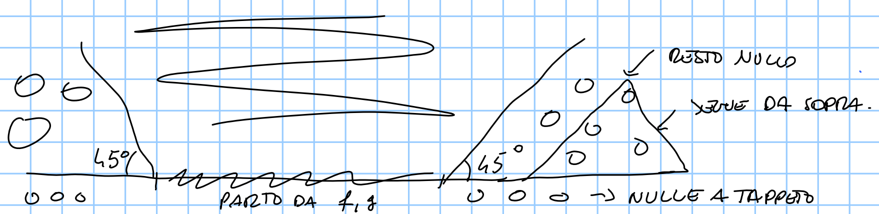


$$m = \int_{B(0,R-\bar{t})} \left(\partial_t u(\bar{t},x)\right)^2 + \int_{B(0,R-\bar{t})} \left(\partial_x u(\bar{t},x)\right)^2$$

$$\wedge$$

$$m \quad \int_{B(0,R)} \left(\partial_x f(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2\,dx$$

QUESTO MI DA CHE MI PROPAGO RIMANENDO A SUPPORTO COMPATTO



DIM $\quad \partial_t \partial_t^2 u - \partial_t u\, \partial_x^2 u = 0$ (FACCIAMO IL CONTO 1-d PER ALLEGGERIRE, SULLE DISPENSE C'È IL CONTO n-d)

$$\frac{1}{2} \partial_t (\partial_t u)^2 - \partial_x(\partial_t u \partial_x u) + \partial_t \partial_x u\, \partial_x u = 0$$

$$\frac{1}{2} \partial_t \left((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 \right) - \partial_x (\partial_t u \partial_x u) = 0$$

$$\frac{1}{2} \iint_K \partial_t \left((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 \right) - \iint_K \partial_x (\partial_t u \partial_x u) = 0$$

PER GAUSS-GREEN

$$\frac{1}{2} \int_{\partial K} \left((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 \right) \nu_t - \iint_K (\partial_t u \partial_x u) \nu_x = 0$$

• SU B_1 $\displaystyle \int_{B_1} \left(\frac{1}{2} (\partial_t u)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 \right) \overset{=-1}{\nu_t} - (\partial_t u \partial_x u) \overset{=0}{\nu_x} =$

$$= - \int_{B_1} \frac{1}{2} \left[(\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 \right]$$

• SU B_2 $\displaystyle \frac{1}{2} \int_{B_2} \left[(\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 \right]$ ANCHE QUI $\nu_x = 0$ e $\nu_t = 1$

• SU L_1

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_1} (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 \, dS + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_1} \partial_x u \partial_t u \, dS$$

• SU L_2 $\displaystyle \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{L_2} (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 dS - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_2} (\partial_x u\, \partial_t u) \, dS$

$$\frac{1}{2} \int_{B_2} (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 - \frac{1}{2} \int_{B_1} (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{L_2} (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 dS + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_2} (\partial_x u \partial_t u)$$

USANDO $|ab| \leq a^2 + b^2$
$a = \partial_x u$
$b = \partial_t u$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{L_1} (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 dS - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L_2} (\partial_x u \partial_t u) \leq 0$$

↳ SOMMA DI COSE NEGATIVE.

VEDREMO SUCCESSIVAMENTE LA SOLUZIONE ESPLICITA DELLE ONDE IN DIMENSIONE 3.

$$\partial_t^2 + \partial_x^2 \rightsquigarrow \overset{\text{POLINOMI}}{p(\tau, \xi)} \qquad \tau = \text{duale di } t \text{ e } \xi \text{ duale di } x$$

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 \rightsquigarrow q(\tau, \xi)$$

IN GENERALE

$$\partial_t^m + a_{m-1}\partial_t^{m-1}\partial_x + \dots + \partial_x^m \rightsquigarrow p_m(\tau, \xi) \text{ DI GRADO } m \quad (\underline{\text{POLINOMIO CARATTERISTICO}})$$

$$\underset{\text{DERIVATE STORTE}}{\partial_t} \longrightarrow \underset{\text{DERIVATE DRITTE}}{D_t} = \frac{1}{i}\partial_t \Rightarrow \partial_t^2 + \partial_x^2 = -D_t^2 - D_x^2 \qquad \text{POI } D_t = \tau \text{ e } D_x = \xi$$

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = -D_t^2 + D_x^2$$

$$p(\tau, \xi) = -\tau^2 - \xi^2 = 0 \qquad \tau(\xi) = \pm i\xi$$

$$q(\tau, \xi) = -\tau^2 + \xi^2 = 0 \qquad \tau(\xi) = \pm \xi$$

__TEOREMA__ SIA $p(\tau, \xi)$ IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI UNA P.D.E. LINEARE.
SE $\exists\, \tau(\xi)$ RADICE $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ IL PROBLEMA È MAL POSTO. PROBLEMA DI CAUCHY

SE LE RADICI SONO REALI E DISTINTE $\Rightarrow$ IL PROBLEMA È BEN POSTO E SI CHIAMA EQ. IPERBOLICA.

__ALTRO ESEMPIO__: $\overbrace{\partial_t + \partial_x}^{\text{EQ TRASPORTO}} \rightsquigarrow +iD_t + iD_x \rightsquigarrow p(\tau, \xi) = +i\tau + i\xi \Rightarrow \tau = \overbrace{-\xi}^{\in \mathbb{R}}$

$$\underbrace{\partial_x + i\partial_x}_{\text{EQ DI CAUCHY-RIEMANN}} \rightsquigarrow +iD_t - D_x \rightsquigarrow q(\tau, \xi) = i\tau - \xi = \underbrace{-\frac{\xi}{i} \in \mathbb{C}}_{\text{MAL POSTO}}$$

LEZIONE 07

Titolo nota 20/03/2019

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 \\ u(0,x) = f(x) \\ \partial_t u(0,x) = g(x) \end{cases} \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

NEL PROBLEMA UNO-DIMENSIONALE LA FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE

$$u(t,x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds$$

UNICITÀ DIMOSTRATA

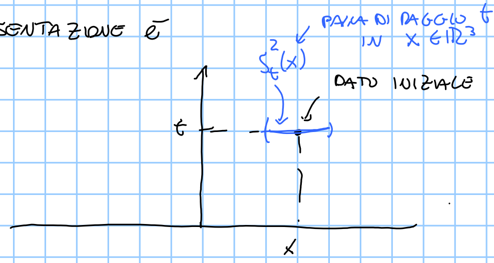
CERCHIAMO UNA FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE PER AVERE L'ESISTENZA

TEOREMA (DI Kirchoff)

IN DIMENSIONE 3 LA FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE È

(RICORDA $⨍_E f\,d\mu = \frac{\int_E f\,d\mu}{\mu(E)}$)

$$u(t,x) = \partial_t \left(t ⨍_{S_t^2(x)} f\,d\sigma \right) + t \int_{S_t^2(x)} g\,d\sigma$$



OSS BASTA RISOLVERE IL PROBLEMA DI CAUCHY SE $f(x) = 0$

$$(1) \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \partial_t u(0,x) = g(x) \end{cases} \quad \underset{\leadsto}{\text{CONOSCO}} \quad w(t,x) = \partial_t u(t,x)$$

w RISOLVE L'EQUAZIONE

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta_x w = 0 \\ w(0,x) = g(x) \\ \partial_t w(0,x) = 0 \end{cases}$$

PERCHÉ $\partial_t w = \partial_t^2 u = \Delta_x u$

MA $u(0,x) \equiv 0 \Rightarrow$ AL TEMPO $t=0$ LA u È NULLA QUINDI ANCHE IL LAPLACIANO È ZERO

QUINDI CERCO u CHE RISOLVE (1)

PRENDO v CHE RISOLVE

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta_x v = 0 \\ v(0,x) = 0 \\ \partial_t v(0,x) = f(x) \end{cases}$$

E PRENDERE COME SOL. $\partial_t v + u$ DEL PROBLEMA CON DATO f e g.

ESERCIZIO: PROVARE A MANO CHE LA FORMULA FUNZIONA

NOI INVECE VEDREMO L'IDEA DELLA COSTRUZIONE USANDO IL CASO 1-DIMENSIONALE

QUINDI RISOLVIAMO

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \partial_t u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

CERCO $u(t,x) \xrightarrow{\text{CONSIDERO}} Mu(t,x,r) = \fint_{S_r(x)} u(t,y)\, d\sigma$

OSS SE RIESCO A CALCOLARE $Mu(t,x,r)$ ALLORA $u(t,x) = \lim_{r \to 0} Mu(t,x,r)$

LEMMA SIA $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ DEFINISCO $Mh(x,r) = \fint_{S_r^2(x)} h \, d\sigma$

ALLORA VALE

$$\boxed{\Delta_x Mh(x,r) = \partial_r^2 Mh(x,r) + \frac{2}{r} \partial_r Mh(x,r)} \qquad \left(\frac{n-1}{r} \text{ SE } x \in \mathbb{R}^n \right)$$

FACCIAMO DOPO LA DIMOSTRAZIONE

EQUAZIONE DELLA MEDIA SODDISFATTA DA $Mu(t,x,r)$ RISPETTO A (t,r)

$$\partial_t^2 M(t,x,r) = \fint_{S_r^2(x)} \partial_t^2 u(t,y)\, d\sigma = \underbrace{\fint_{S_r^2(x)} \Delta_y u(t,y)\, d\sigma}_{\text{TRASLO} \to \text{II}} = \Delta_x \fint_{S_r^2(x)} u(t,y)\, d\sigma = \Delta_x Mu(t,x,r)$$

?? ← GIUSTIFICHIAMO

$$\frac{\int_{S_r^2(0)} \Delta_y u(t,x+y)\, d\sigma}{\underbrace{|S_r^2(x)|}_{\text{TANTO LE SFERE HANNO TUTTE LO STESSO VOLUME}}} = \frac{\int_{S_r^2(0)} \Delta_x (t,x+y)\, d\sigma}{|S_r^2(x)|} = \text{PORTO FUORI } \Delta_x \text{ E RITRASLO.}$$

$$\Delta_x u(x+y) = \Delta_y u(x+y)$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 Mu(t,x,r) = \Delta_x \left(Mu(t,x,r) \right) \underset{\text{USANDO LEMMA}}{=} \partial_r^2 Mu(t,x,r) + \underbrace{\frac{2}{r} \partial_r Mu(t,x,r)}_{\text{SE NON AVESSI QUESTO TERMINE POTREI USARE LA FORMULA DI D'ALEMBERT IN } (t,r)} \\ Mu(0,x,r) = 0 \qquad \partial_t Mu(0,x,r) = Mg(x,r) \end{cases}$$

CONSIDERIAMO $r M u(t,x,r) = v(t,x,r)$

$$\partial_t^2 v(t,x,r) = r\, \partial_t^2 Mu(t,x,r) =$$

$$= r\, \partial^2 Mu(t,x,r) + 2\, \partial_r Mu(t,x,r) = \partial_r^2 v(t,x,r)$$

QUINDI

$$\begin{cases} \partial_t^2\big(r\, Mu(t,x,r)\big) - \partial_r^2\big(r Mu(t,x,t)\big) = 0 \\ r Mu(0,x,r) = 0 \\ \partial_t\big(r Mu(0,x,r)\big) = r Mg(x,r) \end{cases}$$

E PER QUESTO ABBIAMO UNA FORMULA ESPLICITA.

$$r\, Mu(t,x,r) = \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} s\, Mg(x,s)\, ds$$

$$Mu(t,x,r) = \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} s\, Mg(x,s)\, ds$$

$$u(t,x) = \lim_{r\to 0} \frac{\int_{r-t}^{r+t} \overbrace{s\, Mg(x,s)}^{\text{DISPARI}}\, ds}{2r}$$

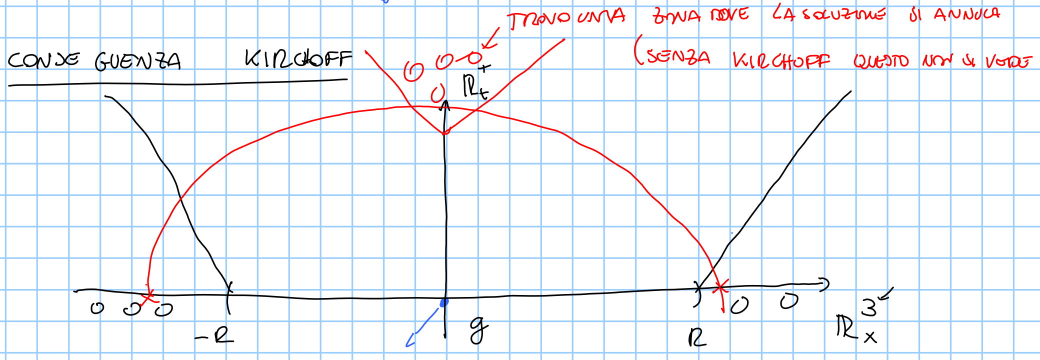
$sMg(x,s)$ è DISPARI $\displaystyle\int_{r-t}^{t-r} s\, M_g(x,s)\,ds \Rightarrow \int_{r-t}^{r+t} s Mg(x,s) = \int_{t-r}^{t+r} s\, M_g(x,s)\, ds$

INTEGRALE DI RAGGIO $2r$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\int_{t-r}^{t+r} s\, M_g(x,s)\, ds}{2r} = \lim_{r\to 0} \int_{t-r}^{t+r} sMg(x,s) = t M_g(x,t) =$$

$$= t \fint_{S_t^2(x)} g\, d\sigma$$

CONSEGUENZA KIRCHOFF



FISSO LO SPAZIO E LASCIO PASSARE IL TEMPO (SE $t > R$) LE SFERE VUOTE NON VEDONO g E QUINDI VALE ZERO

IDEA FISICA: SE STO FERMO E PASSA UN AMBULANZA, DOPO UN PO' IL TEMPO SPARISCE QUESTA COSA IN DIMENSIONE 2 NON SI VEDE PERCHÈ LA MEDIA LA FACCIO SU SFERE PIENE

DIMOSTRAZIONE LEMMA (CIT: "SICURAMENTE FACCIAMO CASINO")

STESSO GIOCO DI PRIMA DELLA TRASLAZIONE

$$\partial_r M h(x,r) = \partial_r \frac{\int_{S^2_r(0)} h(x+y)\, d\sigma}{\omega_2 r^2} = \partial_r \left(\frac{\int_{S_1(0)} h(x+ry) r^2\, d\sigma}{\omega_2 r^2} \right) =$$

DILATO LA SFERA IN MODO CHE ABBIA $r=1$

DILATAZIONE + GAUSS-GREEN

$$= \frac{1}{\omega_2 r^2} \int_{S_1(0)} y \nabla h(x+ry) r^2 d\sigma = \frac{1}{\omega_2 r^2} \int_{B^3(0,r)} \Delta h \, dx$$

$$\omega_2 r^2 \partial_r M h(x,r) = \int_{B^3(0,r)} \Delta h \, dx$$

$$\partial_r \left(\omega_2 r^2 \partial_r M h(x,h) \right) = \partial_r \int_{B^2(0,r)} \Delta h \, dx = \partial_r \left(\left(\int_0^r ds \int_{S_s(0)} \Delta_x h \, d\sigma \right) \right) =$$

$$= \int_{S_r(0)} \Delta_x h \, dx = \Delta_x \int_{S_r(0)} h \, dx$$

LEZIONE 08

Titolo nota 25/03/2019

ONDE — IN DIMENSIONE 1 FORMULA ESPLICITA DI RAPP. $\rightsquigarrow$ DIMENSIONE 3 CON LA FUNZIONE MEDIA TORNAVO A 1 E RISOLVEVO $\rightsquigarrow$ SOLO IDEA DIMENSIONE 2

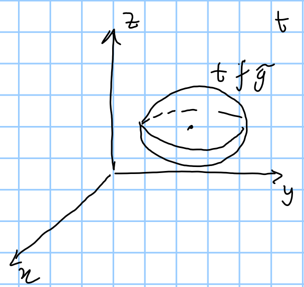
2-d
$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_{x,y} u(x,y) = 0 \\ u(0,x,y) = f(x,y) \\ \partial_t u(0,x,y) = g(x,y) \end{cases}$$

INTRODUCIAMO UNA "FINTA" TERZA VARIABILE z

$g(x,y) \rightsquigarrow \tilde{g}(x,y,z)$

$f(x,y) \rightsquigarrow \tilde{f}(x,y,z)$

RISOLVO
$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta_{x,y,z} v(x,y) = 0 \\ v(0,x,y,z) = \tilde{f}(x,y,z) = f(x,y) \\ \partial_t v(0,x,y,z) = \tilde{g}(x,y,z) = g(x,y) \end{cases}$$



t FISSATO

LA v È INDIPENDENTE DA z PERCHÉ LO SONO $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ e QUINDI $v(t,x,y)$

E NELLA FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE L'INTEGRALE INVECE DI ESSERE SU UNA SFERA SARÀ UN INTEGRALE IN $dx\,dy$. (PROVARE A FARE IL CONTO).

FUNZIONI ARMONICHE

DEF $u \in C^2(\Omega) \Rightarrow u$ È ARMONICA se $\Delta_x u = 0$ in Ω

DOVE $\Delta_x = \partial^2_{x_1} + \dots + \partial^2_{x_n}$

ESEMPI $f(x,y) = f(x+iy)$ CON $f(z)$ OLOMORFA

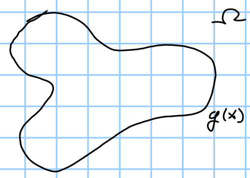
$\Rightarrow \Delta_{xy} f = 0$

ABBIAMO GIÀ DETTO CHE IL PROBLEMA DI CAUCHY NON HA SENSO

PROBLEMA DI DIRICHLET Ω APERTO $\subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}) \end{cases} \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

CI SONO I SOLITI PROBLEMI DI UNICITÀ ED ESISTENZA.



UNICITÀ $g \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ ASSEGNATA, SE $\exists\, u_g$ SOLUZIONE È UNICA?

LA DOMANDA EQUIVALE A MOSTRARE $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$

$\Rightarrow u$ È SOLO $\equiv 0$?

DIM (SUPPONIAMO Ω LIMITATO)

CONTO FORMALE

$$0 = \int_\Omega u \Delta u = \int_\Omega \operatorname{div}(u \cdot \nabla u)\, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \underbrace{u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu_{ext}}}_{=0} d\sigma - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

$\nabla u = 0 \Rightarrow u$ COSTANTE MA SERVE $C^1(\overline{\Omega})$

DIMOSTRIAMO CHE $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \subsetneq C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

CONTROESEMPIO DI HADAMARD

$\exists\, u(x,y)$ ARMONICA SU $\overline{B(0,1)}$ TC $C(\overline{B})$ E $\underbrace{\int_\Omega |\nabla_{xy} u|^2 dx\, dy = \infty}$

MI IMPEDISCE DI AVERE GRADIENTE LIMITATO QUINDI NON PUÒ ESSERE $C^1(\overline{B})$

$z = x + iy$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{n!}}{n^2}$$

LA SERIE CONVERGE TOTALMENTE SU $\overline{B} \Rightarrow f(z) \in \underset{\text{OLOMORFE}}{\mathcal{H}(B)} \cap C(\overline{B})$

COME CALCOLARE $\int_\Omega |\nabla_{xy} f|^2 dx dy \underset{\text{A MENO DI UN FATTORE}}{\simeq} \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 dx dy$

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n!-1}\, n!}{n!} \quad \forall\, |z| < 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B(0,1-\varepsilon)} |f'(z)|^2\, dx\,dy = \int_{B(0,1)} |f'(z)|^2\, dx\,dy$$

RIGOROSO

OSSERVO CHE $\int_{B(0,1)} z^h \cdot \bar{z}^k \, dx\,dy = 0$ se $h \neq k$

QUINDI $|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)}$ MA POICHÉ GLI z^i SONO ORTOGONALI

$$\int_B |f'(z)|^2\, dx\,dy = \sum_{m\geq 1} \frac{(m!)^2}{m^4}\int_B |z|^{2m!-2}\, dy\,dx = \sum_{m\geq 1}\frac{m!\,\pi}{m^4} = +\infty$$

$$\int_{B^2} |z|^{2m!-2}\, dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{2m!-1}\, dr\, d\vartheta = \frac{\pi}{m!}$$

RESTA QUINDI IL PROBLEMA DELL'UNICITÀ:

$u \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ $\quad \begin{cases}\Delta u = 0\\ u|_{\partial\Omega} = 0\end{cases} \Rightarrow u \equiv 0$?

Ω LIMITATO

PRINCIPIO DELLA MEDIA (VEDI ANALISI 3 PER DIMOSTRAZIONE).

