Appunti di Geometria Affine

Claudio Afeltra Marco Trevisiol

9 giugno 2014

1 Gruppi di trasformazioni

Sia X un insieme non vuoto. Si definisce

$$S(X) = \{f : X \to X \quad biunivoche\}.$$

Allora $(S(X), \circ)$ è un gruppo.

Definizione 1.1. Si dice gruppo di trasformazioni di X ogni sottogruppo di $S(X)$.

Esempio. $GL(V)$ (dove V è uno spazio vettoriale); $O(V, \phi)$ con $\phi \in PS(V)$.

1.1 Traslazioni

Definizione 1.2. Dato uno spazio vettoriale V ed un suo elemento v si dice traslazione di vettore v la funzione

$$\begin{aligned} \tau_v : V &\to V \\ w &\mapsto w + v \end{aligned}$$

Nota 1.3. τ_v è lineare se e solo se $v = 0$.

Proposizione 1.4. *Sia $T(V) = \{\tau_v \mid v \in V\}$. Allora $(T(V), \circ)$ è un gruppo abeliano di trasformazioni di V, ed è isomorfo a $(V, +)$.*

Dimostrazione. La proprietà associativa vale perché l'insieme è formato da funzioni. τ_0 è evidentemente l'elemento neutro, e $\forall v \in V \quad \tau_v \circ \tau_{-v} = \tau_{-v} \circ \tau_v = id = \tau_0$, dunque $\tau_v^{-1} = \tau_{-v}$. Inoltre $\forall u, v, w \in V \quad (\tau_v \circ \tau_w)(u) = \tau_v(\tau_w(u)) = \tau_v(u + w) = u + w + v = \tau_w(\tau_v(u)) =$ $= (\tau_w \circ \tau_w)(v) = (\tau_w \circ \tau_v)(u)$, dunque $\tau_v \circ \tau_w(u) = \tau_w \circ \tau_v$, pertanto il gruppo è abeliano. Per la seconda parte della tesi, la funzione

$$\begin{aligned} (V, +) &\to (T(V)) \\ v &\mapsto \tau_v \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi, perché è ovviamente biunivoca, e $\tau_{v+w} = \tau_v \circ \tau_w$. □

1.2 Azione di un gruppo

In questa parte del corso di Geometria Analitica è interessante studiare come certi gruppi di trasformazioni agiscono su punti o insiemi di punti. Per questo introduciamo brevemente dei concetti astratti di algebra legati alla teoria dei gruppi.

Definizione 1.5 (Azione di un gruppo)**.** Sia G un gruppo e X un insieme. Si definisce azione di G su X un qualunque omomorfismo $\psi : G \to S(X)$.

Nota 1.6. Un'azione ψ di G su X induce la seguente relazione $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : \psi(g)(x) = y;$$

ed è facile vedere che $\sim$ è d'equivalenza.

Definizione 1.7 (Orbita)**.** Ogni classe $[x] \in X/\!\sim$ è detta orbita dell'azione ψ.

Definizione 1.8 (Azione transitiva)**.** Un'azione ψ su X si dice transitiva se induce un'unica orbita.

Esempio. $T(V)$ agisce su V in modo transitivo. Infatti se $v, w \in V, \quad \tau_{w-v}(v) = w$.

Definizione 1.9 (Stabilizzatore)**.** Si definisce stabilizzatore di $x \in X$ il sottogruppo di G dato da

$$Stab_G(x) = \{g \in G : \psi(g)(x) = x\}.$$

1.3 Gruppo delle isometrie

Sia (V, ϕ) uno spazio euclideo e sia d la distanza indotta da ϕ su V. Allora si pone

$$Isom(V, d) = \{f : V \to V \mid \forall P, Q \in V \quad d(P, Q) = d(f(P), f(Q))\}.$$

Nota 1.10. $Isom(V, d)$ gode delle seguenti proprietà:

- $O(V, \phi) \subseteq Isom(V, d)$;
- $T(V) \subseteq Isom(V, d)$;
- $\forall v \in V, \forall f \in O(V, \phi) \quad \tau_v \circ f \in Isom(V, d)$

Lemma 1.11. *$\forall v \in V, \forall f \in GL(V)$ (e dunque in particolare per $f \in O(V, \phi)$) $f \circ \tau_v = \tau_{f(v)} \circ f$ (e pertanto in generale f e τ_v non commutano).*

Dimostrazione. $(f \circ \tau_v)(x) = f(x + v) = f(x) + f(v) = \tau_{f(v)}(f(x)) = (\tau_{f(v)} \circ f)(x)$. □

Proposizione 1.12. *$\{\tau_v \circ f \mid v \in V, f \in O(V, \phi)\}$ è un gruppo rispetto alla composizione.*

Dimostrazione. Poiché $(\tau_v \circ f) \circ (\tau_w \circ g) = \tau_v \circ (f \circ \tau_w) \circ g = \tau_v \circ \tau_{f(w)} \circ f \circ g$, tale insieme è chiuso rispetto alla composizione. Inoltre per questo è vero che $(\tau_v \circ f) \circ (\tau_w \circ g) = id$ se e solo se $\tau_v \circ \tau_{f(w)} \circ f \circ g$, la qual cosa è senza dubbio vera se $f(w) = -v$ e $f \circ g = id$, ossia se $w = -f^{-1}(v)$ e $g = f^{-1}$. □

Nota 1.13. Analogamente si dimostra che anche $\{\tau_v \circ f \mid v \in V, f \in GL(V)\}$ è un gruppo di trasformazioni.

Teorema 1.14. *$Isom(V, \phi) = \{\tau_v \circ f \mid v \in V, f \in O(V, \phi)\}$.*

Dimostrazione. Il fatto che il membro destro dell'uguaglianza sia incluso in quello sinistro è ovvio. Viceversa, se $f \in Isom(V, \phi)$ e $f(0) = v$, allora se $\tau_{-v} \circ f$, $g \in Isom(V, \phi)$ e $g(0) = 0$. Dunque, per un teorema visto, $g \in O(V, \phi)$, e pertanto $f = \tau_v \circ g$. □

2 Isometrie di $\mathbb{R}^n$

Si consideri adesso come caso particolare $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare ordinario. Il teorema 1.14 allora implica che

$$Isom(\mathbb{R}^n) = \{X \mapsto AX + B | A \in O(n), B \in \mathbb{R}^n\}.$$

Pertanto se $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ allora

$$Fix(f) = \{X \in \mathbb{R}^n | f(X) = X\} = \{X \in \mathbb{R}^n | (A - I)X = -B\},$$

quindi o $Fix(f)$ è vuoto, o è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ di giacitura

$$\{X \in \mathbb{R}^n | (A - I)X = 0\} = Fix(A).$$

2.1 Simmetrie

Definizione 2.1. $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ si dice simmetria se $f^2 = id$.

Proposizione 2.2. *Sia f una simmetria di $\mathbb{R}^n$ tale che $f(X) = AX + B$, con $A \in O(n)$. Allora:*

I) *$A^2 = I$ (e dunque A è diagonalizzabile) e $f(B) = AB + B = 0$;*

II) *$\frac{B}{2} \in Fix(f)$, e dunque $Fix(f) = Fix(A) + \frac{B}{2}$;*

III) *B è ortogonale a $Fix(A)$.*

Dimostrazione. **I)** $\forall X \in \mathbb{R}^n, X = f^2(X) = A(AX + B) + B = A^2X + AB + B$, e dunque $A^2 = I$ e $f(B) = AB + B = 0$.

II) $f(\frac{B}{2}) = \frac{AB}{2} + B = \frac{AB+B}{2} + \frac{B}{2} = \frac{B}{2}$.

