Analisi complessa A

Matteo Talluri

22 luglio 2020

Questi appunti sono frutto delle lezioni del corso *Analisi complessa A* tenuto dal professor Fabrizio Broglia nell'anno accademico 2019-2020. Nel caso siano presenti errori siete pregati di segnalarli a `talluri@mail.dm.unipi.it`

Indice

1 Funzioni olomorfe di più variabili

Definizione 1.1. Chiameremo *polidisco aperto* di centro w e poliraggio $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ l'insieme $\Delta(w, r) \subseteq \mathbb{C}^n$ definito come

$$\Delta(w, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - w_j| < r_j \ \ 1 \leq j \leq n\}$$

con $r_i > 0$ per $1 \leq j \leq n$.

Definizione 1.2. Chiameremo *dominio* un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso e non vuoto e *polidominio* un insieme D tale che

$$D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \subseteq \mathbb{C}^n$$

Con D_j dominio per ogni $1 \leq j \leq n$.

Definizione 1.3. Sia $D \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, diremo che $f : D \to \mathbb{C}$ è *olomorfa* in D se per ogni $w \in D$ esiste un intorno $U_w \subseteq D$ tale che

$$f(z) = \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{\infty} a_{\mathbf{j}}(z_1 - w_1)^{j_1} \cdots (z_n - w_n)^{j_n}$$

per ogni $z \in U$ con $\mathbf{j} = (j_1, ..., j_n)$ multiindice. Nel seguito indicheremo con $\mathcal{O}_D$ o con $\mathscr{H}(D)$ l'insieme delle funzioni olomorfe definite su D.

Dal teorema di Abel otteniamo che se f è olomorfa allora la sua espansione in serie converge uniformemente e assolutamente in ogni polidisco $\Delta(w, r)$ abbastanza piccolo. Da questo segue che le funzioni olomorfe sono continue e le loro espansioni in serie possono essere arbitrariamente riordinate. Nel seguito, data una funzione $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ indicheremo con u la sua parte reale e con v la sua parte immaginaria.

Teorema 1.1 (Osgood)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto e $f : D \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa separatamente in ogni variabile, allora f è olomorfa in D.*

Dimostrazione. Dato $w \in D$ consideriamo $\overline{\Delta(w, r)} \subset D$; poiché f è olomorfa in ogni variabile possiamo usare la formula integrale di Cauchy per funzioni di una variabile ottenendo

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_1 - \zeta_1| = r_1} \frac{\mathrm{d}\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \int_{|w_2 - \zeta_2| = r_2} \frac{\mathrm{d}\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \cdots \int_{|w_n - \zeta_n| = r_n} \frac{\mathrm{d}\zeta_n}{\zeta_n - z_n} f(\zeta).$$

Dato che f è continua possiamo usare il teorema di Fubini-Tonelli e otteniamo

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_j - \zeta_j| = r_j} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} \mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_n$$

Dato che $|\frac{z_j - wj}{\zeta_j - w_j}| < 1$ possiamo usare l'espressione per la serie geometrica ottenendo

$$\frac{1}{\zeta_j - z_j} = \frac{1}{\zeta_j - w_j + (w_j - z_j)} = \frac{1}{(\zeta_j - w_j)(1 - \frac{z_j - w_j}{\zeta_j - w_j})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_j - w_j)^k}{(\zeta_j - w_j)^{k+1}}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} &= \frac{1}{(\zeta_1 - w_1)(1-\frac{z_1-w_1}{\zeta_1-w_1})\cdots(\zeta_n-w_n)(1-\frac{z_n-w_n}{\zeta_n-w_n})} \\ &= \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{\infty} \frac{(z_1-w_1)^{j_1}\cdots(z_n-w_n)^{j_n}}{(\zeta_1-w_1)^{j_1+1}\cdots(\zeta_n-w_n)^{j_n+1}}\end{aligned}$$

dato che questa serie converge assolutamente, possiamo scambiare l'operazione di integrale con l'operazione di serie e troviamo

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{\infty} \int_{|w_j-\zeta_j|=r_j} \frac{(z_1-w_1)^{j_1}\cdots(z_n-w_n)^{j_n} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta_1\cdots\mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta_1-w_1)^{j_1+1}\cdots(\zeta_n-w_n)^{j_n+1}}$$

Quindi i coefficienti dell'espansione in serie sono dati da

$$a_{\mathbf{j}} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_j-\zeta_j|=r_j} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta_1\cdots\mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta_1-w_1)^{j_1+1}\cdots(\zeta_n-w_n)^{j_n+1}}$$

□

Definizione 1.4. Definiamo gli operatori differenziali

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

Dal teorema di Osgood e dalle equazioni di Cauchy-Riemann in una variabile si ottiene che f è analitica se solo se vale

$$\frac{\partial}{\partial z_j} f(z) = 0 \quad \forall j = 1, 2, ..., n.$$

Teorema 1.2. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto allora*

- *$\mathcal{O}_D$ è un anello rispetto alle operazioni*

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z) \quad (fg)(z) = f(z)g(z)$$

- *Se $f \in \mathcal{O}_D$ è ovunque diversa da 0 allora $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_D$*
- *Se $f \in \mathcal{O}_D$ ed è a valori reali o ha modulo costante allora è costante.*

Dimostrazione. 1. Applicando Cauchy-Riemann si trova

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} g + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} f$$

2. Troviamo

$$0 = \frac{\partial(ff^{-1})}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} f^{-1} + \frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{z}_j} f = \frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{z}_j} f$$

3. Se f è a valori reali allora anche $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$ lo sono, tuttavia per le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = i \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad \forall\ 1 \leq j \leq n$$

e quindi sono entrambe zero, dunque f è costante. Se il modulo di f è costante si può scrivere

$$f(z) = \rho e^{i\theta(z)}$$

con θ funzione a valori reali, derivando si trova

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = if \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}_j}$$

dunque θ è costante da cui segue che anche f lo è.

□

Definizione 1.5. Dati $D \subseteq \mathbb{C}^n$ e $D' \subseteq \mathbb{C}^m$ aperti consideriamo $f : D \to D'$ possiamo scrivere

$$f(z_1, ..., z_n) = (g_1(z_1, ..., z_n), ..., g_m(z_1, ..., z_n))$$

con $g_j : D \to \mathbb{C}$ per ogni $1 \leq j \leq m$ diciamo che f è una *mappa olomorfa* se le g_i sono olomorfe.

Teorema 1.3 (Chain Rule)**.** *Dati $D \subseteq \mathbb{C}^n$ e $D' \subseteq \mathbb{C}^m$ $f : D' \to \mathbb{C}$ e $g : D \to D'$ con f olomorfa e g mappa olomorfa allora la funzione $f \circ g$ è olomorfa in D.*

Dimostrazione. Scriviamo $g_j(z) = u_j(z) + iv_j(z)$ allora usando la Chain Rule per funzioni reali si trova

$$\frac{\partial f(g(z))}{\partial \bar{z}_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial f}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial \bar{z}_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u_k} - i\frac{\partial f}{\partial v_k}\right)\frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial v_k} + i\frac{\partial f}{\partial v_k}\right)\frac{\partial \bar{g}_k}{\partial \bar{z}_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial w_k}\frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}_k}\frac{\partial \bar{g}_k}{\partial \bar{z}_j}\right)$$

con $w = (w_1, ..., w_m) \in D'$. Dato che sia f che g sono olomorfe otteniamo $\frac{\partial f}{\partial \bar{w}_k} = 0$ e $\frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}_j} = 0$. □

Teorema 1.4 (Principio di identità)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}^n$ e $f, g : D \to \mathbb{C}$ tali che $f(z) = g(z)$ per ogni z in un aperto non vuoto $U \subseteq D$ allora $f \equiv g$ su D.*

Dimostrazione. Sia $\Omega \subseteq D$ definito come

$$\Omega = \{z \in D : f(z) = g(z)\}$$

allora Ω è chiuso perché preimmagine di 0 tramite la funzione analitica $f - g$, inoltre per definizione di analiticità per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste un intorno U_{z_0} in cui vale

$$f(z) - g(z) = \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{\infty} a_{\mathbf{J}}(z_1 - w_1)^{j_1} \cdots (z_n - w_n)^{j_n}$$

per ogni $z \in U_{z_0}$. Da questo segue che $U_{z_0} \subseteq \Omega$ che quindi è anche aperto. □

Teorema 1.5 (Principio del massimo modulo)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto e connesso e $f \in \mathcal{O}_D$, se esiste un punto $w \in D$ tale che $|f(z)| \leq |f(w)|$ per ogni z in un intorno di w allora $f \equiv g$ su D.*

Dimostrazione. Sia $x \in D$ e per ogni $y \in D$ consideriamo la retta complessa $r_y : x + \lambda(y - x)$. Osserviamo che l'unione di queste rette ricopre D. Se restringiamo f a $r_y \cap D$ otteniamo una funzione olomorfa di una variabile, per il principio del massimo in una variabile $f_{|r_y \cap D} = C_y$. Dato che tutte le rette passano per x la costante è la stessa per ogni retta e quindi f è costante su D. □

Definizione 1.6. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa e $z_0 \in \Omega$ possiamo scrivere in un un intorno di z_0

$$f(z) = p_k(z - z_0) + p_{k+1}(z - z_0) + ...$$

dove i p_i sono polinomi omogenei di grado i. Diremo che:

1. f ha ordine totale k se k è il più piccolo indice tale che p_k non è identicamente nullo.
2. f è regolare di ordine k in punto $w \in \Omega$ nella variabile z_n se la funzione di una sola variabile $f(w_1, w_2, ..., w_{n-1}, \cdot)$ ha uno zero di ordine k in w_n.

Osserviamo che la definizione precedente è equivalente a richiedere che

$$f(w) = 0 \quad \frac{\partial f(w)}{\partial z_n} = 0 \quad ... \quad \frac{\partial^{k-1} f(w)}{\partial z_n^{k-1}} = 0 \quad \frac{\partial^k f(w)}{\partial z_n^k} \neq 0$$

Lemma 1.1. *Se f è olomorfa di ordine totale k in un punto w, esiste un cambiamento di coordinate lineare in $\mathbb{C}^n$ tale che f è regolare di ordine k nella variabile z_n nel punto w.*

Dimostrazione. A meno di traslazione possiamo assumere che il punto w sia l'origine di $\mathbb{C}^n$, possiamo espandere f come

$$f(z) = \sum_{j=k}^{\infty} p_j(z)$$

con $p_k(0) \neq 0$, sia $a = (a_1, ..., a_n)$ tale che $p_k(a) \neq 0$ allora esiste una matrice $B = (b_{ij})$ tale che

$$A = \begin{pmatrix} & a_1 \\ B & \vdots \\ & a_n \end{pmatrix}$$

è non singolare. Se effettuiamo il cambio di variabili $z = A\zeta$ la nuova funzione $g(\zeta) = f(\zeta(z))$ ha ancora ordine totale k ma $g_k(0, ..., 1) = f_k(a_1, ..., a_n) \neq 0$ quindi g è regolare di ordine k in ζ_n nell'origine. □

Teorema 1.6. *Data f olomorfa in un polidisco $\Delta(w, r)$ regolare di ordine k in z_n allora esiste un polidisco $\Delta(w, \delta) \subseteq \Delta(w, r)$ tale che per ogni $(a_1, ..., a_{n-1}) \in \Delta(w, \delta_1, ..., \delta_{n-1})$ la funzione della variabile z_n $f(a_1, ..., a_{n-1}, z_n)$ ha esattamente k zeri nel disco $|z_n - w_n| < \delta_n$.*

Dimostrazione. Per semplificare la notazione supponiamo a meno di traslazioni $w = 0 \in \mathbb{C}^n$. Per ipotesi $f(0, ..., 0, z_n)$ ha uno zero di ordine k in $z_n = k$. Dato che gli zeri di una funzione analitica di una variabile sono isolati esiste una costante $0 < \delta_n \leq r_n$ tale che $f(0, ..., 0, z_n) \neq 0$ se $0 < |z_n| \leq \delta_n$ poniamo

$$\inf_{|z_n|=\delta_n} |f(0, ..., 0, z_n)| = \epsilon > 0$$

Dato che f è continua in un intorno aperto del compatto $z_1 = z_2 = ... = z_{n-1} = 0$, $|z_n| = \delta_n$ esistono costanti $0 < \delta_j \leq r_j$ per $j = 1, ..., n-1$ tale che

$$|f(z_1, ..., z_n) - f(0, ..., 0, z_n)| < \epsilon \quad \text{se} \quad \begin{cases} |z_j| < \delta_j & j = 1, ..., n-1 \\ |z_n| = \delta_n \end{cases}$$

Dato $(a_1, ..., a_{n-1})$ con $|a_i| \leq \delta_i$ consideriamo la funzione della sola variabile z_n $f(a_1, ..., a_{n-1}, z_n)$, usando il teorema di Rouché per funzione di una variabile si ottiene che $f(a_1, ..., a_{n-1}, z_n)$ ha lo stesso numero di zeri in $|z_n| < \delta_n$ di $f(0, ..., 0, z_n)$ che ne ha per ipotesi k. □

Nel teorema precedente abbiamo usato una versione leggermente diversa del teorema di Rouché che dice questo

Teorema 1.7 (Rouché-Estermann). *Se $K \subseteq \mathbb{C}$ è un dominio complesso e f, g sono olomorfe su K allora hanno lo stesso numero di zeri in K se vale la seguente diseguaglianza*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in \partial K$$

Definizione 1.7. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, diremo che $X \subseteq \Omega$ è *sottile* se per ogni $z \in X$ esiste un polidisco $\Delta(z, r) \subseteq \Omega$ tale che $\Delta(z, r) \cap X$ è il luogo di zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla.

Osserviamo che se X è sottile allora è chiuso inoltre per il principio del prolungamento analitico la sua parte interna è vuota (i chiusi con parte interna vuota in italiano sono detti magri mentre in inglese si trova spesso nowhere dense).

Teorema 1.8 (Teorema di estensione di Riemann). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio e $X \subseteq \Omega$ sottile, data $f : \Omega \setminus X$ analitica tale che f è localmente limitata in $\Omega \setminus X$. Esiste un'unica F olomorfa su Ω tale che $F_{|\Omega \setminus X} \equiv f$*

Dimostrazione. Ci baste definire F in X. Dato $w \in X$ esiste un polidisco $\Delta(w, r)$ tale che $X \cap \Delta(w, r)$ è il luogo di zeri di una qualche g olomorfa. Per il lemma 1.1 possiamo supporre che g sia regolare di ordine k in z_n. Per il teorema1.6 esiste un polidisco $\Delta(w, \delta)$ con $\overline{\Delta}(w, \delta) \subseteq \Delta(w, r)$ tale che, se $(z_1, ..., z_{n-1}) \in \Delta(w_1, ..., w_{n-1}, \delta_1, ..., \delta_{n-1})$, la funzione $g(z_1, ..., z_{n-1}, z_n)$, della sola variabile z_n, ha k zeri se $|z_n - w_n| \leq \delta_n$ ed è non nulla se $|z_n| = \delta_n$. Poniamo ora

$$F(z_1, ..., z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n - w_n| = \delta_n} \frac{f(z-1, ..., z_{n-1}, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} \, \mathrm{d}\zeta_n.$$

Fissato ζ_n l'integranda è olomorfa come funzione delle variabili $z_1, ..., z_{n-1}$, quindi anche F è olomorfa come funzione delle variabili $z_1, ..., z_{n-1}$. Per la formula di Cauchy in una variabile F è olomorfa anche come funzione della variabile

z_n; inoltre F è continua quindi per il teorema di Osgood è olomorfa in $\Delta(w,\delta)$. Fissati $z_1,...,z_{n-1}$ la funzione $f(z_1,...,z_{n-1},z_n)$ è olomorfa se $|z_n - w_n| < \delta_n$ tranne in un numero finito di punti ed è localmente limitata in tutto il disco. Per il teorema di Riemann in una variabile otteniamo che $F = f$. L'unicità segue dal fatto che X è nowhere dense. $\square$

Teorema 1.9. *Sia X un sottoinsieme sottile di un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ allora $\Omega \setminus X$ è connesso.*

Dimostrazione. Se così non fosse $\Omega \setminus X$ sarebbe sconnesso allora anche $\Omega \setminus \bar{X}$ lo sarebbe. Possiamo scrivere $\Omega \setminus \bar{X} = D_1 \cup D_2$ con D_1, D_2 aperti disgiunti, definiamo ora la funzione

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in D_1 \\ 2 & \text{se } z \in D_2 \end{cases}$$

Dato che Ω è connesso $\bar{X} \cap \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2$ è non vuoto tuttavia la f non si estende in modo continuo e questo contraddice il teorema precedente. $\square$

2 Proprietà locali delle funzioni olomorfe

In questa sezione studieremo le proprietà locali delle funzioni olomorfe. Per fare ciò iniziamo introducendo una relazione di equivalenza. Dato $z \in \mathbb{C}^n$ consideriamo le coppie

$$(U, f) \quad (W, g)$$

con U, W intorni di z e f, g funzioni analitiche. Definiamo la relazione di equivalenza nel seguente modo

$$(U, f) \sim (W, g)$$

se e solo se esiste $V \subseteq U \cap W$ intorno di z tale che $f_{|V} \equiv g_{|V}$. Le classi di equivalenza di questa relazione saranno chiamati germi. Nel seguito indicheremo con $\mathbf{f}_z$ il germe di f rispetto al punto z, nei casi in cui ciò non comporti ambiguità scriveremo solo $\mathbf{f}_z = \mathbf{f}$. L'insieme dei germi di funzioni di variabile complessa può essere dotato di una struttura di anello nel seguente modo: dati due germi $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ poniamo

- $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = [fg]$
- $\mathbf{f} + \mathbf{g} = [f + g]$

dove f e g sono rappresentanti di $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ e $[\cdot]$ indica la classe di equivalenza. Segue subito dalla definizione che queste operazioni sono ben poste. Indicheremo con $\mathcal{O}_{n,z}$ l'anello dei germi di funzioni olomorfe di n variabili in z dotato delle precedenti operazioni.

Teorema 2.1. *L'anello $\mathcal{O}_{n,z}$ è isomorfo all'anello delle serie convergenti centrate in z.*

Dimostrazione. Data una $\mathbf{f} \in \mathscr{O}_{n,z}$ consideriamo un suo rappresentate f e definiamo la mappa ϕ che associa a f la sua serie di Taylor. Osserviamo che ϕ è un ben definito omomorfismo di anelli . Vediamo che ϕ è surgettiva, infatti una serie convergente definisce una funzione olomorfa f, quindi come preimmagine ci basta prendere $\mathbf{f}$. Vediamo che ϕ è iniettiva, infatti se una funzione analitica ha serie di Taylor nulla allora è nulla, per il principio del prolungamento analitico si ottiene che $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ e quindi il nucleo di ϕ è banale. $\square$

Osserviamo che $\mathcal{O}_{n,z}$ è un dominio di integrità, ossia se $\mathbf{fg} = \mathbf{0}$ allora almeno una tra $\mathbf{f}$ o $\mathbf{g}$ è $\mathbf{0}$. Fissati due rappresentanti f e g tali che $f(z)g(z) = 0$ se esiste z_0 tale che $f(z_0) \neq 0$ allora esiste un intorno U tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$. Ma allora $g(z) = 0$ per ogni $z \in U$ e quindi $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Inoltre $\mathcal{O}_{n,z}$ è chiaramente isomorfo a $\mathcal{O}_{n,0}$, nel seguito per semplicità di notazione lavoreremo solo con questo anello che chiameremo $\mathcal{O}_n$.