SIA Ω e $x_0\in\Omega$, $\Delta u = 0$ $\Rightarrow$ $u(x_0) = \fint_{S_r(x_0)} u\, d\sigma$ con $r < d(x_0,\partial\Omega)$

$$= \fint_{B_r(x_0)} u\, dx$$

DIM UNICITÀ: $M = \max_{\overline{\Omega}} u = u(\bar{x})$ con $\bar{x}\in\overline{\Omega}$

DICO CHE $\bar{x}\in\partial\Omega$ → $u(\bar{x}) = 0$ — IN MODO ANALOGO PER MIN

DEVO ESCLUDERE CHE $u(\bar{x}) \neq 0$ e $\bar{x}$ PUNTO DI MAX e $\bar{x}\in\mathring{\Omega}$

SUPPONIAMO PER ASSURDO $\exists\, \bar{x}\in\Omega$ tc $u(\bar{x}) = M > 0$

$\Downarrow$

$$\fint_{B_r(\bar{x})} u\, dx = M \Rightarrow u(x) = M \quad \forall x\in B_r(\bar{x})$$

$\Rightarrow$ L'INSIEME DEGLI $x\in\Omega$ DOVE $u(x) = M$ È UN APERTO

MA $\{x : u(x) = M\}$ È CHIUSO PERCHÉ $u\in C^2$

MA POICHÈ Ω È CONNESSO (O SULLA COMPONENTE CONNESSA DI $\bar{x}$)

ALLORA $\{x, u(x) = M\} = \bar{\Omega}$

TEOREMA (MASSIMO DEBOLE) Ω LIMITATO

$\Delta u = 0 \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \Rightarrow \max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$

TEOREMA (MASSIMO FORTE) (QUELLA SOPRA È LA DIMOSTRAZIONE)

NELLE STESSE IPOTESI SE $\exists\, \bar{x} \in \mathring{\Omega}$ tc $M = u(\bar{x}) \Rightarrow u \equiv$ COSTANTE

(MAX FORTE $\Rightarrow$ DEBOLE).

CONSEGUENZE PRINCIPIO DELLA MEDIA

1) SE $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0 \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$

2) SIA $u(x) \in C(\Omega)$ e VALE $u(x_0) = \fint_{S_r(x_0)} u \, d\sigma \quad \forall r < d(x_0, \partial\Omega)$ e $\forall x_0 \in \Omega \Rightarrow u \in C^\infty$ e $\Delta u = 0$.

3) SE $u_n \in C^2(\Omega)$ $\Delta u_n = 0$, $u_n \xrightarrow{\text{UNIFORMEMENTE}} u(x)$ SUI COMPATTI DI Ω

$\Rightarrow u(x)$ È ARMONICO e $u(x) \in C^\infty$

DIM 3 PER u_n VALE LA MEDIA

$$u_n(x_0) = \fint_{S_r(x_0)} u_n(x)\, dx$$

$u_n(x_0) \downarrow u(x_0)$; $\downarrow$ → CONV UNIF. PASSO ALL'INT.

$$\fint_{S_r(x_0)} u(x)\, dx$$

$\Rightarrow$ USANDO 2 u È ARMONICA

4) LE UNICHE FUNZIONI DEFINITE SU $\mathbb{R}^n$, ARMONICHE E LIMITATE SONO LE COSTANTI

ESERCIZIO SE $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow u$ È COSTANTE.

LEZIONE 09

Titolo nota 27/03/2019

PROP u ARMONICA SU $\mathbb{R}^n$, $u(x)$ LIMITATA DAL BASSO $u(x) > M$

$\Rightarrow u(x) \equiv$ costante

DIM NON È RESTRITTIVO SUPPORRE $M = 0$ $\left(\text{PASSO A } v(x) = u(x) - \inf u \Rightarrow \Delta v = 0 \right)$

RICORDANDO $\Delta u = 0 \Rightarrow u \in C^\infty \Rightarrow \partial_{x_i} u \in C^\infty$ e $\partial_{x_i} u$ è ARMONICA (SCHWARTZ)

ALLORA POSSO APPLICARE IL TEOREMA DELLA MEDIA

$$\left| \partial_{x_i} u(x_0) \right| = \left| \fint_{B(x_0,r)} \partial_{x_i} u \, dx \right| = \frac{\left| \int_{B(x_0,r)} \partial_{x_i} u \, dx \right|}{c \cdot r^n} \overset{\text{DIV + MODULO}}{\leq} \frac{\int_{S(x_0,r)} |\nu_i \cdot u| \, d\sigma}{c r^n} \leq \frac{\int_{S(x_0,r)} |u| \, d\sigma}{c r^n}$$

$\Rightarrow$ POICHÉ $u \geq 0$

$$\left| \partial_{x_i} u(x_0) \right| \leq \frac{\int_{S(x_0,r)} u \, d\sigma}{c r^n} = \frac{1}{c r} \fint_{S(x_0,r)} u \, d\sigma = \frac{u(x_0)}{c r} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$$

RISOLVERE $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO LIMITATO, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$

- PER ORA ABBIAMO IL PRINCIPIO DEL MAX (DEBOLE) $\Rightarrow$ UNICITÀ.

- ESISTENZA? (SOSPESO)

PROBLEMA: $\partial_{x_i} \left(g_{ij}(x) \right) \partial_{x_j} = 0$ VALE IL PRINCIPIO DEL MAX? OSS $g_{ij} = \delta_{ij}$ ALLORA HO IL LAPLACIANO.
IN QUESTO CASO NON HO IL PRINCIPIO DELLA MEDIA QUINDI MI SERVE UNA DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA DEL PRINCIPIO DEL MAX

DIMOSTRAZIONE DEL PRINCIPIO DEL MAX (DEBOLE)

Ω LIMITATO, $\Delta u = 0$ $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

$\Rightarrow \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

DIM SUPPONIAMO CHE $\Delta u > 0 \Rightarrow \max_{\partial\Omega} u = \max_{\overline{\Omega}} u$

$\exists\, x_0 \in \overline{\Omega}$ TC $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ PER COMPATTEZZA DI $\overline{\Omega}$

SE PER ASSURDO $x_0 \in \Omega \Rightarrow \Delta u =$ SOMMA AUTOVALORI DI $Hu(x_0) \leq 0$ ASSURDO.

TORNIAMO ALLA U ORIGINALE $\Delta u = 0$, LA PERTURBO

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon \|x\|^2 \Rightarrow \Delta u_\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon(x) = \max_{\bar\Omega} u_\varepsilon(x)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow_{\varepsilon \to 0}$$

$$\max_{\partial\Omega} u(x) \qquad \max_{\bar\Omega} u(x)$$

PERCHÉ Ω LIMITATO e u_ε CONVERGE UNIFORMEMENTE.

LEMMA DI HOPF

SE $\Delta u = 0$ SU Ω LIMITATO $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega)$

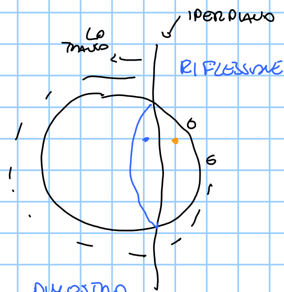
$\exists x_0 \in \Omega$ t.c. $u(x_0) = \max_{\bar\Omega} u(x) \Rightarrow u$ è COSTANTE

(SE AVREMO TEMPO LO DIMOSTREREMO)

APPLICAZIONI DEL PRINCIPIO DEL MAX

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f(u) \\ u|_{\partial B_R} = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x) = u(|x|)$$

e $\boxed{u \geq 0}$ → SENZA ≥ 0 HO INFINITE SOLUZIONI



DIMOSTRO

$w(\cdot) \leq u(\cdot)$

FINO A CHE NON ARRIVO ALL'ORIGINE POI PER SIMMETRIA FACCIO LO STESSO DALLA PARTE OPPOSTA E TROVO CHE LA U È RADIALE.

ESISTENZA DELLE SOLUZIONI

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = g \in C^0(\partial\Omega) \end{cases}$$

SUPPONIAMO $\Omega = B_R^n(0)$ FORMULA DI POISSON

$$\boxed{u(x) = \frac{(R^2 - |x|^2)}{\omega_{n-1} \cdot R} \int_{S_R(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma}$$

COSE DA VERIFICARE

1) $u(x)$ è ARMONICA

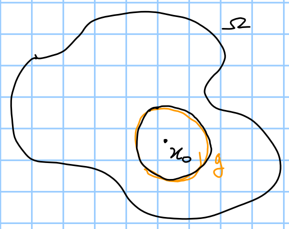
2) $\lim_{x \to \bar y \in \partial\Omega} u(x) = g(\bar y)$

COROLLARIO FORMULA DI POISSON

u ARMONICA $\Rightarrow$ $u \in C^\infty(\Omega)$ e ANCHE ANALITICA REALE

ESEMPIO $\mathbb{R}^2 \longrightarrow xy \longrightarrow$ ANALITICA REALE (MA NON OLOMORFA)
ESTENSIONE SU $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow z \cdot w$

DIM



SULLA PALLA POSSO USARE LA RAPPRESENTAZIONE DI POISSON

e $|x-y|^n = = \left[\sum (x_i - y_i)^2\right]^{n/2}$ — MI DA IL PROBLEMA PER ESSERE OLOMORFA.

BASTA AGGIUNGERE $x_i + i w_i$ RESTANDO DENTRO LA PALLA E CHE LA PARTE REALE SIA > 0 E LI LA RADICE È OLOMORFA.

TORNANDO ALLE VERIFICHE SULLA FORMULA DI POISSON

SE TRASCO IN y LA $u(x)$ DIVENTA RADIALE

QUINDI VEDO SE PER LE FUNZIONI RADIALI C'È UNA FORMULA + SEMPLICE

POI ALLA FINE RI TRASCERO.

SUPPONGO $u(x) = u(|x|)$

$$\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i}|x| \cdot u'(|x|) = \frac{x_i}{|x|} u'(|x|)$$

$$\partial^2_{x_i} u(x) = \frac{x_i^2}{|x|^2} u''(|x|) + u'(|x|) \frac{|x| - \frac{x_i^2}{|x|}}{|x|^2} =$$

$$= \frac{x_i^2}{|x|^2} u''(|x|) + u'(|x|) \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}$$

$$\Rightarrow \Delta u(|x|) = \sum_{i=1}^n \partial^2_{x_i} u(|x|) = u''(|x|) + \frac{(n-1)\, u'(|x|)}{|x|}$$

$$\Delta u(r) = u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r)$$

$$\Delta\left((R^2 - |x|^2)\right) \cdot \int_{S_r} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma + (R^2 - |x|^2) \int_{S_r} \Delta_x \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dy + 2\nabla_x (R^2 - |x|^2) \cdot \int_{S_r} \nabla_x \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma =$$

$$\Delta_x \frac{1}{|x|^n}\Big|_{x = x-y} = \frac{n(n+1)}{r^{n+2}} - \frac{(n-1)n}{r^{n+2}} = \frac{2n}{r^{n+2}}$$

$$= -2n \int_{S_r} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dy + (R^2-|x|^2)\int_{S_r} \frac{2n\, g(y)}{|x-y|^{n+2}}\, d\sigma \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} -4x_i \int_{S_r} g(y) \frac{(x_i-y_i)}{|x-y|^{n+2}} (-n) =$$

$$= \int_{S_r} \frac{g(y)}{|x-y|^{n+2}} \left[-2n|x-y|^2 + 2n(R^2-|x|^2) + 4n|x|^2 - 4n\, x\cdot y \right] d\sigma$$

$R^2 \quad y\in S_n \quad \|$

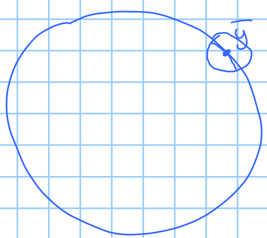
$$-\cancel{2n|x|^2} - \cancel{2n|y|^2} + \cancel{4n\, x\cdot y} + \cancel{2nR^2} - \cancel{2n|x|^2} + \cancel{4n|x|^2} - \cancel{4n\, x\cdot y} = 0$$

QUINDI LA $U(x)$ DI POISSON È ARMONICA.

VEDIAMO CHE $\lim_{\substack{x\to\bar y \\ \cap\ \ \cap \\ B_R\ \ S_n}} U(x) = g(\bar y)$ QUI È FONDAMENTALE RESUSCITARE $\frac{1}{\omega_{n-1}R}$

$$u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{\omega_{n-1}R}\int_{S_r}\frac{g(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma$$

LEMMA $\frac{R^2-|x|^2}{\omega_{n-1}R}\int_{S_r}\frac{1}{|x-y|^n}\, d\sigma = 1 \quad \forall x\in B^n$ (DIM X ESERCIZIO)



GRAZIE AL LEMMA

$$\frac{R^2-|x|^2}{\omega_{n-1}R}\int_{S_R}\frac{g(y)-g(\bar y)}{|x-y|^n}\, d\sigma \xrightarrow[x\to\bar y]{} 0$$

FISSO $\varepsilon>0$ $\Rightarrow$ PER CONTINUITÀ DELLA g SU $\partial\Omega$

$\exists\,\delta$ t.c. su $S_r\cap B(\bar x,\delta)$ $\boxed{|g(y)-g(\bar y)|}<\varepsilon$

$\Rightarrow$ $U(x) < \varepsilon \, \frac{R^2-|x|^2}{\omega_{n-1}R}\int_{S_r}\frac{1}{|x-y|^n}\, dx \overset{\text{LEMMA}}{=} \varepsilon$

SU $S_r\cap B^c(\bar x,\delta)$ VEDI NOTE...

LEZIONE 10

Titolo nota 01/04/2019

AVEVAMO SCRITTO LA FORMULA PER

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in B_R(0) \\ u\big|_{\partial B_R(0)} = g \in C^0(\partial B_R(0)) \end{cases}$$

FORMULA DI POISSON

$$\boxed{u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\, \omega_{m-1}} \int_{S_R(0)} \frac{g(y)}{|x-y|}\, dy}$$

FUNZIONE DI GREEN

LEMMA: (IDENTITÀ DI GREEN) $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u\, \partial_\nu v - v\, \partial_\nu u \, d\sigma$$

DIM

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u \nabla v - v \nabla u)\, dx \overset{\text{TEO DIV}}{=} \int_{\partial\Omega} u\, \partial_\nu v - v\, \partial_\nu u \, d\sigma$$

$\shortparallel$ SVILUPPO div

$$\int_\Omega u \Delta v - v \Delta u \, dx$$

INTRODUCIAMO
$$K(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{m-2}} & \text{se } m \geq 3 \\ -\log|x| & \text{se } m = 2 \end{cases}$$
$\boxed{\text{SOLUZIONE FONDAMENTALE.}}$

SONO TUTTE E SOLE LE u ARMONICHE, RADIALI, ILLIMITATE E NON DEFINITE NELL'ORIGINE

INFATTI $\Delta u(r) = u''(r) + \dfrac{m-1}{r} u'(r) = 0$ $\qquad u(r) = a\, K(r) + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

sono le UNICHE SOLUZIONI.

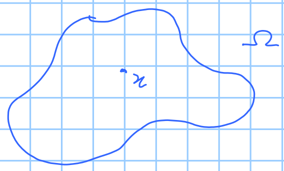
LEMMA Se $\Delta u = 0$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$

ALLORA SE $m = 2$ $\quad \pi u(x) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \left[-u\, \partial_\nu K(x-y) + K(x-y)\, \partial_\nu u\right] d\sigma$

SE $m \geq 3$ $\quad m(m-2) \operatorname{Vol}(B^m(0))\, u(x) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \left[-u\, \partial_\nu K(x-y) + K(x-y)\, \partial_\nu u\right] d\sigma$

DIM $n \geq 3$ ($n = 2$ x ESERCIZIO)

K è BEN DEFINITA TRANNE CHE IN x



QUINDI PER POTER USARE IL LEMMA PRECEDENTE PRENDO $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B^n(x, \varepsilon)$

USANDO IL PRIMO LEMMA

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} -u\,\partial_\nu K + K \cdot \partial_\nu u \, dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u\,\partial_\nu K(x-y)\, d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} K(x-y)\,\partial_\nu u \, d\sigma =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[u\,\partial_\nu K(x-y) - K(x-y)\,\partial_\nu u \right] d\sigma + \underbrace{\int_{S(x,\varepsilon)} u\,\partial_\nu K(x-y) - K(x-y)\,\partial_\nu u \, d\sigma}$$

BASTA MOSTRARE CHE SE $\varepsilon \to 0$

$$n(n-2)\, \mathrm{Vol}\,(B^n(0))\, u(x)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S(x,\varepsilon)} u(y)\,\partial_\nu K(x-y)\, d\sigma = \lim_{\varepsilon \to 0} + \int_{S(x,\varepsilon)} u(y) \underbrace{\frac{y-x}{|y-x|}}_{\nu} \cdot \underbrace{\frac{y-x}{|x-y|} \frac{(n-2)}{|x-y|^{n-2}}}\, dy$$

$$\nabla K = -\frac{(n-2)}{r^{n-1}} \cdot \frac{x}{|x|}$$

$$\underset{|x-y|=\varepsilon}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \omega_{n-1} \int_{S(x,\varepsilon)} \frac{u(y)\,(n-2)}{\omega_{n-1}\,\varepsilon^{n-1}}\, d\sigma = \lim_{\varepsilon \to 0} (n-2)\,\omega_{n-1} ⨍_{S_\varepsilon(x,\varepsilon)} u(y)\, d\sigma =$$

$$= (n-2)\,\underbrace{\omega_{n-1}}\, u(x) = (n-2)\, n\, \underbrace{\mathrm{Vol}\, B^n(0)}\, u(x)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S(x,\varepsilon)} K(x-y)\,\partial_\nu u \, d\sigma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \int_{S(x,\varepsilon)} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,\partial_\nu u \right| \leq$$

u ARMONICA QUINDI C^∞ QUINDI LIMITATA

$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{C}{\varepsilon^{n-2}} \underbrace{\int_{S(x,y)} 1\, d\sigma}_{= O(\varepsilon^{n-1})} \to 0$$

VOGLIAMO TRASFORMARE IL TERMINE $\int_{\Omega} K(x-y)\,\partial_\nu u \, d\sigma = \int h(x,y)\, u \, d\sigma$

LO FACCIAMO INTRODUCENDO LA FUNZIONE DI GREEN.

