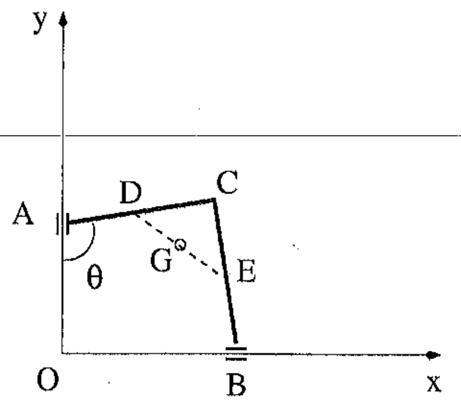
A. A. 2009-2010

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
24 Novembre 2009

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}$ con il vettore $\hat{\mathbf{y}}$ verticale ascendente. Si consideri un corpo rigido formato da due aste omogenee uguali di massa m e lunghezza ℓ saldate tra loro ad un estremo C e formanti un angolo retto. Detti A e B gli estremi liberi delle due aste, si vincola A a scorrere sull'asse $O\hat{\mathbf{y}}$ e B a scorrere sull'asse $O\hat{\mathbf{x}}$ (vedi figura). Gli assi sono lisci, quindi le reazioni vincolari sviluppate sono ortogonali ad essi; inoltre sul corpo agisce la forza di gravità. Si utilizzi l'angolo θ che l'asta AC forma con la direzione verticale per descrivere la configurazione del corpo.



a) Scrivere l'equazione del moto tramite le equazioni cardinali.

b) Verificare che si ha un equilibrio quando l'ascissa del baricentro G del corpo coincide con l'ascissa di B.

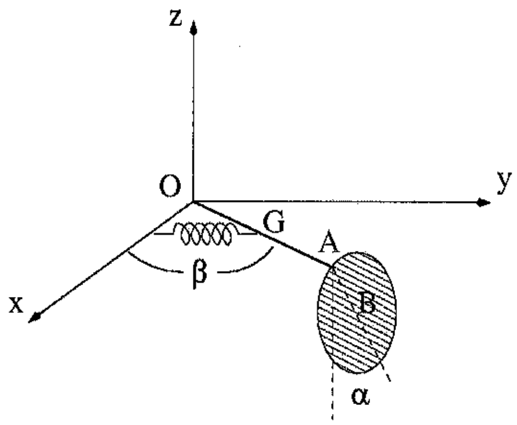
Secondo Esercizio

Fissato un sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{z}}$, con il vettore $\hat{\mathbf{z}}$ verticale ascendente, si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ e da un disco omogeneo di massa M e raggio R. L'asta è vincolata a muoversi nel piano $O\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}$ ed un suo estremo è incernierato in O. All'altro estremo A dell'asta è vincolato un punto del bordo del disco: attorno a questo punto il disco può ruotare mantenendosi sempre ortogonale alla direzione dell'asta. Sul sistema agisce la forza di gravità ed una forza elastica di una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che collega il baricentro G dell'asta all'asse $O\hat{\mathbf{x}}$. La molla si mantiene sempre parallela all'asse $O\hat{\mathbf{y}}$ e tutti i vincoli sono ideali.

Si utilizzino come coordinate lagrangiane l'angolo β che l'asta forma con l'asse $O\hat{\mathbf{x}}$ e l'angolo α che la direzione AB, dove B il baricentro del disco, forma con la direzione verticale (vedi figura).

a) Scrivere l'energia cinetica del sistema meccanico.

b) Trovare tutte le configurazioni di equilibrio e determinare la loro stabilità.