L' obiettivo principale di questa sezione diventa quindi studiare l'anello $\mathcal{O}_n$, per fare ciò osserviamo che esiste un' immersione naturale $\mathcal{O}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{O}_n$. Se inoltre consideriamo l'anello dei polinomi nell'indeterminata z_n a coefficienti in $\mathcal{O}_{n-1}$ otteniamo le seguenti immersioni

$$\mathcal{O}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \hookrightarrow \mathcal{O}_n$$

Definizione 2.1. Data $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ diremo che è *regolare di ordine* k in z_n se esiste un rappresentante f regolare di ordine k in z_n nel punto 0.

Definizione 2.2. Un *polinomio di Weierstrass* di grado $k > 0$ è un elemento $\mathbf{h} \in \mathcal{O}[z_n]$ della forma

$$\mathbf{h} = z_n^k + \mathbf{a}_1 z_n^{k-1} + \cdots \mathbf{a}_{k-1} z_n + \mathbf{a}_k$$

dove gli $\mathbf{a}_j \in \mathcal{O}_{n-1}$ non sono unità.

La definizione precedente ci invoglia a studiare le unità di $\mathcal{O}_n$. Per fare questo ricordiamo che $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ è un'unità se il suo inverso moltiplicativo appartiene a $\mathcal{O}_n$. Osserviamo che data $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ e preso f un suo rappresentante tale che $f(0) \neq 0$ per continuità esiste un intorno U di 0 tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$. La funzione $f^{-1}(z)$ è olomorfa in U ma allora $\mathbf{f}^{-1} \in \mathcal{O}_n$, viceversa data $\mathbf{f}$ unità di $\mathcal{O}_n$ abbiamo che $\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}) = \mathbf{1}$ quindi ogni rappresentante è tale che $f(0) \neq 1$. Dunque le unità di $\mathcal{O}_n$ sono i germi di funzioni non nulle in 0. Quindi la definizione precedente può essere riformulata chiedendo che le $\mathbf{a}_j$ non si annullino in 0.

Teorema 2.2 (Preparazione di Weierstrass)**.** *Data* $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ *regolare di ordine* k *in* z_n *esiste un unico polinomio di Weierstrass* $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ *di grado* k *tale che* $\mathbf{f} = \mathbf{gu}$ *con* $\mathbf{u}$ *unità di* $\mathcal{O}_n$.

Prima di procedere alla dimostrazione ricordiamo alcune proprietà dell'indicatore logaritmico. Se f è una funzione olomorfa di una variabile che ha uno zero di ordine k in z_0 possiamo scrivere $f(z) = (z - z_0)^k h(z)$ con h olomorfa che non si annulla in 0. Calcolando la derivata troviamo

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} h(z) + (z - z_0)^k h'(z)$$

e quindi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

dato che h non si annulla in z_0 abbiamo che $\frac{h'}{h}$ è olomorfa in un intorno di z_0 e per il teorema dei residui

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 2\pi i \int_\gamma \frac{k}{z - z_0}\mathrm{d}z = k(2\pi i)$$

dove γ è una curva che parametrizza una circonferenza centrata in z_0 percorsa una volta in senso antiorario e che non contiene altri zeri di f. Abbiamo trovato che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = k.$$

Prendendo ora una curva γ qualsiasi si trova

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \#\{\text{zeri di } f \text{ circondati da } \gamma \text{ contati con molteplicità}\}.$$

Ripetendo il precedente calcolo con la funzione $\frac{f'(z)g(z)}{f(z)}$ con g olomorfa si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)g(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{w \in Z(f)} g(w)$$

dove $Z(f)$ è l' insieme degli zeri di f circondanti da γ contati con molteplicità. Se prendiamo $g(z) = z^r$ otteniamo la formula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)z^r}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{w \in Z(f)} w^r$$

che ci servirà nella dimostrazione del teorema 2.2. Ricordiamo ora alcune proprietà delle funzioni simmetriche. Nel seguito indicheremo con S_n l'insieme delle permutazioni su n elementi.

Definizione 2.3. Sia X un insieme, diremo che $f : X^n \to \mathbb{C}$ è *simmetrica* se per ogni $\sigma \in S_n$ e per ogni $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ vale

$$f(x_1, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

Definizione 2.4. Definiamo per ogni $1 \leq i \leq n$ la *i-esima funzione simmetrica elementare* $e_i : X^n \to G$ come

$$e_i(x_1, ..., x_n) = \sum_{\substack{|I|=i \\ I \subseteq \{1,...,n\}}} \prod_{j \in I} x_j$$

Ad esempio per $n = 4$ abbiamo

$$\begin{aligned}
e_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
e_2 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_4x_2 + x_1x_3 \\
e_3 &= x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 \\
e_4 &= x_1x_2x_3x_4
\end{aligned}$$

Teorema 2.3. *Sia A un anello e $p : A^n \to \mathbb{C}$ un polinomio simmetrico. Allora p è un polinomio nelle funzioni simmetriche elementari.*

Ad esempio

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_1 &= (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) - 3x_1x_2x_3 \\ &= e_1e_2 - 3e_3 \end{aligned}$$

osserviamo inoltre che vale la formula

$$\prod_{i=1}^{n} (X - x_i) = X^n - e_1X^{n-1} + e_2X^{n-2} - ... + (-1)^n e_n$$

Lemma 2.1. *Definiamo la k-esima somma di Newton come*

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} x_1^k$$

allora le funzioni simmetriche elementari sono polinomi in S_k.

Dimostrazione. Per semplificare la dimostrazione introduciamo delle notazioni.

- Se $x = (x_1, ..., x_n)$ poniamo $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$ così $x = (x', x_n)$.
- Se s_k è la k-esima somma di Newton allora $s'_k = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^k$.
- Se e_k è la k-esima funzione simmetrica elementare e'_k è la k-esima funzione simmetrica elementare sulle variabili $x_1, ..., x_{n-1}$.
- Per comodità di notazione poniamo $e_0 = 1$ e $e_1 = 0$ per $i < 0$ o $i > n$.

Osserviamo che, pe ogni $l = 1, ..., n$, valgono le seguenti formule

$$\begin{aligned} s_l &= s'_l + x_n^l \\ e_l &= e'_l + x_n e'_{l-1} \end{aligned}.$$

Per dimostrare il teorema ci basta verificare la seguente formula

$$f_k = s_k - e_1s_{k-1} + e_2s_{k-2} + ... + (-1)^{k-1}e_{k-1}s_1 + (-1)^k ke_k = 0$$

infatti in questo modo otteniamo

$$\begin{aligned} &s_1 = e_1 \\ &-s_2 + e_1s_1 = 2e_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &s_k - e_1s_{k-1} + e_2s_{k-2} + ... + (-1)^{k-1}e_{k-1}s_1 = (-1)^{k-1}ke_k \end{aligned}$$

e sostituendo ogni formula nella successiva ottengo la tesi. Dimostriamo adesso che $f_k = f'_k - x_n f'_{k-1}$ in questo modo l'uguaglianza $f_k = 0$ seguirà per induzione su n. Possiamo scrivere

$$e_l s_{k-l} = (e'_l + x_n e'_{l-1})(s'_{k-l} + x_n^{k-l}) = e'_l s_{k-l} + x_n e_{l-1} s'_{k-l} + x_n^{k-l} e'_l + x_n^{k-l+1} e'_{l-1}$$

$$\begin{aligned} e_{l+1}s_{k-l-1} &= (e'_{l+1} + x_n e'_l)(s'_{k-l-1} + x_n^{k-l-1}) \\ &= e'_{l+1}s_{k-l-1} + x_n e_{l-1} s'_{k-l-1} + x_n^{k-l-1} e'_{l+1} + x_n^{k-l} e'_l \end{aligned}$$

e quindi otteniamo

$$f'_k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} e'_l s_{k-l}.$$

Inoltre (tenendo conto dei segni) il terzo addendo di ogni termine viene cancellato dal quarto del termine successivo. Consideriamo il primo termine s_k e l'ultimo termine $(-1)^k k e_k$. Il terzo addendo del primo termine è 0 mentre per quanto riguarda l'ultimo termine abbiamo $(-1)^k k e_k = (-1)^k(e'_k + x_n e'_{k-1})$, e confrontandolo con il penultimo

$$\begin{aligned} (-1)^{k-1} e_{k-1} s_1 &= (-1)^{k-1}(e'_{k-1} + x_n e'_{k-2})(s'_1 + x_n) \\ &= (-1)^{k-1}(e'_{k-1}s'_1 + x_n e'_{k-2}s'_1 + x_n e'_{k-1} + x_n^2 e'_{k-2}) \end{aligned}$$

quindi

$$-x_n f'_{k-1} = \left(\sum_{l=0}^{k-1} x_n (-1)^{k-l+1} e'_l s_{k-l} \right) + \left(x_n (-1)^{k-1}(k-1) e'_{k-1} \right).$$

La formula è dunque dimostrata e la tesi segue per induzione su n. □

Possiamo adesso dimostrare il teorema di preparazione di Weierstrass

Dimostrazione. Data $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$, sia f un suo rappresentante. Usando il lemma 1.1 possiamo supporre che f sia olomorfa in un polidisco $\Delta(0, r)$ e regolare di ordine k nella variabile z_n. Inoltre per il teorema 1.6 esiste un polidisco

$$\Delta(0, \delta) \subseteq \Delta(0, r)$$

tale che per ogni $(z_1, ..., z_{n-1}) \in \Delta(0, \delta_1, ..., \delta_{n-1})$ la funzione $f(z_1, ..., z_n)$ della sola variabile z_n ha esattamente k zeri nel disco $|z_n| < \delta_n$. Chiamiamo $\phi_1(z_1, ..., z_{n-1}), ..., \phi_k(z_1, ..., z_{n-1})$ tali zeri (che possono eventualmente essere ripetuti). Per quanto detto prima

- $\phi_\nu(0, ..., 0) = 0$ perché f è regolare di ordine k in 0
- $|\phi_\nu(z_1, ..., z_{n-1})| < \delta_n \quad \text{se} \quad (z_1, ..., z_{n-1}) \in \Delta(0, \delta_1, ..., \delta_{n-1})$.

Definiamo ora la funzione

$$\begin{aligned} h(z_1, ..., z_n) &= \prod_{\nu=1}^{k} \big(z_n - \phi_\nu(z_1, ..., z_{n-1}) \big) \\ &= z_n^k - e_1(z_1, ..., z_{n-1}) z_n^{k-1} + ... + (-1)^k e_k(z_1, ..., z_{n-1}) \end{aligned}$$

dove le e_ν sono le funzioni simmetriche elementari di $\{\phi_\nu(z_1, ..., z_{n-1})\}_{\nu=1}^k$. Vediamo adesso che le e_ν sono olomorfe. Possiamo scrivere

$$s_r = \sum_{\nu=1}^{k} \phi_\nu(z_1, ..., z_{n-1})^r = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \delta_n} \frac{\partial f(z_1, ..., z_{n-1}, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\zeta^r}{f(z_1, ..., z_{n-1}, \zeta)} \mathrm{d}\zeta.$$

La funzione $f(z_1,...,z_{n-1},\zeta)$ è diversa da 0 se $|z_1| < \delta_1,...,|z_{n-1}| < \delta_{n-1}$ e $|\zeta| = \delta_n$, dunque la somma delle ϕ_ν definisce una funzione olomorfa in $\Delta(0,\delta_1,...,\delta_{n-1})$. Le funzioni e_ν sono polinomi nelle somme s_r per il lemma 2.1 dunque sono olomorfe e quindi h è olomorfa. Dato che $\phi_\nu(0,...,0) = 0$ si ottiene $e_\nu(0,...,0) = 0$ e dunque h è un polinomio di Weierstrass. Per come è stato definito è chiaro che h sia l'unico polinomio con gli stessi zeri di f. Vediamo ora che $u = \frac{f}{h}$ è olomorfa e non si annulla in $\Delta(0,\delta)$. Per ogni fissato $(z_1,...,z_{n-1}) \in \Delta(0,\delta_1,...,\delta_{n-1})$ il quoziente

$$u(z_1,...,z_n) = \frac{f(z_1,...,z_n)}{h(z_1,...,z_n)}$$

non si annulla $|z_n| < \delta_n$. Infatti u è nullo se e solo se f lo è, ma allora se ϕ_ν è uno zero possiamo scrivere

$$\frac{f(z_1,...,z_n)}{h(z_1,...,z_n)} = \frac{(z_n-\phi_\nu)^l k(z_1,...,z_n)}{(z_n-\phi_\nu)^l q(z_1,...,z_n)}$$

con k e q che non si annullano in $(z_1,...,\phi_\nu)$ e quindi u non si annulla in $|z_n| < \delta_n$. Vediamo che u è olomorfa, siano

$$\begin{aligned} M &= \max_{z\in\bar{\Delta}(0,\delta)} |f(z)| \\ m &= \min_{\substack{|z_1|<\delta_1,...,|z_n-1|<\delta_{n-1}, \\ |z_n|=\delta_n}} |h(z)| \end{aligned}$$

allora $|u(z)| < \frac{M}{m}$ per ogni $z \in \bar{\Delta}(0,\delta_1,...,\delta_{n-1}) \times \{|z_n| = \delta\}$ e per il principio del massimo modulo applicato alla sola variabile z_n si ottiene che la precedente disuguaglianza è vera per ogni $z \in \bar{\Delta}(0,\delta)$. Quindi u si estende ad una funzione olomorfa per il teorema di Riemann. □

Teorema 2.4 (Teorema di divisione di Weierstrass)**.** *Sia* $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ *un polinomio di Weierstrass in* z_n *di grado* k*. Qualunque* $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ *può essere scritta in modo unico come*

$$\mathbf{f} = \mathbf{gh} + \mathbf{r}$$

con $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_n$ *e* $\mathbf{r} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ *è un polinomio di grado minore di* k*. Inoltre se* $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ *anche* $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$*.*

Dimostrazione. Siano f e h due rappresentati dei germi $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$ olomorfi in un polidisco $\Delta(0,r)$. Per il teorema1.6 esiste un polidisco $\Delta(0,\delta) \subseteq \Delta(0,r)$ tale che $h(z) \neq 0$ se $|z_1| < \delta_1,...,|z_{n-1}| < \delta_{n-1}$ e $|z_n| = \delta_n$. Definiamo la funzione

$$g(z_1,...,z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{f(z_1,...,z_{n-1},\zeta)}{h(z_1,...,z_{n-1},\zeta)(\zeta-z_n)}\mathrm{d}\zeta$$

che per quanto detto è olomorfa in $\Delta(0,\delta)$.
Dunque la funzione $r(z) = f(z) - g(z)h(z)$ è olomorfa nello stesso polidisco. Per il teorema dei residui abbiamo l'identità

$$f(z_1,...,z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{f(z_1,...,z_{n-1},\zeta)}{\zeta-z_n}\mathrm{d}\zeta$$

e quindi troviamo

$$\begin{aligned}r(z_1,...,z_n) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\delta_n}\frac{f(z_1,...,z_{n-1},\zeta)}{\zeta - z_n}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\delta_n}\frac{f(z_1,...,z_{n-1},\zeta)}{h(z_1,...,z_{n-1},\zeta)(\zeta - z_n)}\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\delta_n}\frac{f(z_1,...,z_{n-1},\zeta)}{h(z_1,...,z_{n-1},\zeta)}\left[\frac{h(z_1,...,z_{n-1},\zeta) - h(z_1,...,z_{n-1},z_n)}{\zeta - z_n}\right]\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

e, ricordando come sono definiti i polinomi di Weierstrass, troviamo che i termini noti si semplificano. Quindi l'espressione tra parentesi quadre si scrive come

$$\frac{(\zeta^k - z_n^k) + a_1(\zeta^{k-1} - z_n^{k-1}) + ... + a_{k-1}(z_1,...,z_n)(\zeta - z_n)}{\zeta - z_n}$$

e quindi r è un polinomio in z_n di grado al più $k-1$. Vediamo adesso l'unicità. Supponiamo $\mathbf{f} = \mathbf{gh} + \mathbf{r} = \mathbf{g_1 h} + \mathbf{r_1}$ e prendiamo dei rappresentati olomorfi in un polidisco $\Delta(0,r)$. Per il teorema 1.6 esiste un polidisco $\Delta(0,\delta) \subseteq \Delta(0,r)$ tale che se $(z_1,...,z_{n-1}) \in \Delta(0,\delta_1,...,\delta_{n-1})$ allora la funzione $h(z_1,...,z_n)$ ha k zeri in $|z_n| < \delta_n$. La differenza $r(z) - r_1(z) = h(z)(g_1(z) - g(z))$ è un polinomio di grado $k-1$ quindi ha k zeri se e solo se è il polinomio nullo. Inoltre $\mathcal{O}_n$ è un dominio di integrità, quindi necessariamente $g_1(z) - g(z)$ è identicamente nullo. □

3 Conseguenze dei teoremi di preparazione e divisione

In questo capitolo richiameremo alcune proprietà degli anelli noetheriani. Dopodiché tramite il teorema di divisione di Weierstrass vedremo che $\mathcal{O}_n$ è un dominio a fattorizzazione unica e che è noetheriano.

Definizione 3.1. Sia A un dominio di integrità con unità, diremo che A è un *dominio a fattorizzazione unica* (in breve UFD) se ogni elemento di A, ad eccezione delle unità, si può scrivere in modo unico come prodotto di un numero finito di elementi irriducibili, e tale scrittura è unica a meno dell'ordine.

Definizione 3.2. Sia A un anello, diremo che A è *noetheriano* se vale equivalentemente una delle seguenti proprietà:

1. Ogni insieme non vuoto di ideali ha un elemento massimale.
2. Ogni catena ascendente di ideali è stazionaria.
3. Ogni ideale è finitamente generato.

Teorema 3.1. *Le tre proprietà della definizione 3.2 sono equivalenti.*

Dimostrazione. 1) $\implies$ 2) Sia $a_i \subseteq a_{i+1}$ una catena ascendente di ideali. L'insieme $\{a_i\}_i$ ha un elemento massimale quindi la catena è stazionaria.
2) $\Rightarrow$ 1) Sia T un insieme di ideali, ogni catena di T è stazionaria e per il lemma di Zorn T contiene un elemento massimale.
3) $\Rightarrow$ 2) Sia $a_i \subseteq a_{i+1}$ una catena ascendente di ideali e sia $a = \cup_i a_i$ allora a è un ideale quindi $a = (x_1,...,x_n)$, sia k il più piccolo indice tale che $x_1,...,x_n \in a_k$ allora $a_k = a$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sia a un ideale e sia Σ l'insieme di tutti gli ideali finitamente generati contenuti in a. Dato che Σ contiene lo 0 è non vuoto, inoltre dato che 2) $\implies$ 1) otteniamo che Σ ha un elemento massimale, sia a_0 tale elemento. Se $a_0 = a$ abbiamo finito. Altrimenti considero $x \in a \setminus a_0$, l'ideale $a_0 + (x)$ è finitamente generato e contiene a_0 contraddicendo la massimalità. □

Definizione 3.3. Siano A, B, C anelli, una *successione esatta corta* è una successione di morfismi del tipo

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

con f iniettiva, g surgettiva e $\ker g = \operatorname{Im} f$.

Teorema 3.2. *Data una successione esatta corta come nella definizione 3.3, A e C sono noetheriani se e solo se B lo è.*

Dimostrazione. $\Leftarrow$ Basta osservare che ogni catena di ideali in A o C corrisponde ad una catena di ideali di B.
$\Rightarrow$ Se (a_i) è una catena ascendente in B allora $f^{-1}(a_i)$ è una catena ascendente di ideali in A quindi è stazionaria. Inoltre $g(a_i)$ è una catena ascendente di ideali in C e quindi è stazionaria, allora anche (a_i) lo è. □

Da questo teorema si ottiene che, sottoanelli, quozienti e prodotti di noetheriani sono noetheriani.

Definizione 3.4. Sia M un A-modulo, M si dice *noetheriano* se ogni sottomodulo è finitamente generato.

Tutte le considerazioni precedenti, con lievi modifiche, si applicano anche ai moduli. Ricordiamo i seguenti teoremi.