FUNZIONE DI GREEN

$\forall x \in \Omega \quad h_x(y)$ t.c. $\begin{cases} \Delta_y h_x(y) = 0 & \text{su } \Omega \\ h_x(y) = K(x-y) & \text{se } y \in \partial\Omega \end{cases}$

COSÌ GRAZIE ALLA PRIMA ID. DI GREEN HO

$$0 = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \underset{h_x(y)}{\underset{\shortparallel}{K(x-y)}}\, \partial_\nu u \, d\sigma}_{} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \partial_\nu h_x(y)\, u \, d\sigma}_{} = \int_\Omega h_x(y) \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\Delta u}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\Delta h_x(y)}}\, u \, dy$$

UGUALI

QUINDI LA FORMULA DI RAPP. DIVENTA

$$n(n-2)\, \mathrm{Vol}(B^n(0))\, u(x) = \int_{\partial\Omega} -u\, \partial_\nu K(x-y) + \partial_\nu h_x(y)\, u(y)\, d\sigma =$$

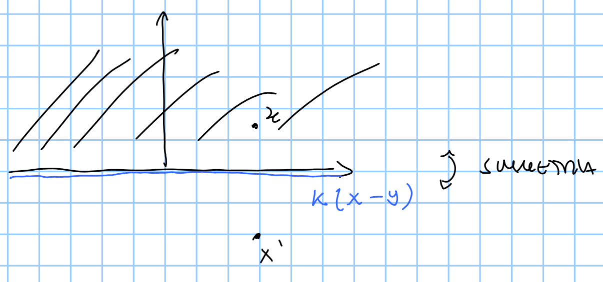
$$= \int_{\partial\Omega} \underset{-\partial_\nu K(x-y) + \partial_\nu h_x(y)}{\underset{\shortparallel}{G(x,y)}}\, u(y)\, d\sigma$$

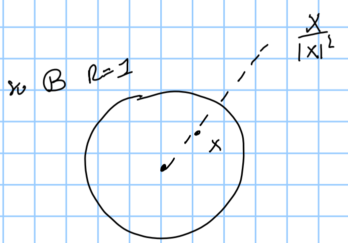
SONO LA STESSA COSA SOLO AL BORDO

MA ∂_ν TIENE CONTO ANCHE DI h e K

FUORI DAL BORDO QUINDI $G \neq 0$

SUPPONIAMO $\Omega = \mathbb{R}^n_+$





IN DIM ≥ 3

SU $B_R(x)$

CHE LA $h_x(y)$ FUNZIONA

$$h_y(x) = \frac{R^{n-2}\,|x|^{n-2}}{\left|R^2 x - |x|^2 y\right|^{n-2}}$$ $\longrightarrow$ NUMERO A X FISSATO

$$\left|\,|x|^2 \left|R^2 \frac{x}{|x|^2} - y\right|\right|^{n-2}$$

$|x|<R \Rightarrow$

SE $y = R^2 \dfrac{x}{|x|^2}$

$$|y| = R^2 \frac{|x|}{|x|^2} = \frac{R^2}{|x|} > R$$

QUINDI y È IL NUOVO CENTRO DI SINGOLARITÀ

$$h_y(x) = K(x-y) \quad \text{se } |y| = R$$

$$\frac{R^{n-2}\,|x|^{n-2}}{\left|R^2 x - |x|^2 y\right|^{n-2}} \overset{?}{=} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$

FACCIO RADICE $n-2$ E ELEVO AL QUADRATO

$$\frac{R^2\,|x|^2}{\left|R^2 x - |x|^2 y\right|^2} \overset{?}{=} \frac{1}{|x-y|^2}$$

$$R^2 |x|^2 \,|x-y|^2 \overset{?}{=} \left|R^2 x - |x|^2 y\right|^2$$

$$R^2 |x|^2 \left(|x|^2 + |y|^2 \cancel{- 2xy}\right) = R^4 |x|^2 + |x|^4 |y|^2 \cancel{- 2R^2 |x|^2 xy}$$

USO $|y| = R$

$$\cancel{R^2 |x|^4} + \cancel{R^4 |x|^2} = \cancel{R^4 |x|^2} + \cancel{|x|^4 R^2}$$

X ESERCIZIO RITROVARE LA FORMULA DI POISSON PER LE PALLE USANDO $K(x-y)$ e $h_x(y)$ DATE E COSTRUIRE $G(x,y)$

ESISTENZA SE Ω È GENERICO

I) TRAMITE CALCOLO DELLE VARIAZIONI

II) TEORIA DEL POTENZIALE

} SOLO IDEE

III) SOTTO – SOPRA SOLUZIONI (PERRON) (NO DETTAGLI)

I) OSS (DI RIEMANN) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases}$

SIA $\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx$, $v \in C_{g(x)}$ cioè $v \equiv g$ su $\partial\Omega$

CERCO $\min_{C_g} \mathcal{E}(v)$ SE u è MIN $\Rightarrow \Delta u = 0$

SE u è MIN $\mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(w)$ $\forall\, w \in C_g(\Omega)$

PRENDO $w = u + \lambda \varphi$ $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(u + \lambda\varphi) \geq \mathcal{E}(u)$$

$$\int_\Omega |\nabla u + \lambda \nabla\varphi|^2 = \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda^2 |\nabla\varphi|^2 + 2\lambda \nabla u \nabla\varphi}_{\text{HA UN MIN PER } \lambda = 0}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

$$\dots \Rightarrow -\Delta u = 0$$

OSS QUESTA STRATEGIA NON FUNZIONA SEMPRE NOI ABBIAMO COSTRUITO

UNA u tc $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(0,R) \\ \int |\nabla u|^2 = +\infty \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases}$ MENTRE CON POISSON CI RIESCO.

LEZIONE 11

Titolo nota 03/04/2019

ESISTENZA E UNICITÀ DI

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \forall x \in \Omega \qquad u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \qquad \Omega \text{ LIMITATO} \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega \qquad g(x) \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

UNICITÀ: GARANTITA SEMPRE GRAZIE AL PRINCIPIO DEL MASSIMO

ESISTENZA: • $\Omega = B^n(R)$ VALE LA FORMULA DI POISSON ← CASO PARTICOLARE DELLA FUNZIONE DI GREEN

• Ω GENERICO.

– CASO VARIAZIONALE $\min\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, , u \in C_g \right\}$

– METODO DELLA TEORIA DEL POTENZIALE

SO $n \geq 3$

$$\underbrace{n(n-2)\,\mathrm{Vol}(B_1^n)}_{\omega_{n-1}}\, u(x) = \int_{\partial\Omega} \Big(-u\, \partial_\nu K(x-y) + \underbrace{K(x-y)\, \partial_\nu u}_{\text{DIMENTICHIAMOCI DI QUESTO TERMINE}} \Big)\, dx$$

CERCO UNA SOL. $u(x) = \dfrac{}{\omega_{n-1}(n-2)} \displaystyle\int_{\partial\Omega} -h(y)\, \partial_\nu K(x-y)\, d\sigma$ $\qquad h(y)$ DATO DATO AL BORDO

ESISTE $h(y) \in C(\partial\Omega)$ tc $u(x)$ RISOLVA $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$

VOGLIO VEDERE CHI È $u(x)|_{\partial\Omega}$ CON u COSTRUITA COME SOPRA.

VOGLIO VEDERE $h(y) \longrightarrow u(x)|_{\partial\Omega}$ È SURGETTIVA

$$u(x)\Big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega} -h(y)\, \partial_\nu K(x-y)\, dx \Big|_{\partial\Omega}$$

PARTIAMO DAL CASO $h \equiv 1$

PROP SE $h(y) \equiv 1 \quad \forall y \in \partial\Omega \Rightarrow \dfrac{\int_{\partial\Omega} -\partial_\nu K(x-y)\, dx}{(n-2)\,\omega_{n-1}} = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in \Omega \\ \frac{1}{2} & x \in \partial\Omega \\ 0 & x \notin \bar{\Omega} \end{cases}$

(NO DM)
FARE X ESERCIZIO.

A ME PERÒ IL FATTO CHE SU $\partial\Omega$ HO UNA DISCONTINUITÀ MI INTERESSA VEDERE CHE $u(x)$ È PROLUNGABILE CON CONTINUITÀ FINO A $\partial\Omega$. È

IN GENERALE $h(y) \in C(\partial\Omega)$

$$u(x) = \frac{\int_{\partial\Omega} -h(y)K(x-y)\,d\sigma}{(n-1)\omega_{n-1}} \xrightarrow[\substack{x\in\Omega \\ x\to\bar{y}\in\partial\Omega}]{} \frac{1}{2}h(\bar{y}) - \frac{\int_{\partial\Omega} \partial_\nu K(\bar{y}-y)\,h(y)\,d\sigma}{(n-2)\omega_{n-1}}$$

e RISOLVE $\Delta u = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = \underbrace{\frac{1}{2}h(\bar{y}) - \frac{\int_{\partial\Omega}\partial_\nu K(\bar{y}-y)\,h(y)\,d\sigma}{(n-2)\omega_{n-1}}}$

VOGLIO CAPIRE SE È SURIETTIVO

$$T : C(\partial\Omega) \longrightarrow C(\partial\Omega)$$

$$h \longrightarrow -\frac{\int_{\partial\Omega} K(y-\bar{y})\,h(y)\,d\sigma}{(n-2)\omega_{n-1}}$$

È SURGETTIVO

$\boxed{\text{MI CHIEDO SE } \left(\tfrac{1}{2}I + T\right)h \text{ È SURIETTIVO.}}$ ← FREDHOLM

T È COMPATTO

INVERTIBILE + COMPATTO e INIETTIVO ⇒ È SURIETTIVO

- METODO DI SOPRA-SOTTO SOLUZIONI (DI PERRON)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

DEF $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ SI DICE SUB-ARMONICA se $u \in C(\bar{\Omega})$

$\forall x \in \Omega \quad \exists r(x) > 0 \qquad u(x) \leq \fint_{S_r(x)} u\,d\sigma \quad \forall r < r(x)$

$u \in SUB(\Omega)$

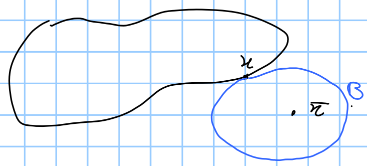
TEO (PERRON) SOTTO OPPORTUNE IPOTESI SU $\partial\Omega$

$$v(x) = \sup\left\{ w(x) \in SUB(\Omega)\cap C(\bar{\Omega}) \,\middle|\, w(y) \leq g(y) \ \forall y \in \partial\Omega \right\}$$

ALLORA $\Delta v(x) = 0$ (IND. DALLE IP SU $\partial\Omega$) MA SE FACCIO LE IP. SU $\partial\Omega$ ⇒ $v(x)|_{\partial\Omega} = g(x)$

OPPORTUNE I POTESI (AD ESEMPIO) Ω TALI CHE GODONO DELLA PROP. DELLA SFERA ESTERNA

CIOÈ $\forall x \in \partial\Omega \ \exists \ B(\bar{x}, R)$ tc $\overline{B(\bar{x}, R)} \cap \overline{\Omega} = \{x\}$



AD ESEMPIO IL QUADRATO È OK MA IL BORDO NON È REGOLARE QUINDI NON AVREI POTUTO USARE IL METODO DEL POTENZIALE

DIM TEO INIZIO DIMOSTRANDO CHE $\Delta v = 0$

LEMMA 1 SE u È UNA FUNZIONE SUB ARMONICA SU Ω (CONNESSO PER SEMPLICITÀ)

$$\Rightarrow \boxed{\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u} \quad \text{(SOLO MAX E NON IL MIN)}$$

DIM LEMMA 1 SIA $M = \max_{\overline{\Omega}} u(x)$ CONSIDERIAMO $\{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$ $= \emptyset$ / $= \Omega$

BASTA PROVARE CHE Ω È APERTO E CHIUSO

CHIUSO $\to$ OVVIO CONTROIMMAGINE DI CHIUSO DI UNA u CONTINUA

APERTO $\to$ BASTA USARE $u(x)$ SUB ARMONICA.

OSS LA DIMOSTRAZIONE FUNZIONA ANCHE SE LO FACCIO SU TUTTE LE COMP. CONNESSE DI Ω.

LEMMA 2 SE u E v SONO $SUB(\Omega) \Rightarrow$ ANCHE $\max\{u, v\} \in SUB(\Omega)$

DIM LEMMA 2 DI SICURO $\max\{u, v\} \in C(\overline{\Omega})$

SIA $x \in \Omega$ $\quad u(x) \le \fint_{S_r(x)} u \, d\sigma \le \fint_{S_r(x)} \max\{u, v\} \, d\sigma \quad \forall r < r(x)$

$v(x) \le \fint_{S_r(x)} \max\{u, v\} \, d\sigma \quad \forall r < r'(x)$

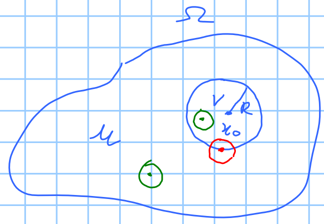
MODO ANALOGO $\quad \Rightarrow R(x) = \min\{r(x), r'(x)\}$

$$\Rightarrow \max\{u(x), v(x)\} \le \fint_{S_r(x)} \max\{u, v\} \, d\sigma \quad \forall r < R(x)$$

LEMMA 3 $u \in SUB(\Omega)$, $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$, ALLORA

$$w(x) = \begin{cases} u(x) & x \in B_R^c(x_0) \\ v(x) & x \in B_R(x_0) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \Delta v(x) = 0 \\ v|_{\partial B_R(x)} = u|_{\partial B_R(x_0)} \end{cases} \to \text{(C'È NASCOSTO POISSON)}$$

ALLORA $W(x) \in Sub(\Omega)$ e $W(x) \geq u(x)$



DIM LEMMA 3 $\quad W \in Sub(\overline{\Omega})$, $W \in C(\overline{\Omega})$ OVVIO

DA VERIFICARE LA PROP. DELLA MEDIA.

L'UNICO PUNTO SENSATO DA FARE VERIFICA È SE $x \in \partial B_R(x_0)$

⊙ = CASI FACILI DA VERIFICARE SUB ARMONICA.

VOGLIO MOSTRARE $W(x) \leq \fint_{S_r(x)} W(x)\, d\sigma$

$$W(x) = u(x) \leq \fint_{S_r(x)} u(x) \overset{?}{\leq} \int_{S_r(x)} W(x)\, d\sigma$$

$\downarrow$ ALMENO LOCALMENTE (???)

$$U - W = \begin{cases} 0 & x \in B_R^c(x_0) \\ u - v \leq 0 & x \in B_R(x_0) \end{cases}$$

$\downarrow$ È SUB ARMONICA

$\longrightarrow$ PERCHÉ SUL BORDO DI $B_R(x_0)$ HA IL MASSIMO SU ∂B

QUINDI SUL ∂B VALE 0.

LEMMA 4 (SUCCESSIONI DI FUNZIONI ARMONICHE CRESCENTI)

SIA $\{u_n\}$ e $\Delta u_n = 0$ su $B_R(0)$ e $\forall\ u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$ $x \in B_R(0)$ e $\sup_n \| u_n(x) \|_{L^\infty} < +C$

ALLORA $u_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} \overline{u}(x)$ $\forall x \in B_R(x)$ e $\overline{u}(x)$ È ARMONICA

DIM DICO CHE $\overline{u}(x) \in C(B_R(0))$ e $\overline{u}(x)$ VERIFICA IL PRINCIPIO DELLA MEDIA

$\Rightarrow$ IN QUEL CASO $\Delta \overline{u} = 0$ e $\overline{u} \in C^\infty$

PER AVERE IL PRINCIPIO DELLA MEDIA BASTA USARE LEBESGUE A

$$u_n(x) = \fint_{S_r(x)} u_n\, dx \qquad \text{MA VALE ANCHE} \qquad u_n(x) = \fint_{B_r(x)} u_n(x)\, dx$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\overline{u}(x) = \fint_{S_r(x)} \overline{u}(x) \qquad\qquad \overline{u}(x) = \fint_{B_r(x)} u_n(x)\, dx$$

L'INTEGRALE SU PALLE PASSA MEGLIO ALLA CONTINUITÀ PERCHÉ SI CONSERVA MEGLIO PER PICCOLE PERTURBAZIONI DEL CENTRO MENTRE LE SFERE PERTURBATE SI INCONTRANO IN INSIEMI "PICCOLI" E MOLTO DISTANTI DAL CENTRO.

Lezione 11

LEZIONE 12

Titolo nota 08/04/2019

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

CANDIDATA SOL

$$V(x) = \sup \left\{ w(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} w(x) \in Sub(\Omega) \cap C(\bar\Omega) \\ w(x) \leq g(y) \ \forall y \in \partial\Omega \end{array} \right\}$$

FATTI 1) $\Delta v = 0$

2) SOTTO OPPORTUNE IPOTESI SU Ω $v(x) \xrightarrow[x \to \bar x]{} g(\bar x)$ $\forall \bar x \in \partial\Omega$

DIM 1) FISSIAMO $x_0 \in \Omega$

STEP 1 DICO CHE ESISTE $h(x)$ ARMONICA SU $B(x_0, r)$ (r IN MODO CHE $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$)

tc $h(x_0) = v(x_0)$ e $h(x) \geq v(x)$ $\forall x \in B(x_0, r)$

STEP 2 $h(x) = v(x)$ $\forall x \in \overline{B(x_0, r)}$

VEDIAMO STEP 1 $\exists \, w_n(x)$ tc i) $w_n(x_0) \longrightarrow v(x_0)$

ii) w_n è $Sub(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ e

$w_n(y) \leq g(y)$ $\forall y \in \partial\Omega$

OSS IL SUP ESISTE FINITO PERCHE $\bar\Omega$ CHIUSO E LIMITATO $\Rightarrow$ $W(x)$ AMMETTE MAX SUL BORDO E SUL BORDO STANNO SOTTO g CHE è CONTINUA QUINDI SONO TUTTE EQUILIMITATE DAL MAX DI $g(x)$ SU $\partial\Omega$

INOLTRE POSSO SUPPORRE $w_n(x) \nearrow$ $\forall x \in \Omega$ e $\Delta w = 0$ in $B(x_0, R)$

ALLORA PER QUANTO VISTO LA VOLTA SCORSA IL LIMITE CRESCENTE DI ARMONICHE SE EQUILIMITATE è ANCORA ARMONICHE

DEFINISCO $h(x) = \lim_{n \to \infty}^{\nearrow \text{CRESCENTE}} w_n(x)$

SI HA $h(x_0) = \lim w_n(x_0) = V(x_0)$ E SU $B(x_0, R)$ $h(x)$ è ARMONICA

MI RESTA DA DIRE CHE $h(y) \geq v(y)$ $\forall y \in B(x_0, R)$

OSS $v(y) \geq h(y)$

$\exists\ \tilde{w}_n(y) \to v(y)$ (IN QUANTO SUP)

COME PRIMA POSSO SUPPORRE CHE $\Delta \tilde{w}_n = 0$ IN $B(x_0, R)$

E $\tilde{w}_n \nearrow$ ALLORA $\tilde{w}_n \nearrow \tilde{h}$ CON $\tilde{h}$ ARMONICA SU $B(x_0,R)$

A PATTO DI FARE UN $\sup\{w_n, \tilde{w}_n\}$ POSSO SUPPORRE CHE $\tilde{h}(x) \geq h(x)$

$\forall\ x \in B(x_0,R)$ MA $h(x_0) = v(x_0) \Rightarrow \tilde{h}(x_0) = v(x_0)$

MA h e $\tilde{h}$ SONO ARMONICHE $\tilde{h} - h \geq 0\ \forall x \in B(x_0,R)$ e $\tilde{h}(x_0) - h(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ PER IL PRINCIPIO DEL MAX A $\tilde{h} - h$ HO $\tilde{h}(x) = h(x)$ $x \in B(x_0,R)$

MA $\tilde{h}(y) = v(y) \Rightarrow h(y) = v(y)$

QUINDI LA h DI PRIMA REALIZZAVA IL SUP NON SOLO IN x_0 MA IN $B(x_0, R)$ (NON DIPENDEVA DALLA SCELTA DI w_n).

PROBLEMA SOTTO QUALI IPOTESI SU Ω POSSO ASSUMERE

$$v(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} g(\bar{x}) \qquad x \in \Omega,\ \bar{x} \in \partial\Omega$$

DEF $\bar{x} \in \partial\Omega$ SI DICE REGOLARE SE $\exists\ \varphi_{\bar{x}}$ tc

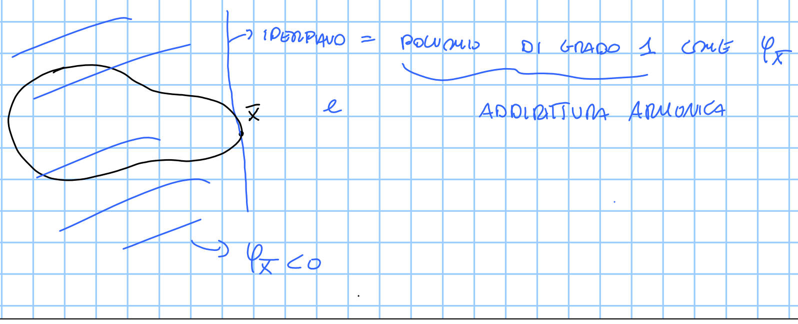
$\varphi_{\bar{x}}$ SUB $(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$\varphi_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0 \quad e \quad \varphi_{\bar{x}}(x) < 0 \quad \forall\ x \in \partial\Omega \setminus \{\bar{x}\}$$

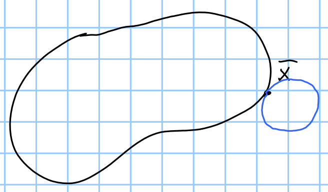
DEF Ω SI DICE REGOLARE SE $\forall \bar{x} \in \partial\Omega$ È REGOLARE

TEO SE $\bar{x} \in \partial\Omega$ È REGOLARE ALLORA $\lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} \\ \Omega}} v(x) = g(\bar{x})$ (V COSTRUITA SOPRA)

ESEMPI • Ω STRETTAMENTE CONVESSO $\Rightarrow$ Ω È REGOLARI.



• Ω HA LA PROPRIETÀ DELLA PALLA ESTERNA.



$\exists\ \overline{B(y,r)} \cap \overline{\Omega} = \{\bar{x}\}$ e $y \in \text{EXT}\ \Omega$

PRENDO $K(y-x) = \dfrac{1}{|x-\bar{x}|^{n-1}}$

SERVE A FARLA ANNULLARE IN $\bar{x}$

DIMOSTRIAMO CHE

DIM $\liminf\limits_{x \to \bar{x}} v(x) \geq g(\bar{x}) - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

CERCO UNA FUNZIONE SUB ARMONICA $S(x)$ t.c.

