Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz

Matteo Stefanini

Sommario

In questo articolo andremo a presentare una dimostrazione completa di tutte le casistiche di uno dei piú importanti teoremi dell'interpolazione: il Teorema di Marcinkiewicz. Inoltre presenteremo un'applicazione del suddetto teorema: dimostreremo la limitattezza in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 < p \leq \infty$ dell'operatore Massimale di Hardy-Littlewood.

1 Preliminari

Prima di procedere con la dimostrazione del teorema, dobbiamo dare alcune definizioni e dimostrare alcune piccole proprietá che andremo ad utilizzare nella dimostrazione finale.

Definizione 1.1. Sia f una funzione misurabile, definiamo la *funzione di distribuzione* di f, $\lambda_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$ come:

$$\lambda_f(\alpha) = \mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha\}\right).$$

Andiamo ad elencare alcune note proprietá che possono facilmente dimostrate.

Proposizione 1.2. *Valgono i seguenti fatti:*

(i) *Date f, g misurabili tali che $|f| \leq |g|$, allora $\lambda_f \leq \lambda_g$.*

(ii) *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili tali che $|f_n| \leq |f|$ e $f_n \to f$, allora anche λ_{f_n} cresce a λ_f.*

(iii) *Se $f \leq g + h$, allora $\lambda_f(\alpha) \leq \lambda_g(\frac{1}{2}\alpha) + \lambda_h(\frac{1}{2}\alpha)$*

Proposizione 1.3. *Sia $1 \leq p < +\infty$. Allora:*

$$\int |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) d\alpha.$$

Dimostrazione. La dimostrazione puó essere semplicemente effettuata prima per le funzioni semplici, e in quel caso consiste in una semplice integrazione per parti. Poi ricordando che per ogni f misurabile, esiste sempre una successione φ_n di funzioni semplici che congergono crescendo a f. Quindi applicando il Teorema di Beppo-Levi e il punto *(ii)* della precedente proposizione si otttiene la tesi. □

Proposizione 1.4 (Decomposizione di f)**.** *Sia f una funzione misurabile e $a > 0$ una costante fissata. Adesso definiamo $A_a = \{x : |f(x)| > a\}$ e siano:*

$$h_a = f\chi_{A_a^c} + a\,\mathrm{sgn}(f)\chi_{A_a} \quad g_a = f - h_a = \mathrm{sgn}(f)(|f| - a)\chi_{A_a}.$$

Allora $\lambda_{g_a}(\alpha) = \lambda_f(\alpha + a)$ *e*

$$\lambda_{h_a}(\alpha) = \begin{cases} \lambda_f(\alpha) & \text{se } \alpha < a \\ 0 & \text{se } \alpha \geq a \end{cases}$$

Dimostrazione. Notiamo che se $|f(x)| \leq a$, allora $f(x) = h_a(x)$ e se $|f(x)| > a$, allora $g_a(x) = a\,\mathrm{sgn}(f)$. Quindi abbiamo che vale sempre $|h_a(x)| \leq a$. Cosideriamo $\alpha \geq a$, allora vale:

$$0 \leq \lambda_{h_a}(\alpha) = \mu\left(\{x : |h_a(x)| > \alpha\}\right) \leq \mu\left(\{x : |h_a(x)| > a\}\right) = 0$$

Invece se analizziamo il caso $\alpha < a$, si ottiene

$$\begin{aligned} \lambda_{h_a}(\alpha) =& \mu\left(\{x : |h_a(x)| > \alpha\}\right) = \\ =& \mu\left(\{x : |h_a(x)| > a\}\right) + \mu\left(\{x : |h_a(x)| = a\}\right) + \mu\left(\{x : a > |h_a(x)| > \alpha\}\right) = \\ =& 0 + \mu\left(\{x : |f(x)| \geq a\}\right) + \mu\left(\{x : a > |f(x)| > \alpha\}\right) = \\ =& \mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha\}\right) = \lambda_f(\alpha). \end{aligned}$$

Osserviamo invece che $g_a(x) = 0$ per ogni $x \in A_a^c$, quindi $\{x : |g_a(x)| > \alpha\} \subset A_a$. Noi vogliamo trovare gli $x \in A_a$ tali che $\mathrm{sgn}(f)(|f(x)| - a) > \alpha$, ma allora $|f(x)| - a > 0$ quindi necessariamente $\mathrm{sgn}(f) = 1$. In conclusione:

$$\lambda_{g_a}(\alpha) = \mu\left(\{x : |f(x)| - a > \alpha\}\right) = \mu\left(\{x : |f(x)| > a + \alpha\}\right) = \lambda_f(a + \alpha).$$