Teorema 3.3 (Lemma di Gauss). *Sia A un UFD allora $A[x]$ è un UFD.*

Teorema 3.4 (Della base di Hilbert). *Se A è noetheriano allora $A[x]$ è noetheriano.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $A[x]$ non sia noetheriano. Esiste I ideale non finitamente generato. Costruiamo una successione di polinomi nel seguente modo

- p_0 è un polinomio di grado minimo in I.
- p_n è un polinomio di grado minimo in $I - (p_0, ..., p_{n-1})$.

Chiamiamo con a_i il coefficiente direttore di p_i e con d_i il grado di p_i. Sia J l'ideale generato dagli a_i e osserviamo che J è un ideale di A e quindi è finitamente generato. Sia N tale che $J = (a_0, ..., a_{N-1})$ e osserviamo che possiamo scrivere $a_N = \sum_{i=0}^{N-1} e_i a_i$ con $e_i \in A$. Consideriamo il polinomio

$$q(x) = \sum_{i=0}^{N-1} e_i x^{d_N - d_i} p_i(x)$$

per definizione q è un polinomio di grado d_N che appartiene a $(p_0, ..., p_{N-1})$, inoltre il suo coefficiente direttore è $\sum_{i=0}^{N-1} e_i a_i = a_N$, dunque $p_N(x) - q(x)$ è un polinomio di grado d_{N-1} che appartiene a I perché sia p_N che q vi appartengono. Tuttavia $p_N(x) - q(x)$ non appartiene a $(p_0, ..., p_{N-1})$ poiché se vi appartenesse avremmo

$$p_N(x) = p_N(x) - q(x) + q(x)$$

quindi $p_N(x)$ apparterrebbe a $(p_0, ..., p_{N-1})$. Allora $p_N(x) - q(x)$ sarebbe un polinomio di grado minore di d_N e questo è assurdo perché d_N è il minimo grado in $I - (p_0, ..., p_{N-1})$.

□

Vediamo adesso alcune conseguenze dei teoremi di preparazione e divisione.

Teorema 3.5. *Un polinomio di Weierstrass* $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ *è riducibile in* $\mathcal{O}_n$ *se e solo se è riducibile in* $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$*. Inoltre se* $\mathbf{h}$ *è riducibile tutti i suo fattori sono, a meno di unità di* $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$*, polinomi di Weierstrass.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathbf{h}$ sia riducibile in $\mathcal{O}_n$, possiamo scrivere $\mathbf{h} = \mathbf{g_1} \cdot \mathbf{g_2}$ con $\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}$ non unità di $\mathcal{O}_n$. Applicando il teorema di preparazione di Weierstrass otteniamo

$$\mathbf{g_1} = \mathbf{u_1} \cdot \mathbf{h_1} \quad \mathbf{g_2} = \mathbf{u_2} \cdot \mathbf{h_2}$$

con $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathcal{O}_n$ unità e $\mathbf{h_1}, \mathbf{h_2} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ polinomi di Weierstrass. Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{h} = (\mathbf{1})(\mathbf{h}) = (\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_2})(\mathbf{h_1} \cdot \mathbf{h_2})$$

e utilizzando l'unicità del teorema di Weierstrass otteniamo $\mathbf{u_1}\mathbf{u_2} = 1$ e $\mathbf{h_1}\mathbf{h_2} = \mathbf{h}$. Quindi $\mathbf{h}$ è riducibile in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e i sui fattori, a meno di unità, sono polinomi di Weierstrass. Supponiamo ora $\mathbf{h}$ sia riducibile in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Scriviamo $\mathbf{h} = \mathbf{g_1} \cdot \mathbf{g_2}$ con $\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ non unità. Se $\mathbf{g_1}$ fosse un'unità di $\mathcal{O}_n$ allora potremmo scrivere $\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{g_1}} = \mathbf{g_2}$. Per il teorema di divisione di Weierstrass otteniamo $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g_1}} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ ma questo è impossibile perché $\mathbf{g_1}$ non è un'unità di $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Nello stesso modo si dimostra che $\mathbf{g_2}$ non è un'unità di $\mathcal{O}_n$. □

Teorema 3.6. *L'anello* $\mathcal{O}_n$ *è un UFD.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n.
Se $n = 0$ allora $\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}$ che sappiamo essere un UFD. Supponiamo che $\mathcal{O}_{n-1}$ sia un UFD. Per il teorema 3.3 anche $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è un UFD. Sia $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$, a meno di cambi di variabili possiamo supporre che $\mathbf{f}$ sia regolare in z_n. Per il teorema di preparazione di Weierstrass possiamo scrivere $\mathbf{f} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{h}$ dove $\mathbf{u} \in \mathcal{O}_n$ è un'unità e $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è un polinomio di Weierstrass. Per ipotesi induttiva possiamo scrivere $\mathbf{h}$ in modo unico come prodotto di unità e polinomi irriducibili in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, tali polinomi sono irriducibili anche in $\mathcal{O}_n$ per il teorema3.5 □

Teorema 3.7. *L'anello* $\mathcal{O}_n$ *è noetheriano.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n.
Se $n = 0$ allora $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}$ è noetheriano. Supponiamo $\mathcal{O}_{n-1}$ sia noetheriano, per il teorema 3.4 anche $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è noetheriano. Sia $I \subseteq \mathcal{O}_n$ un ideale e sia $\mathbf{g} \in I$, a meno di un cambio di coordinate possiamo supporre $\mathbf{g}$ sia regolare in z_n. Per il teorema di preparazione troviamo $\mathbf{u^{-1}g} = \mathbf{h}$ con $\mathbf{h}$ polinomio di Weierstrass e $\mathbf{u}$ unità di $\mathcal{O}_n$, dunque possiamo inoltre assumere che $\mathbf{g} \in I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ sia

un polinomio di Weierstrass. Dato che $I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è un ideale di $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è finitamente generato, siano $\mathbf{g_1}, ..., \mathbf{g_k}$ dei suoi generatori. Vogliamo dimostrare che $\mathbf{g}, \mathbf{g_1}, ..., \mathbf{g_k}$ generano tutto l'anello I. Per il teorema di divisione, per ogni $\mathbf{f} \in I$ possiamo scrivere $\mathbf{f} = \mathbf{gh} + \mathbf{r}$ con $\mathbf{r} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, ma $\mathbf{f} \in I$ e $\mathbf{g} \in I$ quindi anche $\mathbf{r} \in I$ da cui $\mathbf{r} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \cap I$. Otteniamo allora che

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{h_i g_i} \quad \text{con} \quad \mathbf{h_i} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$$

e quindi

$$\mathbf{f} = \mathbf{gh} + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{h_i g_i}$$

□

4 Insiemi Analitici

Prima di procedere con lo studio degli insiemi analitici richiamiamo alcune nozioni sulle varietà.

Definizione 4.1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e a base numerabile, diremo che X è una *varietà* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno U di x, un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ e un omeomorfismo $\phi : U \to V$.

Con riferimento alla definizione precedente

- n è detto *dimensione* della varietà.
- La coppia (U, ϕ) è detta *carta*.
- Se $\mathscr{U} = (U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ è una famiglia di carte tale che $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ diremo che $\mathscr{U}$ è un *atlante*.

Siano (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) due carte con $x \in U_1, U_2$, possiamo considerare $U_1 \cap U_2$ sul quale sia ϕ_1 che ϕ_2 sono definite. Consideriamo il cambio di carta definito come

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^n$$

per questa applicazione possiamo richiedere una certa regolarità.

Definizione 4.2. Sia X una varietà e $\mathscr{U}$ un suo atlante, diremo che X è C^k se tutti i cambi di carta di $\mathscr{U}$ sono C^k.

Definizione 4.3. Sia X una varietà C^k e Y un suo sottospazio, diremo che Y è una *sottovarietà* se è una varietà con la struttura indotta da X.

Ricordiamo adesso un criterio che fornisce una condizione sufficiente affinché il luogo di zeri di una funzione almeno C^1 sia una varietà.

Teorema 4.1. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $m < n$ una funzione C^k, definiamo*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$$

se per ogni $x \in X$ vale $\operatorname{rank}((\nabla f)(x)) = m$ allora X è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di classe C^k di dimensione $n - m$.

Teorema 4.2. *Sia X una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m e classe C^k. Per ogni $x_0 \in X$ esiste un intorno U di x_0 in $\mathbb{R}^n$ e una $f : U \to \mathbb{R}^m$ di classe C^k con $(\nabla f)(x)$ di rango $n - m$ per ogni $x \in U$ e tale che*

$$X \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

Esempio 4.1. *Consideriamo la sfera $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$*

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, x\rangle = 1\}.$$

Osserviamo che $\mathbb{S}^{n-1}$ è il luogo di zeri della funzione $f(x) = \langle x, x\rangle$ il cui gradiente è $2x$ che è nullo se e solo $x = 0$ il quale non appartiene a $\mathbb{S}^{n-1}$. Per il teorema 4.1 $\mathbb{S}^{n-1}$ è una sottovarietà C^∞ di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - 1$.

Esempio 4.2. *Sia $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k, allora il suo grafico Γ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+1}$ di classe C^k. Le carte locali sono le proiezioni sulle prime n coordinate ossia $\pi : \Gamma \cap U \to \mathbb{R}^n$ e l'inversa locale è $(x_1, ..., x_n) \to (x_1, ..., x_n, \alpha(x_1, ..., x_n))$.*

Esempio 4.3. *Consideriamo il seguente insieme*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^3 = x^2\}$$

Non possiamo applicare il teorema 4.1 perché il gradiente di $y^3 - x^2$ si annulla in 0, quindi non possiamo dire nulla sul fatto che X sia o non sia una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$. La mappa $t \to (t^2, t^3)$ definisce un omeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e X, quindi è possibile mettere una struttura di varietà su X, ma tale struttura non è detto che sia indotta da quella di $\mathbb{R}^2$. Se X fosse una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$, per il teorema 4.2 dovrebbe esistere un intorno U di $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ e una $f : U \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $(\nabla g)(x) \neq 0$ per ogni $x \in U$ e

$$X \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}.$$

Tuttavia la mappa $h(t) = (t^2, t^3)$ definisce un omeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e X e calcolando la derivata di $g(h(t))$, per ogni g che si annulla su X otteniamo

$$0 = \frac{\mathrm{d}g(h(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g(t^2, t^3)}{\partial x} 2t + \frac{\partial g(t2, t^3)}{\partial y} 3t^2$$

Da qui si trova che $\frac{\partial g(0,0)}{\partial x} = 0$, calcolando anche derivata seconda e terza si ottiene anche $\frac{\partial g(0,0)}{\partial y} = 0$. Quindi $\nabla g(0, 0) = 0$ ma questo contraddice quanto detto prima.

Possiamo estendere la nozione al caso complesso chiedendo che i cambi di carta siano funzioni olomorfe, in questo contesto vale un fatto analogo al teorema 4.1.

Teorema 4.3. *Sia $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, definiamo*

$$X = \{z \in \mathbb{C}^n | f(z) = 0\}$$

se per ogni $x \in X$ vale $\nabla f(z) \neq 0$ allora X è una sottovarietà di $\mathbb{C}^n$ olomorfa di dimensione complessa $n - 1$. In questo caso

$$\nabla f(z) = \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial f(z)}{\partial z_n}\right)$$

Esempio 4.4. *Consideriamo in* $\mathbb{C}^3$ *il cono quadratico*

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 | z^2 = xy\}.$$

Osserviamo che X *è il luogo di zeri di una funzione olomorfa il cui gradiente è nullo in 0. Vediamo che* X *non è una varietà nemmeno continua. Dal teorema 4.3 otteniamo che se* X *fosse una varietà allora avrebbe dimensione reale* 4 *(basta osservare che il gradiente non è singolare in tutti gli altri punti di* X*), dunque* 0 *dovrebbe avere un intorno omeomorfo ad un aperto di* $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$*, che possiamo supporre essere* D^4 *il cui bordo è* $\mathbb{S}^3$*. Consideriamo la mappa* $(t_1, t_2) \to (t_1^2, t_2^2, t_1 t_2)$*, tale mappa ha fibra di cardinalità 2 ed è un rivestimento doppio del bordo di* D^4*, ma questo contraddice la semplice connessione di* $\mathbb{S}^3$*. Quindi* X *non è una varietà nemmeno continua.*

Iniziamo ora lo studio degli insiemi analitici.

Definizione 4.4. Sia $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio complesso, un sottoinsieme $V \subseteq U$ è un *insieme analitico* se ogni $z \in U$ ammette un intorno U_z e esistono $f_1, ..., f_t$ funzioni olomorfe in U_z tale che

$$V \cap U_z = \{x \in U_z \mid f_1(x) = 0, ..., f_t(x) = 0\}.$$

Osserviamo che con tale definizione V è localmente il luogo di zeri di un numero finito di funzioni olomorfe.

Lemma 4.1. *Sia* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio complesso e* $V \subseteq U$ *un insieme analitico.* V *è chiuso, magro e se* U *è connesso* $U \setminus V$ *è connesso.*

Dimostrazione.

- Chiusura: Sia $z_n \to z$ con $z_n \in V$ e $z \in U$ vediamo che $z \in V$. Per ipotesi esiste U_z tale che

  $$U_z \cap V = \{x \in U_z \mid f_1(x) = 0, ..., f_t(x) = 0\}.$$

  Per n abbastanza grande $z_n \in U_z$ e $f_j(z_n) = 0$. Dunque per continuità $f_j(z) = 0$ da cui $z \in U_z \cap V$ e quindi z appartiene a V.

- Magro e non sconnette: Osserviamo che V è sottile per la definizione 1.7 quindi è magro e non sconnette U per il teorema 1.9.

□

Estendiamo la nozione di germe nel seguente modo, dato K un chiuso in $\mathbb{C}^n$ consideriamo la seguente relazione di equivalenza. Diremo che

$$(U, f) \sim (V, g)$$

con U e V aperti contenenti K e $f \in \mathscr{H}(U)$ e $g \in \mathscr{H}(V)$ se esiste W che contiene K con $W \subseteq U \cap V$ tale che f e g coincidono su W. Indichiamo con $\mathcal{O}_K$ l' insieme delle classi di equivalenza e lo chiamiamo insieme dei germi su K. Introduciamo adesso alcune notazione.

- Indichiamo con $\mathcal{O}_n^q$ il modulo libero di rango q su $\mathcal{O}_n$, ossia la somma diretta di q copie di $\mathcal{O}_n$.

- Indichiamo con $\mathscr{H}(U)$ l'insieme delle funzioni olomorfe definite sull'aperto U, alcune volte chiameremo questo insieme anche $\mathcal{O}_U$.

- Indichiamo con $\mathbf{f_0}$ il germe nell'origine di f
- Se $\mathscr{M}$ è un sottomodulo di $\mathcal{O}_n^p$ e K è un chiuso che contiene l'origine indichiamo con
$$\mathscr{M}_K = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_{n,K}^p \mid f_0 \in \mathscr{M}\}$$

Teorema 4.4 (Teorema di divisione di Weierstrass esteso)**.** *Sia h una funzione olomorfa definita in un intorno aperto di un polidisco chiuso $\bar{\Delta}(0,r)$, tale che il germe di h nell'origine è un polinomio di Weierstrass in z_n di grado k. Supponiamo che per ogni $(a_1, ..., a_{n-1}) \in \bar{\Delta}(0, r_1, ..., r_{n-1})$ tutte le k soluzioni di $h(a_1, ..., a_{n-1}, z_n)$ soddisfino $|z_n| < r_n$, allora si può scrivere*

$$\mathbf{f} = \mathbf{gh} + \mathbf{p}$$

con $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$ e $\mathbf{p} \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0,r_1,...,r_{n-1})}[z_n]$.

Dimostrazione. La dimostrazione è sostanzialmente identica a quella del teorema di divisione, in particolare basta osservare che ogni $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$ è la restrizione di una qualche funzione definita su un polidisco $\Delta(0, r+\epsilon)$ con $\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$. Basta quindi scegliere ϵ con norma abbastanza piccola tale che le ipotesi valgano anche in questo secondo polidisco, le relazioni usate nella dimostrazione del teorema 2.4 ci danno le funzioni cercate. □

Teorema 4.5. *Sia U un intorno dell'origine in $\mathbb{C}^n$ e $g_1, ..., g_q \in \mathcal{O}_U^p$, sia $\mathscr{M} \subseteq \mathcal{O}_n^p$ il sottomodulo generato dai germi di $g_1, ..., g_q$ nell'origine. A meno di cambiare coordinate, esiste un polidisco $\bar{\Delta}(0,r) \subseteq U$ tale che ogni $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$ si può scrivere come*

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{h}_j \mathbf{G}_j$$

con $\mathbf{h}_j \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$ e $\mathbf{G}_j$ germe di G_j nell'origine.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n, se $n = 0$ non c'è nullo da dimostrare. Per semplicità facciamo solo il caso $p = 1$, per $p > 1$ la dimostrazione si può fare ancora per induzione, stavolta su p. Supponiamo $p = 1$ quindi le G_j sono funzioni olomorfe a valori in $\mathbb{C}$ e $\mathscr{M} \in \mathcal{O}_n$ è l'ideale generato dai germi delle G_j. A meno di cambiare sistema di coordinate possiamo supporre G_1 regolare di ordine k nell'ultima variabile. Possiamo applicare il teorema di preparazione di Weierstrass e scrivere

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{u}_1 \mathbf{p}_1$$

con $\mathbf{u_1}$ unità di $\mathcal{O}_n$ e $\mathbf{p_1} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ polinomio di Weierstrass di grado k. Usando la versione locale del teorema di divisione di Weierstrass possiamo scrivere

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'\mathbf{p_1} + \bar{\mathbf{F}}$$

dove $\bar{\mathbf{F}} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \cap \mathscr{M}$ è un polinomio di grado al più $k-1$. L'insieme di questi $\bar{\mathbf{F}}$ forma un $\mathcal{O}_{n-1}$ modulo (ci basta infatti considerare i coefficienti del polinomio). Per noetherianità esistono $\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{1}, ..., \bar{\mathbf{p}}_\mathbf{s}$ che generano $\bar{\mathscr{M}}$, dato che $\bar{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}$ possiamo scrivere

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{G}_j.$$

Sia $V \subseteq U$ un intorno aperto dell'origine abbastanza piccolo tale che $\mathbf{u_1}, \mathbf{p_1}, \bar{\mathbf{p}}_\mathbf{i}, \mathbf{a_{ij}}$ abbiano un rappresentante olomorfo in V. Per ipotesi induttiva esiste un polidisco $\Delta(0, r) \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ tale che la tesi del teorema è vera se applicata a $\bar{\mathscr{M}}$ generato da $\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{1}, ..., \bar{\mathbf{p}}_\mathbf{s}$. Utilizzando il teorema 1.6 possiamo supporre che il polidisco $\Delta(0, r)$ sia tale che $\mathbf{p}_1$ rispetti le ipotesi del teorema di divisione Weierstrass globale. Data ora $\mathbf{F} \in \mathscr{M}_{\bar{\Delta}(0,r)}$ possiamo scrivere $\mathbf{F} = \mathbf{F}'\mathbf{p_1} + \bar{\mathbf{F}}$ con $\mathbf{F}' \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$ e $\bar{\mathbf{F}} \in \mathcal{O}^k_{n-1,D}$ con $D = \bar{\Delta(0, r_1, ..., r_{n-1})}$. Applicando l'ipotesi induttiva a $\bar{\mathbf{F}}$ abbiamo

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum_{j=1}^{s} \mathbf{b}_j \bar{\mathbf{p}}_j$$

con $\mathbf{b}_j \in \mathcal{O}_{n-1,D}$. Ma allora

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'\mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{F}'\mathbf{G}_1}{\mathbf{u}_1} + \bar{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{F}'\mathbf{G}_1}{\mathbf{u}_1} + \sum_{i=1}^{s} \mathbf{b}_i \bar{\mathbf{p}}_i = \frac{\mathbf{F}'\mathbf{G}_1}{\mathbf{u}_1} + \sum_{i=1}^{s} \mathbf{b}_i \sum_{j=1}^{q} \mathbf{a}_{ij}\mathbf{G}_j$$

quindi

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\mathbf{u}_1}\mathbf{F}' + \sum_{i=1}^{s} \mathbf{b}_i \mathbf{a}_{i1}\right)\mathbf{G}_1 + \sum_{j=2}^{q}\left(\sum_{i=1}^{s} \mathbf{b}_i \mathbf{a}_{ij}\right)\mathbf{G}_j = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{h}_j \mathbf{G}_j$$

Il passo induttivo è quindi dimostrato.