Svolgimento del primo Esercizio

Sia P il centro di istantanea rotazione del corpo: scrivo la seconda equazione cardinale rispetto a P:

$$\dot{\vec{\mathbf{N}}}_P = \vec{\mathbf{M}}_P - m\vec{\mathbf{v}}_P \times \vec{\mathbf{v}}_G \ .$$

$$\dot{\vec{\mathbf{N}}}_P = \frac{1}{2} mg\ell(3\cos\theta - \sin\theta)\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$-m\vec{\mathbf{v}}_P \times \vec{\mathbf{v}}_G = -m\ell^2 \sin(2\theta)\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\vec{\mathbf{M}}_P = \vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} + (D - C) \times m\vec{\mathbf{v}}_D + \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} + (E - C) \times m\vec{\mathbf{v}}_E \ .$$

$$\vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} = \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} = \frac{m\ell^2}{12}\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3 \ .$$

$$(D - C) \times m\vec{\mathbf{v}}_D = \frac{m\ell^2}{4}\dot{\theta}[1 - 2\sin(2\theta) + 4\cos^2\theta]\hat{\mathbf{e}}_3 \ ;$$

$$(E - C) \times m\vec{\mathbf{v}}_E = \frac{m\ell^2}{4}\dot{\theta}[1 + 2\sin(2\theta) + 4\cos^2\theta]\hat{\mathbf{e}}_3$$

quindi

$$\vec{\mathbf{M}}_P = m\ell^2\dot{\theta}\left(\frac{2}{3} + 2\cos^2\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_3 \ .$$

Semplificando e dividendo per $m\ell^2$ la seconda equazione cardinale proiettata sull'asse $O\hat{\mathbf{e}}_3$ diventa

$$\ddot{\theta}\left(\frac{2}{3} + 2\cos^2\theta\right) = \sin(2\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2\ell}(\sin\theta - 3\cos\theta) \ .$$

EQUILIBRI

$$\tan\theta = 3 \ .$$

Svolgimento del secondo Esercizio

$$
\begin{aligned}
(B-O) &= (A-O)+(B-A)= \\
&= 2\ell\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\\ 0\end{pmatrix}+R\begin{pmatrix}-\cos(\pi/2-\beta)\sin\alpha\\ \sin(\pi/2-\beta)\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}= \\
&= \begin{pmatrix}2\ell\cos\beta-R\sin\alpha\sin\beta\\ 2\ell\sin\beta+R\sin\alpha\cos\beta\\ -R\cos\alpha\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
T=\frac{3}{4}MR^2\dot\alpha^2+2\cos\alpha M\ell R\dot\alpha\dot\beta+\left[\frac{2}{3}m\ell^2+2M\ell^2+MR^2\left(\frac{1}{2}\sin^2\alpha+\frac{1}{8}\right)\right]\dot\beta^2
$$

$$
V(\alpha,\beta)=-MgR\cos\alpha+\frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\beta
$$

Equilibri

$$
V_\alpha=MgR\sin\alpha=0\,,\qquad V_\beta=k\ell^2\sin\beta\cos\beta=0\,,
$$

quindi

$$
(\alpha,\beta)=(0,0);\ (0,\frac{\pi}{2});\ (0,\pi);\ (0,\frac{3}{2}\pi);\ (\pi,0);\ (\pi,\frac{\pi}{2});\ (\pi,\pi);\ (\pi,\frac{3}{2}\pi)\,.
$$

Stabilità

$$
V_{\alpha\alpha}=MgR\cos\alpha\,,\quad V_{\alpha\beta}=0\,,\quad V_{\beta\beta}=k\ell^2\cos(2\beta)\,,
$$

quindi gli unici due punti stabili sono $(\alpha,\beta)=(0,0),(0,\pi)$.

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
8 Gennaio 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Esercizio 1: Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ e si consideri un punto materiale P, di massa m, vincolato alla superficie parametrica di equazioni

$$\begin{cases} x &= r(z)\cos\lambda \\ y &= r(z)\sin\lambda \qquad \text{dove } r(z) = \dfrac{1}{z^4 - z^2 + 1}, \\ z &= z \end{cases}$$

con $z \in \mathbb{R}$, $\lambda \in S^1$. Il punto materiale non è soggetto a forze attive, ma solo alla reazione vincolare. Utilizzando come coordinate (z, λ)

A) si scriva la lagrangiana del sistema;

B) si scriva la hamiltoniana del sistema e si trovino gli integrali primi del sistema hamiltoniano corrispondente;

C) si riduca il numero di gradi di libertà del problema utilizzando il fatto che una variabile è ciclica e si trovino gli equilibri del problema ridotto;