III) Poiché $A^2 = I$, A è diagonalizzabile con autovalori 1 e -1, pertanto $\mathbb{R}^n = V(1, A) \oplus V(-1, A)$. Per definizione si ha che $Fix(A) = V(1, A)$. Vogliamo dimostrare che $Fix(A)^\perp = V(-1, A)$. Se $x \in V(-1, A)$ e $y \in V(1, A)$, allora

$$\langle x, y\rangle = {}^t\!xy = {}^t\!(-Ax)Ay = -\,{}^t\!x\,{}^t\!AAy = -\,{}^t\!xy = -\langle x, y\rangle,$$

pertanto $\langle x, y\rangle = 0$. Dunque $V(-1, A) \subseteq Fix(A)$. Ma entrambi hanno dimensione $n - dim(V(1, A))$, dunque coincidono. Ma per il punto **I)** $B \in V(-1, A)$.

□

Esercizio 2.3 (Forma canonica per le simmetrie)**.** *Dimostrare che se $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ è una simmetria e $k = dim(Fix(f))$, allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ed esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale f si scrive come*

$$f(X) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix} X + \alpha v_n.$$

2.2 Riflessioni

Definizione 2.4. $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ viene detta riflessione se $f^2 = id$ e $Fix(f)$ è un iperpiano affine (ossia se ha dimensione $n - 1$).

Nota 2.5. Se $f(X) = AX + B$ è una riflessione, $dim(Fix(f)) = n - 1$, per cui $A \in O(n)$ induce una riflessione lineare rispetto alla giacitura di $Fix(f)$. In particolare $det\, A = -1$.

Esercizio 2.6. *In $\mathbb{R}^2$ siano r_1 e r_2 due rette passanti per l'origine. Sia α l'angolo (considerato in senso antiorario) tra r_1 e r_2. Siano ρ_1 e ρ_2 le riflessioni del piano di assi rispettivamente r_1 e r_2. Si dimostri che $\rho_2 \circ \rho_1$ è la rotazione antioraria del piano avente come centro l'origine e di angolo 2α.*

Esercizio 2.7. *Studiare la composizione di due riflessioni distinte di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Siano $\rho_1(X) = A_1X + B_1$ e $\rho_2(X) = A_2X + B_2$, $Fix(\rho_1) = H_1$ e $Fix(\rho_2) = H_2$. Sappiamo che $A_1^2 = A_2^2 = I$ e $A_1B_1 + B_1 = A_2B_2 + B_2 = 0$.

I caso: H_1 e H_2 sono paralleli (ossia hanno la stessa giacitura). Allora $Fix(A_1) = Fix(A_2)$. Pertanto A_1 e A_2 inducono una riflessione rispetto allo stesso piano. Dunque $A_1 = A_2 = A$. Ma allora $(\rho_2 \circ \rho_1)(X) = A(AX + B_1) + B_2 = A^2X + AB_1 + B_2 = X + (AB_1 + B_2) = = X + (B_2 - B_1)$ Di conseguenza $\rho_2 \circ \rho_1$ è una traslazione di $B_2 - B_1$, che è il doppio della distanza tra H_1 e H_2.

II caso: H_1 e H_2 non sono paralleli. In tal caso $H_1 \cap H_2$ è un sottospazio affine di dimensione $n-2$. Ma $H_1 \cap H_2 \subseteq Fix(\rho_1 \circ \rho_2)$. Inoltre la giacitura di $Fix(\rho_2 \circ \rho_1)$ è $Fix(A_2 A_1) = V(1, A_2 A_1)$. Allora $L = V(1, A_2 A_1)^\perp$ è invariante per $A_2 A_1$. Pertanto tutti i piani ortogonali a $H_1 \cap H_2$ (che hanno giacitura L) sono invarianti per $\rho_2 \circ \rho_1$. Per l'esercizio precedente su tali piani $\rho_2 \circ \rho_1$ è composizione di riflessioni rispetto a rette incidenti, dunque è una rotazione.

□

Teorema 2.8. *Ogni $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ è composizione di al più $n+1$ riflessioni*

Dimostrazione. Se $f(0) = 0$, allora $f \in O(n)$, dunque è composizione di al più n riflessioni. Se $f(0) = B \neq 0$, sia $H = \{X \in \mathbb{R}^n |\, d(X,0) = d(X,B)\}$. H è un iperpiano. Infatti

$$x \in H \iff ||x||^2 = ||x - B||^2 \iff \langle x, x\rangle = \langle x - B, x - B\rangle \iff \langle B, B\rangle - 2\langle B, X\rangle = 0,$$

equazione che definisce un piano. Inoltre, poiché $\frac{B}{2} \in H$, la giacitura di H è $Span(B)^\perp$. Sia ρ_H la riflessione rispetto all'iperpiano H. Allora

$$\begin{cases} \rho_H \circ f \in Isom(\mathbb{R}^n) \\ (\rho_H \circ f)(0) = \rho_H(B) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \rho_H \circ f \in O(n)$$

allora $\rho_H \circ f$ è composizione di al più n riflessioni, dunque $f = \rho_h \circ (\rho_H \circ f)$ è composizione di al più $n+1$ riflessioni. □

Definizione 2.9 (Isometrie dirette e inverse)**.** Un' isometria $f(X) = AX + B$ si dice diretta se $det\ A = 1$, inversa se $det\ A = -1$.

Nota 2.10. Dato che le riflessioni sono isometrie indirette, la definizione di isometria diretta (rispettivamente inversa) è equivalente a chiedere che sia composizione di un numero pari (rispettivamente dispari) di riflessioni.

Proposizione 2.11. *Se $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ ha almeno un punto fisso, è composizione di al più n riflessioni.*

Dimostrazione. Sia $f(0) = B \neq 0$ (se $f(0) = 0$ la tesi è manifesta) e sia $Q \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(Q) = Q$. Sia inoltre H definito come nella dimostrazione precedente. Allora come prima $\rho_H \circ f \in O(n)$, e poiché $d(Q,0) = d(f(Q), f(0)) = d(Q,B), \quad Q \in H$, e pertanto $(\rho_h \circ f)(Q) = Q$. Perciò $dim(Fix(\rho_H \circ f)) \geq 1$, e di conseguenza $\rho_h \circ f$ è composizione di al più $n-1$ riflessioni. Dunque f è composizione di al più n riflessioni. □

2.3 Classificazione delle isometrie di $\mathbb{R}^2$

Definizione 2.12 (Glissoriflessione)**.** Si chiama glissoriflessione (o riflessione rotatoria) la composizione di una riflessione con una traslazione parallela all'asse della riflessione.

Nota 2.13. La glissoriflessione è un'isometria inversa senza punti fissi.

Teorema 2.14 (di classificazione delle isometrie piane)**.** *Ogni isometria di $\mathbb{R}^2$ è di uno dei seguenti tipi:*

I) *traslazione (isometria diretta senza punti fissi);*

II) *rotazione (isometria diretta con punti fissi);*

III) *riflessione (isometria inversa con punti fissi);*

IV) *glissoriflessione (isometria inversa senza punti fissi).*

Dimostrazione. Sia $f \in Isom(\mathbb{R}^2)$. Allora f è composizione di k riflessioni, con $k \leq 3$. Se $k = 0$, f è l'identità. Se $k = 1$, f è una riflessione. Se $k = 2$, come abbiamo già visto f è una traslazione od una rotazione. Se $k = 3$, $f = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$. Sia $r_i = Fix(\rho_i)$ (con $i = 1, 2, 3$). $\rho_1 \circ \rho_2$ può essere una traslazione od una rotazione.