□

Definizione 1.5 (Spazi $\mathcal{L}^p$ deboli)**.** Per ogni funzione misurabile f e per ogni $1 \leq p < \infty$, sia:

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f(\alpha)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si definisce lo spazio $\mathcal{L}^p$ *debole*, denotato con $\mathcal{L}^{p,w}$, l'insieme delle funzioni f tali che $[f]_p < \infty$.

Proposizione 1.6. $[\cdot]_p$ *é positivamente omogenea. Vale quindi la relazione* $[c]_p = |c|[f]_p$.

Dimostrazione. La tesi segue dalla relazione:

$$\mu\left(\{x : |cf(x)| > \alpha\}\right) = \mu\left(\left\{x : |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}\right\}\right),$$

quindi $\lambda_{cf}(\alpha) = \lambda_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right)$. Per concludere:

$$\begin{aligned} [cf]_p = \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right)\right)^{\frac{1}{p}} =& \left(\sup_{|c|\beta > 0} \beta^p |c|^p \lambda_f(\beta)\right)^{\frac{1}{p}} \\ =& |c| \left(\sup_{\beta > 0} \beta^p \lambda_f(\beta)\right)^{\frac{1}{p}} = |c|[f]_p. \end{aligned}$$

□

É importante osservare che grazie alla disuguaglianza di Chebychev, ovvero $[f]_p \leq \|f\|_p$, si ha che $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^{p,w}$.

Definizione 1.7. Sia T un operatore sublineare dallo spazio $\mathcal{V}$ delle funzioni misurabili su (X,μ) nello spazio delle funzioni misurabili su (Y,ν). Diremo che T é *di tipo forte* (p,q) se valgono le seguenti:

(i) $\mathcal{L}^p(X,\mu) \subset \mathcal{V}$.

(ii) $T_{|\mathcal{L}^p(X,\mu)} : \mathcal{L}^p(X,\mu) \to \mathcal{L}^q(Y,\nu)$.

(iii) Esiste $C > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ vale $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$.

Definizione 1.8. Sia T un operatore sublineare dallo spazio $\mathcal{V}$ delle funzioni misurabili su (X,μ) nello spazio delle funzioni misurabili su (Y,ν). Diremo che T é *di tipo debole* (p,q) per $p \in [1,+\infty]$ e $q \in [1,+\infty)$ se valgono le seguenti:

(i) $\mathcal{L}^p(X,\mu) \subset \mathcal{V}$.

(ii) $T_{|\mathcal{L}^p(X,\mu)} : \mathcal{L}^p(X,\mu) \to \mathcal{L}^{q,w}(Y,\nu)$.

(iii) Esiste $C > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ vale $[Tf]_q \leq C\|f\|_p$.

Diremo inoltre che T é di tipo debole $(p,+\infty)$ se e solo se é di tipo forte $(p,+\infty)$.

L'ultima cosa che andiamo a ricordare che utilizzeremo é la seguente diseguaglianza.

Teorema 1.9 (Diseguaglianza integrale di Minkowski)**.** *Dati* $p \in [1,\infty)$ *e* $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *misurabile rispetto alla misura prodotto, vale:*

$$\left[\int \left|\int f(x,y)dy\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left(\int |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Dimostrazione. Tramite un argomento di approssimazione é sufficiente provare la tesi per le f della forma:

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{N} h_j(x)\chi_{E_j}(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

dove N é un intero positivo, h_j é misurabile e gli E_j sono una famiglia di misurabili a due a due disgiunti. Andremo ad usare la disuguaglianza di Minkowski che ricordiamo essere $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
\left[\int \left|\int f(x,y)dy\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\int \left|\sum_{j=1}^{N} |E_j| h_j(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=1}^{N} |E_j| \left(\int |h_j(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \int \chi_{E_j}(y) \left(\int |h_j(x)|^p dx\right)^{1/p} dy \\
&= \sum_{j=1}^{N} \int \left(\int \chi_{E_j}(y)|h_j(x)|^p dx\right)^{1/p} dy \\
&= \int \left(\int |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.
\end{aligned}$$

Adesso usando i classici teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e di approssimazione si ottiene la tesi. $\square$

2 Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz

Siamo finalmente pronti per enunciare e dimostrare il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz.