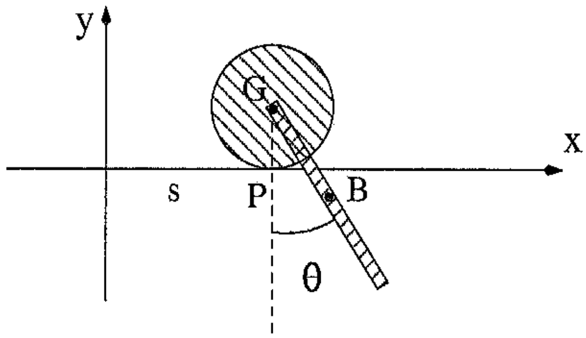
D) si scrivano le formule di quadratura che determinano le leggi orarie per le variabili z e λ. Si mostri che $\dot{\lambda}$ non si annulla mai salvo che per le soluzioni in cui λ è costante;

E) si descrivano qualitativamente le traiettorie delle soluzioni nello spazio delle configurazioni in funzione dei valori degli integrali primi, in particolare indicando quali sono limitate e quali corrispondono ad orbite periodiche;

F) si determinino i valori degli integrali primi per cui valgono le ipotesi del teorema di Liouville-Arnold. In particolare si trovino i valori degli integrali per cui si ottengono dei tori invarianti.

Secondo Esercizio

Si consideri il sistema piano costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ vincolata per un estremo al baricentro B del disco. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse x. Denotiamo inoltre con B il baricentro dell'asta (vedi figura).



Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto P tra il disco e l'asse x, e l'angolo θ tra l'asta e la direzione verticale,

A) scrivere le equazioni di Hamilton del sistema;

B) mostrare che le coordinate s, θ separano l'equazione di Hamilton-Jacobi in due equazioni differenziali ordinarie;

C) mostrare che le due equazioni differenziali ordinarie del punto B) possono sempre essere portate in forma normale, con una singolarità dove $\dot{\theta} = 0$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
18 Gennaio 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il moto di due corpi puntiformi P_1, P_2 di uguale massa $m = 1$, soggetti soltanto alla mutua interazione gravitazionale con costante di gravitazione $G = 1$.

Assumiamo che al tempo $t = 0$ la posizione e la velocità di P_2 relativamente a P_1 abbiano coordinate

$$\mathbf{r} = (-3, 4, 0) \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \eta, 0) \ .$$

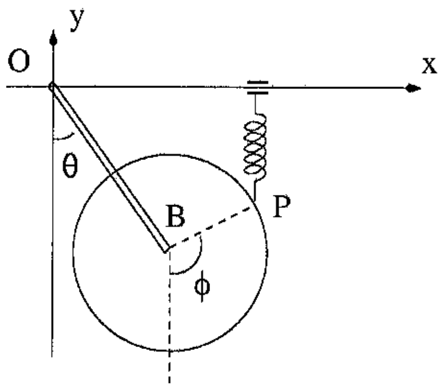
a) Per quali valori di η il moto relativo dei due corpi è limitato e periodico?

b) Per quali valori di η c'è una collisione?

c) Nel caso di collisione trovare qual'è l'estremo superiore della distanza tra i due corpi nell'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con asse y verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2R$ vincolata per un estremo al baricentro B del disco. L'altro estremo dell'asta è incernierato all'origine del riferimento. Inoltre un punto P del bordo del disco è collegato all'asse x da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, che si mantiene sempre parallela all'asse y. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.



Usando come coordinate lagrangiane l'angolo θ tra l'asta e la direzione verticale e l'angolo ϕ tra BP e la direzione verticale (vedi figura)

a) scrivere la lagrangiana del sistema;

b) trovare tutti gli equilibri al variare del parametro

$$J = \frac{g(m + 2M)}{Rk} \; ;$$

c) dimostrare che per $J > 2$ la configurazione $(\theta, \phi) = (0, \pi)$ è stabile e trovare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno a tale configurazione.