I caso: $\rho_1 \circ \rho_2 = \tau_v$ è una traslazione. Allora sia $v = v_1 + v_2$, con $v_1 // r_3$ e $v_2 \perp r_3$. Quindi $f = \tau_v \circ \rho_3 = \tau_{v_1} \circ (\tau_{v_2} \circ \rho_3)$. Ma $\tau_{v_2} \circ \rho_3$ è una riflessione ρ_3' rispetto ad un asse r_3' parallelo a r_3. Dunque $f = \tau_{v_1} \circ \rho_3'$, che è una glissoriflessione se $v_1 \neq 0$, è una riflessione se $v_1 = 0$.

II caso: $\rho_1 \circ \rho_2$ è una rotazione rispetto ad un punto P di angolo α. Vanno distinti due ulteriori sottocasi:

- $P \notin r_3$. In tal caso la rotazione $R = \rho_1 \circ \rho_2$ è composizione di due riflessioni ρ_1' e ρ_2', rispetto a rette r_1' e r_2' incidenti in P, che formano un angolo di $\frac{\alpha}{2}$ e con r_2' parallela a r_3'. Allora $f = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \rho_1' \circ \rho_2' \circ \rho_3$. Ma $\rho_2' \circ \rho_3$ è una traslazione, dunque f è una glissoriflessione.
- $P \in r_3$ (ossia r_1, r_2 e r_3 sono incidenti). Allora si può scrivere $\rho_1 \circ \rho_2$ come $\rho_1' \circ \rho_3$, dove ρ_1' è la riflessione rispetto ad un opportuno asse passante per P. Allora

$$f = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \rho_1' \circ \rho_3 \circ \rho_3 = \rho_1',$$

  e dunque f è una rotazione.

□

Nota 2.15. $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ è una riflessione se e solo se i tre assi di riflessione sono paralleli o incidenti.

2.4 Classificazione delle isometrie di $\mathbb{R}^3$

Nota 2.16. La composizione di tre riflessioni rispetto a tre piani distinti incidenti in un punto (ma non in una retta) è la simmetria rispetto a quel punto. In generale due isometrie elementari (traslazioni, riflessioni, rotazioni) non commutano, fuorché in alcuni casi particolari, cui si danno dei nomi:

I) si chiama glissorotazione la composizione di una riflessione e di una traslazione parallela al piano di riflessione;

II) si chiama riflessione rotatoria la composizione di una riflessione e di una rotazione intorno ad una retta ortogonale al piano di riflessione (un caso particolare sono le simmetrie centrali);

III) si chiama avvitamento la composizione di una rotazione e di una traslazione parallela alla retta intorno a cui avviene la rotazione.

Teorema 2.17. *Tutte le isometrie di $\mathbb{R}^3$ sono traslazioni, riflessioni, rotazioni, glissorotazioni, riflessioni rotatorie o avvitamenti.*

3 Il gruppo di trasformazioni $A(V)$

Dato uno spazio vettoriale V si definisce $A(V) = \{\tau_v \circ f \mid v \in V,\ f \in GL(V)\}$. È stato già visto (vedi la nota 1.13) che $A(V)$ è un gruppo di trasformazioni, e che coincide con il sottogruppo di $S(V)$ generato da $T(V)$ e da $GL(V)$.

Consideriamo ora la naturale azione di $A(V)$ su V definita da $\psi(f)(v) = f(v)$.

Proposizione 3.1. *Valgono i seguenti fatti:*

I) *Se* $|V| > 2$ *allora* $St_v(GL(V)) = GL(V)$ *se e solo se* $v = 0$.

II) $\forall v \in V \quad St_v(A(G)) \cong GL(V)$.

Dimostrazione. **I)** Ovviamente $St_0(GL(V)) = GL(V)$. D'altra parte se $v \neq 0$ allora è banale trovare una funzione $f \in GL(V)$ tale che $f(v) \neq v$.

II) Innanzitutto $\forall v, w \in V \;\; St_v(A(V))$ e $St_w(A(V))$ sono isomorfi. Infatti se $u = v - w$ (sicché $\tau_u(w) = v$)

$$\begin{array}{rcl} St_v(A(V)) & \to & St_w(A(V)) \\ f & \mapsto & \tau_{-u} \circ f \circ \tau_u \end{array}$$

è un isomorfismo. Inoltre $\tau_v \circ f \in St_0(A(V))$ se e solo se $(\tau_v \circ f)(0) = 0$, cioè se e solo se $v = 0$, dunque $St_0(A(V)) = GL(V)$. Pertanto

$$\forall v \in V \quad St_v(A(V)) \cong St_0(A(V)) = GL(V).$$

□

Informalmente si può dire che in V c'è un punto privilegiato, l'origine, mentre in $A(V)$ tutti i punti sono equivalenti. Rileggendo la dimostrazione si può notare che ad ogni coppia di vettori $v, w \in V$ si è associata una traslazione τ_{v-w}, e le traslazioni costituiscono un gruppo isomorfo a $(V, +)$. Grazie alla definizione di spazio affine si distingueranno gli elementi di V pensati come punti o come traslazioni.

4 Spazi affini

Dato uno spazio vettoriale V, un insieme non vuoto A si dice spazio affine su V se esiste una funzione $F : A \times A \to V$ che associa ad ogni coppia di punti $P, Q \in V$ un vettore di V, denotato $\overrightarrow{PQ}$, in modo da verificare le seguenti condizioni:

I) $\forall P \in A, \forall v \in V \;\; \exists!\ Q \in A$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$;

II) $\forall P, Q, R \in A \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (relazione di Chasles).

Nota 4.1. Dalla relazione di Chasles discende che:

a) $\forall P \in A \quad \overrightarrow{PP} = 0$ (prendendo $P = Q = R$);

b) $\forall P, Q \in A \quad \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ (prendendo $P = R$).

Esempio. **I)** $A = V$,

$$\begin{array}{rcl} F : V \times V & \to & V \\ (P, Q) & \mapsto & \overrightarrow{PQ} \overset{def}{=} Q - P \end{array}$$

II) Data $f \in Hom(U, W)$ e dato $b \in W$ siano $A = f^{-1}(b)$ e $V = f^{-1}(0) = ker(f)$. Allora A è uno spazio affine su V tramite

$$\begin{array}{rcl} F : A \times A & \to & V \\ (a_1, a_2) & \mapsto & \overrightarrow{a_1 a_2} \overset{def}{=} a_2 - a_1 \end{array}$$

4.1 Traslazioni

Dalla definizione, fissato $v \in V$, $\exists! Q \in A$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$. Si definisce allora traslazione ogni funzione $\tau_v : A \to A$ tale che $\tau_v(P) = Q$, dove $\overrightarrow{PQ} = v$. Inoltre si usa la notazione $P + v = \tau_v(P)$. Con tale notazione si ha che:

- $\overrightarrow{P(P+v)} = v$;
- $P + \overrightarrow{PQ} = Q$.

Lemma 4.2. $\forall P \in A$, $\forall v_1, v_2 \in V$ *si ha che* $(P + v_1) + v_2 = P + (v_1 + v_2)$.