□

Per ora abbiamo parlato di insiemi analitici, e li abbiamo definiti come insiemi che sono localmente luoghi di zeri di un numero finito di funzioni olomorfe. Applichiamo quanto studiato a famiglie di funzioni olomorfe.

Teorema 4.6. *Sia $\mathscr{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe definite su un aperto U, l'insieme*

$$\mathbf{V}(\mathscr{F}) = \{x \in U \mid f(x) = 0 \ \forall f \in \mathscr{F}\}$$

è un insieme analitico.

Dimostrazione. Sia $z \in \mathbf{V}(\mathscr{F})$ e sia I_z l'ideale generato da $\{\mathbf{f}_z : f \in \mathscr{F}\}$, per noetherianità esistono $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_k$ che generano l'ideale. Dato che i $\mathbf{g}_i$ appartengono all'ideale generato da $\mathscr{F}$ si può scrivere $\mathbf{g_i} = \sum \mathbf{h_{ij}} \mathbf{f_{i,z}}$ con $\mathbf{f}_{i,z}$ germi in in z di $f \in \mathscr{F}$ e $\mathbf{h_{ij}} \in \mathcal{O}_{n,z}$. Usando il teorema 4.5 possiamo trovare un polidisco $\Delta(z, r)$ abbastanza piccolo tale che, se $f \in \mathcal{O}_{\Delta(z,r)}$ e $\mathbf{f}_z \in I$ allora $f = \sum h_i g_i$. Questo ci permette di dimostrare che $\mathbf{V}(\mathscr{F}) \cap \Delta(z, r) = \mathbf{V}(g_1, ..., g_k) \cap \Delta(z, r)$. Vediamo questo ultimo fatto, se $f \in \mathscr{F}$ allora $f = \sum h_i g_i$ quindi, se x annulla tutta le g_i allora annulla anche f e dunque $\mathbf{V}(g_1, ..., g_k) \cap \Delta(z, r) \subseteq \mathbf{V}(\mathscr{F}) \cap \Delta(z, r)$. Tuttavia tutte le g_i sono in $\mathscr{F}$ e questo dimostra l'altra inclusione. □

Vediamo che la definizione di germe si può estendere anche a sottoinsiemi di $\mathbb{C}^n$.

Definizione 4.5. Siano X e Y sottoinsiemi di $\mathbb{C}^n$. Diremo che tali insiemi sono equivalenti in z se esiste un intorno U di z tale che $X \cap U = Y \cap U$. Una classe di equivalenza di questa relazione la chiameremo germe di insiemi nel punto z, e lo indicheremo con $\mathbf{X}$. Osserviamo che se $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}$ sono germi di insiemi allora anche $\mathbf{X_1} \cup \mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_1} \cap \mathbf{X_2}$, e $\mathbf{X_1} \setminus \mathbf{X_2}$ sono ben definiti germi d'insiemi. Chiaramente si possono estendere queste operazioni ad un numero finito di insiemi.

Possiamo definire il luogo di zeri di un germe, infatti se $\mathbf{f}$ è un germe e (f_1, U_1) (f_2, U_2) sono suoi rappresentati allora gli insiemi

$$\{x \in U_1 \mid f_1(x) = 0\} \qquad \{x \in U_2 \mid f_2(x) = 0\}$$

sono equivalenti. Quindi possiamo definire $\mathbf{V}(\mathbf{f})$ come la classe di uno dei luoghi di zeri di un rappresentante.

Definizione 4.6. Sia $\in \mathcal{O}_n$ e $\mathbf{X}$ un germe di insieme, diremo che $\mathbf{f}$ *si annulla* su $\mathbf{X}$ se $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}(\mathbf{f})$.

Definizione 4.7. Diremo che $\mathbf{X}$ è il *germe* di un insieme analitico se esistono $\mathbf{f_1}, ..., \mathbf{f_k} \in \mathcal{O}_n$ tali che $\mathbf{X} = \mathbf{V}(\mathbf{f_1}) \cap, ..., \cap \mathbf{V}(\mathbf{f_k})$.

Per semplicità di notazione scriveremo $\mathbf{V}(\mathbf{f_1}) \cap, ..., \cap \mathbf{V}(\mathbf{f_k}) = \mathbf{V}(\mathbf{f_1}, ..., \mathbf{f_k})$ e indicheremo con $\mathscr{B}_n$ l'insieme dei germi di insiemi in 0. Osserviamo che

$$\mathbf{V}(\mathbf{f_1}, ...\mathbf{f_k}) \cap (\mathbf{g_1}, ..., \mathbf{g_h}) = \mathbf{V}(\mathbf{f_1}, ..., \mathbf{f_k}, \mathbf{g_1}, ..., \mathbf{g_h})$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{f_1}, ...\mathbf{f_k}) \cup (\mathbf{g_1}, ..., \mathbf{g_h}) = \mathbf{V}(\mathbf{f}_i \mathbf{g}_j \ ; \ 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq h)$$

da questo segue che che se $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathscr{B}_n$ allora anche $\mathbf{V} \cap \mathbf{U}$ e $\mathbf{V} \cap \mathbf{U}$ appartengono a $\mathscr{B}_n$.

Definizione 4.8. Dato $\mathbf{V} \in \mathscr{B}_n$ definiamo

- l'ideale di $\mathbf{V}$ come $\mathscr{I}(\mathbf{V}) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n \mid \mathbf{f} \text{ si annulla su } \mathbf{V}\}$
- se $A \subseteq \mathcal{O}_n$ definiamo $\mathbf{V}(A) = \cap_{\mathbf{f} \in A} \mathbf{V}(\mathbf{f})$

Lemma 4.2. *1.* $\mathscr{I}(\mathbf{V})$ *è un ideale di* $\mathcal{O}_n$.

2. $\mathbf{V}(A)$ *è un ben definito germe di insieme analitico.*

Dimostrazione. 1. Se $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ si annullano su $\mathbf{V}$ allora lo stesso vale per $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ e $\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}$ con $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_n$ e quindi è un ideale.

2. Sia $\mathscr{I}$ l'ideale generato da $A \subseteq \mathcal{O}_n$, per noetherianità $\mathscr{I}$ è generato da $\mathbf{g_1}, ..., \mathbf{g_t}$, affermiamo che $\mathbf{V}(A) = \mathbf{V}(\mathbf{g_1}, ..., \mathbf{g_t})$. Infatti ogni $\mathbf{h} \in A$ si annulla su $\mathbf{V}(A)$, quindi $\mathscr{I}$ si annulla su $\mathbf{V}(A)$ e dunque $\mathbf{V}(A) \subseteq \mathbf{V}(\mathbf{g_1}, ..., \mathbf{g_t})$. Sia ora $x \in \mathbf{V}(\mathbf{g_1}, ..., \mathbf{g_t})$, per il punto precedente x annulla tutti gli elementi di $\mathscr{I}$ ma $\mathscr{I}$ contiene A quindi $x \in \mathbf{V}(A)$.

$\square$

Elenchiamo adesso alcune proprietà di $\mathscr{I}(\mathbf{V})$ e di $\mathbf{V}(I)$ con I ideale.

Teorema 4.7. *Valgono i seguenti fatti*

1. $\mathbf{V_1} \supseteq \mathbf{V_2}$ *allora* $\mathscr{I}(\mathbf{V}) \subseteq \mathscr{I}(\mathbf{V})$.
2. $\mathbf{V_1} \neq \mathbf{V_2}$ *allora* $\mathscr{I}(\mathbf{V1}) \neq \mathscr{I}(\mathbf{V1})$.
3. $\mathscr{I}(\mathbf{V}) = \sqrt{\mathscr{I}(\mathbf{V})}$.
4. $I_1 \supset I_2$ *allora* $\mathbf{V}(I_1) \subseteq \mathbf{V}(I_2)$
5. $\mathbf{V}(\mathscr{I}(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$

6. $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(\sqrt{I})$

7. $\mathscr{I}(\mathbf{V}(I)) \supseteq \sqrt{I}$

Dimostrazione. 1. Se $\mathbf{f}$ si annulla su $\mathbf{V}_1$ a maggior ragione si annulla su $\mathbf{V}_2$.

2. Siano $V_1(f_1, ..., f_m)$ e $V_2(g_1, ..., g_k)$ rappresentati di $\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{V_2}$ rispettivamente. Dato che sono diversi, per ogni intorno di zero W vale

$$V_1(f_1, ..., f_m) \cap W \neq V_2(g_1, ..., g_k) \cap W.$$

Dunque esiste uno z in $V_1 \Delta V_2$(differenza simmetrica) tale che tutte le f_i si annullano su z e le g_j non si annullano o viceversa. Dato che le f_i e le g_j sono in numero finito esiste una funzione $\bar{f}$ che non si annulla su $V_2 \cap W$ per ogni W o una $\bar{g}$ che non si annulla su $V_1 \cap W$ per ogni W, quindi $\mathscr{I}(\mathbf{V_1}) \neq \mathscr{I}(\mathbf{V_2})$.

3. Se $\mathbf{f} \in \sqrt{\mathscr{I}(\mathbf{V})}$ allora esiste un n tale che $\mathbf{g}^n$ appartiene a $\mathscr{I}(\mathbf{V})$ ma se $\mathbf{f}^n$ si annulla su $\mathbf{V}$ lo fa anche $\mathbf{f}$.

4. Se $\mathbf{f}$ si annulla su I_1 a maggior ragione si annulla su I_2 e otteniamo

$$\mathbf{V}(I_1) \subseteq \mathbf{V}(I_2).$$

5. Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$. Qualunque $\mathbf{f} \in \mathscr{I}(\mathbf{A})$ si annulla su $\mathbf{A}$ dunque $\mathbf{x} \in \mathbf{V}(\mathscr{I}(\mathbf{A}))$ e quindi $\mathbf{V}(\mathscr{I}(\mathbf{A})) \supset \mathbf{A}$. Dato che $\mathbf{A}$ è un germe di insieme analitico possiamo scrivere $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_k)$, dunque le $\mathbf{f}_i$ si annullano su $\mathbf{A}$ e quindi appartengono a $\mathscr{I}(\mathbf{A})$. Dunque $\mathbf{f}_i$ si annulla su $\mathbf{V}(\mathscr{I}(A))$ e $\mathbf{V}(\mathbf{f_i}) \supseteq \mathbf{V}(\mathscr{I}(A))$. Dato che questo vale per ogni i otteniamo

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}(\mathbf{f_1}) \cap ... \cap \mathbf{V}(\mathbf{f_k}) \supseteq \mathbf{V}\mathscr{I}(\mathbf{A})$$

e questo dimostra l'altra inclusione.

6. Dato che $I \subseteq \sqrt{I}$, per il punto 1) abbiamo $\mathbf{V}(I) \supseteq \mathbf{V}(\sqrt{I})$. Dato $\mathbf{x} \in \mathbf{V}(I)$ consideriamo una $\mathbf{f} \in \sqrt{I}$, esiste un n tale che $\mathbf{f}^n$ appartiene a I ma allora $\mathbf{f}^n$ si annulla su $\mathbf{x}$. Quindi anche $\mathbf{f}$ si annulla su $\mathbf{x}$ e questo prova l'altra inclusione.

7. Sappiamo che per ogni ideale J vale $\mathscr{I}(\mathbf{V}(J)) \supseteq J$ e usando la proprietà 5) otteniamo

$$\mathscr{I}(\mathbf{V}(I)) \supseteq \mathscr{I}(\mathbf{V}(\sqrt{I})) \supseteq \sqrt{I}$$

□

Teorema 4.8. *Siano* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{O}_n$ *relativamente primi. A meno di un cambio di coordinate centrato in* 0 *esistono* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{O}_n$ *tali che*

$$\mathbf{af} + \mathbf{bg} = \mathbf{p}$$

con $\mathbf{p} \in \mathcal{O}_{n-1}$.

Dimostrazione. Per il teorema di preparazione di Weierstrass possiamo scegliere un sistema di coordinate centrato in 0 tale che $\mathbf{f} = \mathbf{uP}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{vQ}$, con $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ unità di $\mathcal{O}_n$ e $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ polinomi di Weierstrass in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Per il teorema 3.5 anche $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ sono relativamente primi. Sia $\mathbb{K}$ il campo dei quozienti di $\mathcal{O}_n$ allora $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{K}[z_n]$ e sono relativamente primi. Applicando l'identità di Bezout otteniamo che esistono $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{K}[z_n]$ tali che

$$\mathbf{hP} + \mathbf{KQ} = \mathbf{1}.$$

Per come è definito il campo dei quozienti $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}}$ con $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e $\mathbf{y}, \mathbf{w}$ diversi da 0. Ma allora se scegliamo $\mathbf{a} = \mathbf{wxu^{-1}}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{zyv^{-1}}$ troviamo

$$\mathbf{af} + \mathbf{bg} = \mathbf{wxu^{-1}uP} + \mathbf{yzv^{-1}vQ} = \mathbf{wxP} + \mathbf{yzQ} = \mathbf{xz}$$

□

Teorema 4.9 (Nullstellensatz per ideali principali). *Sia* $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_n$ *irriducibile allora* $\mathscr{I}(\mathbf{V}(\mathbf{g})) = (\mathbf{g})$

Dimostrazione. Assumiamo $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$. Per il teorema di preparazione di Weierstrass, a meno di cambiare coordinate, esiste $\mathbf{P} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ polinomio di Weierstrass tale che $\mathbf{g} = \mathbf{uP}$ con $\mathbf{u}$ unità di $\mathcal{O}_n$. Dato che $\mathbf{u}$ è un'unità $\mathbf{V}(\mathbf{g}) = \mathbf{V}(\mathbf{P})$ e $(\mathbf{g}) = (\mathbf{P})$, quindi ci basta dimostrare il teorema solamente per $\mathbf{P}$. Sia ora $\mathbf{f} \in \mathscr{I}(\mathbf{V}(\mathbf{P}))$. Abbiamo 2 casi, o $\mathbf{P}$ divide $\mathbf{f}$ e allora $\mathbf{f} \in (\mathbf{P})$, o $\mathbf{f}$ e $\mathbf{P}$ sono coprimi. Per il teorema precedente a meno di cambiare coordinate esistono $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{O}_n$ tali che

$$\mathbf{af} + \mathbf{bP} = \mathbf{p}$$

con $\mathbf{p}$ diverso da 0 in $\mathcal{O}_{n-1}$. Consideriamo adesso un polidisco $\Delta(0, r)$ in cui la precedente equazione è valida per dei rappresentati di $\mathbf{a}, \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{P}, \mathbf{p}$. Usando il teorema 1.6 possiamo supporre che in $\Delta(0, r)$ la funzione $P(z_1, ..., z_{n-1}, z_n)$ vista come funzione della sola variabile z_n abbia almeno uno zero qualunque siano $z_1, ..., z_{n-1} \in \Delta(0, r_1, ..., r_{n-1})$. Dato che P è un polinomio di Weierstrass, esiste $\tilde{z}$ tale che per ogni $(z_1, ..., z_{n-1}) \in \Delta(0, r_1, ..., r_{n-1})$ vale $P(z_1, ..., z_{n-1}, \tilde{z}) = 0$, ma allora anche $f(z_1, ..., z_{n-1}, \tilde{z}) = 0$ e per la relazione precedente lo stesso vale per p. Allora p è costantemente nullo su $\Delta(0, r_1, ..., r_{n-1})$ e quindi $\mathbf{p} = 0$. Questo è assurdo e dunque $\mathbf{P}$ divide $\mathbf{f}$. Il fatto che $\mathscr{I}(\mathbf{V}(\mathbf{g})) \supseteq (\mathbf{g})$ è sempre vero. □

Teorema 4.10. *Sia* $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ *e poniamo*

$$\mathbf{f} = \prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i}$$

la sua fattorizzazione in fattori irriducibili. Allora

$$\mathbf{V}(\mathbf{f}) = \bigcup_{i=1}^{s} \mathbf{V}(\mathbf{p}_i)$$

è la decomposizione di $\mathbf{V}(\mathbf{f})$ *in componenti irriducibili.*

Dimostrazione. Dato che i $\mathbf{p}_i$ sono irriducibili, gli ideali da loro generati sono primi e quindi $\mathbf{V}(\mathbf{p}_i)$ sono irriducibili. Abbiamo che

$$\mathbf{V}(\mathbf{f}) = \mathbf{V}\left(\prod_{i=1}^{s} \mathbf{p}_i^{n_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{s} \mathbf{V}(\mathbf{p}_i^{n_i}) = \bigcup_{i=1}^{s} \mathbf{V}(\mathbf{p}_i).$$

Se $\mathbf{V}(\mathbf{p}_i) \subseteq \mathbf{V}(\mathbf{p}_j)$ avremmo $\mathbf{p}_j \subseteq \mathbf{p}_i$, quindi $\mathbf{p}_j$ dividerebbe $\mathbf{p}_i$ contraddicendo il fatto che i $\mathbf{p}_i$ sono irriducibili. □

Teorema 4.11. *Se il Nullstellensatz algebrico vale per gli ideali primi allora vale per ogni ideale.*

Dimostrazione. Sia I un ideale di $\mathcal{O}_n$, possiamo scrivere

$$I = Q_1 \cap, ..., \cap Q_s$$

con Q_j ideali primari. Dato che i Q_j sono primari $\sqrt{Q_j}$ è primo. Dato che $\mathbf{V}(Q_i) = \mathbf{V}(\sqrt{Q_j})$ otteniamo

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(\sqrt{Q_1}) \cup ... \cup \mathbf{V}(\sqrt{Q_s})$$

e quindi

$$\mathscr{I}\mathbf{V}(I) = \mathscr{I}\mathbf{V}(\sqrt{Q_1}) \cap ... \cap \mathscr{I}\mathbf{V}(\sqrt{Q_s})$$

e usando il Nullstellensatz per gli ideali primi otteniamo

$$\mathscr{I}\mathbf{V}(I) = \sqrt{Q_1} \cap ... \cap \sqrt{Q_s} = \sqrt{I}$$

che è quello che si voleva. □

Definizione 4.9. Sia $A \subseteq B$ un'estensione di anelli commutativi con unità, diremo che $x \in B$ è *intero* se esiste un polinomio monico a coefficienti in A che si annulla in x. Diremo che l'estensione è *intera* se ogni $x \in B$ è intero.

Teorema 4.12. *Sia $A \subseteq B$ un'estensione di anelli commutativi con unità e $x \in B$. Allora x è intero se e solo se $A[x]$ è finitamente generato come A-modulo.*

Dimostrazione. $\Leftarrow$ Se x è intero esiste un polinomio monico p a coefficienti in A tale che $p(x) = 0$. Quindi

$$p(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k = 0$$

dunque possiamo esprimere x^h per $h \geq N$ come combinazione degli x^j per $0 \leq j \leq N-1$.
$\Rightarrow$ Supponiamo $A[x]$ sia finitamente generato come A-modulo e siano $\alpha_1, ..., \alpha_k$ in generatori. Dato che per ogni $i = 1, ..., k$ $x\alpha_i \in A[x]$ possiamo scrivere

$$x\alpha_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\alpha_j$$

e quindi

$$\sum_{j=1}^{k} (a_{ij} - \delta_{ij}x)\alpha_j = 0$$

con δ_{ij} la delta di Kronecker. Dunque abbiamo un sistema lineare con matrice associata $M = (M)_{ij} = (a_{ij} - \delta_{ij}x)$. Risolvendo questo sistema tramite il metodo di Cramer otteniamo

$$(\det M)\alpha_i = 0$$

quindi la mappa $\phi A[x] \to A[x]$ definita come $\phi(p) = \det Mp$ è la mappa nulla (perché è nulla sue generatori di $A[x]$). In particolare vale $(\det M)(1) = 0$ da cui $\det M = 0$, dunque il determinante di M è il polinomio cercato. □

Osserviamo che se $A \subseteq B \subseteq C$ sono estensioni di anelli con B intero su A e C intero su B allora C è intero su A. Infatti se C è intero su B allora per ogni x in C esistono $b_1, ..., b_n \in B$ tali che

$$x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n = 0$$

dunque $A[x]$ è finito su $A[b_1, ..., b_n]$, dato che i b_i sono interi anche $A[b_1, ..., b_n]$ è finita su A quindi $A[x]$ è finita su A.