Terzo Esercizio

a) Dimostrare che la trasformazione di coordinate

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) \to (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$$

definita da

$$\begin{cases} q_1 &= \frac{1}{\alpha}\,(\sqrt{2\,P_1}\,\sin Q_1 + P_2) \\ q_2 &= \frac{1}{\alpha}\,(\sqrt{2\,P_1}\,\cos Q_1 + Q_2) \\ p_1 &= \frac{1}{2}\,\alpha\,(\sqrt{2\,P_1}\,\cos Q_1 - Q_2) \\ p_2 &= \frac{1}{2}\,\alpha\,(-\sqrt{2\,P_1}\,\sin Q_1 + P_2) \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, è canonica.

b) Data la hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_1 + \frac{\alpha^2}{2}\,q_2)^2 + (p_2 - \frac{\alpha^2}{2}\,q_1)^2\right]$$

integrare le equazioni canoniche associate utilizzando la trasformazione precedente.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
11 Febbraio 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $O\mathrm{xy}$, con asse $O\mathrm{y}$ verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano composto da un anello omogeneo di massa m e raggio R che può rotolare senza strisciare sull'asse x. All'interno dell'anello può scivolare un quadrato omogeneo, di massa M e lunghezza $\ell = \sqrt{2}R$ mantenendo i suoi quattro vertici $Q_j, j = 1 \ldots 4$, sempre a contatto con l'anello. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g.

Considerando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto B, che corrisponde al baricentro sia del quadrato che dell'anello, e l'angolo θ che BQ_1 forma con la direzione verticale:

1) scrivere la lagrangiana del sistema e mostrare che $\dot{s}, \dot{\theta}$ sono integrali primi;

2) mostrare che, se $\dot{\theta}(0) \neq 0$, il centro di istantanea rotazione del quadrato coincide con B solo se $\dot{s}(0) = 0$;

3) mostrare che, se $\dot{\theta}(0) \neq 0$, il centro di istantanea rotazione del quadrato coincide con il punto di contatto P tra l'anello e l'asse x solo se le velocità angolari dell'anello e del quadrato sono uguali.

Secondo Esercizio

Fissato un sistema di riferimento $O\mathrm{xyz}$, con asse $O\mathrm{z}$ verticale ascendente si consideri un punto materiale P di massa m vincolato ad una sfera di raggio $R > 0$ e di equazioni parametriche

$$x = R\cos\theta\cos\phi\,; \qquad y = R\cos\theta\sin\phi\,; \qquad z = R\sin\theta\,,$$

con $\phi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Supponendo il vincolo liscio si studi il moto nei casi seguenti:

a) in assenza di forze attive;

b) in presenza della forza di gravità, di accelerazione g;

c) in presenza della gravità e della forza elastica esercitata da una molla di costante $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che collega P con il punto $S \equiv (0, 0, -R)$.

In particolare, in ciascuno dei tre casi,

1) scrivere la lagrangiana ridotta nei tre casi utilizzando il metodo di riduzione di Routh;

2) mostrare che nei tre casi, per ogni valore non nullo del momento coniugato alla variabile ciclica, c'è un'unica configurazione di equilibrio nello spazio ridotto che è stabile e corrisponde ad un'orbita con traiettoria circolare sulla sfera;

3) descrivere le traiettorie sulla sfera nel caso in cui il momento coniugato alla variabile ciclica sia non nullo.

4) descrivere le traiettorie sulla sfera nel caso in cui il momento coniugato alla variabile ciclica sia nullo (*caveat:* la parametrizzazione della sfera suggerita è singolare ai poli).

X Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2\,q_1}\right) + p_2 + (q_1 + q_2)^2 \,.$$

Estendere la trasformazione di coordinate

$$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \ni (q_1, q_2) \to (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$$

definita da

$$Q_1 = q_1^2\,, \qquad Q_2 = q_1 + q_2$$

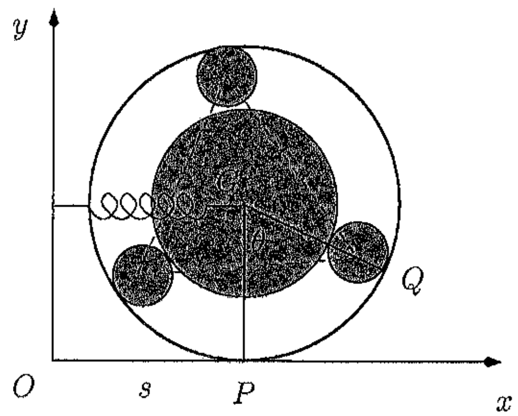
ad una trasformazione canonica $\Psi : (q_1, q_2, p_1, p_2) \to (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ in modo che la hamiltoniana trasformata $K = H \circ \Psi^{-1}$ non dipenda da Q_1. Scrivere quindi la soluzione generale del sistema hamiltoniano di partenza in dipendenza delle condizioni iniziali $(q_{1,0}, q_{2,0}, p_{1,0}, p_{2,0})$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
18 Giugno 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano composto da un anello $\mathcal{A}$ di massa M e raggio R che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox. All'interno dell'anello si muovono un disco $\mathcal{D}$ di massa m e raggio r e tre dischetti $\mathcal{D}_j$ di masse $\mu_j, j = 1,2,3$ e ugual raggio ρ. Si ha inoltre $\mu_1 = 2\mu, \mu_2 = \mu_3 = \mu$ ed $R = r + 2\rho$. I corpi $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{D}_j$ sono omogenei e rotolano l'uno sull'altro senza strisciare; i baricentri dei dischetti si trovano ai vertici di un triangolo equilatero. Il punto G, baricentro comune di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$, è collegato al punto $(x, y) = (0, R)$ da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, con accelerazione g.



Si considerino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto G, e l'angolo θ che GQ forma con la direzione verticale, dove Q è il punto di contatto tra l'anello $\mathcal{A}$ e il dischetto $\mathcal{D}_1$.

1) Calcolare le velocità angolari di $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{D}_j, j = 1,2,3$.

2) Scrivere la lagrangiana del sistema.

3) Calcolare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

Secondo Esercizio

Fissato un sistema di riferimento $Oxyz$ in $\mathbb{R}^3$, si consideri il moto di un punto P di massa m in un campo centrale con energia potenziale $V(x,y,z) = -\frac{k}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (problema di Keplero).

a) Si scriva la lagrangiana del problema in coordinate polari sferiche $(r,\phi,\theta) \in (0,+\infty) \times S^1 \times (-\pi/2, \pi/2)$.

b) Date la posizione e la velocità iniziali $\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0$ del punto P, assumiamo che $\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 \neq 0$. Mostrare che, ruotando opportunamente il piano equatoriale delle coordinate sferiche, si può assumere che la lagrangiana non dipenda da θ (latitudine). Usare il metodo di riduzione di Routh per integrare completamente il problema.

c) Assumiamo adesso che $\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 = 0$. Dimostrare che la traiettoria è rettilinea.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H(q_1,q_2,p_1,p_2) = K(K(q_1,p_1),p_2)\,, \qquad K(q,p) = \log(1+q^2+p^2)\ .$$

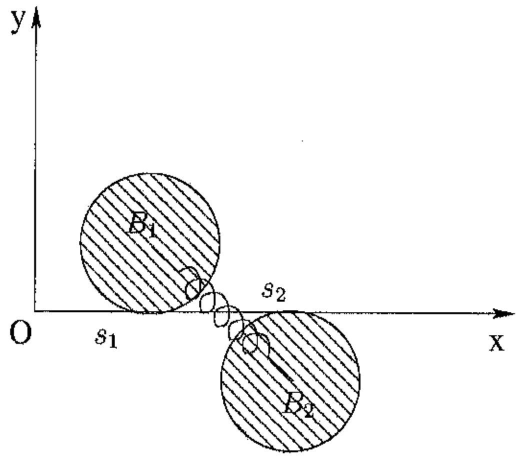
Trovare una funzione generatrice, soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
15 luglio 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano composto da due dischi omogenei uguali, di massa m e raggio R, che possono rotolare senza strisciare uno sopra e l'altro sotto l'asse Ox (vedi figura). I baricentri B_1, B_2 dei dischi sono collegati tra loro da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Si usino come coordinate per descrivere il moto le ascisse s_1, s_2 dei baricentri B_1, B_2.