Teorema 2.1 (Interpolazione di Marcinkiewicz)**.** *Consideriamo un operatore sublineare T, che manda lo spazio delle funzioni misurabili su (X, μ) in quelle misurabili su (Y, ν). Supponiamo che $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [0, +\infty]$ tali che $p_0 \leq q_0$, $p_1 \leq q_1$, e $q_0 \neq q_1$. Definiamo inoltre :*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

per $t \in (0, 1)$. Se T mappa $\mathcal{L}^{p_0}(X, \mu) + \mathcal{L}^{p_1}(X, \mu)$ nello spazio delle funzioni $\nu-$misurabili su Y e vale $[Tf]_{q_i} \leq C_i \|f\|_{p_i}$, con $C_i > 0$ e $i \in \{0, 1\}$, allora esiste una costante $C > 0$, che dipende da $p, q, p_0, q_0, p_1, q_1, C_0, C_1$, tale che $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$. Piú sinteticamente, se T é di tipo debole (p_0, q_0) e anche (p_1, q_1), allora T é di tipo forte (p, q).

La strategia di lavoro, salvo in alcuni casi piú semplici, sará quella di spezzare f in h_a e g_a, e poi attuare delle scelte su a in relazione con α per ottenere le stime desiderate.

Dimostrazione. Ci sono diversi casi da considerare. Iniziamo dimostrando per $p_0 = p_1 = p$ e $q_1 = +\infty$. Iniziamo osservando che per $\alpha > 0$ vale:

$$\alpha^{q_0} \lambda_{Tf}(\alpha) \leq [Tf]_{q_0}^{q_0} \leq C_0^{q_0} \|f\|_{p_0}^{q_0} = C_0^{q_0} \|f\|_p^{q_0},$$

quindi $\lambda_{Tf}(\alpha) \leq \left(\frac{C_0 \|f\|_p}{\alpha} \right)^{q_0}$. Ricordiamo inoltre che per ipotesi $\|Tf\|_\infty \leq C_1 \|f\|_{p_1} = C_1 \|f\|_p$, quindi se scegliamo $a = C_1 \|f\|_p$, avremo che $\lambda_{Tf}(\alpha) = 0$ per $\alpha > a$. Grazie alla Proposizione 1.3 abbiamo:

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_q^q =& q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \lambda_{Tf}(\alpha) d\alpha = q \int_0^a \alpha^{q-1} \lambda_{Tf}(\alpha) d\alpha \\
\leq& q C_0^{q_0} \|f\|_p^{q_0} \int_0^a \alpha^{q-1-q_0} d\alpha = q C_0^{q_0} \|f\|_p^{q_0} \left[\frac{\alpha^{q-q_0}}{q-q_0} \right]_0^a \\
=& \frac{q}{q-q_0} C_0^{q_0} \|f\|_p^{q_0} a^{q-q_0} = \frac{q}{q-q_0} C_0^{q_0} \|f\|_p^{q_0} (C_1 \|f\|_p)^{q-q_0} \\
=& C \|f\|_p^q.
\end{aligned}$$

Osserviamo che l'integrale risulta convergente in 0 e la costante $C > 0$ perché $q = \frac{q_0}{1-t} > q_0$ per $t \in (0, 1)$. Si noti inoltre che la dimostrazione é analoga per il caso $q_0 = \infty$, basta invertire il ruolo di q_0 e q_1.

Analizziamo adesso il caso in cui entrambi i $q_i < \infty$ e ancora $p_0 = p_1 = p$. qui possiamo assumere, senza perdita di generalitá, che $q_0 < q_1$ e di conseguenza $q_0 < q < q_1$. In modo del tutto analogo a prima si ha che $\lambda_{Tf}(\alpha) \leq \left(\frac{C_i \|f\|_p}{\alpha} \right)^{q_i}$ per $i = 0, 1$. Allora:

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_q^q =& q\int_0^\infty \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(\alpha)d\alpha\\
=& q\int_0^1 \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(\alpha)d\alpha + q\int_1^\infty \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(\alpha)d\alpha\\
\le& qC_0^{q_0}\|f\|_p^{q_0}\int_0^1 \alpha^{q-1-q_0}d\alpha + C_1^{q_1}\|f\|_p^{q_1}\int_1^\infty \alpha^{q-1-q_1}d\alpha\\
=& \frac{q}{q-q_0}C_0^{q_0}\|f\|_p^{q_0} + \frac{q}{q_1-q}C_1^{q_1}\|f\|_p^{q_1}\\
=& \|f\|_p^q\left(\frac{q}{q-q_0}C_0^{q_0}\|f\|_p^{q_0-q} + \frac{q}{q_1-q}C_1^{q_1}\|f\|_p^{q_1-q}\right) = C\|f\|_p^q.
\end{aligned}
$$

anche in questo caso l'integrabilitá e il fatto che $C > 0$ sono dati dal fatto che $q_0 < q < q_1$. Osservo inoltre che ho potuto escludere il caso in cui $\|f\|_p = 0$ per cui la tesi é banalmente verificata.

Affrontiamo adesso la casistica principale della dimostrazione, ovvero assumiamo $p_0 < p_1 < \infty$ e consideriamo il caso $q_0, q_1 < \infty$. Chiamiamo g_a e h_a come nella Proposizione 1.4. Dalle Proposizoni 1.3 e 1.4 usando anche un cambiamento di variabili, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\int |g_a|^{p_0} =& p_0\int_0^\infty \alpha^{p_0-1}\lambda_{g_a}(\alpha)d\alpha\\
=& p_0\int_0^\infty \alpha^{p_0-1}\lambda_f(a+\alpha)d\alpha\\
=& p_0\int_a^\infty (\alpha-a)^{p_0-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha\\
\le& p_0\int_a^\infty \alpha^{p_0-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

inoltre

$$
\begin{aligned}
\int |h_a|^{p_1} =& p_1\int_0^\infty \alpha^{p_1-1}\lambda_{h_a}(\alpha)d\alpha\\
=& p_1\int_0^a \alpha^{p_1-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Inoltre, ricordando la Proposizione 1.2 e che T é sublineare si ottiene:

$$
\lambda_{Tf}(2\alpha) \le \lambda_{Tg_a}(\alpha) + \lambda_{Th_a}(\alpha). \tag{2.3}
$$

Allora usando la Proposizione 1.3, l'equazione 2.3, e le stime date dal fatto che T é un operatore di tipo debole, si ha:

$$\begin{aligned}\int |Tf|^q =&q\int_0^\infty \beta^{q-1}\lambda_{Tf}(\beta)d\beta\\ =&2^q q\int_0^\infty \beta^{q-1}\lambda_{Tf}(2\beta)d\beta\\ \leq&2^q q\int_0^\infty \beta^{q-1}\left(\lambda_{Tg_a}(\beta)+\lambda_{Th_a}(\beta)\right)d\beta\\ \leq&2^q q\int_0^\infty \beta^{q-1}\left(\frac{[Tg_a]_{q_0}^{q_0}}{\beta^{q_0}}+\frac{[Th_a]_{q_1}^{q_1}}{\beta^{q_1}}\right)d\beta\\ \leq&2^q q\int_0^\infty \beta^{q-1}\left[\left(\frac{C_0\|g_a\|_{p_0}}{\beta}\right)^{q_0}+\left(\frac{C_1\|h_a\|_{p_1}}{\beta}\right)^{q_1}\right]d\beta.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Adesso utilizzando le equazioni 2.1 e 2.2, si ottiene:

$$\begin{aligned}&2^q q\int_0^\infty \beta^{q-1}\left[\left(\frac{C_0\|g_a\|_{p_0}}{\beta}\right)^{q_0}+\left(\frac{C_1\|h_a\|_{p_1}}{\beta}\right)^{q_1}\right]d\beta\\ &\leq 2^q q C_0^{q_0}p_0^{q_0/p_0}\int_0^\infty \beta^{q-q_0-1}\left(\int_a^\infty \alpha^{p_0-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha\right)^{q_0/p_0}d\beta+\\ &+2^q q C_1^{q_1}p_1^{q_1/p_1}\int_0^\infty \beta^{q-q_1-1}\left(\int_0^a \alpha^{p_1-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha\right)^{q_1/p_1}d\beta\end{aligned} \tag{2.5}$$