$S_M(x) = M\,\varphi_{\bar{x}}(x) + g(\bar{x}) - \varepsilon$ DEVO VERIFICARE CHE SE M È ABB GRANDE A $S_M(x)$ È FUNZIONE TEST. $W(x)$ (cioè $S_M(x) \leq g(x)\ \forall x \in \partial\Omega$)

SE QUESTO FOSSE VERO $\Rightarrow$ $v(x) \geq S_M(x) \geq g(\bar{x}) - 2\varepsilon$

PER CONTINUITÀ DI $\varphi_{\bar{x}} \to 0$ PER $\forall x \to \bar{x}$

QUINDI VERA $\forall x \in B_\delta(\bar{x})$

VEDIAMO CHE $S_M(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$

IL PROBLEMA È x LONTANO DA $\bar{x}$ POSSO PRENDERE M GRANDE IN MODO CHE $M\varphi_{\bar{x}}(x) < g(x) + \varepsilon$ PERCHÈ $\varphi_{\bar{x}}(x)$ HA MINIMO NEGATIVO SUL BORDO

ABBIAMO DETTO CHE $\forall g(x) \in C(\partial\Omega)\ \exists\ S_\varepsilon(x) \leq g(x)\ \forall x\, \partial\Omega$

S_ε È SUB ARMONICA e $S_\varepsilon(\bar{x}) > g(\bar{x}) - \varepsilon \quad \forall$

APPLICANDO A $-g(x)$

QUINDI $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad S_\varepsilon(y) \leq -g(y) \quad \forall y \in \partial\Omega$ e $S_\varepsilon(\bar{x}) > -g(\bar{x}) - \varepsilon$

PARTENDO DA $w(x) \in \text{Sub}(\Omega)$ e $w(y) \leq g(y) \quad \forall y \in \partial\Omega$

$\to \quad S_\varepsilon(y) + W(y) \leq 0 \quad \forall y \in \partial\Omega \Rightarrow$ (PER SUB ARMONICITÀ + P. MAX)

$S_\varepsilon(x) + W(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$

MA ALLORA $w(x) \le -S_\varepsilon(x) \le g(\bar{x})+\varepsilon$

$\downarrow$ IN UN INTORNO PICCOLO DI $\bar{x}$

$\Rightarrow \quad v(x) = \sup w(x) \le g(\bar{x}) + \varepsilon$ IN UN INTORNO $\bar{x}$

ALLORA HO CHE $v(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} g(\bar{x}) \quad x \in \Omega \quad \bar{x} \in \partial\Omega$

ESEMPIO (INSIEME CATTIVO)

IN $\mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{B}^2(0,1) \setminus \{(0,0)\} = \Omega$

CERCO $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(0,0) = \lambda \\ u|_{\{x^2+y^2=1\}} = g(x,y) \end{cases}$ DICO CHE $\exists!\, \lambda_g$ TC IL PROBLEMA HA SOLUZIONE.

SICURAMENTE CON LA FORMULA DI POISSON RISOLVO $\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 & \text{in } \mathcal{B}(0,1) \\ \tilde{u}|_{\partial\mathcal{B}(0,1)} = g(x,y) \end{cases}$

MI SCORDO DEL PROBLEMA IN $(0,0)$

$\Rightarrow \tilde{u}$ RISOLVE IL PROBLEMA DI SOPRA CON $\lambda^* = \fint_{S^1(1)} g \, d\sigma$

$\downarrow$ PRINCIPIO DELLA MEDIA.

SIA $u(x)$ LA SOL CON λ GENERICO e $\tilde{u}$ QUELLA CON λ^*

SIA $u(x) - \tilde{u}(x) = w(x)$ $\qquad w(y) = 0$ SE $y \in S^1$

$\Delta w(x) = 0$ SE $x \in \mathcal{B}^2(0,1) \setminus \{(0,0)\}$

$w(x)$ È LIMITATA (DIFFERENZA DI LIMITATE)

(PROP. DELLE FUNZIONI OLOMORFE ($\Delta w = 0$) SE w OLOMORFA TRANNE IN $(0,0)$ E LIMITATA

$\Rightarrow$ POSSO ESTENDERLA IN MODO OLOMORFA IN $(0,0)$

$\Rightarrow \Delta w = 0$ ANCHE IN $(0,0)$ $\Rightarrow u(0,0) - \tilde{u}(0,0) = 0$

$\downarrow$ PERCHÉ $w|_{S^1} = 0$

PER IL PRINCIPIO DELLA MEDIA

DOMANDA PER LA STESSA COSA IN DIMENSIONE MAGGIORE?

TEO RIMOZIONE DELLE SINGOLARITÀ PER FUNZIONI ARMONICHE IN DIMENSIONE $n \geq 2$

SIA
$$\begin{cases} u(x) \in C^2(B^n \setminus \{0\}) \quad e \quad \Delta u = 0 \quad su \quad B^n \setminus \{0\} \\ u(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right) \quad se \ n \geq 3 \\ u(x) = o(\log |x|) \quad se \ n = 2 \end{cases}$$

ALLORA u SI ESTENDE CON CONTINUITÀ IN $\{0\}$ E L'ESTESA È ANCORA ARMONICA.

DIM PROSSIMA LEZIONE

LEZIONE 13

Titolo nota 10/04/2019

TEOREMA (RIMOZIONE DELLE SINGOLARITÀ)

SIA $n \geq 2$ u ARMONICA SU $\Omega \setminus \{x_0\}$ SUPPONIAMO CHE

in x_0 $\quad |u(x)| = o\left(\dfrac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\right)$ se $n \geq 3$

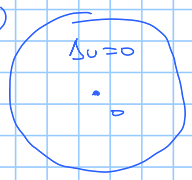
$|u(x)| = o\left(\log |x-x_0|\right)$ se $n=2$

ALLORA $u(x)$ SI ESTENDE SU Ω E RIMANE ARMONICA SU Ω.

DIM SUPPONIAMO $n \geq 3$ ($n=2$ EQUIVALENTE)

SUPPONIAMO $x_0 = 0$ e $\Omega = B^n(0)$ (TANTO Ω È APERTO È UNA PALLETTA CI STA)

POSSO INOLTRE PENSARE CHE $g(x) \in C^\infty(\partial B)$ PERCHÉ $u \in C^\infty(\Omega \setminus \{x_0\})$



$|u(x)| = o\left(\dfrac{1}{|x|^{n-2}}\right)$

COMINCIO A ESTENDERE QUESTA $g(x)$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{su } B^n(0) \\ v|_{\partial B^n(0)} = g(x) \end{cases}$$

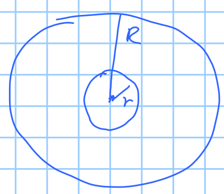
VOGLIO CHE $v(x) - u(x) \equiv w(x) \equiv 0$ su $B^n(0) \setminus \{0\}$

A MENO DI PASSARE A $w(x)$ POSSO SUPPORRE CHE IL DATO AL BORDO FOSSE 0.

QUINDI POSSO SUPPORRE $\begin{cases} \Delta u = 0 & B^n(0) \setminus \{0\} \\ u|_{\partial B^n(0)} = 0 \end{cases}$ e $|u(x)| = o\left(\dfrac{1}{|x|^{n-2}}\right)$

VOGLIO DEDURRE CHE $u(x) \equiv 0$ su $B^n(0) \setminus \{0\}$

DICO CHE $\boxed{u|_{S_r} \equiv 0 \quad \forall r > 0}$



SIANO $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right)$

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x)\big|_{\partial B^n(0)} = 0 \\ \Delta u_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{su } B^n(0) \setminus \{0\} \end{cases}$$

$u_\varepsilon(x) \leq \frac{\varepsilon}{R^{n-2}}$ $|x| < r_\varepsilon$ PERCHÉ $\underbrace{u(x)}_{o\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)} - \varepsilon \frac{1}{|x|^{n-2}} < 0$

PER IL MASSIMO DEBOLE $u_\varepsilon(x) \leq \frac{\varepsilon}{R^{n-2}}$ $\forall$ $r_\varepsilon < |x| < R$

$\Rightarrow$ PRENDO POI $r_\varepsilon < r$ $\Rightarrow$ $u_\varepsilon(x) \leq \frac{\varepsilon}{R^{n-2}}$ su $|x| = r$

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right) \leq \frac{\varepsilon}{R^{n-2}}$$

$$\Rightarrow u(x) \leq \frac{\varepsilon}{r^{n-2}} \quad \text{su } |x| = r$$

MANDANDO $\varepsilon \to 0$ $\Rightarrow$ $u(x) \leq 0$ $\forall$ $|x| = r$ (e $\forall r > 0$)

QUINDI $u(x) \leq 0$ su $B^n(0) \setminus \{0\}$

QUESTO RAGIONAMENTO SI RIPETE PER $-u(x)$ e SI OTTIENE $u(x) \geq 0$ su $B^n(0) \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ $u(x) \equiv 0$ QUINDI u SI ESTENDE su $B^n(0)$.

<u>PRINCIPIO MASSIMO FORTE</u> (SENZA USARE IL PRINCIPIO DELLA MEDIA)

<u>MAX DEBOLE</u> : $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ con $\Delta u = 0$

<u>MAX FORTE</u> : DEBOLE + SE $\exists\, \bar{x} \in \Omega$ t.c. $u(\bar{x}) = \max_{\overline{\Omega}} u$ $\Rightarrow$ $u(x) \equiv \text{COSTANTE} \equiv u(\bar{x})$

DIM usiamo il seguente lemma

LEMMA DI HÖPF · Sia $u(x) \in C^2(B_R^n) \cap C(\overline{B_R^n})$, $\Delta u = 0$ su B_R^n

· $\exists\, x_0 \in \partial B_R^n$ t.c. $u(x_0) > u(x)$ $\forall x \in \overline{B_R^n} \setminus \{x_0\}$

Allora se esiste $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ è >0

Vediamo perché il lemma implica il max forte.

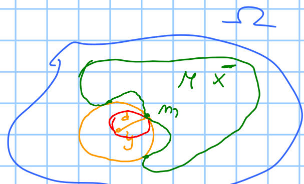
Supponiamo che esista $\bar{x} \in B_R^n$ tc $u(\bar{x}) = \max_{\overline{\Omega}} u$

Siano $\{x \in \overline{\Omega} \mid u(x) = u(\bar{x})\} = M$

1) coincide con $\overline{\Omega}$ $\Rightarrow$ ho finito

2) $M \subsetneq \overline{\Omega}$

2) $\Rightarrow$ $\exists\, y \in \Omega$ tc $y \notin M$



Sia $m \in M$ tc $\|y - m\| = d(y, M) = d$

Quindi $B^n(y,d) \cap M = \emptyset$ e $m \in \partial B^n(y,d)$ (ma potrebbe non essere l'unico $m \in M$)

Quindi prendo un $m \in M \cap \partial B^n(y,d)$ e ne prendo una palla tangente interna a $B^n(y,d)$ (tipo di raggio $d/2$) adesso chiamo y_0 il nuovo centro

Allora $B(y_0, d/2) \cap M = \emptyset$ e $\overline{B(y_0, d/2)} \cap M = \{m\}$ $\Rightarrow$ usando il lemma di Hopf

ho $\underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{\text{esiste perché } m \text{ è interno.}}(m) > 0$ assurdo.

Se per assurdo $m \in \partial\Omega$ $\Rightarrow$ concludo con principio del max (e del min) $\Rightarrow$

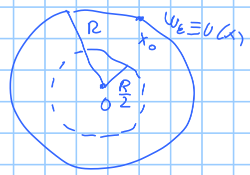
$u \equiv$ costante. Allora m è interno e posso sempre trovare un y abb vicino a m e + lontano da $\partial\Omega$ in modo che la costruzione funzioni.

DIM (LEMMA DI HOPF) SUPPONIAMO $B^n_R(0)$

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon \underbrace{\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right)}_{>0} \qquad u_\varepsilon(x)\Big|_{\partial B^n(0)} = u(x)\Big|_{\partial B^n(0)}$$

A PATTO $\varepsilon \ll 1$

$$u_\varepsilon(x)\Big|_{S_{\frac{R}{2}}} < u(x_0)$$



PER IL MAX DEBOLE SO CHE $u_\varepsilon(x) \leq u(x_0)$

$$\forall\ \frac{R}{2} \leq |x| \leq R \implies \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$$

$$\implies \frac{\partial u_\varepsilon(x_0)}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \varepsilon\, \overbrace{\partial_\nu \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right)}^{<0} \geq 0$$

$$\implies \boxed{\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0}$$

EQUAZIONE DEL CALORE

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

(TRATTEREMO IL CASO $x \in \mathbb{R}^n$ E NON Ω LIMITATO)

PIANO DI LAVORO

- ESISTENZA DI SOLUZIONI
- UNICITA'? $\exists$ SOL. UNICA $\not\equiv 0$ CON $\varphi(x) \equiv 0$
- SOL. DEL TIPO $\boxed{e^{t\Delta} \varphi(x)} \rightsquigarrow$ SEMIGRUPPO DEL CALORE
- CRITERI DI UNICITA' ASSOLUTI: i) $|u(t,x)| \leq C e^{|x|^2}$ $\forall t\ [0,T]$ ALLORA C'È UNICITÀ

  ii) $\varphi(x) \geq 0 \implies$ ESISTE UNICA SOLUZIONE POSITIVA
- $\varphi \qquad e^{t\Delta}\varphi \xrightarrow{t \to 0^+} \varphi$ IN CHE SENSO HO QUESTA CONV?

  i) SE $\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow$ CONVERGENZA PUNTUALE

  ii) $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p \neq +\infty) \longrightarrow$ CONVERGENZA IN L^p

  iii) $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $e^{t\Delta}\varphi \xrightarrow[q.o.]{t \to 0^+} \varphi$? (SENZA ESTRARRE SOTTOSUCC.)

COSTRUIAMO $\boxed{e^{t\Delta}\varphi}$ CON CONTI FORMALI

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u_t(0,x) = \varphi(x) \end{cases} \xrightarrow[\text{DI FOURIER}]{\text{TRASFORMATA}} \begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t,x) = 0 \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi)$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\right) * \varphi(x) = e^{\Delta t}\varphi$$

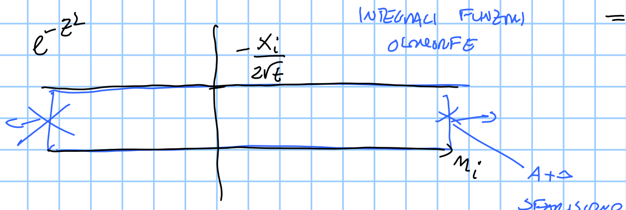
$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2 + ix\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi_i^2 + ix_i\xi_i}\, d\xi_i =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{\left(i\sqrt{t}\xi_i + \frac{x_i}{2\sqrt{t}}\right)^2 - \frac{x_i^2}{4t}}\, d\xi_i =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{\left[i\left(\overbrace{\sqrt{t}\xi_i + \frac{x_i}{2\sqrt{t}i}}^{\eta_i}\right)\right]^2} \underbrace{d\xi_i}_{\frac{d\eta_i}{\sqrt{t}}}$$

$$= \frac{1}{t^{n/2}}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\eta_i - \frac{ix_i}{2\sqrt{t}}\right)^2}\, d\eta_i =$$



INTEGRALI FUNZIONI OLOMORFE

$\Rightarrow$ è COME FARE L'INT A $x_i = 0$

$$= \frac{1}{t^{n/2}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta_i^2}\, d\eta_i$$

$$e^{\Delta t} * \varphi = \frac{c}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} * \varphi$$

LEZIONE 14

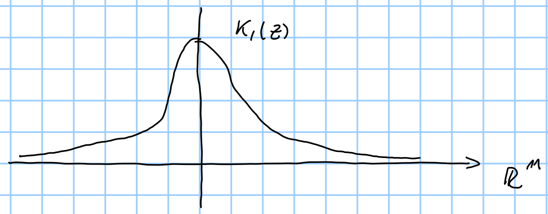
Titolo nota 15/04/2019

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

UNA POSSIBILE SOL. $u(t,x) = K_t(x) *_x \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)\, \varphi(y)\, dy$

$$K_t(z) = \frac{e^{-\frac{|z|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}$$

$$K_t(z) = K_1\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{t^{n/2}}$$



<u>OSS</u> $\int_{\mathbb{R}} K_t(z)\, dz = 1 \quad \forall t > 0$ (FARE IL CONTO)

<u>OSS</u> LA FUNZIONE $\underset{\Psi}{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} (t,x) \longrightarrow \boxed{K_t(x)}$ È SOL. DELL'EQUAZIONE DEL CALORE

(IGNORO $\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}$) $\partial_t K_t(x) = \dfrac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{|x|^2}{4t^2} \cancel{t^{n/2}} - e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{n}{2} \cancel{t^{\frac{n}{2}-1}}}{t^{2 \cdot n/2}} = \dfrac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right)}{t^{n/2}}$

? ||

$$\Delta_x K_t(x) = \frac{1}{t^{n/2}} \left(\partial_r^2 e^{-\frac{r^2}{4t}} + \frac{n-1}{r} \partial_r e^{-\frac{r^2}{4t}} \right) =$$

$$\frac{1}{t^{n/2}} \left(e^{-\frac{r^2}{4t}} \left(\frac{r^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right) + \frac{n-1}{\cancel{r}} \left(-\frac{\cancel{r}}{2t} \right) e^{-\frac{r^2}{4t}} \right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{n/2}} \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right) \quad \underline{\text{OK}}$$

<u>DOMANDE</u> 1) SE CONSIDERO $K_t(x) * \varphi(x)$ È ANCORA SOL. DI $\partial_t u - \Delta_x u = 0$

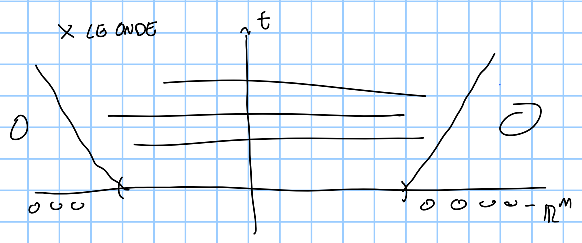
2) $K_t * \varphi \xrightarrow{t \to 0^+} \varphi$? PER CHE TIPO DI CONVERGENZE?

1) $\partial_t \left(K_t(x) * \varphi\right) \overset{?}{=} \Delta_x \left(K_t(x) * \varphi(x)\right)$

$$\underbrace{\partial_t K_t(x) * \varphi}_{=\partial_t(K_t(x)*\varphi)} = \underbrace{\left(\Delta_x K_t(x)\right) * \varphi(x)}_{=\Delta_x(K_t(x)*\varphi(x))}$$

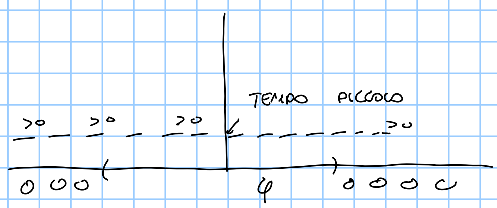
RICORDA: LA CONVOLUZIONE PORTA DENTRO LE DERIVATE SU UNA DELLE FUNZIONI E POSSO SCEGLIERE QUALE

OSS PER L'EQUAZIONE DEL CALORE NON PUÒ VALERE LA VELOCITÀ FINITA DI PROPAGAZIONE



PER IL CALORE, $\varphi \geq 0$ $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\varphi \not\equiv 0$

$u(t,x) = \int K_t(x-y)\,\varphi(y)\,dy > 0$ $\forall t>0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$



INIZIAMO A DARE RISPOSTE A 2

TEO SIA $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$

1) $u(t,x) = K_t(x) * \varphi(x)$ È SOL. DI $\partial_t u - \Delta_x u = 0$

2) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\lim_{(t,x)\to(0^+,x_0)} u(t,x) = \varphi(x_0)$ (LIM. PUNTUALE)

DIM (1) FATTO

(2) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c. $\left|\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)\,\varphi(y)\,dy - \varphi(x_0)\right| < \varepsilon$ SE $t<\delta$ $\|x-x_0\|<\delta$

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_0)\int_{\mathbb{R}} K_t(x-y)\,dy, \quad \int_{\mathbb{R}} K_t(x-y)\,dy = 1$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)\left(\varphi(y)-\varphi(x_0)\right)dy\right| \leq$$

PER CONTINUITÀ PER φ SE $|y-x_0| \leq \delta \Rightarrow |\varphi(x_0)-\varphi(y)| < \varepsilon$

$$\leq \underbrace{\int_{|x_0-y|\leq\delta} K_t(x-y)\,\underset{\varepsilon}{\underbrace{|\varphi(y)-\varphi(x_0)|}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{|x_0-y|\geq\delta} K_t(x-y)\,|\varphi(y)-\varphi(x_0)|}_{I_2}$$

$$I_1 \leq \varepsilon \int_{|x_0-y|<\delta} K_t(x-y) \leq \varepsilon$$

$$I_2 \quad x-y=z \qquad \int_{|x-z-x_0|>\delta} K_t(z)\,\underbrace{|\varphi(x+z)-\varphi(x_0)|}_{\leq 2\|\varphi\|_\infty<+\infty}\,dz \leq$$

$$\leq 2\|\varphi\|_\infty \int_{\underbrace{|x-z-x_0|>\delta}} K_t(z)\,dz \leq \int_{|z|>\frac{\delta}{2}} K_t(z)\,dz \cdot 2\|\varphi\|_\infty$$

SE $|x-x_0|<\frac{\delta}{2}$ (DELTA VECCHIO)

$$\Rightarrow |x-z-x_0|>\delta \subseteq B_z^c\left(0,\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\leq 2\|\varphi\|_\infty \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{|z|>\frac{\delta}{2}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} \frac{dz}{t^{n/2}} \overset{\frac{z}{\sqrt{t}}=w}{=}$$

$$= C \int_{|w|>\frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-|w|^2}\,dw < \varepsilon$$

$\frac{\delta}{2\sqrt{t}} \xrightarrow{t\to 0^+} +\infty$

PER IL TEO DI LEBESGUE.