Definizione 4.10. Sia $P \subseteq \mathcal{O}_n$ un ideale primo. Diremo che un sistema di coordinate $z_1, ..., z_n$ è *regolare* se

1. Esiste k tale che $P \cap \mathcal{O}_k = \mathbf{0}$.
2. ${}^{\mathcal{O}_n}/_{P}$ è intero su $\mathcal{O}_k$.
3. Detto $\mathscr{F}_n$ il campo delle frazioni di ${}^{\mathcal{O}_n}/_{P}$, $\mathscr{F}_n$ è generato su $\mathscr{F}_k$ dal solo elemento $\nu_{k+1} = \pi(z_{k+1})$.

L'intero k sarà detto *dimensione* di P relativa al sistema di coordinate $z_1, ..., z_n$.

Teorema 4.13. *Se $P \subseteq \mathcal{O}_n$ è un ideale primo P ammette un sistema regolare di coordinate.*

Dimostrazione. A meno di un cambio di coordinate possiamo assumere la seguente condizione

- ${}^{\mathcal{O}_n}/_{P}$ è generato su $\mathcal{O}_k$ da $\pi(z_j)$ per $j = k+1, ..., n$.

Esaminiamo prima i casi banali, se $P = (\mathbf{0})$ scegliamo $k = n$ se $P = \mathcal{O}_n$ scegliamo $k = 0$. Dunque possiamo assumere che P sia un ideale primo proprio. Procediamo per induzione su n, se $n = 0$ $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}$ e non ci sono ideali primi propri. Assumiamo la tesi vera per ogni ideale primo di $\mathcal{O}_{n-1}$. Sia P un ideale primo proprio di $\mathcal{O}_n$ e $\mathbf{f} \in P$, a meno di un cambio di coordinate $\mathbf{f}$ è regolare di ordine k in z_n. Per il teorema di preparazione di Weierstrass $\mathbf{f} = \mathbf{pQ}$ con $\mathbf{Q}$ unità di $\mathcal{O}_n$ e $\mathbf{p} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ polinomio di Weierstrass. Dato che $\mathbf{Q}$ è un'unità $\mathbf{p} \in P$. L' ideale $P' = P \cap \mathcal{O}_{n-1}$ è primo in $\mathcal{O}_{n-1}$ quindi, per ipotesi induttiva, esiste un $k \leq n-1$ tale che

1. $P' \cap \mathcal{O}_k = \mathbf{0}$.
2. ${}^{\mathcal{O}_{n-1}}/_{P'}$ è intero su $\mathcal{O}_k$.
3. ${}^{\mathcal{O}_{n-1}}/_{P'}$ è generato su $\mathcal{O}_k$ da $\pi(\mathbf{z_j})$ per $j = k+1, ..., n-1$.

Assumiamo inoltre che $\mathbf{p}$ sia della forma

$$\mathbf{p} = z_n^r + \sum_{i=1}^{r-1} \mathbf{a}_i z_n^i.$$

Dato che $\mathcal{O}_k \subseteq \mathcal{O}_{n-1}$ otteniamo $(\mathbf{0}) = P \cap \mathcal{O}_k = (P \cap \mathcal{O}_{n-1}) \cap \mathcal{O}_k = P' \cap \mathcal{O}_k$ e dunque la prima proprietà è verificata. Dimostriamo adesso che $\mathcal{O}_n /_P$ è intero su

$$\mathcal{O}_{n-1} /_P = \mathcal{O}_{n-1} /_{P'}$$

in questo modo la seconda proprietà segue per transitività. Sia $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$, per il teorema di divisione di Weierstrass possiamo dividere $\mathbf{f}$ per $\mathbf{p}$ ottenendo

$$\mathbf{f} = \mathbf{pH} + \sum_{i=0}^{r-1} \mathbf{b}_i z^i \quad \text{con } \mathbf{b_i} \in \mathcal{O}_{n-1}.$$

Poniamo $\nu_n = \pi(z_n)$ e quindi

$$\phi(\mathbf{f}) = \sum_{i=0}^{r-1} \pi(\mathbf{b}_i)\nu_n^i$$

dunque ogni elemento di $\mathcal{O}_n /_P$ è un polinomio in ν_n a coefficienti in $\mathcal{O}_{n-1} /_P$. Applicando π a $\mathbf{p}$ otteniamo

$$\mathbf{0} = \nu_n^r + \sum_{i=0}^{r-1} \pi(\mathbf{a}_i)\nu_n^i$$

e quindi ν_n è intero su $\mathcal{O}_{n-1} /_P$. Inoltre $\mathcal{O}_n /_P$ è un $\mathcal{O}_{n-1} /_P$-modulo finitamente generato quindi $\mathcal{O}_n /_P$ è intero su $\mathcal{O}_{n-1} /_P$ e per transitività è intero su $\mathcal{O}_k$. Per i calcoli precedenti $\mathcal{O}_n /_P$ è generato da ν_n su $\mathcal{O}_{n-1} /_P$, che è generato da $\nu_{n-1}, ..., \nu_{k+1}$ su $\mathcal{O}_k$ per ipotesi induttiva, quindi anche la condizione aggiuntiva è provata. Dato che $\mathcal{O}_n /_P$ è generato su $\mathcal{O}_k$ da $\nu_{k+1}, ..., \nu_n$ il campo dei quozienti $\mathscr{F}_n$ è generato su $\mathscr{F}_k$ da $\nu_{k+1}, ..., \nu_n$. Per la seconda proprietà i ν_j sono algebrici su $\mathscr{F}_k$, dunque $\mathscr{F}_n$ è un' estensione finita di $\mathscr{F}_k$. Per il teorema dell'elemento primitivo $\mathscr{F}_n$ è generato su $\mathscr{F}_k$ da un solo elemento

$$\nu = \sum_{j=k+1}^{M} c_i \nu_i.$$

Chiamiamo $z'_{k+1} = \sum_{j=k+1}^{M} c_j z_j$ e completiamo $z_1, ..., z_k, z'_{k+1}$ a un sistema di funzioni indipendenti $z_1, ..., z_k, z'_{k+1}, ..., z'_M$, dove $z'_{k+2}, ..., z'_M$ sono scelte tra $z_{k+2}, ..., z_n$. Questa scelta non influenza le prime k coordinate quindi la prima e la seconda proprietà sono ancora vere, inoltre dato che $\pi(z'_{k+1}) = \nu$ anche la terza proprietà è vera. $\square$

Con questo teorema abbiamo visto che $\mathcal{O}_n /_P$ è intero su $\mathcal{O}_k$ e $\mathscr{F}_n$ è un'estensione di $\mathscr{F}_k$. sS $y \in \mathcal{O}_n /_P$ abbiamo $y = b_0 + b_1\nu + ... + b_N\nu^N$ con i $b_i \in \mathscr{F}_k$ quindi moltiplicando per il denominatore comune Δ abbiamo che $\Delta y \in \mathcal{O}_k[\nu]$. Il problema è che questo denominatore dipende da y mentre noi vogliamo trovare un denominatore indipendente da y. Nel seguito, se A è un anello indicheremo con $qf(A)$ il suo campo dei quozienti.

Teorema 4.14. *Siano $A \subseteq B$ un'estensione intera di anelli con $qf(B)$ generato da un solo elemento ν su $qf(A)$. Esiste $d \in A$ tale che $dB \subseteq A[\nu]$.*

Dimostrazione. Sia q il polinomio minimo di ν su A e $\nu_1 = \nu, ..., \nu_k$ le sue radici in un opportuno campo di spezzamento. Ogni elemento $y \in B$ si può scrivere come

$$y = \sum_{i=0}^{k} b_i \nu^i.$$

Sia $G = \{\sigma_i\}_{i=1}^k$ il gruppo di Galois di q su B dove $\sigma_1 = id$. Se chiamiamo $\nu_i = \sigma_i(\nu)$ e facciamo agire G su y otteniamo il seguente sistema nelle incognite $b_0, ..., b_k$

$$\begin{cases} y = b_0 + b_1\nu + ... + b_k\nu^k \\ \sigma_2(y) = b_0 + b_1\nu_1 + ... + b_k\nu_2^k \\ \vdots \\ \sigma_k(y) = b_0 + b_1\nu_k + ... + b_k\nu_k^k \end{cases}$$

Osserviamo che la matrice V associata al sistema è una matrice di Vandermonde il cui determinante è

$$\det V = \prod_{i \neq J}^{k} (\nu_i - \nu_j).$$

In generale il determinante di V non è una funzione simmetrica ma il suo quadrato sì. Dunque $\det(V)^2$ è una funzione polinomiale delle funzioni simmetriche elementari delle ν_i, ossia dei coefficienti del polinomio q pensato come polinomio su A, e quindi è un elemento di A. Applicando la regola di Cramer otteniamo

$$b_i = \frac{\det[V^i]}{\det[V]}$$

dove V^i è la matrice che si ottiene sostituendo alla i-esima colonna la colonna dei termini noti del sistema. Chiamiamo $d = \det(A)^2$ allora db_i è intero su A, inoltre db_i appartiene al campo di spezzamento perché $\det(A^i)$ è un polinomio nei ν_i quindi $dB \subseteq A[\nu]$. $\square$

Facendo riferimento al teorema 4.13, dato che ν_{k+1} genera $\mathscr{F}_n$ su $\mathscr{F}_k$, possiamo osservare che, per ogni ν_j con $k+2 \leq j \leq n$, c'è un polinomio T_j tale che $d\nu_j = T_j(\nu_{k+1})$ e quindi $dz_j - T_j(z_{k+1}) \in P$.

Teorema 4.15. *Sia $\mathbf{q}_j(z_j)$ il polinomio minimo di $\nu_j = \pi(z_j)$, allora $\mathbf{q}_j(z_j)$ è un polinomio di Weierstrass.*

Dimostrazione. Dato che $\mathbf{q}_j(z_j)$ è monico è regolare in z_j di ordine r_j. Per il teorema di preparazione possiamo scrivere

$$\mathbf{q}_j(z_j) = \mathbf{u}\mathbf{q'}_j(z_j)$$

con $\mathbf{q'}_j(z_j)$ polinomio di Weierstrass in $\mathcal{O}_k[z_n]$ di grado r_j e $\mathbf{u}$ unità. Dunque

$$\pi(\mathbf{q_j}(z_j)) = q_j(n_j) = 0 = \pi\mathbf{u}q'_j(\nu_j)$$

e dunque $q'_j(\nu_j) = 0$. Dato che $\mathbf{q}_j(z_j)$ è il polinomio minimo di ν_j esso divide $\mathbf{q}'_j(z_j)$. Ma i due polinomi sono monici e dello stesso grado quindi sono uguali. $\square$

Definiamo adesso due ideali

$$I_2 = (q_{k+1}(z_{k+1}), dz_{k+2} - T_{k+2}(z_{k+1}), ...)$$

$$I_1 = (q_{k+1}(z_{k+1}), ..., q_n(z_n),), dz_{k+2} - T_{k+2}(z_{k+1}), ...)$$

chiaramente $I_2 \subseteq I_1$ e $I_1 \subseteq P$. Infatti, applicando la proiezioni al quoziente, $\pi(I_1) = (\mathbf{0})$ e quindi $I_2 \subseteq I_1 \subseteq P$ da cui $\mathbf{V}(P) \subseteq \mathbf{V}(I_1) \subseteq \mathbf{V}(I_2)$. Per semplicità chiamiamo

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(p) \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}(I_1) \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}(I_2).$$

Per dimostrare il Nullstellensatz di Rückert dobbiamo prima provare che questi tre insiemi sono uguali.

Teorema 4.16. $\mathbf{V_1} \setminus \mathbf{V}(d) = \mathbf{V_2} \setminus \mathbf{V}(d)$

Dimostrazione. Dato che $I_2 \subset I_1$ abbiamo $\mathbf{V_1} \subseteq \mathbf{V_2}$ e quindi $\mathbf{V_1} \setminus \mathbf{V}(d) \subseteq \mathbf{V_2} \setminus \mathbf{V}(d)$. Per dimostrare l'altra inclusione ci basta dimostrare che $\mathbf{q}_j(z_j)$ si annulla su $\mathbf{V_2} \setminus \mathbf{V}(d)$ per $k + 2 \leq j \leq n$. Definiamo

$$\mathbf{h}_j(X) = d^{r_j} \mathbf{q}_j \left(\frac{T_j(X)}{D} \right) \quad k + 2 \leq j \leq n.$$

Dato che $\mathbf{q}_j$ ha grado r_j, $\mathbf{h}_j$ è un polinomio a coefficienti in $\mathcal{O}_k$. Valutando in ν_{k+1} otteniamo

$$h_j(\nu_{k+1}) = d^{r_j} q_j \left(\frac{T_j(\nu_{k+1})}{d} \right) = d^{r_j} q_j(\nu_j) = 0.$$

Dato che $\mathbf{q}_{k+1}$ è il polinomio minimo di ν_{k+1} abbiamo che q_{k+1} divide h_j quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{h}_j = \mathbf{Q}_j \mathbf{q}_{k+1}$$

con $\mathbf{Q}_j \in \mathcal{O}_k[X]$. Scegliamo adesso un polidisco in cui le precedenti equazioni sono validi per dei rappresentanti dei germi. Chiamiamo $a_0 = (a_1, ..., a_k)$ e consideriamo $a = (a_0, a_{k+1}, ..., a_n) \in \mathbf{V}_2 \setminus \mathbf{V}(d)$. Dato che $a = (a_0, a_{k+1}, ..., a_n)$ appartiene a$\mathbf{V}_2 \setminus \mathbf{V}(d)$ otteniamo

$$q_{k+1}(a_0, a_{k+1}) = 0 \qquad da_j = T_j(a_0, a_{k+1})$$

e dato che q_{k+1} divide h_j anche $h_j(a_0, a_{k+1}) = 0$. Quindi

$$h_j(a_0, a_{k+1}) = d^{r_j} q_j \left(a_0, \frac{T_j(a_0, a_{k+1})}{d} \right) = d^{r_j} q_j(a_0, a_j)$$

dato che $d \neq 0$ anche $q_j(a_0, a_j) = 0$. Quindi q_j si annulla su $\mathbf{V_2} \setminus \mathbf{V}(d)$ e la seconda inclusione è provata. $\square$

Teorema 4.17. *Esiste un intero α tale che per ogni $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ esiste $\mathbf{R} \in \mathcal{O}_k[z_{k+1}]$ con le seguenti proprietà:*

- $\deg R < \deg \mathbf{q}_{k+1}$.
- $d^\alpha - \mathbf{R} \in I_1$.

Dimostrazione. Chiamiamo $r_{k+1} = \deg \mathbf{q}_{k+1}$. Data $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ possiamo dividerla per $\mathbf{q}_n(z_n)$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}_n \mathbf{q}_n(z_n) \sum_{i=0}^{r_n-1} \mathbf{A}_{i,n} z_n^i$$

con $\mathbf{A}_{i,n} \in \mathcal{O}_{n-1}$. Possiamo adesso dividere tutti gli $\mathbf{A}_{i,n}$ per $\mathbf{q}_{n-1}(z_{n-1})$ pensato come elemento di $\mathcal{O}_{n-1}$ e quindi

$$\mathbf{A}_{in} = \mathbf{A}_{i,n-1} \mathbf{q}_{n-1}(z_{n-1}) + \sum_{j=1}^{r_{n-1}-1} \mathbf{A}_{i,n-1,j} z_{n-1}^j$$

con le $\mathbf{A}_{i,n-1,j} \in \mathcal{O}_{n-2}$. In definitiva abbiamo scritto

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}_n \mathbf{q}_n(z_n) + \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{q}_{n-1}(z_{n-1}) + \mathbf{R}_{n-1}$$

dove $\mathbf{R} \in \mathcal{O}_{n-2}[z_n, z_{n-1}]$ è un polinomio di grado al massimo $r_n + r_{n-1} - 2$. Continuando a dividere otteniamo

$$\mathbf{f} = \sum_{j=k+1}^{n} \mathbf{A}_j \mathbf{q}_j(z_j) + \mathbf{R}$$

dove $\mathbf{R} \in \mathcal{O}_k[z_{k+1}, ..., z_n]$ è un polinomio di grado minore di

$$\sum_{j=k+1}^{n} (r_j - 1)$$

. Chiamiamo $\alpha = \deg \mathbf{R}$ e moltiplicando tutto per d^α otteniamo

$$d^\alpha \mathbf{f} = \sum_{j=k+1}^{n} \mathbf{A}'_j \mathbf{q}_j(z_j) + \mathbf{R}'$$

con $\mathbf{R}'$ polinomio in $z_{k+1}, dz_{k+2}, ..., dz_n$. □

Possiamo scrivere, per ogni $k+1 \leq l \leq n$,

$$\mathbf{R}'(z_{k+1}, dz_l) = \mathbf{R}'(z_{k+1}, dz_l - T_l(z_{k+1}) + T_l(z_{k+1}))$$

e espandendo in termini di $T_l(z_{k+1})$ e $dz_l - T_l(z_{k+1})$ otteniamo,

$$d^\alpha \mathbf{f} = \sum_{j=k+1}^{n} \mathbf{A}'_j \mathbf{q}_j(z_j) + \mathbf{R}''(z_{k+1}, dz_j - T_j(z_{k+1})) + \mathbf{R}'(z_{k+1}, T_j(z_{k+1}))$$

con $\mathbf{R}''$ che non ha termini senza potenze di $dz_j + T_j(z_{k+1})$. Dato che $\mathbf{R}'$ appartiene a $\mathcal{O}_k[z_{k+1}]$, per il teorema di divisione, possiamo scrivere

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q} \mathbf{q}_{k+1}(z_{k+1}) + \tilde{\mathbf{R}}$$

col grado di $\tilde{\mathbf{R}}$ minore di r_{k+1}. Dato che

$$\sum_{j=k+1}^{n} \mathbf{A}' \mathbf{q}_j(z_j) + \mathbf{R}'' + \mathbf{Q} \mathbf{q}_{k+1}(z_{k+1}) \in I_1$$

il polinomio cercato è proprio $\tilde{\mathbf{R}}$.

Teorema 4.18. $\mathbf{V} \setminus \mathbf{V}(d) = \mathbf{V}_1 \setminus \mathbf{V}(d)$

Dato che $I_1 \subseteq P$ abbiamo $\mathbf{V} \setminus \mathbf{V}(d) \subseteq \mathbf{V}_1 \setminus \mathbf{V}(d)$. Ci basta provare che se $\mathbf{f} \in P$ allora $\mathbf{f}$ si annulla su $\mathbf{V}_1 \setminus \mathbf{V}(d)$. Per il teorema precedente esistono α e $\mathbf{R} \in \mathcal{O}_k[z_{k+1}]$ di grado minore di r_{k+1} tale che $d^\alpha \mathbf{f} - \mathbf{R} \in I_1$. Ma allora $d^\alpha \mathbf{f} - \mathbf{R} \in P$, e dato che $\mathbf{f} \in P$ anche $\mathbf{R} \in P$. Valutando in ν_{k+1} otteniamo $R(\nu_{k+1}) = \pi \mathbf{R}(z_{k+1}) = 0$ e quindi q_{k+1} divide $\mathbf{R}$. Dato che il grado di $\mathbf{R}$ è più piccolo del grado di q_{k+1} abbiamo $\mathbf{R} = 0$ e quindi $d^\alpha \mathbf{f} \in I_1$ e se $d \neq 0$ $\mathbf{f} \in I_1$.