1) Si scrivano le equazioni del moto usando le equazioni cardinali;

2) si trovi l'espressione, in funzione di s_1, s_2, delle componenti orizzontali Φ_1, Φ_2 delle reazioni vincolari nei punti di contatto tra i dischi e l'asse Ox;

3) si verifichi la risposta al punto 1) usando il formalismo lagrangiano.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Ox verticale discendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico composto da due punti materiali P, Q di uguale massa m vincolati a mantenere distanza costante ℓ dall'origine O. Sui punti agisce la forza di gravità, con accelerazione g, inoltre P e Q sono collegati da una molla di costante elastica $k = mg/\ell$ e lunghezza a riposo nulla.

Usando come coordinate lagrangiane gli angoli θ_1, θ_2 che OP ed OQ formano con Ox (supposti crescenti in senso antiorario)

a) si scriva la lagrangiana del problema;

b) si dimostri che la configurazione $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ è un equilibrio stabile;

c) si calcolino le frequenze proprie ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno a $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico costituito da un disco omogeneo di massa m e raggio R il cui baricentro è vincolato all'origine di un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. L'asse del disco è inoltre vincolato a formare un angolo θ costante con Oz. Usando come coordinate i rimanenti due angoli di Eulero ϕ, ψ scrivere la hamiltoniana del problema .

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
21 Settembre 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano composto da un anello omogeneo di massa M e raggio R e da un disco omogeneo di massa m e raggio r, con $r < R$. L'anello può ruotare attorno al suo centro, fisso nell'origine O del riferimento. Il disco può rotolare senza strisciare all'interno dell'anello, mantenendosi sempre a contatto con esso. Detti Q un punto dell'anello e P il punto di contatto tra disco e anello, si usino gli angoli θ, ϕ tra OQ, OP e la direzione verticale come coordinate per descrivere il moto. Assumendo che la velocità angolare del disco sia non nulla, trovare il centro istantaneo di rotazione del disco, come funzione di $(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi})$.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico composto da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ. Un'estremo A dell'asta è libero di muoversi lungo l'asse Ox. Sull'asta agisce la forza di gravità, con accelerazione g. Inoltre una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro B dell'asta all'asse Oy, mantenendosi sempre parallela all'asse Ox. Un'altra molla, uguale alla prima, collega l'altro estremo C dell'asta all'asse Ox, mantenendosi sempre parallela a Oy. Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s di A e l'angolo θ che AC forma con la direzione verticale:

a) si scriva la lagrangiana del problema;

b) si trovino tutte le configurazioni di equilibrio e se ne determini la stabilità in funzione dei paramentri m, g, k, ℓ;

c) nel caso $mg = 8k\ell$ si calcolino le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno a $(\theta, s) = (0, 0)$;

d) si determini il modo normale delle oscillazioni discusse al punto c) che non dipende dalla forza di gravità.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico costituito da tre punti materiali P_1, P_2, P_3 di uguale massa m. I punti sono vincolati a muoversi lungo una retta, su cui si è fissato un riferimento Ox, e hanno coordinate x_1, x_2, x_3 rispettivamente con $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Le uniche forze agenti sono due forze elastiche esercitate da due molle uguali, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, che collegano P_1 a P_2 e P_2 a P_3.

a) Trovare un'integrale primo diverso dall'energia;

b) scegliere delle coordinate tali che la lagrangiana del problema abbia una variabile ciclica;

c) ridurre il numero dei gradi di libertà del problema e dimostrare che, nel sistema ridotto, la configurazione $x_1 = x_2 = x_3$ è un equilibrio stabile.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
11 Febbraio 2011