ESERCIZIO

SE $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap U\mathcal{C}$ (UNIFORMEMENTE) ALLORA

$u(t,x) \xrightarrow{t\to 0^+} \varphi(x)$ UNIFORMEMENTE IN L^∞

(STESSA DIM SCEGLIENDO IL δ IN MODO UNIFORME)

OSS. SE $\varphi(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ IN GENERALE $u(t,x) \underset{L^\infty}{\overset{t\to 0^+}{\not\longrightarrow}} \varphi(x)$ (PERCHE ALTRIMENTI φ DOVREBBE ESSERE ALMENO CONTINUA)

DOMANDA SE $\varphi(x)\in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow e^{t\Delta}\varphi \underset{L^p}{\xrightarrow{t\to 0^+}} \varphi$? (VERO)

ESERCIZIO DIMOSTRARE CHE I POLINOMI SONO DENSI IN $C^0(\Omega)$ CON $\bar{\Omega}$ COMPATTO

SUGG 1) ESTENDERE φ A $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

2) $e^{t\Delta}\varphi$

3) TRONCARE LO SVILUPPO DI $e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ E ACCORGERSI CHE BASTANO UN NUMERO FINITO DI ORDINI PER AVERE LA CONV. CERCATA

TEOREMA $1 \le p < +\infty$, $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$e^{t\Delta}\varphi = K_t(x) * \varphi(x) \qquad t>0$$

ALLORA i) $\partial_t\left(e^{t\Delta}\varphi\right) - \Delta_x\left(e^{t\Delta}\varphi\right) = 0$

ii) $e^{t\Delta}\varphi \in C^\infty\left((0,+\infty) \times \mathbb{R}^n\right)$

iii) $\|e^{t\Delta}\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$

DIM i) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ SONO DENSE IN $L^p(\mathbb{R}^n)$

ii) $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ALLORA $\|e^{t\Delta}\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t\to 0^+} 0$ NON UN LIMITATO.

iii) DIS. DI YOUNG $\|K * \varphi\|_{L^q} \le \|K\|_{L^r} \|\varphi\|_{L^p}$

$$\text{se } 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$$

SE $\boxed{r=1 \quad \|K*\varphi\|_{L^p} \le \|K\|_{L^1} \cdot \|\varphi\|_{L^p}}$

VEDIAMO CHE (1) (2) (3) $\Rightarrow$ TESI (POI VEDREMO 2)

$\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ SIA $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\varphi_n \to \varphi$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$

PER (2) $e^{t\Delta}\varphi_n \xrightarrow{t\to 0^+} \varphi_n$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|e^{t\Delta}\varphi - \varphi\|_{L^p} \le \|e^{t\Delta}(\varphi - \varphi_n)\|_{L^p} + \|e^{t\Delta}\varphi_n - \varphi_n\|_{L^p} + \|\varphi_n - \varphi\|_{L^p} \le$$

USANDO (1) (2) e (3); $t\to 0^+$ UNA VOLTA FISSATO n_0; $\forall n \ge n_0$

$$\le \underbrace{\|K_t\|_{L^1}}_{=1} \underbrace{\|\varphi - \varphi_n\|_{L^p}}_{\le \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

VEDIAMO DI MOSTRARE (2)

$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \| e^{t\Delta}\varphi - \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t \to 0^+} 0$

PERCHÈ LA NORMA L^∞ CONTROLLA LA $\|\cdot\|_p$ SUI LIMITATI

$\| e^{t\Delta}\varphi - \varphi \|_{L^\infty} \xrightarrow{t \to 0^+} 0 \quad \forall R>0 \ \exists t_R>0 \quad \| e^{t\Delta}\varphi - \varphi \|_{L^p(B_R)} < \varepsilon \ \text{ se } t < t_R$

RESTA DA VEDERE CHE $\| e^{t\Delta}\varphi - \varphi \|_{L^p(B_R^c)} \leq \| e^{t\Delta}\varphi \|_{L^p(B_R^c)} + \| \varphi \|_{L^p(B_R^c)} < \varepsilon$

TRASCURABILE A MENO DI PRENDERE R ABB. GRANDE PERCHÈ φ È A SUPP. COMPATTO.

STUDIAMO $e^{t\Delta}\varphi(x)$ SE $|x| > R$

$$\int_{|y|<M} \frac{e^{-\frac{|x-y|}{4t}}}{t^{n/2}} \cdot \varphi(y)\, dy \leq \sup \varphi \ C(-M, M)^n$$

$$\leq \underbrace{C}_{\varphi \text{ è limitata}} \int_{|y|<M} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t^2}}}{t^{n/2}}\, dt \xrightarrow[|x| \gg M]{} 0$$

FARE IL CONTO.

QUINDI FACENDO LA NORMA $L^p \longrightarrow 0$

LEZIONE 15

Titolo nota 17/04/2019

TEO (TYCHONOFF) $\forall\ \exists\ u(t,x) \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}) \cap C^\infty(((0,\infty)\times\mathbb{R}) \setminus \{0\})$

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial^2_x u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$$

DIM (COSA AL MOMENTO DIMOSTRATA MA A t FISSATO u È ANALITICA REALE)

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k}(t)\, x^{2k}$$

POSSO CONSIDERARE LE POTENZE PARI PERCHÉ

$u(t,x)$ e $u(t,-x)$ SONO SOL.

CONTO FORMALE

$g_{2k}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$ (CONDIZIONI AL BORDO)

$g_{2k}'(t) = (2k+2)(2k+1)\, g_{2k+2}(t)$ (SOL DELL'EQUAZIONE)

UNA TROVATE LE $g_{2k}(t)$ DEVO GIUSTIFICARE CHE LA SERIE E LE DERIVATE CONV. UNIFORMEMENTE SUI COMPATTI DI $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ PER ESSERE SICURO DI POTER DERIVARE SOTTO IL SEGNO DI SERIE.

$g_0(t) = f(t) \qquad f(0) = 0$

$g_0'(t) = f'(t) = 1\cdot 2\, g_2(t) \qquad g_2(t) = \frac{1}{2!} f'(t)$

$\frac{1}{2!} f''(t) = g_2'(t) = 3\cdot 4\, g_4(t) \qquad g_4(t) = \frac{1}{4!} f''(t)$

$g_{2k}(t) = \frac{1}{(2k)!} f^{(k)}(t)$ con $g_{2k}(0) = 0 \Rightarrow f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$

QUINDI PERDO L'ANALITICITÀ PERCHÉ HA SVILUPPO NULLO MA NON È LA FUNZIONE NULLA.

PRENDO $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$

Q: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{k}(t)\, x^{2k} \xrightarrow{\text{unif}} u(t,x)$ in $[0,T]\times[-R,R]$ $\forall T$ e $R>0$?

PROVIAMO CHE $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{[0,+\infty)\times[-R,R]} \left|\frac{1}{(2k)!} f^{(k)}(t)\, x^{2k}\right| \le$

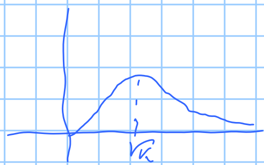
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^{2k}}{(2k)!} \sup_{[0,+\infty)} \left|f^{(k)}(t)\right|$$

LEMMA $\exists\, \vartheta \in (0,1)$ $\quad |f^{k}(t)| \le \frac{k!\, e^{-\frac{1}{2t^2}}}{(\vartheta\cdot t)^k}$ $\quad \forall k, \forall t$

(LASCIAMO A DOPO LA DIM. DEL LEMMA)

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^{2k}}{(2k)!}\, \frac{k!}{\vartheta^k} \sup_{t\in[0,+\infty)} \left|\frac{e^{-\frac{1}{2t^2}}}{t^k}\right| =$$

$$= \sup_{s\in(0,\infty)} s^k e^{-\frac{s^2}{2}}$$



$$e^{-\frac{s^2}{2}}\left(k s^{k-1} - s^{k+1}\right)$$

$$e^{-s^2/2} s^{k-1}\left(k - s^2\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^{2k}}{(2k)!}\, \frac{k!}{\vartheta^k}\, k^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{k}{2}}$$ MOSTRIAMO CHE È CONVERGENTE

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{\vartheta\sqrt{e}}\right)^k k^{k/2} \underbrace{\frac{k!}{(2k)!}}_{\le \frac{1}{k!}} \le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{\vartheta\sqrt{e}}\right)^k \frac{k^{k/2}}{k!}$$ RESTA DA VEDERE CHE CONV.

RADICE K-ESIMA

MODO BRUTTO DI FARE I CONTI

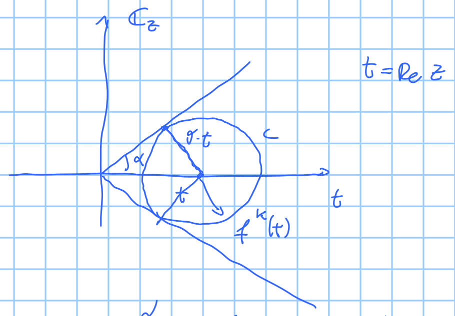
$$\sqrt[k]{\left(\frac{R^2}{\sqrt{e}\,\vartheta}\right)^k \frac{k^{k/2}}{k!}} = \frac{R^2}{\sqrt{e}\,\vartheta}\, \frac{\sqrt{k}}{\sqrt[k]{k!}} \underset{\text{STIRLING}}{\simeq} \frac{R^2}{\sqrt{e}\,\vartheta}\, \frac{\sqrt{k}}{\sqrt[k]{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k}} =$$

$$= \frac{R^2}{\sqrt{e}\,\vartheta}\, \frac{\sqrt{k}}{\sqrt[2k]{2\pi k}} \cdot \frac{e}{k} \longrightarrow 0$$

ESERCIZIO USANDO LO STESSO LEMMA ANCHE LE SERIE DELLE DERIVATE CONVERGONO UNIF.

DIM LEMMA IDEA CHE USEREMO: USARE LA VARIABILE COMPLESSA E LA STIMA SULLA FORMULA DI CAUCHY.

(ESERCIZIO: PROVARE RESTANDO IN $\mathbb{R}$)



$\vartheta = \sin\alpha$

RAGGIO $= \vartheta \cdot t$

α LO SCELGO A POSTERIORI

$e^{-\frac{1}{z^2}}$ è OLOMORFA FUORI DA ZERO

$$f^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{C_t} \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{(z-t)^{k+1}}\, dz$$

$$\left| f^{(k)}(t) \right| \le \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left|e^{-\frac{1}{z^2}}\right|}{\underbrace{|z-t|^{k+1}}_{= (\vartheta t)^{k+1}}} (\vartheta t)\, ds =$$

$$= \frac{k!}{\cancel{2\pi}} \sup_{z \in C(t,\vartheta t)} \left|e^{-\frac{1}{z^2}}\right| \frac{1}{(\vartheta t)^k} \cdot \cancel{\int_0^{2\pi} 1\, ds} =$$

SE $z = r e^{i\varphi}$ $\qquad z^{-2} = \frac{1}{r^2} e^{-i 2\varphi}$

$$\sup_{C(t,\vartheta t)} \left| e^{-\frac{1}{z^2}} \right| = \left| e^{-\frac{1}{r^2}(\cos 2\varphi - i \sin(2\varphi))} \right| = e^{-\frac{\cos(2\varphi)}{r^2}} =$$

$$= e^{-\inf_{(r,\varphi)} \frac{\cos(2\varphi)}{r^2}} = e^{-\frac{\cos(2\alpha)}{[(1+\vartheta)t]^2}}$$

$\vartheta \to \sin\alpha$

$$\frac{\cos(2\alpha)}{(1+\sin\alpha)^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sup = e^{-\frac{1}{2t^2}}$$

$$2(1 - 2\sin^2\alpha) = 1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha$$

$$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 3 = 0$$

MA QUINDI $e^{t\Delta}$ φ + TIC. NON È PIÙ UNICA ALLORA COME SCELGO LE SOLUZIONI MIGLIORI?

TEOREMI DI UNICITÀ

TEO Sia $u(t,x) \in C([0,+\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 & \text{in } (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che esista $A(t)$ crescente t.c. $|u(t,x)| \leq A(t) e^{A(t)|x|^2}$

Allora $u(t,x) \equiv 0$

OSS In realtà dimostreremo che

Sia $u(t,x) \in C([0,T) \times \mathbb{R}^n) \cap C^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^n)$

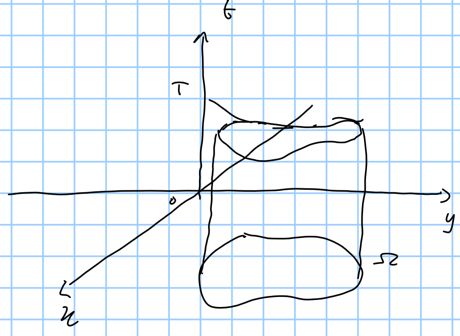
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 & \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che esista A costante t.c. $|u(t,x)| \leq A e^{A|x|^2}$

Allora $u(t,x) \equiv 0$ in $[0,T) \times \mathbb{R}$ iterando poi si ha il teorema

PRINCIPIO DEL MAX (per calore)

$u(t,x)$ sol. $\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$ in $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$



Consideriamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato

su $\overline{\Omega} \times [0,T]$

Allora il $\max\limits_{\overline{\Omega} \times [0,T]} u(t,x) = \max\limits_{\partial_p(\overline{\Omega} \times [0,T])} u(t,x)$

$\partial_p \to$ frontiera parabolica $= \overline{\Omega} \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0,T]$

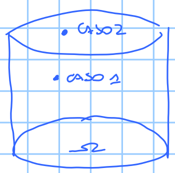
OSS (È in forma debole nel senso che ammetto max interni o sulla base superiore. C'è anche la versione forte ma non la vedremo.)

DIM (PRINCIPIO DEL MAX)

SE $\partial_t v - \Delta_x v < 0 \Rightarrow \max_{\bar{\Omega}\times[0,T]} v = \max_{\partial_p(\bar{\Omega}\times[0,T])} v$

SE PROVO QUANTO SOPRA ALLORA $u_\varepsilon(x) = u(t,x) + \varepsilon |x|^2$ SODDISFA SOPRA.

QUINDI $\max_{\bar{\Omega}\times[0,T]} u_\varepsilon = \max_{\partial_p(\bar{\Omega}\times[0,T])} u_\varepsilon$ PASSANDO AL LIMITE PER $\varepsilon \to 0$ HO LA TESI.



CASO 1 $\partial_t v = 0$ (PERCHÈ $\nabla_{t,x} v = 0$)

e $\Delta v \le 0 \Rightarrow -\Delta v \ge 0$ MA $\partial_t v - \Delta v < 0$!!

CASO 2 $\partial_t v \ge 0$ PERCHÈ LA RESTRIZIONE A t È UN MAX SU $[0,T]$

su $\bar{\Omega}\times\{t\}$ È MAX $\Rightarrow \Delta_x v \le 0$

ALLORA $\partial_t v - \Delta_x v \ge 0$!!

RESTA DA VEDERE COME IL PRINCIPIO DEL MAX IMPLICA IL CRITERIO DI UNICITÀ

LEZIONE 16

Titolo nota 29/04/2019

TEO $\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$

$\exists$ AL PIÙ UNA SOLUZIONE $\forall$ $|u(t,x)| \leq A e^{A|x|^2}$ in $[0,1]$

DIM PROVIAMO SE $\varphi = 0$ e $|u(t,x)| \leq A e^{A|x|^2} \Rightarrow u \equiv 0$

RICHIAMO PRINCIPIO MAX FORMA DEBOLE EQ. CALORE

SE $\partial_t v - \Delta v = 0 \Rightarrow \max\limits_{\bar\Omega \times [0,T]} v(t,x) = \max\limits_{\partial_p(\bar\Omega \times [0,T])} v(t,x)$

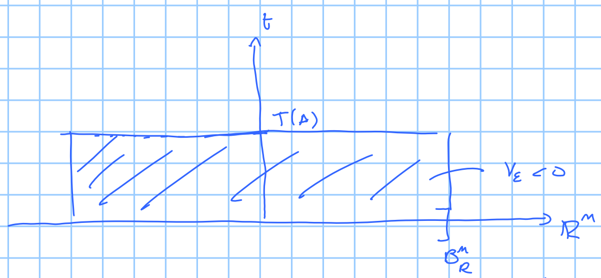
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ LIMITATO

DICO CHE $\exists\ w(t,x)$ tc

$\partial_t w - \Delta w = 0$ + PRINCIPIO MAX MI DA LA TESI.

$w(t,x) \geq c\, e^{2A|x|^2}$ $(t,x) \in [0, T(A)] \times \mathbb{R}^n$

CONSIDERO $v_\varepsilon(t,x) = u(t,x) - \varepsilon w(t,x)$ POSSO APPLICARGLI IL PRINCIPIO DEL MAX



VEDIAMO COSA FA $v_\varepsilon(t,x)$ SU $\partial_p\left(B_R^n \times [0, T(A)]\right)$

SU $t=0$ $v_\varepsilon(0,x) < 0$

PRESO R ABB. GRANDE (R_ε) SU $\partial B^n_{R_\varepsilon} \times [0, T(A)]$ $v_\varepsilon(t,x) < 0$

PER IL PRINCIPIO DEL MAX A $v_\varepsilon(t,x)$ DEDUCIAMO

CHE $v_\varepsilon(t,x) \leq 0$ $\forall (t,x) \in [0,T(A)] \times B^n_{R_\varepsilon}$

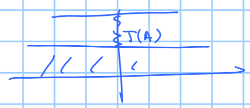
$\Rightarrow u(t,x) \leq \varepsilon w(t,x)$

$\forall (t,x) \in [0, T(A)] \times B^n_{R}$ A PATTO DI PRENDERE R_ε AB. LA DIS. SOPRA VALE $\forall \varepsilon$

$\Rightarrow \quad u(\bar t, \bar x) \leq \varepsilon\, W(\bar t, \bar x) \quad \Rightarrow \quad u(\bar t, \bar x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u(\bar t, \bar x) = 0$

(PER t GRANDI RIFACCIO PARTIRE IL PROB. DI CAUCHY DA $t_0 = T(A)$ CON $\varphi \equiv 0$

E GUADAGNO ALTRI TEMPI E ITERO ...)



VEDIAMO COME COSTRUIRE $W(t,x)$

IDEA $W(t,x) = \dfrac{c}{|t|^{n/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ SODDISFA L'EQ. DEL CALORE ANCHE PER $t<0$ MA LA SINGOLARITÀ È IN $t<0$ ALLORA LA TRASLO IN ALTO.

PRESO $s>0$

$$W_s(t,x) = \frac{c}{|t-s|^{n/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4(t-s)}}$$

A PATTO DI PRENDERE s PICCOLO E $0<t<s \Rightarrow -\dfrac{1}{4(t-s)} \geq M \gg 1$

<u>TEOREMA</u> SUPPONIAMO $\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$ ALLORA ESISTE AL PIÙ UNA SOL $u(t,x) \geq 0$

<u>STRATEGIA</u>: SIA $u(t,x)$ UNA SOL ≥ 0 ALLORA $e^{t\Delta}\varphi(x) \leq u(t,x)$

$K_t * \varphi \to$ HA SENSO POICHÉ L'IPOTESI $\varphi \geq 0$ MI DICE CHE LA CONVOLUZIONE È DEF. EVENT. VALE $+\infty$

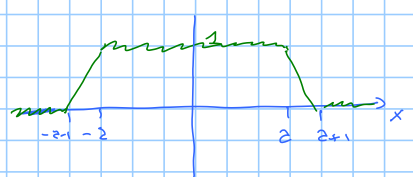
• ADESSO $w(t,x) = u(t,x) - e^{t\Delta}\varphi$

$\left.\begin{array}{l} w(t,x) \geq 0 \\ \partial_t w - \Delta w = 0 \\ w(0,x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ SE DIMOSTRO $w \equiv 0$ HO FINITO.