Teorema 4.19 (Nullstellensatz di Rückert per ideali primi)**.** *Sia $P \subseteq \mathcal{O}_n$ un ideale primo allora $\mathscr{I}(\mathbf{V}(P)) = P$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{f} \in \mathscr{I}(\mathbf{V}(P))$. Possiamo scrivere $d^\alpha \mathbf{f} = \mathbf{Q} + \mathbf{R}(z_{k+1})$ con $\mathbf{Q} \in I_1 \subseteq P$ e $\mathbf{R} \in \mathcal{O}_k[z_{k+1}]$ con grado più piccolo di r_{k+1}. $\mathbf{R}$ si annulla su $\mathbf{V}$ e per il teorema 4.18 si annulla su $\mathbf{V}_2 \setminus \mathbf{V}(d)$. Scegliamo un polidisco $\Delta(0, \delta)$ abbastanza piccolo in modo che tutto accada in questo polidisco, chiamiamo $\Delta(0, \delta) = \Delta_1 \times \Delta_2 \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$. Prendiamo $a_0 \in \Delta_1$ tale che $d(a_0) \neq 0$. Esiste almeno un a_{k+1} tale che $q_{k+1}(a_0, a_{k+1}) = 0$. Per tale a_{k+1} consideriamo il punto

$$a = (a_0, ..., a_n) = \left(a_0, a_{k+1}, \frac{T_{k+2}(a_{k+1})}{d(a_0)}, ..., \frac{T_n(a_{k+1})}{d(a_0)} \right)$$

osserviamo che $q_j(a_0, a_j) = 0$, quindi possiamo assumere $|a_j| \leq \delta_j$ e dunque $a \in \Delta(0, \delta) \cap (\mathbf{V}_2 \setminus \mathbf{V}(d))$. Abbiamo che $R(a) = R(a_0, a_{k+1}) = 0$. Sappiamo che a_{k+1} è una delle r_{k+1} radici distinte di $q_{k+1}(a_0, X)$ e dunque R ha r_{k+1} radici distinte. Dato che R ha grado minore di r_{k+1} deve necessariamente essere $R = 0$ e quindi $d^\alpha \mathbf{f} = \mathbf{Q} \in P$ ma P è primo e $d \notin P$ quindi $\mathbf{f} \in P$. □

Vediamo adesso due esempi in cui teoremi simili al Nullstellensatz non valgano per l'anello delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$. Per trattare il primo di questi esempi abbiamo bisogno della nozione di filtro su un insieme

Definizione 4.11. Sia X un insieme, una famiglia non vuota $\mathscr{F}$ di sottoinsieme di X si dice *filtro* se

1. $\emptyset \notin X$
2. Se $A, B \in \mathscr{F}$ allora $A \cap B \in \mathscr{F}$.
3. Se $A \in \mathscr{F}$ e $A \subseteq B$ allora $B \in \mathscr{F}$.

Dal punto 1. otteniamo che $\mathscr{F}$ non coincide con l'insieme delle parti di X, inoltre dalla proprietà 2. abbiamo che se $A \in \mathscr{F}$ allora $A^c \notin \mathscr{F}$. Definiamo adesso un ordinamento parziale sull'insieme dei filtri di X nel seguente modo. Dati due filtri $\mathscr{F}, \mathscr{G}$

$$\mathscr{F} < \mathscr{G} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, A \in \mathscr{F} \quad \exists\, B \in \mathscr{F} \quad \text{tale che} \quad B \subseteq A.$$

Osserviamo che con questa definizione ogni elemento di $\mathscr{F}$ è un elemento di $\mathscr{G}$.

Definizione 4.12. Un *ultrafiltro* è un filtro massimale rispetto a questo ordinamento.

Teorema 4.20. *Sia $\mathscr{F}$ un filtro, i seguenti fatti sono equivalenti*

1. $\mathscr{F}$ è un ultrafiltro.

2. Per ogni $A \in \mathscr{P}(X)$ se $A \notin \mathscr{F}$ allora $A^c \in \mathscr{F}$.

Dimostrazione. 1. $\implies$ 2. Supponiamo per assurdo esista un sottoinsieme A tale che né A né A^c appartengano a $\mathscr{F}$. Consideriamo

$$\mathscr{G} = \{A \cap F \mid F \in \mathscr{F}\}$$

e osserviamo che $A \cap F$ non può mai essere vuoto, poiché se così fosse $F \subset A^c$ e quindi $A^c \in \mathscr{F}$. Inoltre nessuna intersezione finita di elementi di $\mathscr{G}$ può essere vuota poiché avremmo

$$(A \cap F_1) \cap ... \cap (A \cap F_k) = A \cap (F_1 \cap ... \cap F_k) = A \cap F'.$$

Dato che $\mathscr{F}$ è un filtro $F' \in \mathscr{F}$ e, come prima, se $A \cap F' = \emptyset$ avremmo $A^c \in \mathscr{F}$. Consideriamo la famiglia $\mathscr{F}'$ formata da tutti i sottoinsiemi di X che contengono le intersezioni finite di elementi di $\mathscr{G}$. Per quanto visto sopra il vuoto non appartiene a $\mathscr{F}$ ed è evidente che se $A, B \in \mathscr{F}'$ allora $A \cap B \in \mathscr{F}'$. Inoltre se $A \in \mathscr{F}'$ e $A \subseteq B$ allora $B \in \mathscr{F}'$ e quindi $\mathscr{F}'$ è un filtro che contiene strettamente $\mathscr{F}$, ma allora $\mathscr{F} < \mathscr{F}'$ assurdo.
2. $\implies$ 1. Mostriamo che un filtro $\mathscr{F}$ che verifica 2. è massimale. Sia $\mathscr{F}'$ un filtro che contiene $\mathscr{F}$. Esiste un $X \in \mathscr{F}'$ che non appartiene a $\mathscr{F}$, ma per il punto 1. $X^c \in \mathscr{F}$ e quindi $X^c \in \mathscr{F}'$ da cui $\emptyset \in \mathscr{F}'$. □

Dimostriamo adesso un'altra proprietà degli ultrafiltri.

Teorema 4.21. *Se $\mathscr{F}$ è un ultrafiltro allora*

$$A \cup B \in \mathscr{F} \quad A \notin \mathscr{F} \implies B \in \mathscr{F}$$

Dimostrazione. Se per assurdo $B \notin \mathscr{F}$ allora A^c e B^c apparterrebbero a $\mathscr{F}$, quindi $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathscr{F}$. Ma allora $A \cup B \notin \mathscr{F}$ che è assurdo. □

Definizione 4.13. Sia X un insieme e A un suo sottoinsieme, diremo che A è *cofinito* se A^c ha cardinalità finita.

In generale, se X è un insieme infinito chiameremo *filtro cofinito* il filtro generato dagli insiemi cofiniti. Osserviamo che questa definizione ha senso perché l'intersezione di insiemi cofiniti non può essere vuota poiché, se così fosse, avremmo

$$\emptyset = C_1 \cap ... \cap C_k = (C_1^c \cup ... \cup C_k^c)^c \implies X = C_1^c \cup ... \cup C_k^c$$

e quindi X sarebbe finito. In generale il filtro cofinito non è massimale, se ad esempio si considera il sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ formato dai numeri pari si ha che né A né A^c sono cofiniti e per il teorema 4.20 il filtro cofinito non è massimale. Possiamo finalmente esporre il primo esempio in cui il Nullstellensatz non vale. Sull'insieme dei numeri naturali consideriamo un ultrafiltro $\mathscr{U}$ contenente tutti gli insiemi cofiniti. Sia f una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ e indichiamo con $\mu_z(f)$ la molteplicità di f nel punto z. Definiamo

$$M(f, n) = \{n \in \mathbb{N} \mid \mu_n(f) \geq m\}$$

e consideriamo l'insieme

$$\mathbf{a} = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \mid M(f, m) \in \mathscr{U} \ \ \forall\, m\}$$

Teorema 4.22. *L'insieme* $\mathbf{a}$ *è un ideale primo di* $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Dimostrazione. Siano $f, g \in \mathbf{a}$ voglio dimostrare che $f + g \in \mathbf{a}$ e $f \cdot h \in \mathbf{a}$ per ogni $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Facciamo vedere che se $M(f, m) \in \mathscr{U}$ e $M(G, m) \in \mathscr{U}$ per ogni m allora $M(f + g, m) \in \mathscr{U}$ per ogni m. Abbiamo

$$\mu_n(f + g) \geq \inf(\mu_n(f), \mu_n(g))$$

e quindi

$$M(f, m) \cap M(g, m) \subseteq M(f + g, m)$$

da cui $M(f + g, m) \in \mathscr{U}$. Per quanto riguarda $f \cdot h$ osserviamo che

$$\mu_n(f \cdot h) = \mu_n(f) + \mu_n(h)$$

e quindi, se $M(f, m) \in \mathscr{U}$, allora $M(f \cdot h, m) \in \mathscr{U}$ perché contiene $M(f, m)$. Si conclude che $\mathbf{a}$ è un ideale. Vediamo che è primo, siamo $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tali che $f \cdot g \in \mathbf{a}$ e supponiamo per assurdo che $f, g \notin \mathbf{a}$. Esistono quindi m_f e m_g tali che $M(f, m_f)$ e $M(g, m_g)$ non appartengono a $\mathscr{U}$. Sia $m = \inf(m_f, m_g)$, abbiamo che anche $M(f, m)$ e $M(g, m)$ non appartengono a $\mathscr{U}$, e quindi $M(f, m)^c$ e $M(g, m)^c$ appartengono ad $\mathscr{U}$. Da questo segue che anche la loro intersezione appartiene a $\mathscr{U}$, ma allora

$$M(f, m) \cup M(g, m) = (M(f, m)^c \cap M(g, m)^c)^c \notin \mathscr{U}$$

e questo è assurdo perché

$$M(fg, m) \subseteq M(f, m) \cup M(g, m)$$

□

Sia ora g_k una funzione olomorfa il cui luogo di zeri sia

$$Z(g_k) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$$

e con $\mu_n(g_k) = 2n$ per ogni $n \geq k$. Ricordiamo che $\mathscr{U}$ contiene tutti gli insiemi cofiniti quindi $g_k \in \mathbf{a}$, e dunque

$$\mathbf{V}(\mathbf{a}) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{V}(g_k) = \emptyset.$$

Vediamo adesso il secondo esempio. Consideriamo l'insieme

$$X = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

e le funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n^2}\right) \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n^2}\right)^n.$$

Si può verificare (ad esempio studiando la produttoria dei moduli e passando al logaritmo) che f e g sono funzioni olomorfe, osserviamo che $\mathbf{V}(g) = \mathbf{V}(f) = X$. Sia $\mathbf{p} = (g)$ l'ideale generato da g e supponiamo valga un Nullstellensatz di tipo algebrico, ossia $\mathscr{I}\mathbf{V}(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}}$. Abbiamo che $f \in \sqrt{\mathbf{p}}$ da cui segue che esiste h con $f^h = gt$. Nel punto $(h+1)^2$ la funzione g ha uno zero di ordine $(h+1)^2$ mentre f^h ha uno zero di ordine h e quindi nessuna potenza di f può appartenere al radicale di $\mathbf{p}$.

5 Dimensione di un insieme analitico

In questa sezione proseguiamo lo studio degli insiemi analitici, focalizzandoci specialmente sul concetto di dimensione. Nel seguito faremo riferimento alle notazioni utilizzate nella dimostrazione del Nullstellensatz di Rückert.

Definizione 5.1. Sia $P \subseteq \mathcal{O}_n$ un ideale primo, siano $(z_1, ..., z_k, z_{k+1}, ..., z_n)$ un sistema regolare di coordinate, un *rappresentante ammissibile* per P consiste nei seguenti oggetti.

1. Un polidisco $\Delta(0, \delta) \subseteq \mathbb{C}^n$ e un polidisco $\Delta_k(0, \rho) \subseteq \mathbb{C}^k$ tale $\delta_i = \rho_i$ per $i = 1, ..., k$.
2. Rappresentati q_j e T_j di tutti i germi $\mathbf{q}_j$ e $\mathbf{T}_j$ con coefficienti olomorfi in $\Delta_k(0, \rho)$.
3. Un rappresentante d del discriminante di di q_{k+1}, olomorfo in $\Delta_k(0, \rho)$.

Per il polidisco $\Delta_k(0\rho)$ deve valere anche la seguente proprietà:

- se $a \in \Delta_k(0, \rho)$ e $q_j(a; b_j) = 0$ allora $|b_j| < r_j$ per ogni $j \geq k + 1$.

ognuno degli oggetti utilizzati nella definizione sarà chiamato ammissibile.

Dai teoremi 1.6, 4.16 e 4.18 segue subito il seguente risultato.

Teorema 5.1. *Dato un ideale primo P e un suo sistema regolare di coordinate $z_1, ..., z_k, z_{k+1}, ..., z_n$ valgono i seguenti fatti*

1. *Esistono δ arbitrariamente piccoli tali che $\Delta(0, \delta)$ è ammissibile.*
2. *$\{z \in \Delta(0, \delta) | q_{k+1}(z) = 0,\ d(z)z_j - T_j(z) = 0,\ d(z) \neq 0\}$ è un rappresentate del germe di $\mathbf{V}(P) - \mathbf{V}(d)$.*

Teorema 5.2. *Sia Δ, Δ_k, $\mathbf{q}_j$, $\mathbf{T}_j$, d un rappresentate ammissibile per un ideale primo P. Sia $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ la proiezione canonica e sia $s = \deg(\mathbf{q}_{k+1})$ allora*

1. *$\mathbf{V}(P) \setminus \mathbf{V}(d)$ è una sottovarietà complessa di Δ e*
$$\pi : (\mathbf{V}(p) \setminus \mathbf{V}(d)) \to (\Delta_k \setminus \mathbf{V}(d))$$
è un rivestimento a s fogli.
2. *$\pi : \overline{\mathbf{V}}(P) \to \Delta_k$ è propria.*
3. *$\mathbf{V}(p) \setminus \mathbf{V}(d)$ è connesso e $\overline{\mathbf{V}}(P) = \mathbf{V}(P)$.*

Dimostrazione. Prendiamo un punto $a \in \Delta_k$ e supponiamo $d(a) \neq 0$. Abbiamo che $q_{k+1}(a, z_{k+1})$ è un polinomio di grado s e dato che $d(a) \neq 0$ ha s radici distinte, siano $b^1_{k+1}, ..., b^s_{k+1}$ queste radici. Per ognuna di queste radici costruiamo $n - k$ punti
$$b^i_j = \frac{T_j(a, n^i_{k+1})}{d(a)}.$$
Consideriamo il punto $b^i(a, b^i_{k+1}, b^i_{k+2}, ..., b^i_n)$, osserviamo che $\pi(b^i) = a$ quindi $\pi^{-1}(a) \cap \mathbf{V}(P) = \{b^1, ..., b^s\}$. Dato che le b^i sono radici distinti otteniamo
$$\left.\frac{\partial q_{k+1}(a, z_{k+1})}{\partial z_{k+1}}\right|_{z_{k+1}=b^i} \neq 0.$$

Per il teorema delle funzioni implicite, per ogni $i = 1, ..., s$, esiste un intorno U^i di a e una funzione $h^i : U_i \to \mathbf{V}(p)$ tale che

$$h^i(a) = b^i_{k+1} \qquad q_{k+1}(z_1, ..., z_k, h^i(z_1, ..., z_k)) = 0.$$

Dato che gli U^i sono in numero finito possiamo considerare la loro intersezione U. Consideriamo ora $V \cap \pi^{-1}(U)$, se definiamo

$$W_i = \left\{ z \in \pi^{-1(U)} \mid z_{k+1} = h^i(z_1, ..., z_k)), \ z_j = \frac{T_j(h^i(z_1, ..., z_k))}{d(z_1, ..., z_k)} \right\}$$

otteniamo $\pi^{-1}(U) = W_1 \cup, ..., \cup W_s$. Se scegliamo U sufficientemente piccolo possiamo supporre che $W_i \cap W_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Dunque

$$\pi : \mathbf{V}(P) \setminus \mathbf{V}(d) \to \Delta_k \setminus \mathbf{V}(d)$$

è un rivestimento a s fogli di cui U è un aperto banalizzante. Da questo segue che $\mathbf{V}(P) \setminus \mathbf{V}(d)$ è una varietà complessa di dimensione $k = \dim(\Delta_k)$ e questo dimostra il punto 1.. Osserviamo che i polinomi $q_{k+1}, ..., q_n$ si annullano su $\mathbf{V}(P)$. Dato che $V_0 = \mathbf{V}(q_{k+1}, ..., q_n)$ è chiuso abbiamo che $\overline{\mathbf{V}}(P) \subseteq V_0$ quindi ci basta dimostrare che $\pi : V_0 \to \Delta_k$ è propria. Sia K un compatto in Δ_k vogliamo dimostrare che $\pi^{-1}(K) \cap V_0$ è compatto per successioni. Sia (b^n) una successione in $\pi^{-1}(K) \cap V_0$ e chiamiamo $a^n = \pi(b^n)$. Dato che $(b^n) \in \overline{\Delta}$, a meno di sottosuccessioni, $b^n \to b$ e quindi $a^n \to a$ con $a = \pi(b)$, dato che K è compatto $a \in K$. Osserviamo che $q_j(b^n) = q_j(a^n, b^n_j) = 0$ se $j \geq k+1$ e quindi per continuità $q_j(a, b_j)$. Dato che $a \in \Delta_k$ abbiamo che $|b_j| \leq \delta_j$ se $j \geq k+1$ e quindi $b \in \Delta$, dato che $q_j(b) = 0$ per $j \geq k+1$ abbiamo che $b \in V_0$, e dato che $\pi(b) \in K$ otteniamo $b \in \pi^{-1}(K) \cap V_0$ e questo dimostra il punto 2. Rimane adesso il punto 3.. Siano $W_1, ..., W_s$ le componenti connesse di $\mathbf{V}(P) \setminus \mathbf{V}(d)$. Supponiamo di sapere che i $\overline{W}_i$ siano sottoinsiemi analitici di Δ. Abbiamo la seguente inclusione

$$\mathbf{V}(P) \subseteq \mathbf{V}(P) \setminus \mathbf{V}(d) \cup \mathbf{V}(d) \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} \overline{W}_i \cup \mathbf{V}(d)$$

ma anche

$$\bigcup_{i=1}^{s} = \mathbf{V}(P) \setminus \mathbf{V}(d) \subseteq \mathbf{V}(P).$$

Dato che $\mathbf{V}(P)$ è chiuso

$$\bigcup_{i=1}^{s} \overline{W}_i \subseteq \mathbf{V}(P)$$

e quindi

$$\mathbf{V}(P) = \bigcup_{i=1}^{s} \overline{W}_i \cup (\mathbf{V}(d) \cup \mathbf{V}(P)).$$