Dimostrazione. Siano $P_1 = P + v_1$ e $P_2 = P + v_2$. Allora $v_1 = \overrightarrow{PP_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{PP_2}$.. Perciò si ha che $P + (v_1 + v_2) = P + (\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2}) = P + \overrightarrow{PP_2} = P_2$. □

4.2 Combinazioni affini

Fissato $P \in A$, si definisce

$$\begin{array}{rcl} F_P : A & \to & V \\ Q & \mapsto & \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

Dagli assiomi segue che F_P è biunivoca e che $F_P(P) = \overrightarrow{PP} = 0$. Dunque F_P trasforma P nell'origine di V. Dunque si vorrebbe trovare una definizione di "combinazione affine" di punti di A che corrisponda alla combinazione lineare di vettori. Siano $P_1, P_2, \ldots, P_k \in A$. Per ogni $P \in A$ F_P trasforma P_i in $\overrightarrow{PP_i}$. Dati $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$ esiste $\sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{PP_i} \in V$, e dunque anche $F_P^{-1}(\sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{PP_i}) \in A$. Affinché il risultato sia indipendente da P, deve valere che

$$\forall P, Q \in A \quad P + \sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{PP_i} = Q + \sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{QP_i},$$

il che accade se

$$P + \sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{PP_i} = P + \sum_{i=1}^k t_i (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP_i}) = P + \left(\sum_{i=1}^k t_i \right) \overrightarrow{PQ} + \sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{QP_i}$$

è eguale a

$$Q + \sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{QP_i} = P + \overrightarrow{PQ} + \sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{QP_i},$$

ossia se e solo se $\sum_{i=1}^k t_i = 1$. Da ciò discende la seguente definizione.

Definizione 4.3. Dati $P_1, \ldots, P_k \in A$ e $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$ con $\sum_{i=1}^k t_i = 1$, si chiama combinazione affine di $P_1, \ldots, P_k$, dato un qualsiasi $P \in A$, $F_P^{-1}(\sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{PP_i})$. Si definisce inoltre $comb_a(P_1, \ldots, P_n) = \{\text{combinazioni affini di } \mathbb{K}\}$.

Esempio. Se $A = \mathbb{K}^n$ e P_1, P_2 sono punti distinti, allora

$$\begin{aligned} comb_a(P_1, P_2) = \{t_1 P_1 + t_2 P_2 \mid t_1 + t_2 = 1\} = \{tP_1 + (1-t)P_2 \mid t \in \mathbb{K}\} = \\ = \{P_1 + (1-t)(P_2 - P_1) \mid t \in \mathbb{K}\}, \end{aligned}$$

che è la retta passante per P_1 e P_2. Analogamente la combinazione affine di tre punti non allineati è il piano passante per essi.

4.3 Sottospazi affini

Un sottoinsieme H di A si dice sottospazio affine se è chiuso per combinazioni affini.

Nota 4.4. L'intersezione di sottospazi affini è un sottospazio affine.

Esempio. Sia $P_0 \in A$, e sia W un sottospazio di V. Allora

$$F_{P_0}^{-1}(W) = \{P \in A \mid \overrightarrow{P_0 P} \in W\} = \{P \in A \mid P = P_0 + w, w \in W\}.$$

Dunque $F_{P_0}(P_0 + W) = W$.

Nota 4.5. $P_0 + W = \{\tau_w(P_0) \mid w \in W\}$.

Proposizione 4.6. *$P_0 + W$ è chiuso per combinazioni affini.*

Dimostrazione. Siano $P_0 + w_1, \ldots, P_0 + w_n \in P_0 + W$ e $t_1 + \ldots + t_n = 1$. Allora

$$\sum_{i=1}^n t_i(P_0 + w_i) = P_0 + \sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{P_0(P_0 + w_i)} = P_0 + \sum_{i=1}^n t_i w_i \in P_0 + W.$$

□

4.4 Giacitura

Proposizione 4.7. *Sia H un sottospazio affine di A. Allora esiste un unico sottospazio vettoriale W_H di V, detto giacitura di H, tale che $\forall P_0 \in H \quad H = P_0 + W_H$.*

Dimostrazione. Dato $P_0 \in H$, si cerca W_H tale che verifichi la tesi. Poiché $P_0 + W_H = F_{P_0}^{-1}(W_H)$, necessariamente

$$W_H = F_{P_0}(H) = \{w \in V \mid P_0 + w \in H\}.$$

Bisogna verificare che W_H sia un sottospazio di V. Dati $w_1, w_2 \in W_H$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, si ha che $P_0 + w_1 \in H$ e che $P_0 + w_2 \in H$. Ma allora

$$\begin{aligned} P_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = P_0 + \alpha_1 \overrightarrow{P_0(P_0 + w_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{P_0(P_0 + w_2)} = \\ = P_0 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\overrightarrow{P_0 P_0} + \alpha_1 \overrightarrow{P_0(P_0 + w_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{P_0(P_0 + w_2)} = \\ = F_{P_0}^{-1}((1 - \alpha_1 - \alpha_2)\overrightarrow{P_0 P_0} + \alpha_1 \overrightarrow{P_0(P_0 + w_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{P_0(P_0 + w_2)} \in H \end{aligned}$$

in quanto combinazione affine di $P_0, P_0 + w_1$ e $P_0 + w_2 \in W_H$. Quanto all'unicità, bisogna verificare che il ragionamento fatto non dipenda dall'elemento di H scelto, ossia che dati $P_1, P_2 \in H$ valga che $F_{P_1}(H) = F_{P_2}(H)$. Ma $F_{P_1}(H) = \{\overrightarrow{P_1Q} \mid Q \in H\}$, e se $\overrightarrow{P_1Q} \in F_{P_1}(H)$ si ha che

$$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2Q} = -\overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_2Q} \in F_{P_2}(H),$$

pertanto $F_{P_1}(H) \in F_{P_2}(H)$, ed analogamente si dimostra l'inclusione inversa. □

Definizione 4.8. Se $H \subseteq A$ è sottospazio affine, si pone $dim\ H = dim\ W_H$.

- H è detto retta se $dim\ H = 1$,
- H è detto piano se $dim\ H = 2$,
- H è detto iperpiano se $dim\ H = dim\ A - 1$.

Nota 4.9. Se $H, L \subseteq A$ tali che $H \cap L \neq \emptyset$ sono sottospazi affini, allora $W_{H \cap L} = W_H \cap W_L$.

Definizione 4.10. Due sottospazi affini si dicono:

- **incidenti** se $H \cap L \neq 0$,
- **paralleli** se $W_H \subseteq W_L \ \vee \ W_L \subseteq W_H$.

Nota 4.11. il parallelismo in generale non è una relazione transitiva, quindi neanche d'equivalenza.

Proposizione 4.12. *Dati* $P_0, \dots, P_k$,

$$comb_a(P_0, \dots, P_k) = P_0 + Span(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}).$$

Dimostrazione. Per definizione di combinazione affine vale $\subseteq$. Per il $\supseteq$ si ha

$$P_0 + t_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + t_k\overrightarrow{P_OP_k} = P_0 + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right)\overrightarrow{P_0P_0} + t_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + t_k\overrightarrow{P_OP_k},$$

che sta in $comb_a(P_0, \dots, P_k)$, $\forall t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$. □

Più in generale, chiamando $comb_a(X)$ l'insieme di combinazioni affini di tutti i possibili sottoinsiemi finiti di X si ottiene l'analogo della proposizione appena dimostrata.

Definizione 4.13. poniamo $H + L = comb_a(H \cup L)$.

Proposizione 4.14 (Giacitura di $H + L$)**.** *Se* $H, L \subseteq A$ *sono sottospazi affini, allora* $\forall P \in H$ *e* $\forall Q \in L$ *si ha che*

$$W_{H+L} = W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ}).$$

Dimostrazione. $H \subseteq H + L \Rightarrow W_H \subseteq W_{H+L}$, $W_L \subseteq W_{H+L}$; inoltre si ha che $comb_a(P, Q) \subseteq H + L \Rightarrow W_{\overrightarrow{PQ}} \subseteq W_{H+L}$; quindi vale l'inclusione

$$W_{H+L} \supseteq W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ}).$$

Sia ora $S = P + W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ})$. Si ha che $S \supseteq P + W_H = H$; e, poiché $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in S$, $L = Q + W_L \subseteq Q + W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ}) = S$. Ciò significa che $S \supseteq H + L$ per definizione di combinazione affine. □

Lemma 4.15. *$H, L \subseteq A$ sottospazi affini, allora vale che*

$$H \cap L = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \forall P \in H, Q \in L,\ \overrightarrow{PQ} \notin W_H + W_L.$$

Dimostrazione. Se per assurdo esistessero $P \in H$e$Q \in L$ tali che $\overrightarrow{PQ} = w_1 + w_2$ in modo che $w_1 \in W_H, w_2 \in W_L$, si avrebbe che $H \ni P + w_1 = P + (\overrightarrow{PQ} - w_2) = Q - w_2 \in L$.