MOSTRIAMO LA PRIMA PROPOSIZIONE.

FISSIAMO $a \geq 0$

$\chi_a(x)$



CHIAMO $\varphi_a(x) = \chi_a(x)\varphi(x)$

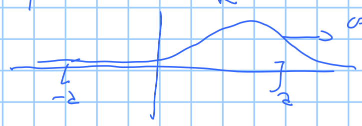
DICO CHE $V_a(t,x) = e^{t\Delta}\varphi_a(x) \quad \forall a>0 \quad e^{t\Delta}\varphi_a(x) \leq u(t,x)$

$\downarrow_{a\to+\infty}$

$e^{t\Delta}\varphi(x)$

SU $t=0$ $\quad V_a(0,x) = \varphi_a(x) \le \varphi(x) = u(0,x) \le u(0,x) + \varepsilon$

SE R È ABB. GRANDE $\quad v_a(t,x) < \varepsilon$



CAMPANA DELLA CONV. SI MUOVE MA φ_a È SUPPORTATA FISSA QUINDI IL CONTRIBUTO DELLA CAMPANA È PICCOLO

$\Rightarrow \quad v_a(t,x) - \underbrace{u(t,x)}_{\geq 0} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad v_a(t,x) - u(t,x) \le 0$

USANDO IL TEO DI BEPPO LEVI $\quad e^{t\Delta}\varphi_a \longrightarrow e^{t\Delta}\varphi$

LEZIONE 17

Titolo nota 06/05/2019

TEO
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \varphi(x) & \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists$ AL PIÙ UNA SOL $u(t,x) \geq 0$

LEMMA (GIÀ DIM) $u(t,x)$ UNA SOL ≥ 0

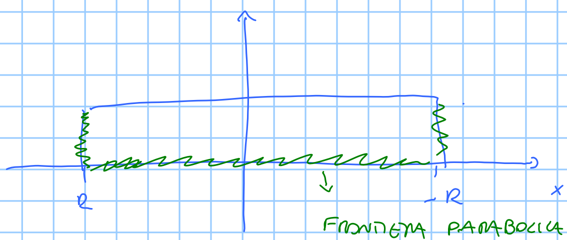
$$\Rightarrow \quad u(t,x) \geq e^{t\Delta}\varphi(x) = \frac{c}{t^{n/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y)\, dy \in [0,+\infty]$$

OSS LEMMA $\Leftrightarrow$ $e^{t\Delta}\varphi$ È LA SOL MINIMALE TRA QUELLE POSITIVE

RICHIAMO DIM (LEMMA) $\forall a > 0$
$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & x < a \\ 1 + (x-a) & a \leq x \leq a+1 \\ 0 & x > a+1 \end{cases}$$

$\varphi \longrightarrow \varphi_a = \chi_a(x)\varphi(x)$ $\qquad e^{t\Delta}\varphi_a(x)$ HA 2 PROPRIETÀ

i) $\forall a$ $\quad e^{t\Delta}\varphi_a \leq u(t,x)$ USANDO PRINCIPIO MAX PARABOLICO



$\underbrace{e^{t\Delta}\varphi(x) - u(t,x) < \varepsilon}$ $\Rightarrow$ VERO ANCHE DENTRO

SI OTTIENE USANDO

$$\lim_{R\to\infty} \left(\sup_{|x|>R} |e^{t\Delta}\varphi_a(x)| \right) = 0$$

ii) SI OTTIENE QUANTO SOPRA IND. DA a

PERCHÉ USANDO BEPPO LEVI

$$\boxed{e^{t\Delta}\varphi(x) \leq u(t,x)}$$

DIM TEOREMA

$w(t,x) = u(t,x) - e^{t\Delta}\varphi(x)$

w SODDISFA
$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w = 0 \\ w(0,x) = 0 \\ w(t,x) \geq 0 \end{cases} \implies w = 0$$

VOGLIAMO MOSTRARE

INTRODUCIAMO $W(t,x) = \int_0^t w(s,x)\,ds$

SE PROVIAMO CHE $W(t,x) \equiv 0$ ABBIAMO FINITO

EQUAZIONE SODISFATTA DA $W(t,x)$

$\partial_t W(t,x) = w(t,x)$

W RISPETTA L'EQ DEL CALORE

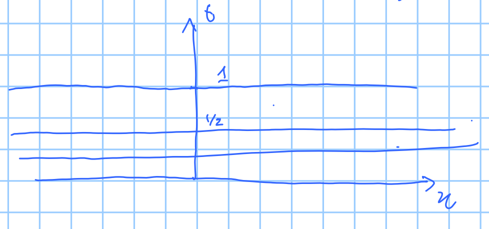
$$\Delta W(t,x) = \int_0^t \Delta w(s,x)\,ds = \int_0^t \partial_s w(s,x)\,ds = w(t,x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{w(0,x)}} = w(t,x)$$

SI POSSONO GIUSTIFICARE I CONTI

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t W - \Delta_x W = 0 \\ W(t,x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{INOLTRE} \quad W(0,x) = 0$$

$\Delta_x W(t,x) = \partial_t W = w(t,x) \geq 0$ QUINDI W È SUB ARMONICA.

PROVEREMO CHE $|W(t,x)| \leq A\, e^{A|x|^2} \quad \forall t \in [0,1]$



$w(\bar{t}, x) \geq 0$

LO CONSIDERO COME DATO INIZIALE

PER QUANTO VISTO PRIMA $W(t,x) \geq e^{(t-\bar{t})\Delta}\, W(\bar{t},x) \quad \forall \bar{t}$ e $\forall\, t \geq \bar{t}$

IN $t=1 \quad x=0$

$$W(1,\vec{0}) \geq \frac{c}{(1-\bar{t})^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{-\frac{|y|^2}{4(1-\bar{t})}}\, W(\bar{t},y)\,dy \qquad \bar{t} \in [0, 1/2]$$

DA QUI VOGLIO OTTENERE LA STIMA SU $W(\bar{t},x)$

$$\underbrace{(1-\bar t)^{n/2}\, W(1,\bar 0)}_{c} = C \geq \int_{\mathbb{R}^n_y} \overbrace{e^{-c|y|^2} \, W(\bar t, y)}^{\geq 0}\, dy \geq$$

$$\geq \int_{B^n(x, \frac{|x|}{2})} e^{-c|y|^2} \, W(\bar t, y)\, dy \geq$$

$$\geq e^{-\tilde c |x|^2} \int_{B^n(x, \frac{|x|}{2})} W(\bar t, y)\, dy \geq$$

RIFACENDO LA DIM. CON FORMULA DI STOCKES DEL PRINCIPIO DELLA MEDIA E USANDO SUB ARMONIA

$$\geq \tilde C e^{-\tilde c |x|^2} \cdot |x|^n \, W(\bar t, x)$$

$$\Rightarrow W(\bar t, x) \leq \frac{C \tilde C e^{\tilde c |x|^2}}{|x|^n} \cdot \quad \xrightarrow{|x|>1} A e^{A|x|^2}$$

$|x| \leq 1$ → SONO SU UN COMPATTO $\Rightarrow$ $W \leq$ STIMA ESPONENZIALE

$W \leq \max W$

$$\forall t \in [0, 1/2] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \overset{\text{UNICITÀ}}{\vee} W(t,x) \equiv 0 \quad \text{ESSENDO } W(0,x) = 0$$

PROBLEMA $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$e^{t\Delta}\varphi \in L^1$ PER YOUNG

$\partial_t e^{t\Delta}\varphi - \Delta e^{t\Delta}\varphi = 0 \qquad (t,x) = (\overset{\text{ESCLUSO}}{0}, +\infty) \times \mathbb{R}^n$

IN CHE SENSO $e^{t\Delta}\varphi \xrightarrow[t \to 0^+]{} f$?

i) in L^1? (SI (GIÀ VISTO))

ii) $e^{t\Delta}\varphi \xrightarrow[t \to 0^+]{} f(x)$ q.o. $x \in \mathbb{R}^n$?

TEOREMA (DERIVAZIONE DI LEBESGUE)

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (PASSA FACILMENTE A L^1_{loc} PER TRONCAMENTO)

$$\Rightarrow \fint_{B^n(x_0, r)} f(x)\, dx \xrightarrow[r \to 0^+]{} f(x_0) \qquad \text{q.o. } x_0 \in \mathbb{R}^n$$

OSS OGNI VOLTA CHE HO UN PROB. DI CONV. q.o. DEVO PASSARE A STUDIARE LA FUNZIONE MASSIMALE E TROVARNE UNA STIMA

DEF FUNZIONE MASSIMALE DI HARDY–LITTLEWOOD–SOBOLEV ASSOCIATA A $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (H-L-S)

DEFINITA COME SEGUE.

$$M f(x_0) = \sup_{r>0} \fint_{B^n(x_0, r)} |f| \, dx$$

(PEGGIORE VALORE ASSUNTO A x_0 FISSATO AL VARIARE DI r)

OSS $M f(x_0) \leq \|f\|_{L^\infty}$ $\forall x_0$ PASSANDO AL SUP DENTRO LA MEDIA

DOPO DI CHE PASSANDO AL SUP A SINISTRA SI HA $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

VORREI

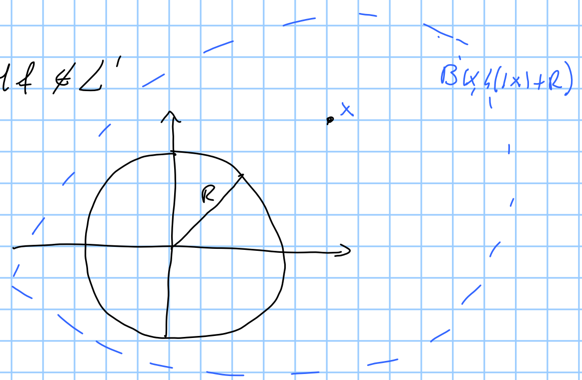
$$\|Mf\|_1 \leq C \|f\|_1$$ MA IN GENERALE È FALSO

MA $$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p$$ VERA NON APPENA $p \neq 1$

VEDIAMO CHE LA STIMA SU L^1 NON FUNZIONA NEANCHE SU

$$f \geq 0, \quad f \not\equiv 0, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow Mf \notin L^1$$

SUPPONIAMO CHE $\operatorname{supp} f \subseteq B^n(0, R)$



$$Mf(x) \geq \frac{\int_{B(x, c_1|x|+c_1R)} |f|}{(c_1|x|+c_1R)^n} \geq \frac{\int_{B^n(0,R)} |f|}{(c_1|x|+c_1R)^n} \underset{x \text{ GRANDE}}{\sim} \frac{c}{|x|^n} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$$

HO BISOGNO DI SPAZI L^1–DEBOLI $L^{1,\infty}$ (SPAZI DI LORENTZ)

SERVE DEFINIRLO PERCHÉ IN GENERALE SE HO UN OPERATORE T

TC $\|Tf\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_\infty$
$\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_1$ $\Rightarrow \|Tf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$ $\forall\, 1 < p \leq \infty$

$\boxed{\text{SPAZI } \mathcal{L}^{1,\infty}}$

IDEA: CHEBICHEV PROVA $f \in \mathcal{L}^1$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, \mathcal{L}\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f| > \lambda\}\right) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}$$

ESISTONO FUNZIONI CHE HANNO $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = +\infty$ MA QUEL SUP $< +\infty$

$$\mathcal{L}^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{\lambda>0} \lambda\, \mathcal{L}\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f| > \lambda\}\right) \right\} \supseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

PER CHEBICHEV

ES SE $f(x) = \frac{1}{|x|^n} \notin \mathcal{L}^1$

$$\lambda \mathcal{L}\left\{\frac{1}{|x|^n} > \lambda\right\} = \lambda\, \mathcal{L}\left\{\frac{1}{|x|^n} > \lambda\right\} \sim \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1$$

IN GENERALE $\mathcal{L}^{p,\infty}$

PARTE DA CHEBICHEV IN $\mathcal{L}^p$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^p\, \mathcal{L}\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f| > \lambda\}\right) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

ESERCIZIO $\frac{1}{|x|^\alpha} \in \mathcal{L}^{\frac{n}{\alpha},\infty}$ SE $\alpha \leq n$ n DIM DELLO SPAZIO.

LEZIONE 18

Titolo nota 08/05/2019

TEOREMA (DERIVAZIONE DI LEBESGUE)

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \fint_{B(x_0,r)} f(x)\,dx \xrightarrow{r \to 0^+} f(x_0) \quad q.o. \ x_0 \in \mathbb{R}$$

FUNZIONE MASSIMALE $\quad Mf(x_0) = \sup_{r>0} \fint_{B(x_0,r)} |f|\,dx$

TEOREMA HARDY-LITTLEWOOD

$$\mathcal{L}\{x \in \mathbb{R}^n \mid Mf(x) > \lambda\} \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad C = C(n)$$

VEDIAMO CHE (H-L) $\Rightarrow$ (DL)

$$\left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \limsup_{r \to 0^+} \left| \fint_{B(x_0,r)} f(x)\,dx - f(x_0) \right| > \varepsilon \right\} = A_\varepsilon$$

BASTA MOSTRARE CHE $\mathcal{L}(A_\varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(A_{1/k}) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\bigcup A_{1/k}) = 0 \Rightarrow$ CHE IL COMPLEMENTARE DEGLI INSIEME DOVE VALE (DL) HA MISURA NULLA QUINDI CA TORNA.

INTRODUCIAMO $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ GENERICA

OSSERVO CHE:

$$\limsup_{r \to 0^+} \fint_{B(x_0,r)} (f-\varphi) - (f(x_0) - \varphi(x_0)) \overset{\text{MEDIA INT.}}{=} \limsup_{r \to 0^+} \fint_{B(x_0,r)} f - f(x_0)$$

$$\Rightarrow A_\varepsilon = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \limsup_{r \to 0^+} \left| \fint_{B(x_0,r)} (f-\varphi) - (f(x_0) - \varphi(x_0)) \right| > \varepsilon \right\}$$

$$A_\varepsilon \subseteq \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \lim\sup_{r \to 0^+} \fint_{B(x_0,r)} |f-\varphi| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \quad \text{I} \qquad A_\varepsilon \subseteq \text{I} \cup \text{II}$$

$$\cup \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |f(x_0) - \varphi(x_0)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} = \text{II}$$

STIMIAMO II

CHEBICHEV

SCEGLIENDO $\varphi = \varphi_n \to f$

$$\mathcal{L}(\text{II}) \leq \frac{2\|f-\varphi\|_{L^1}}{\varepsilon} \longrightarrow 0$$

BASTA MOSTRARE CHE $\mathcal{L}(\text{I}) = 0$

$$\text{I} \subseteq \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; M(f-\varphi) > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

H-L

SCEGLIENDO $\varphi = \varphi_n \to f$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\text{I}) \leq \mathcal{L}\left(\quad '' \quad \right) \leq C(n)\frac{2\|f-\varphi\|_{L^1}}{\varepsilon} \longrightarrow 0$$

DIM (H-L) (USANDO LEMMA DI RICOPRIMENTO DI VITALI)

$$A_\lambda = \{ Mf > \lambda \} \qquad \forall x \in A_\lambda \quad \exists\, r_x > 0 \text{ t.c. } \fint_{B(x,r_x)} |f| > \lambda$$

$$\Rightarrow \int_{B(x,r_x)} |f|\, dx > \lambda\, \mathcal{L}(B(x,r_x))$$

IDEA "BARANDO"

VORREI DIRE $\leq \|f\|$

$$A_\lambda \subseteq \bigcup_{x\in A_\lambda} B(x,r_x) \rightsquigarrow \mathcal{L}(A_\lambda) \leq \sum_{x\in A_\lambda} \mathcal{L}(B(x,r_x)) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{x\in A_\lambda} \int_{B(x,r_x)} |f|$$

PERCHÉ $\sum_{x\in A_\lambda}$ POTREBBE NON ESSERE BEN DEFINITA

MA LE PALLETTE POTREBBERO ESSERE SOVRAPPOSTE.

VEDIAMO COME SISTEMARE I DETTAGLI

LEMMA DI RICOPRIMENTO DI VITALI

SIA DATA UNA FAMIGLIA $B(x_i, r_i)$ $i \in I$ t.c. $\sup_i r_i = D < +\infty$

ALLORA ESISTE UNA FAMIGLIA DI INDICI $I' \subseteq I$ TALE CHE

1) $|I'| \leq |\mathbb{N}|$ (È NUMERABILE)

2) $B(x_{i'}, r_{i'})$ CON $i' \in I'$ $\Rightarrow$ $B(x_{i'}, r_{i'}) \cap B(x_{j'}, r_{j'})$

3) $\bigcup_{i'\in I'} B(x_{i'}, 5r_{i'}) \supseteq \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i)$ (MA NON È PIÙ DETTO SIANO DISGIUNTE).

VEDIAMO COME VITALI SISTEMA I DETTAGLI IN H-L.

$B(x, r_x)$ $x \in A_\lambda$ $\Rightarrow$ POSSO PRENDERE $B(x, r_x)$ $x \in A'_\lambda$ NUMERABILE

$$\mathcal{L}(A_\lambda) \leq \mathcal{L}\Big(\bigcup_{x\in A_\lambda} B(x,r_x)\Big) \underset{\substack{\downarrow\\ 3)\ \text{VITALI}}}{\leq} \mathcal{L}\Big(\bigcup_{x\in A_\lambda'} B(x,5r_x)\Big) \underset{\substack{\downarrow\\ \text{ADESSO È LECITO}\\ \text{PERCHÉ } A_\lambda' \text{ è NUM}}}{\leq}$$

$$\leq \sum_{x\in A_\lambda'} \mathcal{L}(B(x,5r_x)) = 5^n \sum_{x\in A_\lambda'} \mathcal{L}(B(x,r_x)) \leq$$

$$\leq \frac{5^n}{\lambda} \sum_{x\in A_\lambda'} \int_{B(x,r_x)} |f|\,dx \leq \overset{C(n)}{\overset{\shortparallel}{5^n}} \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}$$

STAVOLTA LA CONO UNIONE È DISGIUNTA PER 2) VITALI

DALLA DIS.

$$+\infty > \|f\|_{L^1} \geq \int_{B(x,r_x)} |f| > \lambda\, \mathcal{L}(B(x,r_x)) \sim r_x^n$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in A_\lambda} r_x^n \leq \|f\|_{L^1} \quad \text{E QUINDI} \overset{\text{HO POTUTO}}{\checkmark} \text{ USARE VITALI}$$

DIM (VITALI)

$$\mathcal{F}_J = \left\{ B(x_i, r_i) \;\middle|\; \frac{D}{2^J} < r^i \leq \frac{D}{2^{J-1}} \right\}$$

CHIAMO $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{G}_1 =$ L'INSIEME MASSIMALE DI PALLE DISGIUNTE

$\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}_2 =$ " " " "

+ NON INTERSECANO LE PALLE DI $\mathcal{G}_1$

$\vdots$

$\mathcal{G}_K \subseteq \mathcal{F}_K =$ INSIEME MASSIMALE DI PALLE DISGIUNTE

+ NON INTERSECANO LE PALLE DEI $\mathcal{G}_1 \dots \mathcal{G}_{K-1}$

OGNUNO DEI $\mathcal{G}_J$ CONTIENE UNA QUANTITÀ NUMERABILE DI PALLE (RIFLETTI BENE)

$\Rightarrow \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_K$ CONCLUDE.