Abbiamo che $\mathbf{V}(P)$ è irriducibile e non è contenuto in $\mathbf{V}(d)$, quindi esiste un indice j tale che $\mathbf{V}(P) = \overline{W}_j$. Ma allora $\mathbf{V}(P) \setminus \mathbf{V}(d)$ è connesso per il lemma 4.1. Ci basta dimostrare che i $\overline{W}_i$ sono insiemi analitici. Per fare questo dimostriamo che per ogni $z_0 \in \Delta \setminus W_i$ esiste una funzione F olomorfa su Δ con $F(z_0) \neq 0$ e $F_{|W_i} = 0$. In questo modo $\overline{W}_i = \mathscr{J}(\overline{\mathbf{W}}_i)$ che sappiamo essere un insieme analitico. Per alleggerire la notazione chiamiamo W la componente W_i. Osserviamo che $\pi_{|W}$ è un rivestimento a t fogli con $t \leq s$, prendiamo $z_0 \notin \bar{W}$ e chiamiamo $a_0 = \pi(z_0)$. Dato che $\pi^{-1}(a_0) \cap \bar{W}$ sono t punti possiamo trovare un polinomio h tale che $h(z_0) = 0$ e $h(z) = 1$ per ogni $z \in \pi^{-1}(a_0) \cap \bar{W}$. Prendiamo un punto $a \in \Delta_k$ con $d(a) \neq 0$, W è un rivestimento a t fogli di $\Delta_k \setminus \mathbf{V}(d)$ quindi esiste un aperto banalizzante U_a tale che

$$\pi^{-1}(U_a) \cap W = U^1 \cup ... \cup U^t$$

e π è un omeomorfismo tra ogni U^i e U_a. Chiamiamo $\phi_a^i : U_a \to U^i$ le inverse locali di π, possiamo comporre h con le ϕ_i ottenendo delle mappe

$$h_a^i : U_a \to \mathbb{C}.$$

Siano a, b due punti e U_a, U_b due aperti banalizzanti con $U_a \cap U_b \neq \emptyset$ allora le funzioni $\{\phi_a^i\}_{i=1}^t$ e $\{\phi_b^i\}_{i=1}^t$ coincidono, a meno dell'ordine, su $U_a \cap U_b$ e quindi lo stesso vale per $\{h_a^i\}_{i=1}^t$ e $\{h_b^i\}_{i=1}^t$. Prendiamo una funzione S simmetrica delle $\{h_a^i\}_{i=1}^t$ e delle $\{h_b^i\}_{i=1}^t$, allora $S(h_a^1, ..., h_a^t) = S(h_b^1, ..., h_b^t)$ su $U_a \cap U_b$. Se chiamiamo $S(h_a^1, ..., h_a^t) = S_a$ possiamo definire una funzione olomorfa S come

$$S(z) = S_a(z) \qquad \text{se} \quad z \in U_a$$

per quanto visto S è olomorfa in $\Delta_k \setminus \mathbf{V}(d)$. Dato che h è continua è localmente limitata e per il teorema di estensione di Riemann S si estende in modo unico ad una funzione olomorfa su tutto Δ_k. Sia $R(x)$ il polinomio definito in U_a nel seguente modo

$$R(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - h_a^i).$$

Dato che R è un polinomio simmetrico delle $h_a^1, ..., h_a^t$, possiamo scrivere

$$R(x) = x^t + \sum_{i=0}^{t-1} S_i x^i$$

con S_i funzioni olomorfe in Δ_k, dato che questa definizione è ben posta in ogni U_a otteniamo che $R \in \mathcal{O}_k[x]$. Per $a \in \Delta_k \setminus \mathbf{V}(d)$ indichiamo con $R_a(x)$ il polinomio con i coefficienti valutati in a, le radici di questo polinomio sono i valori della funzione h su $\pi^{-1}(a) \cap W$. Dimostriamo che quest'ultima affermazione è vera anche se $a \in \mathbf{V}(d)$. Sia $a_n \in \Delta_k \setminus \mathbf{V}(d)$ una successione che converge a a. Sia $\{x^1, ..., x^p\} = \pi^{-1}(a) \cap \overline{W}$, dato che π è propria possiamo numerare i punti in $\pi^{-1}(a_n) \cap \overline{W}$. Otteniamo

$$\pi^{-1}(a_n) \cap \overline{W} = \bigcup_{j=1}^{p} \{x_n^{j_1}, ..., x_n^{j_{k_j}}\}$$

con $x_n^{j_i} \to x^j$ se $n \to +\infty$. Otteniamo

$$R(a_n)(x) = \prod_{i,j} (x - h(x^{j_i}))^{k_j}$$

e per $n \to \infty$ abbiamo

$$R(a)(x) = \prod_{j} (x - h(x^j))^{k_j}$$

e quindi $R(a)(x)$ ha come uniche radici $h(x^1), ..., h(x^p)$. Consideriamo infine

$$F(z) = h^t(z) + \sum_{i=0}^{t-1} S_i(\pi(z))h(z)^i.$$

Le funzioni S_i sono funzioni simmetriche elementari e sono funzioni del punto $\pi(z)$. Quindi F si annulla su $\overline{W}$ e non si annulla in z_0 perché

$$F(x_0) = R(a_0)(0) = 1.$$

Dunque $\overline{W}$ è un insieme analitico. $\square$

Introduciamo adesso la nozione di rivestimento analitico.

Definizione 5.2. Sia $D \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio e X un sottospazio chiuso di D. Diremo che X è *trascurabile* se è magro e se, per ogni dominio $D' \subseteq D$ e per ogni funzione f olomorfa su $D' \setminus X$ e localmente limitata su D', f ha un'unica estensione olomorfa a tutto D'.

Definizione 5.3. Un *rivestimento analitico* è una terna (X, π, U) tale che

1. X è uno spazio topologico localmente compatto e di Hausdorff.
2. U è un dominio in $\mathbb{C}^n$.
3. π è una funzione continua, propria e a fibra discreta tra X e U.
4. π è un rivestimento a s-fogli di $X \setminus A$, con $A \subseteq U$ trascurabile.
5. $X \setminus \pi^{-1}(A)$ è denso in X.

Osserviamo che sottile implica trascurabile, infatti se X è sottile ogni f appartenente a $U \setminus X$ localmente limitata si estende per il teorema di Riemann. Con riferimento alla definizione precedente A viene detto insieme di *ramificazione* e tale rivestimento si dice *ramificato*. Un esempio fondamentale di rivestimento analitico è $\mathbf{V}(P)$ con P ideale primo di $\mathcal{O}_n$, infatti per il teorema 5.2 $\mathbf{V}(P)$ è un rivestimento di $\mathbb{C}^k$ per qualche k al di fuori di $\mathbf{V}(d)$; il numero di fogli del rivestimento è dato dal grado di q_{k+1}. Sempre per il teorema 5.2 la seguente definizione è ben posta.

Definizione 5.4. Sia P un ideale primo di $\mathcal{O}_n$. Una *rappresentazione ammissibile* di $\mathbf{V}(P)$ (o equivalentemente di P per il Nullstellensatz) è un rivestimento analitico con ramificazione $\mathbf{V}(d)$ e numero di fogli pari a $\deg(q_{k+1})$.

Possiamo definire la dimensione anche nel caso di ideali non primi. Se Q è uguale a $\mathscr{I}(\mathbf{V})$ abbiamo che Q è radicale e quindi possiamo scrivere

$$Q = \bigcap_{i=1}^{m} P_i \qquad P_i \neq P_j \quad \text{se} \quad i \neq j.$$

con i P_i ideali primi. Ciascuno dei $\mathbf{V}(P_i)$ è un insieme analitico e i $\mathbf{V}(P_i)$ sono le componenti irriducibili di $\mathbf{V}(Q)$. Ogni componente irriducibile $\mathbf{V}(P_i)$ di $\mathbf{V}(Q)$ contiene un aperto denso dove è una sottovarietà di $\mathbb{C}^n$ di dimensione k, dato che l'intersezione di aperti densi è un aperto denso il numero k è indipendente dal primo scelto.

Definizione 5.5. Se $\mathbf{V}$ è un insieme analitico irriducibile in $\mathbb{C}^n$ e

$$(z_1, ..., z_k, z_{k+1}, ..., z_n)$$

un sistema regolare di coordinate. Definiamo la *dimensione* di $\mathbf{V}$ ponendo

$$\dim \mathbf{V} = k$$

.

Definizione 5.6. Se $\mathbf{V}$ è un insieme analitico e $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup ... \cup \mathbf{V}_t$ la decomposizione di $\mathbf{V}$ in irriducibili. Definiamo la *dimensione* di $\mathbf{V}$ come

$$\dim \mathbf{V} = \max_{1 \leq j \leq t} \dim \mathbf{V}_j$$

Definizione 5.7. Sia $\mathbf{V}$ un insieme analitico. Definiamo *punto regolare* di dimensione m un punto $z \in \mathbf{V}$ che ammette un intorno $U_z \subseteq \mathbb{C}^n$ tale che $U_z \cap \mathbf{V}$ sia una sottovarietà di U_z di dimensione complessa m. Chiameremo *singolare* un punto che non è regolare. Indicheremo con $R(\mathbf{V})$ l'insieme dei punti regolari e con $S(\mathbf{V})$ l'insieme dei punti singolari.

Osserviamo che $R(\mathbf{V})$ è un aperto denso in $\mathbf{V}$, infatti $\mathbf{V} \setminus \mathbf{V}(d)$ è contenuto in $R(\mathbf{V})$ e $\mathbf{V} \setminus \mathbf{V}(d)$ è denso in $\mathbf{V}$.

Teorema 5.3. *Sia $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$, supponiamo che $\mathbf{f}(0) = 0$ ma $\mathbf{f} \neq 0$, allora tutte le componenti irriducibili $\mathbf{V}(\mathbf{f})$ hanno dimensione $n-1$.*

Dimostrazione. Possiamo scrivere

$$\mathbf{f} = \mathbf{u} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i^{s_i}$$

con i $\mathbf{p}_i$ primi e $\mathbf{u}$ unità. Dunque

$$\mathbf{V}(\mathbf{f}) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathbf{V}(\mathbf{p}_i)$$

e per il Nullstellensatz per gli ideali principali abbiamo che

$$(\mathbf{p}_i) \cap \mathcal{O}_{n-1} = \{0\}$$

e quindi $\dim \mathbf{V}(\mathbf{p}_i) = n-1$. $\square$

Teorema 5.4. *Se $\mathbf{V}$ è un germe di insieme analitico le cui componenti irriducibili hanno tutte dimensione $n-1$ allora $\mathscr{I}(\mathbf{V})$ è principale.*

Dimostrazione. Scriviamo

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup ... \cup \mathbf{V}_s$$

con $\mathbf{V}_j$ componenti irriducibili. Per ogni $i = 1, ..., s$ possiamo trovare un sistema di coordinate $z_1, ..., z_{n-1}, z_n$ regolare per $\mathbf{V}_i$. Sia $\mathbf{q}_n^i$ il polinomio di Weierstrass a coefficienti in $z_1, ..., z_{n-1}$ nella variabile z_n tale che $\mathbf{V}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{V}_i$. Dato che i $\mathbf{q}_n^i$ sono irriducibili $\mathscr{I}\mathbf{V}(\mathbf{q}_n^i) = (\mathbf{q}_n^i)$. Ora se $\mathbf{f}$ si annulla su $\mathbf{V}$ si annulla anche su tutti i $\mathbf{V}_i$. Quindi $\mathbf{q}_n^i$ divide $\mathbf{f}$ e dunque $\mathscr{I}(\mathbf{V}) = (\prod_{i=1}^{s} \mathbf{q}_n^i)$. $\square$

Teorema 5.5. *Sia* $\mathbf{V}$ *un insieme analitico di dimensione* k*, sia* $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ *con* $\mathbf{f}(0) = 0$ *allora*

$$\dim \mathbf{V} \cap \mathbf{V}(\mathbf{f}) \geq k - 1.$$

Se inoltre $\mathbf{V}$ *è irriducibile e* $\mathbf{f} \notin \mathscr{I}(\mathbf{V})$ *allora*

$$\dim \mathbf{V} \cap \mathbf{V}(\mathbf{f}) = k - 1$$

Dimostrazione. Se $\dim \mathbf{V} = k$ c'è una componente irriducibile $\mathbf{V}_i$ di $\mathbf{V}$ di dimensione k. Se $\mathbf{f} \in \mathscr{I}(\mathbf{V}_i)$ allora

$$\dim \mathbf{V}(\mathbf{f}) \cap \mathbf{V}_i = k \geq k - 1.$$

Supponiamo $\mathbf{V}$ sia irriducibile e $\mathbf{f} \notin \mathscr{I}(\mathbf{V})$. Consideriamo un polidisco ammissibile $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subseteq \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$, ricordiamo che $\mathbf{V} \setminus \mathbf{V}(d)$ è una sottovarietà di dimensione k. Se $\mathbf{f} \notin \mathscr{I}(\mathbf{V})$ allora $\mathbf{f}$ è non nulla in un aperto di $\mathbf{V} \setminus \mathbf{V}(d)$. Sia $x \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{V}(d)$ abbiamo che

$$\dim \mathbf{V} \cap \mathbf{V}(f - f(x)) = k - 1.$$

Dato che $\mathbf{f} \notin \mathscr{I}(\mathbf{V})$ abbiamo

$$\dim \mathbf{V}(\mathbf{f}) \cap (\mathbf{V} \setminus \mathbf{V}(d)) = k - 1.$$

$\square$

Dai precedenti teoremi seguono i seguenti fatti.

Teorema 5.6. *Sia* $\mathbf{V}$ *un insieme analitico irriducibile, consideriamo* Δ, Δ_k, q_j, T_j, d *una rappresentazione ammissibile di* $\mathbf{V}$ *allora*

1. $\dim \mathbf{V} \cap \mathbf{V}(d) = \dim \mathbf{V} - 1$.
2. *L'insieme dei punti singolari di* $\mathbf{V}$ *è contenuto in un insieme analitico di dimensione* $\dim \mathbf{V} - 1$.

Consideriamo ora un insieme analitico X, per ogni $x \in X$ possiamo considerare il germe di X che indichiamo con X_x. Chiaramente abbiamo

$$X = \bigcup_{x \in X} X_x$$

e quindi ad ogni $x \in X$ possiamo associare l'ideale $I_x = \mathscr{I}\mathbf{V}(X_x) \subseteq \mathcal{O}_{n,x}$. Dato che $\mathcal{O}_{n,x}$ è noetheriano questo ideale è finitamente generato, ossia

$$I_x = (\mathbf{f_1}, ..., \mathbf{f}_l)$$

con le $\mathbf{f}_j \in \mathcal{O}_{n,x}$.

Definizione 5.8. Definiamo il *rango* in x di I_x come il rango della matrice

$$J_x = \frac{\partial(f_1, ..., f_l)}{\partial(z_1, ..., z_n)}$$

con $f_1, ..., f_l$ rappresentati dei generatori $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_l$ di I_x. Indichiamo con r_x questo rango.

Si può dimostrare che la definizione precedente non dipende dalla scelta dei generatori. Dalla dimostrazione del teorema 4.5 abbiamo che, se $I_x = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_l)$ appartiene a $\mathcal{O}_{n,x}$, esiste un polidisco Δ centrato in x tale che:

1. Esistono dei rappresentati delle $\mathbf{f}_i$ olomorfe in Δ.
2. Per ogni $y \in \Delta$ abbiamo $I_y = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_l) \in \mathcal{O}_{n,y}$

Consideriamo adesso dei rappresentati delle f_i, dato che il rango è semicontinuo inferiormente abbiamo che $r_x \leq r_y$. Se X è un insieme analitico indichiamo con

$$r = \sup_{y \in X \cap \Delta} r_y.$$

Con questa premessa diamo la definizione di rango

Definizione 5.9. Sia X un insieme analitico, diremo che $x \in X$ è *regolare* se $r_x = r$.

Teorema 5.7. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio e $X \subseteq \Omega$ un insieme analitico, allora $S(X)$ è un sottoinsieme analitico proprio di X.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ consideriamo il germe X_x e supponiamo che sia irriducibile. Siano $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_l$ dei generatori di I_x e Δ_x un polidisco tale che :

1. esistono dei rappresentati delle $\mathbf{f}_i$ olomorfe in Δ_x
2. per ogni $y \in \Delta$ abbiamo $I_y = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_l) \in \mathcal{O}_{n,y}$.

Sappiamo che $S(X) \cap \Delta_x$ è formato dagli $x \in X$ che annullano i determinanti di tutti i minori $r \times r$ della matrice jacobiana, e dunque $S(X)$ è localmente il luogo di zeri di una funzione olomorfa. Se X_x è riducibile possiamo applicare il ragionamento precedente ad ogni componente irriducibile $\{X_x^j\}_{j=1}^s$ di X_x. Quindi

$$S(x) \cap \Delta_x = \Big(\bigcup_{j=1}^{s} S(X_x^j)\Big) \cup \Big(\bigcup_{j \neq i} X_x^i \cap X_x^j\Big)$$

e anche in questo caso $S(X)$ è localmente il luogo di zeri di un numero finito di funzioni olomorfe. □

Il seguente teorema caratterizza i punti regolari di un insieme analitico, per dimostrarlo faremo uso della formula di Binet generalizzata, che richiamiamo.

Teorema 5.8 (Formula di Binet generalizzata)**.** *Sia A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times m$ con $m \leq n$, allora vale*

$$\det(AB) = \sum_S \det(A_S)\det(B_S)$$

dove S varia tra tutti i sottoinsiemi ordinati di m elementi di $\{1, ..., n\}$ e A_S indica il minore $m \times m$ ottenuto da A prendendo solo le colonne i cui indici appartengono ad S, e lo stesso vale per B_S.

Teorema 5.9 (Whitney)**.** *Sia x_0 un punto regolare di un insieme analitico X. Esiste un intorno U di x_0 tale che $U \cap X$ è una varietà complessa di dimensione $n - r_{x_0}$.*

Dimostrazione. Siano $q_1, ..., q_r \in I_{x_0}$ tali che il loro jacobiano abbia rango r in ogni punto di U, dove U è un opportuno intorno di x_0. Osserviamo che

$$X_0 = \{x \in \mathbb{C}^n \mid q_1(x) = 0, ..., q_r(x) = 0\}$$

è una varietà complessa di dimensione $n - r$. Ci basta dimostrare che in un intorno W di x_0 vale $X_0 \cap W = X \cap W$. Osserviamo che $X_{x_0} \subseteq (X_0)_{x_0}$, se dimostriamo che ogni $\mathbf{h} \in I_{x_0}$ si annulla su $(X_0)_{x_0}$ otteniamo $(X_0)_{x_0} \subseteq X_{x_0}$, dunque $(X_0)_{x_0} = X_{x_0}$ e quindi X e X_{x_0} coincidono in un intorno. Sappiamo che il rango dello jacobiano delle q_i è massimo cioè

$$\operatorname{rank} \frac{\partial(q_1, ..., q_r)}{\partial(z_1, ..., z_n)} = r$$

possiamo completare le q_i con delle funzioni lineari $l_{r+1}, ..., l_n$ tali che

$$\begin{cases} y_1 = q_1(z_1, ..., z_n) \\ \vdots \\ y_r = q_r(z_1, ..., z_n) \\ y_{r+1} = l_{r+1}(z_1, ..., z_n) \\ \vdots \\ y_n = l_n(z_1, ..., z_n) \end{cases}$$

sia un sistema di coordinate olomorfe in un intorno di x_0 in $\mathbb{C}^n$. Chiamiamo $\phi : V \to V'$ la mappa tale che $\phi(z_1, ..., z_n) = (y_1, ..., y_n)$ e ψ la sua inversa. A meno di scegliere V e V' abbastanza piccoli possiamo supporre che ψ vada da V' a V. Osserviamo i seguenti fatti

1. $\phi(X_{x_0} \cap V) = \{y \in V' \mid y_1 = 0, ..., y_r = 0\}$.
2. $\psi(\{y_1 = 0, ..., y_r = 0\} \cap V') = M \cap V$.
3. Per ogni $i = 1, ..., r$ vale $q_i \circ \psi(y_i) = q_i(z_i) = y_i$. Quindi la matrice jacobiana di $\phi \circ \psi$ rispetto alle prime r coordinate $y_1, ..., y_r$ è la matrice identità.