Viceversa, se $\exists R \in H \cap L$, presi $P \in H, Q \in L$ si ha che $H = P + W_H, L = Q + W_L$ quindi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} \in W_H + W_L$. □

Proposizione 4.16 (Formula di Graßmann affine)**.** *Dati $H, L \subseteq A$ sottospazi affini si ha che*

I) *$H \cap L \neq \emptyset$, $dim\ (H + L) = dim\ H + dim\ L - dim\ (H \cap L)$;*

II) *$H \cap L = \emptyset$, $dim\ H + L = dim\ H + dim\ L - dim\ (W_H \cap W_L) + 1$.*

Dimostrazione. $dim\ (H + L) = dim\ W_{H+L}$, $W_{H+L} = W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ})$, quindi si ha che:

I) per il lemma otteniamo che $\overrightarrow{PQ} \in W_H + W_L$ cioè $W_{H+L} = W_L + W_H$ da cui la tesi discende dalla formula di Graßmann vettoriale;

II) in questo caso $\overrightarrow{PQ} \notin W_H + W_L$ allora $dim\ W_{H+L} = dim\ (W_L + W_H) + 1$ e la tesi si ha ancora per la formula di Graßmann vettoriale.

□

Definizione 4.17. H, L si dicono sghembi se $H \cap L = \emptyset$ e $W_H \cap W_L = \{0\}$.

4.5 Riferimenti affini

Definizione 4.18. Dati i punti $P_0, \dots, P_k \in A$, essi si dicono affinemente indipendenti se si ha $dim\ comb_a(P_0, \dots, P_k) = k$.

Definizione 4.19. Sia $n = dim\ A$. Si chiama riferimento affine ogni $n + 1$-upla di punti $\{P_0, \dots, P_n\}$ affinemente indipendenti.

Nota 4.20 (passaggio da un riferimento affine ad base di vettori)*.* Se $\{P_0, \dots, P_n\}$ è un riferimento affine, allora $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ è una base di V. Viceversa, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V e $P \in A$, allora $\{P, P + v_1, \dots, P + v_n\}$ è un riferimento affine. In particolare se $A = V = \mathbb{K}^n$, $\{0, e_1, \dots, e_n\}$ è detto riferimento affine standard.

Proposizione 4.21. *Se $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_k\}$ è un riferimento affine di A, allora*

$$\forall P \in A, \exists! a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K} :\ P = a_0P_0 + \dots + a_nP_n.$$

In particolare, la $n + 1$-upla $a_0, \dots, a_n$ sono detti coefficienti affini di P rispetto a R.

Dimostrazione. Per ipotesi, $A = comb_a(P_0, \dots, P_n)$ quindi esistono sicuramente dei coefficienti per ogni $P \in A$. Per mostrare che sono unici, basta spostarsi nello spazio vettoriale V con il procedimento mostrato nella nota precedente. □

5 Trasformazioni affini

Siano A uno spazio affine su V e B uno spazio affine su W, dove V e W sono spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$.

Definizione 5.1. Si dice trasformazione affine una funzione $f : A \to B$ che conserva le combinazioni affini.

Definizione 5.2. Una trasformazione affine biunivoca si dice isomorfismo affine.

Definizione 5.3. Un isomorfismo affine da uno spazio affine in sé si dice affinità. Si definisce inoltre $\mathit{Aff}(A) = \{f : A \to A \mid f \text{ è un'affinità}\}$.

Esempio. **I)** Le traslazioni sono affinità.

II) Se R è un riferimento affine, la funzione

$$\begin{aligned} [\ \ ]_R : A &\to \mathbb{K}^n \\ P &\mapsto [P]_R \end{aligned}$$

(dove $[P]_R$ sono le coordinate affini di P rispetto a R) è un isomorfismo affine; esso manda i punti di R in $0, e_1, \dots, e_n$.

Proposizione 5.4. *Se V è uno spazio vettoriale, $f : V \to V$ è un'affinità e $f(0) = 0$, allora f è lineare.*

Dimostrazione. $\forall v_1, v_2 \in V \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{K}$ vale che:

$$\begin{aligned} f(t_1v_1 + t_2v_2) &= f((1 - t_1 - t_2)\cdot 0 + t_1v_1 + t_2v_2 = \\ &= (1 - t_1 - t_2)f(0) + t_1 f(v_1) + t_2 f(v_2) = t_1 f(v_1) + t_2 f(v_2). \end{aligned}$$

□

Proposizione 5.5. *Se $f \in \mathit{Aff}(V)$ allora esistono e sono unici $v \in V$ e $g \in GL(V)$ tali che $f = \tau_v \circ g$.*

Dimostrazione. Sia $v = f(0)$. Allora $g = \tau_{-v} \circ f \in \mathit{Aff}(V)$ e $g(0) = 0$, quindi per la proposizione precedente $g \in GL(V)$. Da tale proposizione segue che

$$\mathit{Aff}(V)\{\tau_v \circ f \mid v \in V, f \in GL(V)\}.$$

Di conseguenza $\mathit{Aff}(V)$ è il gruppo generato da $T(V)$ e da $GL(V)$. In particolare

$$\mathit{Aff}(\mathbb{K}^n) = \{X \mapsto AX + B \mid A \in GL(n, \mathbb{K}), B \in \mathbb{K}^n\}.$$

□

Proposizione 5.6. *Dato uno spazio A affine su V e dati i riferimenti affini $L = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ e $M = (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ esiste un'unica affinità $f \in \mathit{Aff}(A)$ tale che $\forall i = 0, \dots, n \;\; f(P_i) = Q_i$.*

Dimostrazione. Consideriamo le trasformazioni invertibili $F_{P_0} : A \to V$ e $F_{Q_0} : A \to V$, allora si ha che $F_{P_0}(L) = (0, \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}) = (0, B)$ dove $B \in V$ è un vettore di dimensione n; similmente $F_{Q_0}(M) = (0, C)$.