RICORDIAMO CHE VOLEVAMO CAPIRE SE $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

SE $e^{t\Delta} f(x) \xrightarrow[t \to 0^+]{} f(x)$ q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{M}^{\overset{\text{H (T = CALORE)}}{H}} f(x) = \sup_{t>0} |e^{t\Delta} f(x)| = \sup_{t>0} \left| \int K_t(x-y) f(y)\, dy \right|$$

<u>TEO</u> VERSIONE DI H-L. PER $M^H f(x)$

$$\{ \mathcal{M}^H f(x) > \lambda \} \le C \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$$

VEDIAMO CHE H-L PER $M^H f \Rightarrow e^{t\Delta} f \xrightarrow[t \to 0^+]{} f$ q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

SIA $A_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{t \to 0^+} |e^{t\Delta} f - f| > \varepsilon \}$

VEDIAMO CHE $\mathcal{L}(A_\varepsilon) = 0$ COME PRIMA $\varepsilon = \frac{1}{n}$

SICCOME SE $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ $e^{t\Delta}\varphi \xrightarrow[t \to 0]{} \varphi$ UNIFORMEMENTE (GIÀ VISTO)

$$\Rightarrow A_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{t \to 0} |e^{t\Delta}(f-\varphi) - (f-\varphi)| > \varepsilon \} \subseteq$$

$$\text{I} = \{ x \mid \limsup_{t \to 0} |e^{t\Delta}(f-\varphi)| > \tfrac{\varepsilon}{2} \} \cup \underbrace{\overset{\text{II}}{\{ x \mid |(f-\varphi)| > \tfrac{\varepsilon}{2} \}}}_{\text{CHEBICHEV}}$$

$$\cap\!|$$

$$\mathcal{L}\left(\{ x \mid M^H(f-\varphi) > \tfrac{\varepsilon}{2} \} \right) \le 2C \frac{\|f-\varphi\|_{L^1}}{\varepsilon} \xrightarrow[\varphi = \varphi_n \xrightarrow{L^1} f]{\text{SCELTA}} 0$$

RESTA QUINDI DA DIMOSTRARE H-L PER M^H

BASTA PROVARE CHE $\{ M^H f > \lambda \} \subseteq \{ M f > \frac{\lambda}{C} \} \overset{\text{H.-L.}}{\le} C \cdot C_n \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$

OVVERO $M^H f \le C M f$

LEZIONE 19

Titolo nota 13/05/2019

CONTINUO STIMA SULLA FUNZIONE MASSIMALE

$$\mathcal{M}^H f(x) = \sup_{t>0} |e^{t\Delta} f(x)|$$

LEMMA

$$M^H f(x) \le C\, M f(x) \qquad \left(\Rightarrow \mathcal{L}\{M^H f(x) > \lambda\} \le \frac{C\|f\|_{L^1}}{\lambda} \right.$$

DIM LEMMA

$$|e^{t\Delta} f| \le \frac{c}{t^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |f(y)|\,dy \overset{\text{BEPPO LEVI}}{=}$$

$$= \frac{c}{t^{m/2}} \left(\int_{\frac{|x-y|^2}{4t} \le 1} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |f(y)|\,dy + \sum_{J=0}^{\infty} \int_{2^J < \frac{|x-y|^2}{4t} \le 2^{J+1}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |f(y)|\,dy \right)$$

$$\wedge\!|$$

$$\frac{c}{t^{m/2}}\, c' \int_{|x-y| \le 2\sqrt{t}} |f(y)|\,dy$$

$$\shortparallel$$

$$C \fint_{|x-y| \le 2\sqrt{t}} f(y) \le \mathcal{M} f(x)$$

CONTRIBUTO PER J GENERICO

$$\frac{1}{t^{m/2}} \int_{\sqrt{t}\, 2^{\frac{J+1}{2}} < |x-y| \le 2^{\frac{J+3}{2}} \cdot \sqrt{t}} e^{-2^J} |f(y)|\,dy \le e^{-2^J} \frac{2^{m\frac{J+3}{2}}}{\underset{\text{VOL DELLA PALLA}}{t^{m/2}\, 2^{m\frac{J+3}{2}}}} \underset{\text{MAGGIORO}}{\int_{|x-y| \le 2^{\frac{J+3}{2}}\sqrt{t}}} |f(y)|\,dy \le$$

$$\le e^{-2^J}\, 2^{mJ} \fint |f(y)|\,dy \le$$

$$\le \underbrace{e^{-2^J}\, 2^{mJ}}_{\text{LA SERIE SU J È CONVERGENTE.}} \mathcal{M} f(x)$$

LA MAGGIORAZIONE NON DIPENDE DA t QUINDI PASSANDO AL SUP VALE.

RITORNIAMO AL PROBLEMA DI DIMOSTRARE CHE W SODDISFA L'EQUAZIONE DEL CALORE.

LEMMA $w(t,x)$ SOL $\begin{cases} \partial_t w - \Delta_x w = 0 \\ w(0,x) = 0 \end{cases}$

ALLORA $W(t,x) = \int_0^t w(s,x)ds \Rightarrow \partial_t W - \Delta_x W = 0$

DIM $\partial_t W = w(t,x)$

$$\Delta_x W = \int_0^t \Delta w(s,x) ds = \int_0^t \partial_s w(s,x) dx = w(t,x) - \underbrace{w(0,x)}_{=0} = w(t,x)$$

PROBLEMA NEL PASSARE ALLE DERIVATE ALL'INTERNO FINO A $t=0$

INTRODUCIAMO $W_\varepsilon(t,x) = \int_\varepsilon^t w(s,x)\, ds$

$$\Rightarrow \Delta_x W_\varepsilon(t,x) = \int_\varepsilon^t \Delta w(s,x) ds = \int_\varepsilon^t \partial_s w(s,x)\, ds = w(t,x) - w(\varepsilon,x)$$

LONTANO DA 0 w ESSENDO SOL. DELL'EQ DEL CALORE È C^∞ SU $t>0$

DA ORA IN POI FISSO $|x|<R$ IN MODO TALE CHE $\|w(\varepsilon,x)\|_{L^\infty(B(0,R))} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$

OSS NON POTEVO DIRE LA STESSA COSA CON $x \in \mathbb{R}^n$

INTRODUCO $\widetilde{W}(x) \in C^\infty(B_R(0)) \cap C(\overline{B}_R(0))$

t FISSATO >0 $\begin{cases} \Delta \widetilde{W}(x) = w(t,x) & \text{in } B_R(0) \\ \widetilde{W}(y) = W(t,y) & \text{in } \partial B_R(0) \end{cases}$

UNICITÀ SEGUE DAL PRINCIPIO DEL MAX MA NON È UN PROBLEMA DI POISSON CON $\Delta = 0$ QUINDI È DA DISCUTERE L'ESISTENZA

OSSERVO CHE
- $W_\varepsilon(t,x) \xrightarrow[L^\infty(B_R)]{\varepsilon\to 0} \widetilde{W}(x)$ (NON OVVIO)
- $W_\varepsilon(t,x) \xrightarrow[L^\infty(B_R)]{\varepsilon\to 0} W(t,x)$ (OVVIO PERCHÉ $\int_\varepsilon w \xrightarrow{\text{UNIF}} \int_0^t w$ PERCHÉ w È CONTINUA SU $B_R \times \mathbb{R}$)

SE LO DIMOSTRO $W(t,x) = \widetilde{W}(x) \Rightarrow \Delta \widetilde{W} = \Delta W(t,x) = w(t,x)$

1) DIMOSTRIAMO L'ESISTENZA DEI PROBLEMI DEL TIPO SOPRA (PER AVERE L'ESISTENZA DI $\tilde{w}$)

$\forall f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n) \quad \forall g \in C(\partial B_R) \quad \exists!\ u$ SOL DI

$$\begin{cases} \Delta u = f & \forall x \in B_R \\ u(y) = g(y) & \forall y \in \partial B_R \end{cases}$$

2) DIMOSTRIAMO INOLTRE CHE $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ LIMITATO Allora $\exists C > 0$ tc

$$\sup_\Omega |v(x)| \leq C\left(\sup_{\partial\Omega} |v(x)| + \sup_\Omega |\Delta v|\right) \quad \forall v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$$

VEDIAMO PERCHÈ 1) 2) MI DANNO QUELLO CHE VOGLIO

$$\begin{cases} W_\varepsilon(t,x) = w(t,x) - w(\varepsilon,x) & \text{in } B_R \\ W_\varepsilon(t,y) = W_\varepsilon(t,y) & \text{in } \partial B_R \end{cases}$$

PER 2) $$\sup_{B_r} |W_\varepsilon(t,x) - \tilde{W}(t,x)| \leq C\Big(\underbrace{\sup_{\partial B_R} |W(t,x) - W_\varepsilon(t,x)|}_{\downarrow\, \varepsilon \to 0\ \ 0 \text{ UNIF.}} + \underbrace{\sup_{B_R} |W(\varepsilon,x)|}_{\downarrow\, \varepsilon\to 0\ \ 0}\Big)$$

DIMOSTRIAMO 1)

È SUFFICIENTE TROVARE $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

TC $\Delta w = f$ SU $\mathbb{R}^n$ SE CI RIESCO SCELGO v tc $\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R \\ v(y) = g(y) - w|_{\partial B_R}(y) & \text{su } \partial B_R \end{cases}$

$\Rightarrow \quad u = w + v$ RISOLVE IL PROBLEMA

LO SO RISOLVERE CON LAPLACE

SIA $K(|x|)$ LA SOLUZIONE FONDAMENTALE

$$\underset{L^1_{loc}}{K} * \underset{C^\infty}{f} \Rightarrow * \text{ È BEN DEFINITO e } C^\infty \qquad \text{E} \quad \Delta(K * f) = f \quad (\text{VEDERE X ESERCIZIO})$$

DIMOSTRO 2 SIA $M = \sup_\Omega \Delta v < +\infty$ (PERCHÈ SE $= +\infty$ LA STIMA È VERIFICATA)

SIA $v - \frac{M}{n}|x|^2$ $$\underbrace{\Delta\left(-\frac{M}{n}|x|^2 - v\right)}_{\text{è SUB ARMONICA}} \overset{\Delta|x|^2 = 2n}{=} -2M - \Delta v < 0$$

$\Rightarrow$ USANDO IL PRINCIPIO DEL MAX $$-\frac{M}{n}|x|^2 - v \geq \min_{\partial\Omega}\left(-\frac{M}{n}|x|^2 - v\right) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Rightarrow v(x) \leq -\min_{\partial\Omega}\left(-\frac{M}{\mu}|x|^2 - v\right) - \frac{M}{\mu}|x|^2$$

$$\Rightarrow v(x) \leq \left| -\min_{\partial\Omega}\left(-\frac{M}{\mu}|x|^2 - v\right) - \frac{M}{\mu}|x|^2 \right| \overset{\text{limitato}}{\leq} C\left(\sup_{\partial\Omega}|v(x)| + \underset{\sup_{\Omega}|\Delta v|}{\underset{\shortparallel}{M}}\right)$$

POSSO FARE STIME ANALOGHE PER $-v$ E PASSARE AL $\sup_{\Omega}|v(x)|$

VOGLIO VEDERE:

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p} \qquad p > 1$$

TEOREMA (DI MARCINKIEWICZ / INTERPOLAZIONE)

SIA i) $T: L^\infty \longrightarrow L^\infty$ e $\|Tf\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^\infty}$

ii) $T: L^1 \longrightarrow$ MISURABILE TC $\mathcal{L}\{|T(f)| > \lambda\} \leq C\dfrac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$

iii) $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$ q.o. x $\quad f, g \in L^1$

$$\Rightarrow \|Tf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p} \qquad \text{SE } 1 < p \leq +\infty$$

LEZIONE 20

Titolo nota 15/05/2019

TEOREMA

i) $T: L^\infty \longrightarrow L^\infty$ $\left(\|Tf\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty} \right)$

ii) $T: L^1 \longrightarrow L^{1,\infty}$ $\left(\Leftrightarrow \mathcal{L}\{|Tf|>\lambda\} \leq \frac{C\|f\|_1}{\lambda} \right)$

iii) $|T(f+g)(x)| \leq |T(f)(x)| + |Tg(x)|$ (SUB. LINEARITÀ PUNTUALE) q.o. x e $f,g \in L^1 \cap L^\infty$

$\Rightarrow$ $\|Tf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$ $\forall\ 1<p\leq+\infty$, $\forall\ \underbrace{f \in L^1 \cap L^\infty}$

OSS COSÌ $\|f\|_p$ È BEN DEF

COROLLARIO 1 SE T È LINEARE (AGGIUNGO CHE) $T(f+g) = Tf + Tg$

$\Rightarrow \exists\ \overline{T}: L^p \longrightarrow L^p$ CONTINUO E TALE CHE $\overline{T}(h) = T(h)$ $\forall h \in L^1 \cap L^p$

DIM $T: L^1 \cap L^\infty \longrightarrow L^p$ e $\|Tf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$

$\Rightarrow$ VOGLIO DEFINIRE $\overline{T}f$ SE $f \in L^p$

PRESA $f \in L^p$ $\exists\ f_n \in C_c^\infty \subset L^1 \cap L^\infty$ $f_n \xrightarrow{L^p} f$

$\Rightarrow$ $\|T(f_n - f_m)\|_{L^p} \leq C_p \|f_n - f_m\|_{L^p}$ $\downarrow 0$ $n, m \to \infty$ PERCHÉ È DI CAUCHY

$= \|Tf_n - Tf_m\|_{L^p} \to 0$

$\Downarrow$

Tf_n È DI CAUCHY $\Rightarrow$ (L^p È COMPLETO) $Tf_n \longrightarrow \overline{T}f$

COROLLARIO $\forall f \in L^\infty$ $\|Mf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$

DIM PER IL TEOREMA $\|Mf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$ $\forall f \in C_c^\infty \subset L^1 \cap L^\infty$ (DENSO)

PRESA $f_n \xrightarrow{L^p} f$ con $f \in L^p$ $f_n \in C_c^\infty$ $\Rightarrow$ $\|Mf_n\|_{L^p} \leq C_p \|f_n\|_{L^p}$

SI VERIFICA CHE $|Mg(x) - Mh(x)| \leq M(g-h)(x)$ (OSS NON USO $|Mg-h|$ TANTO $M \geq 0$

$$Mg = M(g-h+h) \leq M(g-h) + Mh$$

IN MODO ANALOGO $\quad Mh \leq M(h-g) + Mg = M(g-h) + Mg$

$$\| M(f_n - f_m) \|_{L^p} \leq C_p \| f_n - f_m \|_{L^p} \to 0$$

$$\geq$$

$$\| Mf_n - Mf_m \|_{L^p} \quad \Rightarrow \quad Mf_n \xrightarrow{L^p} g \text{ UNA CERTA } g$$

$$\| Mf_n \|_{L^p} \leq C_p \| f_n \|_{L^p}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\| Mf \|_{L^p} \leq \| g \|_{L^p} \qquad C_p \| f \|_{L^p}$$

VOGLIO VEDERE CHE

$$\int_{B(x,r)} |f| \overset{f \in L^\infty_c}{=} \lim_{n \to \infty} \int_{B(x,r)} |f_n| \leq \liminf_{n \to \infty} Mf_n(x) = g(x) \quad \text{PER q.o. } x$$

A MENO DI SOTTOSUCCESSIONE f_{n_k}

$$\Rightarrow \sup_r \int_{B(x,r)} |f| \leq g(x)$$

$$\shortparallel$$

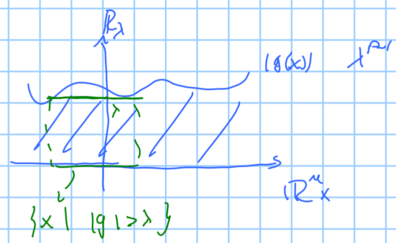
$$Mf(x)$$

E PASSANDO ALLA NORMA L^p HO TUTTO.

<u>DIM TEOREMA</u>

COME SCRIVERE IN MODO ASTUTO $\| g \|_{L^p}$?

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \, dx = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \mathcal{L}(\{|g(x)| > \lambda\}) \, d\lambda$$



$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \, dx = p \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^{|g(x)|} \lambda^{p-1} \, d\lambda \overset{\text{TONELLI}}{=}$$

$$= p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \{|g(x)| > \lambda\}}_{\mathcal{L}\{|g(x)| > \lambda\}} = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \mathcal{L}\{|g(x)| > \lambda\} \, d\lambda$$

$$\| Tf \|_{L^p} = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \mathcal{L}\{|Tf(x)| > \lambda\}$$

$$f = f \chi_{\{|f| \leq c\lambda\}} + f \cdot \chi_{\{|f| > c\lambda\}} \quad \text{CON } c \text{ DA DEFINIRE}$$

$$\overset{\text{INDICO}}{=} f_{\leq c\lambda} + f_{>c\lambda}$$

$$\lambda < |Tf| = |T(f_{\leq c\lambda} + f_{>c\lambda})| \leq |Tf_{\leq c\lambda}| + |Tf_{>c\lambda}|$$

$$\Rightarrow \{|Tf| > \lambda\} \subset \left\{|Tf_{\leq c\lambda}| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{|Tf_{>c\lambda}| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

USANDO 1) E SCEGLIENDO c OPPORTUNO: $\left\{|Tf_{\leq c\lambda}| > \frac{\lambda}{2}\right\} = \emptyset$

PER 1) $$|Tf_{\leq c\lambda}| \leq C_\infty \|f_{\leq c\lambda}\|_\infty \leq \underbrace{\boxed{C_\infty \cdot c}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \lambda \Rightarrow |Tf_{\leq c\lambda}| \ngtr \frac{\lambda}{2}$$

$$\|Tf\|_{L^p} \leq p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \mathcal{L}\left(\left\{|Tf_{>c\lambda}| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) d\lambda \overset{\text{USANDO 2}}{\leq}$$

$$\leq p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} C_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \|f_{>c\lambda}\|_{L^1} =$$

$$= C_p \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda^{p-2} \|f_{>c\lambda}\|_{L^1}}_{\sim \|f\|_{L^p}^p\ ?} =$$

USO $$\|f_{>c\lambda}\|_{L^1} = 1\int_0^{+\infty} \mu^{1-1} \mathcal{L}(\{|f_{>c\lambda}| > \mu\})\, d\mu$$ (LA FORMULA NORMA L^p PER $p=1$)

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{p-2} \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(\{|f_{>c\lambda}| > \mu\})\, d\mu\, d\lambda =$$

SPEZZO PER $\mu \in [0, c\lambda]$ e $\mu > c\lambda$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda^{p-2} \int_0^{c\lambda} \mathcal{L}\Big(\overbrace{\{|f_{>c\lambda}| > \mu\}}^{=\{|f| > c\lambda\}}\Big)\, d\mu\, d\lambda + \quad \text{I}$$

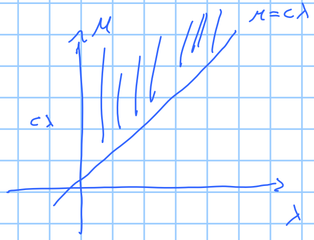
$$+ \int_0^{+\infty} \lambda^{p-2} \int_{c\lambda}^{+\infty} \underbrace{\mathcal{L}(\{|f_{>c\lambda}| > \mu\})}_{\mathcal{L}(\{|f| > \mu\})}\, d\mu\, d\lambda \quad \text{II}$$

(I) OSSERVO CHE NON C'È + LA DIPENDENZA DA μ

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{p-2}\, c\lambda\, \mathcal{L}\left(|f| > c\lambda\right) \sim C_p \cdot \|f\|_{L^p}^p$$

VORREI $c=1$

CHIAMO $c\lambda = \lambda'$



(II)

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{p-2} \int_{c\lambda}^{+\infty} \mathcal{L}\left(\{|f| > \mu\}\right) d\mu \, d\lambda =$$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathcal{L}\left(\{|f| > \mu\}\right)}_{\text{non dip. da } \lambda} \underbrace{\int_0^{\frac{\mu}{c}} \lambda^{p-2}}\, d\mu$$

$\Rightarrow$ $\underline{p>1}$ L'INT È CONVERGENTE

$$= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}\left(\{|f| > \mu\}\right) \left(\frac{\mu}{c}\right)^{p-1} \frac{1}{p-1} \sim C_p \|f\|_{L^p}^p$$

E QUESTO CONCLUDE

LEZIONE 21

Titolo nota 20/05/2019

ESERCIZIO SIA $|T(f+g)(x)| \le |Tf(x)| + |Tg(x)|$ SIANO p_0 e p_1 tc

i) $1 \le p_0 < p_1 < +\infty$

ii) $\lambda^{p_0} |\{|Tf(x)| > \lambda\}| \le C_0 \|f\|_{L^{p_0}}^{p_0}$

iii) $\lambda^{p_1} |\{|Tf(x)| > \lambda\}| \le C_1 \|f\|_{L^{p_1}}^{p_1}$

$\Rightarrow \|Tf\|_{L^p} \le C \|f\|_{L^p} \quad \forall\, p_0 < p < p_1$

DISEGUAGLIANZA DI HARDY - LITTLEWOOD - SOBOLEV

SIA $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad 0 < \alpha < n \Rightarrow \frac{1}{|x|^\alpha} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad \left(\frac{1}{|x|^\alpha} \notin L^p(\mathbb{R}^n) \ \forall\, p \right)$

QUINDI

SIA $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\quad (*) \quad \Big\| \underbrace{\frac{1}{|x|^\alpha}}_{k_\alpha \in L^{\frac{n}{\alpha},\infty}} * \psi \Big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

$$\boxed{1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n} \quad (S) \qquad q \in \left(\frac{n}{\alpha}, +\infty\right)}$$