Sia $h \in I_{x_0}$ e chiamiamo $h' = h \circ \psi$. Vogliamo mostrare che $h_{|X_0 \cap V} = 0$ cioè che

$$h'_{|\{y_1=0,...,y_r=0\} \cap V'} = 0.$$

Osserviamo che h' ristretta a $\{y_1 = 0, ..., y_r = 0\} \cap V'$ è una funzione delle variabili $y_{r+1}, ..., y_n$, quindi per dimostrare che è nulla ci basta dimostrare che le derivate rispetto alle restanti coordinate sono nulle nel punto $y_0 = \phi(x_0)$. Se indichiamo con $q'_i = q_i \circ \psi$ e $h' = h \circ \psi$, usando la Chain-Rule abbiamo

$$\frac{\partial q'_i}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (q \circ \psi)}{\partial z_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (h \circ \psi)}{\partial z_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j}.$$

Sia α un indice con $\alpha \in \{r+1, ..., n\}$. Consideriamo la matrice jacobiana di (q, h) rispetto alle variabili $y_1, ..., y_r, y_\alpha$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1'}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial q_1'}{\partial y_r} & \frac{\partial q_1'}{\partial y_\alpha} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial q_r'}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial q_r'}{\partial y_r} & \frac{\partial q_r'}{\partial y_\alpha} \\ \frac{\partial h'}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h'}{\partial y_r} & \frac{\partial h'}{\partial y_\alpha} \end{pmatrix}$$

e osserviamo che, sempre per la Chain-Rule, $A = A_1 A_2$, dove A_1 e A_2 sono le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial q_r}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial q_r}{\partial z_n} \\ \frac{\partial h}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_\alpha} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_\alpha} \end{pmatrix}.$$

Dato che h' non dipende da $y_1, ..., y_r$ e che la matrice jacobiana di $\phi \circ \psi$ rispetto alla coordinate $y_1, ..., y_r$ è la matrice identità otteniamo che

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_r & * \\ \hline \mathbf{0} & \frac{\partial h'}{\partial y_\alpha} \end{array} \right)$$

quindi, a meno del segno, $\det A = \frac{\partial h'}{\partial y_\alpha}$. Per la formula di Binet generalizzata $\det A$ è determinato dal prodotto dei determinanti dei minori $(r+1) \times (r+1)$ di A_1 con quelli di A_2. Sia B un minore $(r+1) \times (r+1)$ di A_1. Dato che

$$\operatorname{rank} \frac{\partial(q_1, ..., q_r)}{\partial(z_1, ..., z_n)} = r$$

otteniamo $\det B = 0$ su $R(X) \cap V$. Dato che $R(X) \cap V$ è denso in $X \cap V$ abbiamo che $\det B = 0$ su $X \cap V$. Quindi il germe del determinante di B appartiene a I_{X_0}, componendo con ψ otteniamo che il determinante del minore appartiene a $I_{\psi(X)_{y_0}}$. Osserviamo che $\dfrac{\partial h'}{\partial y_\alpha}$ è una combinazione di germi di $I_{\psi(X)_{y_0}}$ e quindi abbiamo che $\dfrac{\partial h'}{\partial y_\alpha}$ si annulla in y_0. Dato che $\alpha \in \{r+1, ..., n\}$ abbiamo dimostrato che tutte le derivate prime di h' si annullano in y_0, iterando questo procedimento otteniamo che tutte le derivate rispetto a $y_{r+1}, ..., y_n$ sono nulle, dunque h' è nulla in $\phi(X_0) \cap V'$ con V' opportuno intorno di y_0. $\square$

Definizione 5.10. Sia X un insieme analitico. Per ogni $x \in X$ siano $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_k$ dei generatori di I_x, definiamo lo *spazio tangente di Zariski* di X nel punto x come

$$T_x X = \ker \left(\left. \frac{\partial(f_1, ..., f_k)}{\partial(z_1, ..., z_n)} \right|_x \right)$$

Consideriamo ora l'anello

$$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{n,x} \big/ I_x$$

e osserviamo che è un anello locale il cui ideale massimale è dato da

$$m_x = {M_x}/{I_x}$$

dove M_x è l'unico ideale massimale di $\mathcal{O}_{n,x}$. Dato che m_x è massimale abbiamo che

$$\mathcal{O}_{X,x}/m_x$$

è un campo e dunque possiamo vedere m_x/m_x^2 come uno spazio vettoriale su $\mathcal{O}_{X,x}/m_x$. Ricordiamo alcuni fatti di algebra commutativa.

Definizione 5.11. Sia A un anello e M un A-modulo. Per ogni ideale $a \subseteq A$ definiamo

$$aM = \left\{ \sum a_i m_i \mid a_i \in a,\ m_i \in M \text{ e la somma è finita} \right\}.$$

Se N, P sono sottomoduli di M definiamo

$$N : P = \left\{ a \in A \ : \ aP \subseteq N \right\}.$$

Osserviamo che $N : P$ è un ideale di A, se prendiamo $N = 0$ abbiamo che

$$0 : M = \left\{ a \in A \mid aM = 0 \right\}$$

chiameremo questo ideale *l'annullatore* di M e lo indicheremo con $Ann(M)$.

Se $a \subseteq Ann(M)$ possiamo vedere M come un A/a modulo. Per fare questo ci basta definire l'operazione come

$$\bar{x}m = xm \qquad \forall\, \bar{x} \in A/a.$$

Si può verificare che questa definizione è ben posta. Se A è un anello locale con ideale massimale m abbiamo che A/m è un campo, che indicheremo con R. Se M è un A-modulo abbiamo che $m \subseteq Ann(M/mM)$ quindi M/mM è un R-spazio vettoriale. Nel seguito, dato un anello locale A con ideale massimale m saremo interessati al modulo m/m^2 che quindi sarà un R-spazio vettoriale.

Teorema 5.10 (Hamilton Caley)**.** *Sia A un anello, M un A-modulo finitamente generato, $a \subseteq A$ un ideale e $\phi : M \to M$ un morfismo tale che $\phi(M) \subseteq aM$, allora ϕ soddisfa un equazione integrale del tipo*

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + ... + a_n = 0$$

Dimostrazione. Siano $x_1, ..., x_n$ generatori di M. Dato che $\phi(x_i) \in aM$ esistono $a_{i,j} \in a$ tali che

$$\phi(x_j) = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} x_i$$

cioè

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta_{ij}\phi - a_{i,j}) x_i = 0.$$

Sia A la matrice associata a tale sistema, moltiplicando per la sua aggiunta otteniamo

$$\det A x_i = 0 \quad \forall i$$

e quindi

$$(\det A)M = 0$$

da cui l'equazione desiderata. $\square$

Teorema 5.11. *Sia M un A-modulo finitamente generato e $a \subseteq A$ un ideale tale che $aM = M$, allora esiste $x \in A$ tale che $x \equiv 1 \mod (a)$ e $xM = 0$.*

Dimostrazione. Procediamo come nella dimostrazione del teorema precedente prendendo come ϕ l'identità, se $x_1, ..., x_n$ sono dei generatori di M otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i,j} - \delta_{i,j})x_i = 0 \quad \forall j.$$

Posta A la matrice associata al sistema, otteniamo che l'elemento cercato è $\det(A)$. $\square$

Teorema 5.12 (Lemma di Nakayama). *Sia A un anello e R l'intersezione di tutti gli ideali massimali di A. Se M è un A-modulo finitamente generato, $a \subseteq R$ è un ideale e $aM = M$ allora $M = 0$.*

Dimostrazione. Dal teorema 5.11 otteniamo che esiste un $x \equiv 1 \mod (R)$ tale che $xM = 0$. Se $1 - x$ appartenesse a R allora x sarebbe un'unità perché, se così non fosse, x apparterrebbe a un qualche ideale massimale M, ma anche $1 - x \in M$ e quindi $1 \in M$, assurdo. Dunque x è invertibile e quindi

$$xM = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^{-1}xM = 0 \quad \Longrightarrow M = 0.$$

$\square$

Teorema 5.13. *Sia A un anello, M un A-modulo finitamente generato, R l'intersezione di tutti gli ideali massimali di A, $a \subseteq R$ un ideale e N un sottomodulo di M. Se $M = aM + N$ allora $M = N$.*

Dimostrazione. Abbiamo che $a M/N = M/N$ quindi $M/N = 0$ da cui $M = N$. $\square$

Teorema 5.14. *Sia m_x l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,x}$, allora m_x/m_x^2 è isomorfo come spazio vettoriale a T_xX*

Dimostrazione. Sappiamo che m_x/m_x^2 è un $\mathcal{O}_{X,x}/m_x$-spazio vettoriale. Detto M_x l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{n,x}$ abbiamo che $m_x = M_x/I_x$ e dunque

$$O_x/m_x = \frac{\mathcal{O}_{n,x}/I_x}{m_x} = \mathcal{O}_{n,x}/M_x = \mathbb{C}$$

quindi m_x/m_x^2 è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, dato che anche T_xX lo è per dimostrare che sono isomorfi ci basta provare che hanno la stessa dimensione. Indichiamo con $(\mathbb{C}^n)^*$ lo spazio duale di $\mathbb{C}^n$ e con $e^1, ..., e^n$ una sua base. Consideriamo l'applicazione lineare

$$L : M_x \longrightarrow (\mathbb{C}^n)^*$$
$$\mathbf{f} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z_i}\right|_x e^i$$

L induce un isomorfismo L' tra $(\mathbb{C}^n)^*$ e ${M_x}/{\ker L}$. Ma $\ker L = m_x^2$ quindi abbiamo

$$L' : {M_x}\Big/{M_x^2} \longrightarrow (\mathbb{C}^n)^*.$$

Prendiamo $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_l$ dei generatori di I_x. Per definizione abbiamo

$$T_x X = \ker(L(\mathbf{f}_1), ..., L(\mathbf{f}_l))$$

e, indicato con H il sottospazio di $(\mathbb{C}^n)^*$ generato da $L(\mathbf{f}_1), ..., L(\mathbf{f}_n)$ abbiamo

$$(T_x X)^* = {(\mathbb{C}^n)^*}/{H}.$$

Consideriamo la preimmagine di H secondo L e osserviamo che contiene I_x, dunque $L^{-1}(H) = M_x^2 + I_x$ e quindi

$$T_x X = \big(T_x X\big)^* = {M_x}\Big/{(M_x^2 + I_x)} = {m_x}\Big/{m_x^2}$$

□

Definizione 5.12. Sia A un anello noetheriano locale e sia

$$P_0 \subset P_1 \subset, ..., \subset P_n \subset A$$

una catena strettamente crescente di ideali primi. Definiamo la *dimensione di Krull* di A come la lunghezza di tale catena, ossia

$$\dim_K A = n$$

Definizione 5.13. Sia A un anello locale noetheriano con ideale massimale m, diremo che A è *regolare* se $\dim A = \dim {m}/{m^2}$.

Se applichiamo queste definizione ad un insieme analitico X abbiamo che $x \in X$ è regolare se

$$\dim_K \mathcal{O}_{X,x} = \dim T_x X.$$

Supponiamo adesso che I_x sia un ideale primo di $\mathcal{O}_{n,x}$. Sappiamo che

$$A = {\mathcal{O}_{n,x}}\Big/{I_x}$$

è un'estensione integrale di un anello $\mathcal{O}_k$ e quindi $\dim_K A = \dim \mathcal{O}_k$, vediamo che $\dim \mathcal{O}_k = k$.

Teorema 5.15. *Nelle notazioni precedenti* $\dim \mathcal{O}_k = k$.

Dimostrazione. Osserviamo che $k = n - r$ con r il rango della matrice jacobiana dei generatori di I_x calcolata in $y \in X \cap (\Delta \setminus \mathbf{V}(d))$, dove Δ è definito come nel teorema 5.7. Sappiamo che X_x in un opportuno polidisco Δ è un rivestimento ramificato di un aperto di $\mathbb{C}^k$, dunque esiste un aperto denso U di X definito come luogo di zeri di $n - k$ elementi di I_x. Tali elementi sono

$$q_{k+1}$$

e

$$dz_j - \mathbf{T}_j(z_{k+1}) \quad j = k+2, ..., n$$

e quindi U è una varietà di dimensione r e dunque $U \subseteq R(X)$. Dato che $k = n-r$ e $r > r_x$ abbiamo che

$$n - r \leq n - r_x = \dim T_x X$$

quindi $\dim \mathcal{O}_k = k$. □

A questo punto, se x è regolare $r_x = r$ e $\dim T_x X = n - r = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ e quindi $\mathcal{O}_{X,x}$ è regolare. Viceversa se $\mathcal{O}_{X,x}$ è regolare $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim T_x X = n - r$ da cui $r_x = r$ e quindi x è regolare. Abbiamo dimostrato che $x \in X$ è regolare se e solo se $\mathcal{O}_{X,x}$ un anello regolare.

6 Spazi analitici

In questa sezione introdurremo il concetto di spazio analitico. Nel seguito utilizzeremo la nozione di fascio, che richiameremo brevemente[1].

Definizione 6.1. Sia X uno spazio topologico. Un *fascio di gruppi abeliani* su X è una coppia formata da

- Una funzione che ad ogni $x \in X$ associa un gruppo abeliano che denoteremo con $\mathcal{F}_x$.
- Una topologia su
$$\mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x.$$

Sia π la proiezione di $\mathcal{F}$ su X, denotiamo con

$$\mathcal{F} + \mathcal{F} = \{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid \pi(f) = \pi(g)\}.$$

Richiediamo inoltre che i seguenti assiomi siano soddisfatti

- π è un omeomorfismo locale.
- L'applicazione $f \to -f$ è continua da $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$.
- L'applicazione $(f, g) \to f + g$ è continua da $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$.

Chiaramente non è necessario che un fascio sia formato da gruppi abeliani ma si può estendere la definizione anche, ad esempio, ad anelli o moduli.

Definizione 6.2. Sia $U \subseteq X$, diremo che $s : U \to \mathcal{F}$ è una *sezione* se $\pi \circ s(x) = x$ per ogni $x \in U$.

Nel seguito indicheremo con $\Gamma(U, \mathcal{F})$ l'insieme di tutte le sezioni definite su U.

Definizione 6.3. Un fascio di A-moduli è di tipo finito se è localmente generato da un numero finito di sezioni.

Definizione 6.4. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di A-moduli, diremo che $\mathcal{F}$ è coerente se:

- $\mathcal{F}$ è di tipo finito.
- per ogni $s_1, ..., s_p$ numero finito di sezioni, il fascio delle relazioni $R(s_1, ..., s_p)$ è di tipo finito.

[1] Per una trattazione più approfondita si rimanda all'artico *Faisceux Algébriques Cohérents* di Jean-Pierre Serre

Teorema 6.1. *Sia*
$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{M} \to \mathcal{H} \to 0$$
una successione esatta di fasci. Se due dei tre fasci sono coerenti allora anche il terzo lo è.

Teorema 6.2 (Oka)**.** *Sia X una varietà analitica complessa e $\mathcal{O}_X$ il fascio dei germi di funzioni olomorfe su X, allora $\mathcal{O}_X$ è coerente.*

Sia X un insieme analitico, indichiamo con $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni olomorfe su X. Consideriamo un numero finito $f_1, ..., f_l$ di funzioni olomorfe e indichiamo con Y il loro luogo di zeri. Possiamo definire il fascio $\mathcal{F}$ dei germi di funzioni olomorfe che si annullano su Y. Chiamiamo *fascio strutturale* il fascio
$$\mathcal{O}_Y = \left(\mathcal{O}_n / \mathcal{F}\right)_{|Y}$$
e definiamo $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *modello locale.*

Definizione 6.5. Una coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno *spazio analitico* se:

- X è uno spazio topologico di Hausdorff.
- $(X,\ \mathcal{O}_X)$ è un fascio di anelli.
- $(X, \mathcal{O}_X)$ è localmente isomorfo a $(Y, \mathcal{O}_Y)$, dove Y sottospazio analitico di $\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{O}_Y$ il suo fascio strutturale.

7 Coomologia a coefficienti in un fascio e spazi di Stein

Sia X uno spazio topologico di Hausdorff paracompatto e $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ un ricoprimento aperto di X. A questo ricoprimento associamo un *complesso simpliciale* N nel seguente modo: un *p-simplesso* $\sigma \in N$ è una $(p+1)-$tupla di aperti del ricoprimento con intersezione non vuota, indichiamo con $|\sigma|$ l'intersezione di tali aperti. Applichiamo quello che abbiamo fatto ai fasci.

Definizione 7.1. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani. Una *$p-$cocatena* a coefficienti in $\mathcal{F}$ è una funzione f che ad ogni p-simplesso $\sigma \in N$ associa una sezione $f_\sigma \in \Gamma(|\sigma|)$.

Denotiamo con C^p l'insieme delle p-cocatene. Consideriamo la mappa
$$\partial_p : C^p \to C^{p+1}$$
che manda una $f \in C^p$ nella $p+1$-cocatena $\delta_p f$ definita nel seguente modo
$$(\partial_p f)(\sigma) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j r_\sigma f(U_0, ..., U_{j-1}, U_{j+1}, ..., U_{p+1})$$
dove r_σ denota la restrizione della sezione a $|\sigma|$.

Definizione 7.2. Definiamo il p-esimo gruppo di coomologia come

$$H^p(U, \mathcal{F}) = \ker \partial_p \Big/ \operatorname{Im} \partial_{p-1}$$

con la convenzione che $\operatorname{Im} \partial_{-1} = 0$.

Si può dimostrare che $H^0(U, \mathcal{F}) = \Gamma(U, \mathcal{F})$. Consideriamo una successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{M} \to \mathcal{H} \to 0$$

questa successione induce una successione di cocatene

$$0 \to C(U, \mathcal{F}) \to C(U, \mathcal{M}) \to C(U, \mathcal{H}) \to 0$$

dove l'ultima mappa non è surgettiva. Si può dimostrare che questa successione genera una successione di coomologia

$$0 \to H^0(U, \mathcal{F}) \to H^0(U, \mathcal{M}) \to H^0(U, \mathcal{H}) \to H^1(U, \mathcal{F}) \to H^1(U, \mathcal{M}) \to H^1(U, \mathcal{H}) \to$$

e si può dimostrare che se $H^1(X; \mathcal{F}) = 0$ l'applicazione $\Gamma(X, \mathcal{M}) \to \Gamma(X, \mathcal{M})$ è surgettiva. Passiamo adesso agli spazi di Stein.

Definizione 7.3. Sia $K \subseteq \mathbb{C}^n$ un compatto e $\mathcal{A}$ un'algebra di funzioni, definiamo *l'inviluppo convesso di* K secondo la famiglia $\mathcal{A}$ come

$$\hat{K} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) \leq \|f\|_K \quad \forall\, f \in \mathcal{A}\}$$

Definizione 7.4. Sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio analitico, diremo che X è *olomorficamente convesso* se, per ogni $K \subseteq X$ compatto $\hat{K}$ è compatto. Diremo che X è uno *spazio di Stein* se:

1. X è a base numerabile.

2. X è olomorficamente convesso.

3. Per ogni $x \in X$ esistono $f_1, ..., f_n \in \mathcal{O}_X$ tali che

$$\operatorname{rank} \left(\left. \frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(z_1, ..., z_n)} \right|_x \right) = \dim T_x X$$

4. $\mathcal{A}$ separa i punti.

Teorema 7.1 (Teoremi A e B di Cartan)**.** *Sia X uno spazio di Stein e $\mathcal{F}$ un fascio coerente allora:*

- *(Teorema A) $\mathcal{F}$ è generato dalle sue sezioni globali.*

- *(Teorema B) $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $p \geq 1$.*

Riferimenti bibliografici

[1] Robert C.Gunning, Hugo Rossi (1965), *Analitic function of several complex variables.*

[2] Jean-Pierre Serre (1955), *Faisceaux Algebriques Coherents.*

[3] Michael.F Atiyah, Ian.G Mcdonald *Introduction to commutative algebra.*