Ora B e C, per motivi dimensionali, sono basi dello spazio V, pertanto esiste un unico endomorfismo lineare g che mappa B in C. Infine, sia $\tau : V \to V$ la traslazione del vettore $\overrightarrow{P_0Q_0}$. Mostriamo che la mappa $f : A \to A$ definita da

$$f = F_{P_0}^{-1} \circ \tau \circ g \circ F_{P_0}$$

soddisfa le condizioni richieste:

$$\begin{aligned} f(P_0) &= F_{P_0}^{-1} \circ \tau \circ g(0) = F_{P_0}^{-1} \circ \tau(0) = F_{P_0}^{-1}(\overrightarrow{P_0Q_0}) = Q_0 \\ f(P_i) &= F_{P_0}^{-1} \circ \tau \circ g(\overrightarrow{P_0P_i}) = F_{P_0}^{-1} \circ \tau(\overrightarrow{Q_0Q_i}) = F_{P_0}^{-1}(\overrightarrow{P_0Q_i}) = Q_i) \end{aligned}$$

$\forall i = 1, \dots, n$. Mostriamo che conserva anche le combinazioni affini, in particolare basta mostrare che conserva quelle di punti in L:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^{n} t_i P_i\right) &= F_{P_0}^{-1} \circ \tau \circ g\left(\sum_{i=0}^{n} t_i \overrightarrow{P_0P_i}\right) \\ &= F_{P_0}^{-1} \circ \tau \left(\sum_{i=0}^{n} t_i \overrightarrow{Q_0Q_i}\right) \\ &= F_{P_0}^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n} t_i \overrightarrow{P_0Q_i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} t_i Q_i. \end{aligned}$$

D'altra parte, si verifica facilmente che se esiste f siffatta, allora l'applicazione $j : V \to V$ definita

$$j = \tau^{-1} \circ F_{P_0} \circ f \circ F_{P_0}$$

manda $\overrightarrow{P_0P_i}$ in $\overrightarrow{Q_0Q_i}$ $\forall i = 1, \dots, n$ e che è lineare (la verifica è del tutto analoga ai passaggi appena descritti). Da ciò segue quindi che $g = j$ cioè l'unicità. □

5.1 Gruppo delle affinità

Definizione 5.7 (gruppo delle affinità)**.** consideriamo il seguente insieme

$$\mathit{Aff}(\mathbb{K}^n) = \{x \mapsto Mx + N : M \in GL(\mathbb{K}^n), N \in \mathbb{K}^n\}$$

e l'operazione di composizione $\circ$: la coppia $(\mathit{Aff}(\mathbb{K}^n), \circ))$ si dice gruppo delle affinità di $\mathbb{K}^n$.

Nota 5.8. la mappa $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n+1}$, $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ è un isomorfismo affine tra $\mathbb{K}^n$ e $H = \{x \in \mathbb{K}^{n+1} : x_{n+1} = 1\}$ il quale è sottospazio affine di $\mathbb{K}^{n+1}$.

Vogliamo ora far vedere che questo isomorfismo è più profondo di quanto non appaia a prima vista. In particolare cercheremo di studiare la relazione tra le trasformazioni affini in $\mathbb{K}^n$ e le trasformazioni lineari in $\mathbb{K}^{n+1}$ arrivando ad identificare $\mathit{Aff}(\mathbb{K}^n)$ con un sottogruppo di $GL(n + 1, \mathbb{K})$.

Definizione 5.9. $G(H) = \{g \in GL(n + 1, \mathbb{K}) : g(H) = H\}$.

Nota 5.10. È immediato verificare che $G(H)$ è un sottogruppo di $GL(n+1,\mathbb{K})$, dato che composizione ed inverse di mappe che conservano H a loro volta lo conservano.

Nota 5.11. Se scomponiamo $g \in G(H)$ in blocchi in questo modo:

$$g = \begin{pmatrix} M & N \\ {}^t p & q \end{pmatrix}$$

dove $M \in M(n,\mathbb{K})$; $N, p \in \mathbb{K}^n$, $q \in \mathbb{K}$, e se vogliamo che g fissi H allora si deve avere che la $n+1$ -esima componente di $g\left(\begin{smallmatrix} x \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ sia ancora 1, cioè che $\forall x \in \mathbb{K}^n$ ${}^t px + q = 1$, cioè che $p = 0, q = 1$.

Proposizione 5.12. *sia* $\Phi : \mathit{Aff}(\mathbb{K}^n) \to G(H)$ *definito da*

$$\Phi(x \mapsto Mx + N) = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Per prima cosa è immediato vedere che Φ è iniettivo dato che il nucleo contiene solo l'identità. La surgettività ci è fornita dalla precedente osservazione. Rimane da far vedere che questo operatore commuta con la composizione. Date due affinità $a : x \mapsto Mx + N$ e $a' : x \mapsto M'x + N'$, si ha che

$$a \circ a' : x \mapsto MM'x + MN' + N$$

quindi

$$\Phi(a) \circ \Phi(a') = \begin{pmatrix} MM' & MN' + N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi(a \circ a').$$

$\square$

6 Equivalenza affine

Definizione 6.1 (Equivalenza rispetto a G)**.** Se G è un gruppo di trasformazioni di $\mathbb{K}^n$ e F_1 e F_2 sono sottoinsiemi di $\mathbb{K}^n$ allora F_1 e F_2 si dicono equivalenti per G se $\exists g \in G$ tale che $g(F_1) = F_2$.

In particolare:

Definizione 6.2. $F_1, F_2 \in \mathbb{K}^n$ si dicono affinemente equivalenti se $\exists g \in \mathit{Aff}(\mathbb{K}^n)$ tale che $g(F_1) = F_2$. Analogamente $F_1, F_2 \in \mathbb{K}^n$ si dicono metricamente equivalenti se $\exists g \in \mathit{Isom}(\mathbb{K}^n)$ tale che $g(F_1) = F_2$.

Nota 6.3. In generale, data una classe di oggetti X e un gruppo G che agisce su X (per esempio mediante applicazione a sinistra: $gx = g(x)$), otteniamo naturalmente una relazione di equivalenza dentro X data da $x_1 \sim x_2$ quando esiste $g \in G$ tale che $x_1 = gx_2$. Le classi di equivalenza sono dette orbite dell'azione di G in X. Studiamo in questi appunti le classi così ottenute dall'azione di particolari applicazioni di uno spazio vettoriale sull'insieme di ipersuperfici affini.

Definizione 6.4 (Supporto di un polinomio)**.** Dato $g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ chiamiamo supporto di g in $\mathbb{K}^n$ l'insieme $V(g) = \{x \in \mathbb{K}^n : g(x) = 0\}$.

Definizione 6.5 (Polinomi proporzionali)**.** Dati $g_1, g_2 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ diciamo che sono proporzionali ($g_1 \sim g_2$) se $\exists \alpha \in \mathbb{K}^*$ tale che $g_1 = \alpha g_2$.

Nota 6.6. É facile verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza (discende banalmente dal fatto che $\mathbb{K}^*$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione).

Definizione 6.7 (Ipersuperficie affine)**.** Ogni classe di equivalenza di polinomi $[g]$ in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ rispetto a $\sim$ è detta ipersuperficie. Inoltre $g(x) = 0$ è detta equazione dell'ipersuperficie

Definizione 6.8 (Ipersuperfici affinemente equivalenti)**.** Date due ipersuperfici affini $[g], [h]$, si dicono affinemente equivalenti se esiste $\Psi \in \mathit{Aff}(\mathbb{K}^n)$ tale che $[g] = [f \circ \Psi]$. In tal caso indicheremo $g \overset{\mathit{aff}}{\sim} h$

Nota 6.9. Useremo anche la notazione $\Psi^{-1}[g]$ per una ipersuperficie equivalente a $[g]$ mediante l'affinità $\Psi \in \mathit{Aff}(\mathbb{K}^n)$.

Nota 6.10. Anche in questo caso è facile verificare che la relazione $\overset{\mathit{aff}}{\sim}$ è di equivalenza, dato che $\mathit{Aff}(\mathbb{K}^n)$ è un gruppo rispetto alla composizione.

Nota 6.11. Notiamo che $[g] \overset{\mathit{aff}}{\sim} [h] \Rightarrow \deg(g) = \deg(h)$, poiché il grado di $g(\Psi(x))$ non può essere più grande di quello di $g(x)$, e il viceversa vale per l'invertibilità di Ψ.