YOUNG (CLASSICA)

$$\|K * \psi\|_{L^q} \le C \|\psi\|_{L^p} \|K\|_{L^r} \iff 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

CIOÈ CHIEDE A K DI STARE IN UN QUALCHE L^r

SE $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{n} \Rightarrow q \in \left[\frac{n}{\alpha}, +\infty\right]$

DIM H-L-S

$(*) \Rightarrow (S)$ $\quad$ (S = SCALING = RISCALAMENTO)

SIA $S_\lambda \psi = \psi(\lambda x) \quad \lambda > 0$

$$(*) \quad \Big\| \frac{1}{|x|^\alpha} * S_\lambda \psi \Big\|_q \le C \|S_\lambda \psi\|_p$$

$$\|S_\lambda \psi\|_p = \left(\int |\psi(\lambda x)|^p\right)^{1/p} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|\psi\|_p$$

$$\frac{1}{|x|^\alpha} * S_\lambda \psi = \int \frac{1}{|x-y|^\alpha} \psi(\lambda y)\, dy =$$

$$= \int \frac{\lambda^\alpha}{|\lambda x - \lambda y|} \psi(\lambda y)\, dy =$$

$$= \int \frac{\lambda^{\alpha-n}}{|\lambda x-\lambda|}\psi(y)\,dy = \lambda^{\alpha-n} S_\lambda\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*\psi\right)$$

PASSANDO ALLA NORMA L^p e RISCALANDO

$$\lambda^{\alpha-n}\,\lambda^{-\frac{n}{q}}\left\|\frac{1}{|x|^\alpha}*\psi\right\|_q \le \lambda^{-\frac{n}{p}}\|\psi\|_p$$

$$\alpha-n-\frac{n}{q} = -\frac{n}{p}$$

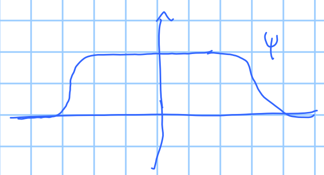
$$\frac{\alpha}{n}-1-\frac{1}{q} = -\frac{1}{p} \Rightarrow \boxed{1+\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}}$$

DOBBIAMO VEDERE CHE I CASI LIMITE $q=\frac{n}{\alpha}$ e $q=\infty$ NON SONO AMMESSI

SE FOSSE VERA $q=\frac{n}{\alpha}$

$$\left\|\frac{1}{|x|^\alpha}*\psi\right\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}} \le C\|\psi\|_{L^1}$$

PRENDO $\psi\in C_c^\infty$ CHE MIMA LA CARATTERISTICA



$$\frac{1}{|x|^\alpha}*\psi = \int\frac{1}{|x-y|}\psi(y) \underset{|x|\gg1}{\sim} \frac{1}{|x|^\alpha} \notin L^{\frac{n}{\alpha}}$$

VEDIAMO CHE È ESCLUSA LA STIMA $q=\infty \Rightarrow p=\frac{n}{n-\alpha}$

$$\left\|\frac{1}{|x|^\alpha}*\psi\right\|_{L^\infty} \le C\|\psi\|_{L^{\frac{n}{n-\alpha}}}$$

$\exists\, \psi_k\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tc $\dfrac{\left\|\frac{1}{|x|^\alpha}*\psi_k\right\|}{\|\psi_k\|_{L^{\frac{n}{n-\alpha}}}} \longrightarrow +\infty$ (QUINDI NON ESISTE UNA C UNIFORME PER TUTTE)

$\geq$ DIMOSTRO

$$\frac{\left|\frac{1}{|x|^\alpha}*\psi_k(0)\right|}{\|\psi_k\|_{L^{\frac{n}{n-\alpha}}}} \longrightarrow +\infty$$

PRENDO $\psi_k(x) \sim \frac{1}{|x|^{m-\alpha}} \chi_{\frac{1}{k}<|x|<k}(x)$ (A MENO DI RIACCLISCARLA)

$$\left| \frac{1}{|x|^\alpha} * \psi_k(0) \right| = \int \frac{1}{|0-y|^\alpha} \cdot \frac{1}{|y|^{m-\alpha}} \chi_{\frac{1}{k}<|y|<k}(y)\, dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{k}<|y|<k} \frac{1}{|y|^\alpha}\, dy \sim O(\log(k))$$

$$\| \psi_k \|_{L^{\frac{m}{m-\alpha}}} = \left(\int_{\frac{1}{k}<|x|<k} \frac{1}{|x|^m}\, dx \right)^{\frac{m-\alpha}{m}} \sim O\left((\ln k)^{\frac{m-\alpha}{m}} \right)$$

$\frac{m-\alpha}{m} < 1$

QUINDI IL DENOMINATORE CRESCE PIÙ DEBOLMENTE.

RESTA DA VEDERE CHE LE CONDIZIONI SONO SUFF PER LA STIMA

$(\Leftarrow)$ SE i) $1 + \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{m} + \frac{1}{p}$

ii) $q \in \left(\frac{m}{\alpha}, \infty\right)$ $\left(q \neq \frac{m}{\alpha}, q \neq \infty\right)$

OSS $q < \frac{m}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{q} > \frac{\alpha}{m}$

$\Rightarrow 1 > \frac{1}{p} \ \forall p$!!

NON ACCETTATO

NON MI DA =

$$\Rightarrow \left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * \psi \right\|_{L^q(\mathbb{R}^m)} \leq C \| \psi \|_{L^p(\mathbb{R}^m)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{|x-y|^\alpha} \psi(y)\, dy = \underbrace{\int_{B_R(x)} \frac{1}{|x-y|^\alpha} \psi(y)\, dy}_{\text{INTEGRO SU PALLE DIADICHE FINO CHE POSSO}} + \underbrace{\int_{B_R^c(x)} \frac{1}{|x-y|^\alpha} \psi(y)\, dy}_{\text{HÖLDER}}$$

$$\text{HÖLDER} \leq \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \cdot \left(\int_{B_R^c(x)} \frac{1}{|x-y|^{\alpha p'}} \right)^{1/p'}$$

USO TUTTO $\mathbb{R}^m$ TANTO POSSO POLINOMIALIZZO

$$\left(\int_{B_R^c(0)} \frac{r^{m-1}}{r^{\alpha p'}} dr \right)^{1/p'} \sim \left(\left[r^{m-\alpha p'} \right]_R^\infty \right)^{1/p'}$$

$m - \alpha p' < 0$

$\alpha p' > m$

$\Rightarrow$ IL SECONDO PEZZO È STIMATO CON

$$\|\psi\|_{L^p} \cdot R^{\frac{m-\alpha p'}{p'}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha}{n} > \frac{1}{p'} \iff \frac{\alpha}{n} > 1 - \frac{1}{p} \iff \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p} > 1 \underset{(iii)}{\iff} \cancel{1} + \frac{1}{q} > \cancel{1} \qquad q \neq \infty \ \text{OK}$$

INOLTRE
$$\frac{n}{p'} - \alpha = n\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}\right) \overset{ii}{=} -\frac{n}{q}$$

$\Rightarrow$ IL SECONDO PEZZO È STIMATO CON $\quad \|\varphi\|_{L^p} \, R^{-\frac{n}{q}}$

STIMIAMO IL PRIMO PEZZO

$$\int_{B_R(x)} \underbrace{\frac{1}{|x-y|^\alpha}}_{\sim \frac{1}{2^{j\alpha}}} \varphi(y)\,dy \sim \sum_{2^j \le R} \frac{1}{2^{j\alpha}} \int_{2^{j-1} \le |x-y| \le 2^j} |\varphi(y)|\,dy \sim \sum_{2^j \le R} \frac{2^{jn}}{2^{j\alpha}} \frac{\int_B |\varphi(y)|}{\underbrace{2^{jn}}_{\text{MORALMENTE È IL VOLUME DELLA PALLA}}} \sim$$

$$\sim \sum_{2^j \le R} \left(2^j\right)^{\overset{>0}{n-\alpha}} \cdot M\varphi(x) \sim M\varphi(x) \cdot R^{(n-\alpha)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^\alpha} |\varphi(y)|\,dy \le M\varphi(x)\,R^{n-\alpha} + R^{-\frac{n}{q}} \|\varphi\|_{L^p} \qquad \forall x, \forall R,$$

ALLORA PASSO LA MIN SU R

$$\min_{R>0} \left(\underbrace{M\varphi(x)}_{a} R^{n-\alpha} + R^{-\frac{n}{q}} \underbrace{\|\varphi\|_{L^q}}_{b} \right)$$

$$f(R) = a R^{n-\alpha} + b R^{-\frac{n}{q}}$$

$$f'(R) = a(n-\alpha) R^{n-\alpha-1} - \frac{n}{q} b R^{-\frac{n}{q}-1} = 0$$

$$R^{n-\alpha-\cancel{1}+\frac{n}{q}+\cancel{1}} = \frac{n}{q} b \cdot \frac{1}{a(n-\alpha)}$$

$$R^{\frac{n}{p}} = \frac{b}{a} \frac{n}{q(n-\alpha)}$$

$$R \sim \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{n}}$$

FACENDO IL CONTO E SOSTITUENDO IN R E TENENDO SOLO LE COSE CHE CONTANO

$$f \sim a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{n}(n-\alpha)} = \dots = a^{p\left(\frac{1}{p} - 1 + \frac{\alpha}{n}\right)} b^{p\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)}$$

QUINDI RICORDANDO CHI SONO a e b OTTENIAMO

$$M\varphi^{\underbrace{p\left(\frac{1}{p}-1+\frac{\alpha}{n}\right)}_{\frac{1}{q}\text{ ???}}} \quad \|\varphi\|^{p\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)}$$

$p \neq 1 \Rightarrow q \neq \frac{n}{a}$

$$\left\|\frac{1}{|x|^\alpha} * \varphi(y)\right\|^q_{L^q} \leq \int M\varphi^p(y) \cdot \|\varphi\|^{pq\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)} = \|\varphi\|^{pq\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)} \|M\varphi\|^p_{L^p} \leq$$

STIMA SU M

$$\leq \|\varphi\|^{pq\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)} C \|\varphi\|^p_{L^p}$$

DICO CHE $qp\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)+p =$

$$= qp\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+p =$$

$$= q-\cancel{p}+\cancel{p} = q$$

ESEMPI DI UTILITÀ

SIA $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}) \Rightarrow |\varphi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)|\, dx$

SE $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad |\varphi(x)| \leq \int \frac{|\nabla\varphi(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy = \frac{1}{|x|^{n-1}} * |\nabla\varphi|$

PASSANDO ALLA NORMA IN L_q A DX. MI VIENE UNA STIMA IN L_p SU $\nabla\varphi$ PER QUALCHE p

COME VIENE LA STIMA DI SOPRA?

FISSO ω DIREZIONE $|\varphi(0)| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\omega \varphi \, dr\right| \leq \int |\partial_\omega \varphi|\, dr$

$$\int_\omega |\varphi(0)| \leq \int_\omega \int \frac{\overbrace{|\partial_\omega \varphi|}^{|\nabla\varphi|} \, \overbrace{r^{n-1}\, dr\, d\omega}^{= dx}}{\underbrace{r^{n-1}}_{= |x|^{n-1}}}$$

LEZIONE 22

Titolo nota 22/05/2019

$$\|\cdot\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|\nabla f\|_{L^p}$$

C^∞_c è DENSO IN $W^{1,p}$

TEOREMA DI IMMERSIONE DI SOBOLEV

$1 < p < n = \dim \Rightarrow W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$ DOVE $p^* = \frac{np}{n-p} > p$

CIOÈ $\|f\|_{L^{p^*}} \leq C \|f\|_{W^{1,p}}$ BASTA $\forall f \in C^\infty_c$ E SFRUTTO LA DENSITÀ.

DIM $\int |f(x)|^{p^*} \leq \int \left(\frac{1}{|x|^{n-1}} * |\nabla f| \right)^{p^*}$

$$\|f\|_{p^*} \leq \left\| \frac{1}{|x|^{n-1}} * |\nabla f| \right\|_{p^*} \overset{H-L-S}{\leq} C \|\nabla\|_{L^p}$$

$p \neq 1$ OK $p^* \neq \infty$ PERCHÉ $p \neq n$ OK

MANCA LO SCALING

$$1 + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{n-1}{n}$$

$$\frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad \text{OK}$$

STIMA FALSA

$$\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * f \right\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}} \leq C \|f\|_{L^1}$$

DIVENTA VERA SE

PROP $\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * f \right\|_{L^{\frac{n}{\alpha},\infty}} \leq C \|f\|_{L^1}$ $\quad 0 < \alpha < n$

DEBOLE

DIM SE $\lambda^{\frac{n}{\alpha}} \mathcal{L}\left\{ \left| \frac{1}{x^\alpha} * f \right| > \lambda \right\} \leq C \|f\|_{L^1}^{n/\alpha}$ È VERA

PASSANDO AL SUP SU λ A SX HO LA STIMA

$$K(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \qquad \begin{cases} K_{>R} = \frac{1}{|x|^\alpha} \chi_{\{|x|>R\}} \in L^\infty \\ K_{<R} = \frac{1}{|x|^\alpha} \chi_{\{|x|<R\}} \in L^1 \quad \text{PER LA SCELTA DI } \alpha \end{cases}$$

$$K(x) = K_{>R}(x) + K_{<R}(x)$$

$$\forall R>0 \quad \mathcal{L}\{|K(x)*f|>\lambda\} \underset{\text{LINEARITÀ DELLA CONVOLUZIONE}}{\leq} \underbrace{\mathcal{L}\{|K_{>R}*f|>\tfrac{\lambda}{2}\}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\mathcal{L}\{|K_{<R}*f|>\lambda\}}_{\mathrm{II}}$$

SCEGLIAMO $R = R(\lambda)$ t.c. $\mathrm{I} = \emptyset$

SE $\|K_{>R}*f\|_{L^\infty} \underset{\text{YOUNG}}{\leq} \|K_{>R}\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} \leq \frac{1}{R^\alpha}\|f\|_{L^1} \leq \frac{\lambda}{2}$

$$R^\alpha \sim \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$$

RESTA DA STIMARE $\mathcal{L}(\mathrm{II})$

$$\|K_{<R}*f\|_{L^1} \underset{\text{YOUNG}}{\leq} \|K_{<R}\|_{L^1}\|f\|_{L^1} \sim \left(\int_{|x|<R} \frac{1}{|x|^\alpha}\right)\cdot \|f\|_{L^1}$$
$$\simeq \left(\int_0^R r^{n-1-\alpha}\right)\|f\|_{L^1}$$
$$\simeq R^{n-\alpha}\cdot\|f\|_{L^1}$$

USANDO CHEBICHEV

$$\mathcal{L}\{|K_{<R}*f|>\tfrac{\lambda}{2}\} \leq C\cdot\frac{\|K_{<R}*f\|_{L^1}}{\lambda} \leq \frac{C}{\lambda} R^{n-\alpha}\|f\|_{L^1} \sim$$
$$\sim \frac{C}{\lambda}\left(\frac{\|f\|^{\frac{1}{\alpha}}}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{n-\alpha} \cdot \|f\|_{L^1} =$$
$$= \frac{C}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda^{n/\alpha}\cdot\cancel{\lambda^{-1}}}\|f\|^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \cancel{\|f\|_{L^1}^{-1}} \cdot \cancel{\|f\|_{L^1}} \sim C\cdot\frac{\|f\|_{L^1}^{n/\alpha}}{\lambda^{n/\alpha}}$$

PROP $\|f\|^p_{L^{p,\infty}} = \sup_{\lambda>0} \lambda^p \mathcal{L}\{|f|>\lambda\}$ È UN NORMA

DIM DIS. TRIANGOLARE

$$\lambda\left(\mathcal{L}\{|f+g|>\lambda\}\right)^{1/p} \le \lambda\left(\mathcal{L}\{|f|>\tfrac{\lambda}{2}\} + \mathcal{L}\{|g|>\tfrac{\lambda}{2}\}\right)^{1/p}$$

PASSANDO AL SUP IN λ $\qquad (a+b)^{1/p} \le a^{1/p} + b^{1/p}$

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \le 2\frac{\lambda}{2}\left(\mathcal{L}\{|f|>\tfrac{\lambda}{2}\}\right)^{1/p} + 2\frac{\lambda}{2}\left(\mathcal{L}\{|g|>\tfrac{\lambda}{2}\}\right)^{\frac{1}{p}} \le 2\|f\|_{L^{p,\infty}} + 2\|f\|_{L^{p,\infty}}$$

PESSIMA STIMA PERCHÈ IL FATTORE 2 AUMENTA CON L'AUMENTARE DEL NUMERO DELLE FUNZIONI

SISTEMO TROVARE UNA VERA NORMA $|f|$ E CHE SIA EQUIVALENTE ALLA MIA.

$$c\|\cdot\| \le |\ \ | \le C\|\cdot\|$$

$$\|f_1+\dots+f_n\| \le \frac{1}{c}|f_1+\dots+f_n| \overset{\text{DIS TRIANG DI } |\,|}{\le} \frac{1}{c}\left(|f_1|+\dots+|f_n|\right) \le \frac{C}{c}\left(\|f_1\|+\dots+\|f_n\|\right)$$

HO SISTEMATO TROVANDO UNA COSTANTE INDIPENDENTE DAL NUMERO DI FUNZIONI.

TEOREMA $L^{p,\infty}$ È NORMABILE (CIOÈ TROVO UNA NORMA EQ. CHE SISTEMA) $\iff p \ne 1$

$p=1 \Rightarrow L^{1,\infty}$ NON È NORMABILE

ES $\quad f_1 = \frac{1}{|x|},\ f_2 = \frac{1}{|x-2|},\ \dots,\ f_n = \frac{1}{|x-n|}$

$$\frac{\|f_1+\dots+f_n\|_{L^{1,\infty}}}{\|f_1\|_{L^{1,\infty}}+\dots+\|f_n\|_{L^{1,\infty}}} \sim \ln n \longrightarrow \infty$$

X ESERCIZIO FARE IL CONTO

(SE VALE QUESTO PER ASSURDO ESCLUDO ESISTA UNA COSTANTE CHE DIPENDE DAL NUMERO DI FUNZIONI)

$p>1$ MOSTRO CHE ESISTE UNA NORMA EQUIVALENTE A $\|\ \|_{p,\infty}$

$$|f| = \sup_{\substack{E\subseteq\mathbb{R}^n \\ \text{MISURABILE} \\ \text{E } \mathcal{L}(E)<+\infty}} \frac{\int_E |f|\,dx}{\left(\mathcal{L}(E)\right)^{1-\frac{1}{p}}}$$

CHE È UNA NORMA È FACILE

$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq C\,|f|$ È PIÙ FACILE

$E_\lambda = \{ |f| > \lambda \}$ $\qquad \lambda [\mathcal{L}(E_\lambda)]^{1/p} = \underbrace{\lambda\, \mathcal{L}(E_\lambda)}_{\text{CHEBICHEV SOLO SU } E_\lambda} \cdot \mathcal{L}(E_\lambda)^{\frac{1}{p}-1} \leq$

$\|f\|_{L^1(E_\lambda)} \to \dfrac{\int_{E_\lambda} |f|\,dx}{\mathcal{L}(E_\lambda)^{\frac{1}{p}-1}} \leq |f|$

CON IL SUP

VEDIAMO $|f| \leq C\,\|f\|_{L^{p,\infty}}$

SIA $E \subseteq \mathbb{R}^n$ MISURABILE e $\mathcal{L}(E) < \infty$

$$\int_E f = \sum_m \int_{E \cap \{2^m \leq |f| < 2^{m+1}\}} |f| = \sum_m 2^{m+1} \mathcal{L}(E \cap \{2^m \leq |f| < 2^{m+1}\})$$

$$\leq \sum_{m<N} 2^{m+1} \mathcal{L}(E) + \sum_{m \geq N} 2^{m+1} \mathcal{L}(\{|f| > 2^m\})$$

$$\leq 2^N \cdot 2\, \mathcal{L}(E) + \sum_{m \geq N} \frac{2^{m+1}}{2^{mp}} \cdot \underbrace{2^{mp} \mathcal{L}\{|f| > 2^m\}}_{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}$$

$$\sim 2 \cdot 2^{N(1-p)}$$

$$\int_E |f| \leq 2^N \mathcal{L}(E) + 2^{N(1-p)} \|f\|^p_{L^{p,\infty}}$$

SCELGO N t.c. $2^N \sim \dfrac{\|f\|_{L^{p,\infty}}}{\mathcal{L}(E)^{\frac{1}{p}}}$ E VIENE IL CONTRIBUTO CHE VOGLIO A DX