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R sul bordo del quale è saldato un punto materiale P di massa m. Il baricentro B del disco può muoversi lungo l'asse Oz ed il disco può ruotare mantenendosi ortogonale al piano Oxy. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g, e una molla di costante elastica k collega B al punto $Q \equiv (0, 0, \ell)$, $\ell > 0$. Inoltre sul punto P agisce una forza costante $F\mathbf{e}_y$, $F > 0$, dove $\mathbf{e}_y$ è il versore dell'asse Oy.
Utilizzando la coordinata s di B sull'asse Oz, l'angolo ϕ che il piano del disco forma col piano Oxz e l'angolo θ che il segmento BP forma con Oz

1. scrivere la lagrangiana del sistema;
2. calcolare i punti di equilibrio del corrispondente sistema lagrangiano e discuterne la stabilità.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico composto da due punti materiali P_1, P_2 di ugual massa m vincolati a muoversi rispettivamente sulle circonferenze di centri $C_1 \equiv (-R, 0), C_2 \equiv (R, 0)$ e raggio R. Sui due punti agisce la forza di gravità, di accelerazione g, ed una forza elastica esercitata da una molla di costante k che li collega. Usando come coordinate lagrangiane gli angoli ϕ_1, ϕ_2 formati dai segmenti C_1P_1, C_2P_2 con la direzione verticale e supposti crescenti in senso antiorario,

1. scrivere la lagrangiana del sistema;
2. dimostrare che, se $mg = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)kR$, la configurazione $(\phi_1, \phi_2) = (\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ è un equilibrio stabile;
3. calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno a tale equilibrio.

Terzo Esercizio

Si completino le relazioni

$$Q_1 = \arctan q_1\,, \qquad Q_2 = e^{q_2}$$

ad una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \longrightarrow (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

e si utilizzi tale trasformazione per integrare il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left[p_1^2(1+q_1^2)^2 + p_2^2 e^{-2q_2} + \arctan^2 q_1 + e^{2q_2}\right]\,,$$

con condizioni iniziali

$$p_1(0) = \frac{1}{1+\tan^2(1)}, \quad p_2(0) = 1, \quad q_1(0) = \tan(1), \quad q_2(0) = 0\,.$$

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
1 Marzo 2011

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa m e raggio R che può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea incernierata nell'origine, che a sua volta può ruotare nel piano Oxy. Il piano del disco si mantiene sempre ortogonale a Oxy e tutti i vincoli sono ideali. Sul sistema agisce la forza di una molla che congiunge il baricentro B del disco al punto $(x, y, z) \equiv (0, 0, R)$; inoltre su B agisce una forza costante $F\mathbf{e}_x$, con $F \neq 0$ ed $\mathbf{e}_x$ il versore dell'asse Ox.
Utilizzando come coordinate l'ascissa s di B sulla guida e l'angolo ϕ che la guida forma con l'asse Ox

1. scrivere la lagrangiana del sistema;
2. calcolare i punti di equilibrio del corrispondente sistema lagrangiano e discuterne la stabilità.
3. trovare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il moto di un punto materiale di massa m sulla superficie di equazioni parametriche

$$x = a\cos\theta\cos\phi, \quad y = a\cos\theta\sin\phi, \quad z = b\sin\theta$$

con $a, b > 0$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Il punto è soggetto alla forza di gravità, di accelerazione g.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema;
2. usare il metodo di Routh per ridurre il numero di gradi di libertà;

3. dimostrare che, se $\dot{\phi}\cos\theta \neq 0$ all'istante iniziale, esiste un'unica circonferenza corrispondente alle traiettorie delle orbite con θ costante (*suggerimento*: usare il cambiamento di variabili $u = \sin\theta$).

Terzo Esercizio

Si completino le relazioni

$$Q_1 = \arctan q_1\,, \qquad Q_2 = e^{q_2}$$

ad una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \longrightarrow (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

e si utilizzi tale trasformazione per integrare il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left[p_1^2(1+q_1^2)^2 + p_2^2 e^{-2q_2} + \arctan^2 q_1 + e^{2q_2}\right]\,,$$

con condizioni iniziali

$$p_1(0) = \frac{1}{1+\tan^2(1)}, \quad p_2(0) = 1, \quad q_1(0) = \tan(1), \quad q_2(0) = 0\,.$$