A questo punto passiamo allo studio di alcune ipersuperfici affini tra le più importanti. In particolare tratteremo il caso in cui le ipersuperfici sono di primo grado e quello in cui sono di grado due (dette quadriche) nei casi particolari in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposizione 6.12 (Grado 1)**.** *Tutti i polinomi di primo grado sono affinemente equivalenti; ossia esiste un'unica classe di equivalenza per le ipersuperfici di primo grado.*

Dimostrazione. Notiamo preliminarmente che possiamo denotare un polinomio di primo grado con $g(x) = {}^t\!Ax + b$ dove $A \in \mathbb{K}^n$, $A \neq 0$ e $b \in \mathbb{K}$. Consideriamo ora il polinomio $h(x) = {}^t\!A'x + b'$ e cerchiamo $\Psi \in \mathit{Aff}(\mathbb{K}^n)$ tale che $g \circ \Psi = h$, ovvero che

$${}^t\!A(Mx + N) + b = {}^t\!A'x + b'$$

dove $M \in GL(\mathbb{K}^n)$ e $N \in \mathbb{K}^n$. In particolare vogliamo che esistano tali M e N. Ma è ovvio che esiste M tale che ${}^t\!AM = {}^t\!A'$ e N tale che ${}^t\!AN + b = b'$ dato che A è invertibile. $\square$

7 Quadriche reali e complesse

Consideriamo ora il caso delle quadriche, ossia le ipersuperfici $[g]$ dove $g \in \mathbb{K}^n[x_1, \ldots x_n]$ (qui $\mathbb{K}$ è il campo dei reali o dei complessi) e $\deg(g) = 2$. Cominciamo con

Nota 7.1. Se g è una quadrica, allora esistono $A \in M(n, \mathbb{K})$ A simmetrica e non nulla, $B \in \mathbb{K}^n$, $c \in \mathbb{K}$ tali che

$$g(x) = {}^t\!xAx + 2\,{}^t\!Bx + c.$$

Nota 7.2. Con un'altra osservazione possiamo ridurre ancora la notazione. Consideriamo $Q \in M(n+1, \mathbb{K})$ associata al polinomio di secondo grado g:

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^t\!B & c \end{pmatrix}$$

e consideriamo anche $\tilde{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Allora $g(x) = {}^t\!\tilde{x}Q\tilde{x}$.

Definizione 7.3 (Cono)**.** Sia $X \subseteq V$ con V uno spazio vettoriale. Diciamo che X è un cono se $x \in X \Rightarrow \lambda x \in X$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$.

Lemma 7.4. *Se $g(x) = {}^t\!xQx$ allora $V(g)$ è un cono.*

Dimostrazione. Ciò è ovvio per l'omogeneità di $g(x)$. □

Data la nota 7.2, possiamo equivalentemente parlare dello studio delle quadriche di $\mathbb{K}^n$ come delle quadriche omogenee in $\mathbb{K}^{n+1}$. Consideriamo finalmente il cambiamento di forma delle quadriche via affinità.

Lemma 7.5. *Data una quadrica g a cui è associata la matrice Q e una affinità $\Psi(x) = Mx + N$ a cui è possibile associare la matrice $\tilde{M}_N = \left(\begin{smallmatrix} M & N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ allora $g \circ \Psi = {}^t\!\tilde{M}_N Q \tilde{M}_N$.*

Dimostrazione. Basta fare un semplice conto: $g(\Psi(x)) = {}^t\Psi(x)Q\Psi(x) = {}^t\!x\,{}^t\!\tilde{M}_N Q \tilde{M}_N x$ da cui la tesi. Tuttavia se svolgiamo il conto tenendo presente che $\tilde{M}_N$ e Q sono matrici $n+1 \times n+1$ otteniamo che

$${}^t\!\tilde{M}_N Q \tilde{M}_N = \begin{pmatrix} {}^t\!M & 0 \\ {}^t\!N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ {}^t\!B & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\!MAM & {}^t\!MAN + {}^t\!MB \\ {}^t({}^t\!MAN + {}^t\!MB) & {}^t\!NAN + 2\,{}^t\!BN + c \end{pmatrix}$$

□

Definizione 7.6 (Conica a centro)**.** Una conica $\mathfrak{C} = [g]$ è detta a centro se $\exists N \in \mathbb{K}^n$ tale che $g(x) = g(2N - x)$, ossia $\mathfrak{C}$ è invariante per la simmetria centrale rispetto a N. Una definizione analoga vale per le quadriche e per le ipersuperfici in generale.

Lemma 7.7. *Se 0 è centro della conica $\mathfrak{C} = [g]$ su un campo a caratteristica diversa da due e $g = {}^t\!xAx + 2Bx + C$, allora $B = 0$.*

Dimostrazione. Per definizione di centro della conica si deve avere $g(x) = g(-x)$ cioè ${}^t\!xAx + 2Bx + C = {}^t - xA(-x) + 2B(-x) + C$, $4Bx = 0$ che deve essere vero per ogni scelta di x, quindi si ha la tesi. □

Nota 7.8. N è centro di una quadrica se e solo se l'affinità $X \mapsto -X + 2N$ lascia invariata Q, ossia, per la formula delle trasformazioni affini di una quadrica, se e solo se $-{}^t\!IA(2N) - {}^t\!IB = B$, ${}^t(2N)A(2N) + 2\,{}^t\!B(2N) + c = c$ e ${}^t(-I)A(-I) = A$. La prima condizione equivale a dire che $AN = -B$, e questo implica banalmente che anche la seconda condizione è vera, mentre la terza è banalmente sempre verificata. Dunque N è centro della conica Q se e solo se $AN = -B$.

Lemma 7.9. *Se g è una quadrica di centro R e ψ è un'affinità, allora $\psi^{-1}(R)$ è centro di $\psi^{-1}(g)$.*

Dimostrazione. Rappresentando il tutto in coordinate in $\mathbb{K}^{n+1}$, si ha che g è rappresentata da $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{smallmatrix}\right)$ mentre ψ è rappresentata da $W = \left(\begin{smallmatrix} M & N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Allora per la formula della trasformazione per affinità di una quadrica la parte quadratica di $\psi^{-1}(g)$ è ${}^tMAM$, mentre quella lineare è ${}^tM(AN+B)$. Per la nota 7.8, la tesi equivale a dire che ${}^tMAM(M^{-1}(R-N)) = -{}^tM(AN+B)$, ossia, essendo M invertibile, che $A(R-N) = -AN-B$, ossia che $AR = -B$, il che è vero perché R è un centro di g. □

7.1 Classificazione affine delle coniche reali e complesse

Teorema 7.10 (Teorema di classificazione affine per le coniche reali e complesse)**.** *Per le coniche complesse il rango di A e quello di Q insieme formano un sistema completo di invarianti per equivalenza affine.*

Invece per le coniche reali il rango e l'indice di Witt di A e quelli di Q insieme formano un sistema completo di invarianti per equivalenza affine.

Dimostrazione. Il fatto che quelli descritti siano effettivamente degli invarianti è vero in quanto A e Q con le affinità si trasformano per congruenza, e quelli descritti sono invarianti di congruenza, ed inoltre sono invarianti anche per il prodotto di costanti non nulle. Dunque rimane da dimostrare che questi sistemi di invarianti sono totali; per fare ciò verrà mostrato che ogni conica a seconda dei suoi invarianti è affinemente equivalente ad una forma canonica.