Poiché l'equazione é vera per ogni $a>0$, possiamo fissare $a=\beta^\sigma$, con $\sigma=\frac{p_0(q_0-q)}{q_0(p_0-p)}$. Chiamo, inoltre, χ_0 l'indicatrice dell'insieme $\{\alpha:\alpha>\beta^\sigma\}$, mentre χ_1 l'indicatrice di $\{\alpha:0<\alpha<\beta^\sigma\}$. Inoltre osservando che per ipotesi $q_i/p_i\geq 1$, possiamo ad entrambi gli integrali nell'ultima equazione applicare la diseguaglianza di Minkowski e ottenere quindi:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \beta^{q-q_i-1}\left(\int_0^\infty \chi_i\alpha^{p_i-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha\right)^{q_i/p_i}d\beta\\ &\leq\left\{\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \chi_i\beta^{q-q_i-1}\left(\alpha^{p_i-1}\lambda_f(\alpha)\right)^{q_i/p_i}d\beta\right]^{p_i/q_i}d\alpha\right\}^{q_i/p_i}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Adesso dobbiamo distinguere due casi: $q_0<q<q_1$ oppure $q_1<q<q_0$. Nel primo caso abbiamo che $q-q_0>0$ e poiché abbiamo assunto $p_0<p<p_1$, abbiamo che $\sigma>0$. Quindi se $\alpha>\beta^\sigma$, allora $\alpha^{\frac{1}{\sigma}}>\beta$, quindi per $i=0$ abbiamo che il primo dei due integrali sommati in 2.5 con il conto in 2.6 diventa:

$$2^q q C_0^{q_0}p_0^{q_0/p_0}\left[\int_0^\infty\left[\int_0^{\alpha^{1/\sigma}}\beta^{q-q_0-1}\left(\alpha^{p_0-1}\lambda_f(\alpha)\right)^{q_0/p_0}d\beta\right]^{p_0/q_0}d\alpha\right]^{q_0/p_0} \tag{2.7}$$

$$=2^q q C_0^{q_0}p_0^{q_0/p_0}(q-q_0)^{-1}\left[\int_0^\infty \alpha^{p_0-1+(q-q_0)p_0/(q_0\sigma)}\lambda_f(\alpha)d\alpha\right]^{q_0/p_0} \tag{2.8}$$

$$=2^q q C_0^{q_0}p_0^{q_0/p_0}|q-q_0|^{-1}\left[\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha\right]^{q_0/p_0} \tag{2.9}$$

$$=2^q q C_0^{q_0}p_0^{q_0/p_0}|q-q_0|^{-1}\left(\frac{\|f\|_p^p}{p}\right)^{q_0/p_0} \tag{2.10}$$

In modo analogo se $q_1 < q < q_0$, allora $q - q_0 < 0$, quindi $\sigma < 0$. Allora da $\alpha > \beta^\sigma$ si ottiene $\beta > \alpha^{1/\sigma}$. Quindi abbiamo la stessa dimostrazione dove le modifiche sono le seguenti:

(i) Gli estremi di integrazione in 2.7 diventano da $\alpha^{1/\sigma}$ fino a ∞ in $d\beta$.

(ii) Il punto *(i)* comporta la comparsa di un segno meno davanti a α nell'integrale 2.8.

(iii) Fortunatamente $|q - q_0| = -(q - q_0)$ e quindi il doppio segno meno mi riporta comunque alla 2.9 e da lí alla 2.10.

Adesso osserviamo che:

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{(1-t)q} - \frac{t}{(1-t)q_1}, \quad \frac{1}{p_0} = \frac{1}{(1-t)p} - \frac{t}{(1-t)p_1},$$

da cui:

$$1 - \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{1-t} \cdot \frac{q_1 - q}{q}, \quad 1 - \frac{p}{p_0} = -\frac{t}{1-t} \cdot \frac{p_1 - p}{p},$$

allora:

$$\sigma = \frac{p_0(q_0 - q)}{q_0(p_0 - p)} = \frac{1 - \frac{q}{q_0}}{1 - \frac{p}{p_0}} = \frac{p_1(q_1 - q)}{q_1(p_1 - p)}.$$