Coniche non a centro Se la conica g non è a centro, ciò significa che il sistema $AY = -B$ non ha soluzioni. Pertanto A ha rango minore di due, e non potendo essere nulla (perché g è una conica) ha rango uno. Dunque per il teorema di Sylvester esiste M invertibile tale che ${}^tMAM = \left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dunque l'affinità rappresentata da $\left(\begin{smallmatrix} M & 0 \\ {}^t0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (più un eventuale cambio di segno consentito dalla definizione di conica) porta Q in

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ b_1 & b_2 & d \end{pmatrix}$$

Se si cerca $N = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right)$ tale che la traslazione $x \mapsto x+N$ trasformi Q_1 in una matrice del tipo

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

e si impone il sistema, si trova che esso ha come soluzione $\alpha = -b_1$ e $\beta = \frac{b_1^2 - d}{2b_2}$ (che esiste perché b_2 è diverso da 0, in quanto se non lo fosse il sistema $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) N = -\left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ avrebbe soluzione, e dunque Q_1 avrebbe centro, e per la nota 7.8 Q avrebbe centro, contro l'ipotesi). Con un'ulteriore affinità lineare ci si può ricondurre alla forma

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque ogni conica non a centro, reale o complessa, è affinemente equivalente alla quadrica rappresentata da Q_3, ossia alla quadrica $x^2 - y = 0$. Le coniche appartenenti a tale classe di equivalenza affine sono dette parabole.

Coniche non a centro Se la conica g è a centro, con un'opportuna traslazione la si può trasformare il una conica con centro nell'origine, la quale per il lemma 7.7 è della forma

$$Q_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Dato che le coniche sono definite a meno del prodotto per costanti non nulle, se $d \neq 0$ si può moltiplicare la conica per d^{-1}, e dunque ci si può ricondurre ai due casi in cui $d = 0$ ed in cui $d = 1$. Ma a questo punto dobbiamo dividere il nostro studio a seconda che ci si trovi nel campo reale od in quello complesso.

Coniche non a centro complesse Nel campo complesso per il teorema di Sylvester A, non essendo nulla e dunque non potento avere rango zero, è congruente a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ se ha rango uno e a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ se ha rango due. Pertanto con un'affinità lineare si può trasformare Q_1 in una delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque abbiamo trovato cinque forme canoniche per le coniche complesse: queste quattro e la parabola. Dato che nessuna di queste matrici ha la stessa coppia $(rg(A), rg(Q))$, si è dimostrato che ogni conica complessa è affinemente equivalente ad una tra le quattro forme canoniche appena trovate od alla forma canonica delle parabole, e che le loro classi di equivalenza affine sono disgiunte.

Coniche reali a centro In questo caso per il teorema di Sylvester A è congruente ad una tra $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dunque, notando che se $d = 0$ si può cambiare segno alla matrice, con un'affinità lineare ed un eventuale cambio di segno si può trasformare Q_1 in una delle seguenti coniche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque abbiamo trovato nove forme canoniche per le coniche reali (queste otto e la parabola) e dato che nessuna di esse ha la stessa quarterna $(rg(A), rg(Q), w(A), w(Q))$ esse sono rappresentanti di nove classi di equivalenza affine distinte di coniche reali. □

Le cinque classi di equivalenza affine delle coniche complesse sono riassunte dalla seguente tabella:

Nome	Equazione della forma canonica	Matrice della forma canonica	rg(A)	rg(Q)
Parabola	$x^2 - y = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	1	3
(non pervenuto)	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2	3
Coppia di rette incidenti	$x^2 + y^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	2
Coppia di rette parallele	$x^2 + 1 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	2
Retta doppia	$x^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	1

Invece le nove classi di equivalenza affine delle coniche reali sono le seguenti:

Nome	Equazione della forma canonica	Matrice della forma canonica	rg(A)	rg(Q)	w(A)	w(Q)
Parabola	$x^2 - y = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	1	3	1	1
Ellisse immaginaria	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2	3	0	0
Ellisse reale	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	2	3	0	1
Iperbole	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	2	3	1	1
Rette complesse incidenti	$x^2 + y^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	2	0	1
Rette incidenti	$x^2 - y^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	2	1	2
Rette complesse parallele	$x^2 + 1 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	2	1	1
Rette parallele	$x^2 - 1 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	1	2	1	2
Retta doppia	$x^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	1	1	2

7.2 Classificazione affine delle quadriche reali e complesse

Teorema 7.11 (Teorema di classificazione affine per le quadriche reali e complesse)**.** *Ogni quadrica complessa è affine ad una delle seguenti (dove $r = rg(A)$):*

- *Se è a centro a $x_1^2 + \ldots + x_r^2 + d = 0$, dove d è uguale a zero o ad uno, ossia alla quadrica rappresentata dalla matrice*

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0_{n-r} & 0 \\ \hline 0 & 0 & d \end{array}\right)$$

- *Se non è a centro a $x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_n = 0$ con $r < n$, ossia alla quadrica rappresentata dalla matrice*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} I_r & & 0 & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & & 0_{n-r} & & \vdots \\ & & & & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Inoltre la coppia $rg(A), rg(Q))$ è un invariante totale di coniugio.

Invece ogni quadrica reale è affine ad una delle seguenti:

- *Se è a centro a $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r + d = 0$, dove d è uguale a zero o ad uno, ossia alla quadrica rappresentata dalla matrice*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right)$$

- *Se non è a centro a $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 - x_n = 0$ con $r < n$ e $p \geq r - 2p$, ossia alla quadrica rappresentata dalla matrice*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} I_p & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & & 0 & & 0 \\ & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & 0_{n-r} & & \vdots \\ & & & & & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Dimostrazione. Il caso delle quadriche a centro è del tutto simile a quello delle analoghe coniche. Invece per le quadriche non a centro per il teorema di Sylvester esiste una trasformazione lineare che le trasforma quelle complesse in coniche del tipo

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & \\ & & Z \\ 0 & 0_{n-r} & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{{}^tZ} & c \end{array}\right), \text{ mentre trasforma quelle reali in } \left(\begin{array}{ccc|c} I_p & 0 & 0 & \\ 0 & -I_{r-p} & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{{}^tZ} & c \end{array}\right),$$

e con un cambio di segno ci si può ricondurre al caso $r - 2p \geq p$. Qui considereremo solo le quadriche reali, in quanto la dimostrazione nel caso complesso è analoga a quello reale con $r = p$.

Se $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ allora la traslazione $x \mapsto x - \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \\ -z_{p+1} \\ \vdots \\ -z_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ porta la quadrica in una del tipo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & W \\ \hline 0 & 0 & {}^tW & c \end{array}\right) \text{ con } W = \begin{pmatrix} a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0 \text{ (perché altrimenti la quadrica avrebbe centro).}$$

Ora cerchiamo un'affinità del tipo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & N \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

che porti la conica alla forma canonica. Affinché ciò accada dev'essere che

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\!M & 0 \\ \hline 0 & 0 & {}^t\!N & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & W \\ \hline 0 & 0 & {}^t\!W & c \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & N \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t\!MW \\ \hline 0 & 0 & {}^t\!WM & 2\,{}^t\!NW + c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} I_p & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & & & \vdots \\ & & & & & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Poiché $W \neq 0$, è banale che esista N tale che ${}^t\!NW = -c$, mentre se $(v_1, \dots, v_{n-r-1})$ è una base di $W^\perp$ allora la matrice

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_{n-r-1} & -\frac{W}{2\,{}^t\!WW} \end{array}\right) \text{ è tale che } {}^t\!MW = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dunque è stato dimostrato che ogni quadrica, reale o complessa, è affinemente equivalente ad una delle forme canoniche indicate. Il fatto che gli invarianti di cui si parla nella tesi siano effettivamente degli invarianti è stato già visto, ed è facile mostrare che ciascuna delle forme canoniche trovate abbia una stringa di invarianti diversa. □

Nota 7.12. A titolo di curiosità, si usa questa nomenclatura per la classificazione delle quadriche:

paraboloidi sono quadriche non a centro;

ellissoidi sono quadriche reali con indice di Witt nullo;

iperboloidi sono le altre quadriche reali.