Quindi il caso $q_0 < q < q_1$ corrisponde a $\sigma > 0$ e allora $\alpha^{\frac{1}{\sigma}} > \beta$. Mentre il caso $q_1 < q < q_0$ corrisponde a $\sigma < 0$, di conseguenza $\beta > \alpha^{1/\sigma}$. Allora con conti completamente analoghi al caso $i = 0$ possiamo ottenere:

$$\begin{aligned} 2^q q C_1^{q_1} p_1^{q_1/p_1} & \left\{ \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \chi_1 \beta^{q-q_1-1} \left(\alpha^{p_1-1} \lambda_f(\alpha) \right)^{q_1/p_1} d\beta \right]^{p_1/q_1} d\alpha \right\}^{q_1/p_1} \\ &= 2^q q C_1^{q_1} p_1^{q_1/p_1} |q - q_1|^{-1} \left(\frac{\|f\|_p^p}{p} \right)^{q_1/p_1} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Mettendo insieme la 2.10 e la 2.11 si ottiene:

$$\|Tf\|_q \leq 2q^{1/q} \left[\sum_{i=0}^{1} C_i^{q_i} p_i^{q_i/p_i} |q - q_1|^{-1} \left(\frac{\|f\|_p^p}{p} \right)^{q_i/p_i} \right]^{1/q},$$

Questo implica:

$$\sup_{\|f\|_p = 1} \|Tf\|_q \leq C = 2q^{1/q} \left[\sum_{i=0}^{1} C_i^{q_i} (p_i/p)^{q_i/p_i} |q - q_1|^{-1} \right]^{1/q},$$

quindi per ogni $f \in \mathcal{L}^p$ vale $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ perché posso riscalare f e avere la tesi grazie alla sublinearitá di T. Questo completa la dimostrazione in questo caso.

Adesso vediamo che per concludere con tutte le casistiche rimaste bisogna solo riadattare i conti e la scelta della costante a. Ad esempio se $p_1 = q_1 = \infty$, poniamo $a = \frac{\beta}{C_1}$. Allora $\|T_{h_a}\|_\infty \leq C_1 \|h_a\|_\infty \leq \beta$, quindi $\lambda_{Th_a} = 0$. Sostituendo questa relazione nella terza equazione di 2.4 , si giunde alla disequazione

2.5 con solo il primo membro. Allora nell'equazione 2.7 sostituiamo $\alpha^{1/\sigma}$ con αC_1 (dato il nuovo a), con conti identici arriviamo ad avere:

$$\|Tf\|_q \leq 2\left[q(p_0/p)^{q_0/p_0} C_0^{q_0} C_1^{q-q_0} |q-q_0|^{-1}\right]^{1/q} \|f\|_p.$$

Nel caso in cui $q_0 < q_1 = \infty$, si pone $a = \left(\frac{\beta}{d}\right)^{\tau}$, dove $d = C_1 \left(\frac{p_1\|f\|_p^p}{p}\right)^{1/p_1}$ e $\tau = \frac{p_1}{p_1 - p}$. Allora anche in questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned}
\|Th_a\|_\infty^{p_1} \leq & C_1^{p_1}\|h_a\|_{p_1}^{p_1} \\
= & C_1^{p_1} p_1 \int_0^a \beta^{p_1-1}\lambda_f(\beta)d\beta \\
\leq & C_1^{p_1} p_1 a^{p_1-p} \int_0^a \beta^{p-1}\lambda_f(\beta)d\beta \\
\leq & C_1^{p_1}\frac{p_1}{p} a^{p_1-p}\|f\|_p^p \\
= & C_1^{p_1}\frac{p_1}{p}\left(\frac{\beta}{d}\right)^{p_1}\|f\|_p^p \\
= & \beta^{p_1}.
\end{aligned}$$

Adesso la dimostrazione segue come nel caso precendente perché $\lambda_{Th_a} = 0$ e quindi si arriva a trovare un'opportuna costante $C > 0$.

Per l'ultimo caso, $q_1 < q_0 = \infty$, seguiamo essenzialmente la dimostrazione del caso precedente, poniamo quindi $a = \left(\frac{\beta}{d}\right)^{\tau}$ e scegliamo d e τ in modo tale che $\lambda_{Th_a} = 0$, per poi concludere come sempre. $\square$

3 L'operatore Massimale di Hardy-Littlewood

Procediamo adesso mostrando un'applicazione del teorema appena dimostrato.

Definizione 3.1. Sia $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$. *L'operatore Massimale di Hardy-Littlewood* della funzione f, indicato con Hf, é dato da :

$$Hf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|dy,$$

dove $B_r(x)$ indica la palla centrata in x di raggio r.

Si osservi che l'operatore prende l'estremo superiore di tutte le medie di $|f|$ sulle palle centrare in x al variare dei raggi. In questa sezione vorremo mostrare che H é un operatore limitato su $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $1 < p \leq \infty$.

Lemma 3.2. *Supponiamo di avere $\mathcal{U}$ una famiglia di palle aperte in $\mathbb{R}^n$, e sia $V = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. Se $|V| > a > 0$ con a costante, allora esistono $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ disgiunti, tali che $\sum_{j=1}^k |U_j| > \frac{a}{3^n}$.*

Dimostrazione. Sfruttando le proprietá della misura di Lebesgue, é possibile scegliere un compatto $K \subset V$, tale che $a < |K| \leq |V|$. Allora $\mathcal{U}$ forma un ricoprimento aperto di K, quindi é possibile estrarne un sottoricoprimento finito

$V_1, \ldots, V_s \in \mathcal{U}$. Denoto con U_1 la palla tra le V_i di raggio massimo. Sia poi U_2 quella di raggio massimo tra le restanti che non interseca U_1. E cosí via scegliamo sempre le palle di raggio massimo tra le restanti, che non si intersecano con le precedenti giá scelte, fino a che non abbiamo piú V_i con questa proprietá. Osserviamo adesso che ognuno dei V_i ha due alternative: o coincide con uno degli U_j, oppure si interseca con un U_j di raggio maggiore. Possiamo infatti garantire la seconda affermazione scegliendo il piú piccolo j tale che $U_j \cap V_i \neq \emptyset$. Indichiamo adesso con W_j e $j = 1, \ldots, k$, le palle concetriche a U_j ma con raggio triplo. Dalla precendete osservazione sui V_i, é facile osservare che per ogni i esiste un j tale che $V_i \subset W_j$. Da questo ne segue che $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} W_j$. Per concludere quindi:

$$a < |K| \leq \sum_{j=1}^{k} |W_j| = 3^n \sum_{j=1}^{k} |U_j|.$$

□

Teorema 3.3. *L'operatore Massimale di Hardy-Littlewood é limitato in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 < p \leq \infty$. Cioé esiste una costante $C > 0$ tale che:*

$$\|Hf\|_p \leq C\|f\|_p.$$

Dimostrazione. Iniziamo osservando che $|H(cf)| = |c||Hf|$ e che usando la disuguaglianza triangolare si ottiene $|H(f+g)| \leq |Hf| + |Hg|$, quindi H é un operatore sublineare. Si ha facilmente che H è di tipo forte (quindi anche debole) (∞, ∞) da

$$|Hf(x)| = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy \leq \sup_{r>0} \frac{|B_r(x)|}{|B_r(x)|} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Il cuore della dimostrazione sta tutto nel verificare che H é di tipo debole $(1,1)$. Che é equivalente ad avere che:

$$\alpha \lambda_{Hf}(\alpha) \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx,$$

per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $\alpha > 0$ e per una qualche costante positiva C_1. Sia $A_\alpha = \{x : Hf(x) > \alpha\}$. Per gli α tali che A_α é vuoto o trascurabile allora la disuguaglianza é verificata perché $\lambda_{Hf}(\alpha) = 0$. Prendiamo un α per cui non sia né vuoto né trascurabile. Allora esiste un $\beta > 0$ tale che $|A_\alpha| > \beta$. adesso per ogni $x \in A_\alpha$, per la definizione di $Hf(x)$, é possibile trovare un $r_x > 0$ tale che $\frac{1}{|B_{r_x}(x)|} \int_{B_{r_x}(x)} |f(y)| dy > \alpha$. Allora $\{B_{r_x}(x)\}$ ricoprono A_α. Quindi grazie al Lemma 3.2 é possibile scegliere $B_{r_{x_1}}(x_1), \ldots, B_{r_{x_k}}(x_k)$ disgiunte, che rinomino $B_1, \ldots, B_k$, tali che:

$$3^n \sum_{j=1}^{k} |B_j| > \beta.$$

Da questo ne segue che:

$$\beta < 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_j| \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} |f(y)| dy \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Quindi per arbitrarietá di β (posso mandare β a $|A_\alpha|$), troviamo che $\alpha|A_\alpha| \leq 3^n\|f\|_1$.

Adesso, grazie al teorema di interpolazione di Marcinkiewicz, otteniamo che per ogni $p \in (1, \infty)$, esiste una $C > 0$, tale che $\|Hf\|_p \leq C\|f\|_p$. $\square$