A.A 2010-2011

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
12 Maggio 2011

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da una lamina quadrata $\mathcal{L}$, omogenea, di massa m e semidiagonale d. Il vertice P di $\mathcal{L}$ è incernierato all'asse Ox e può scivolare liberamente su di esso (Ox è un vincolo liscio). Detto B il baricentro della lamina, introduciamo le coordinate lagrangiane s, θ dove s è l'ascissa di P e θ l'angolo che PB forma con Ox.

i) Trovare le coordinate del centro istantaneo di rotazione;

ii) scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema;

iii) ritrovare il risultato del punto ii) tramite le equazioni cardinali della dinamica.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da due dischi omogenei $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$, di massa M e raggio R e da un terzo disco omogeneo $\mathcal{D}$ di massa m e raggio r.

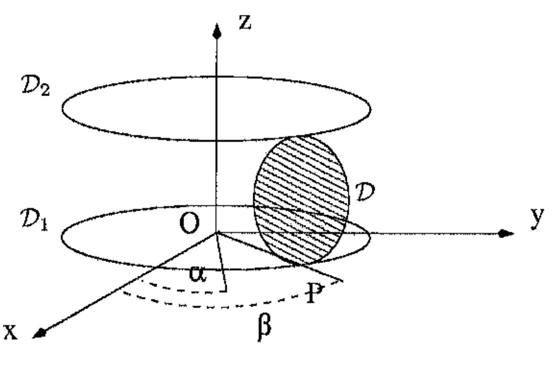


Figura 1:

Il disco $\mathcal{D}_1$ si muove nel piano Oxy e può ruotare attorno all'asse Oz, a cui è incernierato il suo baricentro. $\mathcal{D}_2$ si muove in un piano parallelo a quello di $\mathcal{D}_1$, e ha anch'esso il baricentro incernierato all'asse Oz. $\mathcal{D}$ può rotolare senza strisciare sui bordi di $\mathcal{D}_1$ e di $\mathcal{D}_2$ mantenendosi sempre ortogonale ad essi (vedi Figura 1).

Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo α tra l'asse Ox e un raggio fisso di $\mathcal{D}_1$ e l'angolo β tra OP ed Ox, con P il punto di contatto tra $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}$.

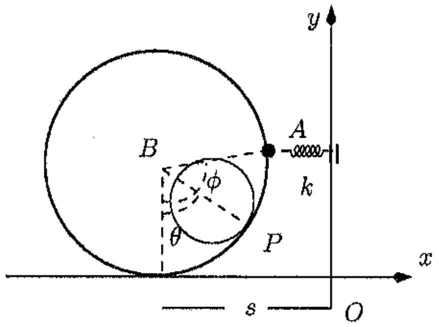
i) Trovare le velocità angolari di $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}$;

ii) scrivere l'energia cinetica del sistema.

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
10 Giugno 2011
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da un anello omogeneo di massa M e raggio R che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox. All'interno dell'anello può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa m e raggio $r < R$ ed un punto materiale A, di ugual massa m, può scorrere sull'anello. Al punto A è attaccato un estremo di una molla di costante elastica k; l'altro estremo della molla può scorrere sull'asse Oy. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Detto P il punto di contatto tra disco e anello, si usino come coordinate l'ascissa s del centro B dell'anello e gli angoli θ, ϕ che i segmenti BP, BA formano rispettivamente con la direzione verticale.



(i) Scrivere la lagrangiana del sistema.

(ii) Assumendo $mg = kR$ trovare gli equilibri e determinarne la stabilità.

Secondo Esercizio

Si consideri in $\mathbb{R}^{2n}$ il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{p}\cdot A^{-1}\mathbf{p} + \mathbf{q}\cdot B\mathbf{q}\right], \qquad \mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^n$$

con A, B matrici simmetriche di ordine n, costanti e definite positive.

Dimostrare che esiste una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to (\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \Psi(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

tale che le nuove variabili $\mathbf{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi.[1]

SARÀ IN 2° COMPITINO

[1] *Suggerimento:* usare la diagonalizzazione simultanea delle forme quadratiche.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Giugno 2011
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in Figura 1, formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ. L'estremo B dell'asta può scorrere sull'asse Ox e l'altro estremo A può scorrere su un circonferenza di raggio $r < \ell$ centrata nell'origine.

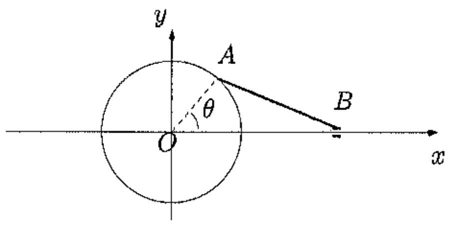


Figura 1

Usando come coordinata l'angolo θ che OA forma con l'asse Ox

(i) calcolare la velocità angolare dell'asta;

(ii) trovare le coordinate del centro istantaneo di rotazione.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente, e si consideri il sistema meccanico descritto in Figura 2, composto da un disco omogeneo di massa m e raggio r. Il disco rotola senza strisciare su una guida circolare di raggio R centrata nell'origine e giacente nel piano Oxy. Inoltre la retta tangente al disco nel punto di contatto P con la guida corrisponde alla tangente alla guida nello stesso punto.

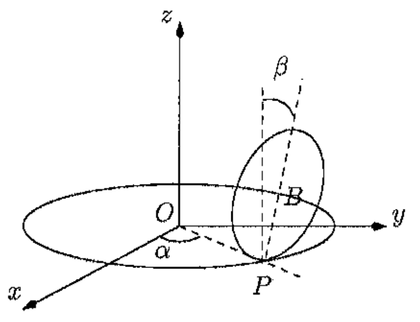


Figura 2

Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g. Detto B il baricentro del disco, si usino come coordinate l'angolo α tra OP ed Ox e l'angolo β tra PB ed Oz.

(i) Calcolare la velocità angolare del disco;[1]

(ii) scrivere la lagrangiana del sistema.

[1] *Suggerimento:* usare un sistema di riferimento in cui il moto del disco è piano.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{q}\cdot\Lambda\mathbf{q}\right) , \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\omega_1^2,\ldots,\omega_n^2) ,$$

con $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^n$ ed $\omega_h > 0$ $(h = 1\ldots n)$. Trovare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to (\mathbf{I},\boldsymbol{\phi}) = \Psi(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

tale che la funzione di Hamilton del nuovo sistema hamiltoniano sia

$$K(\mathbf{I}) = \mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} ,$$

con $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
19 Luglio 2011
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico formato da una lamina quadrata omogenea, di massa m e lato ℓ. Il lato AB della lamina è vincolato a scivolare su una guida rettilinea r che può ruotare attono all'origine O mantenendosi sempre nel piano Oxy. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g, e la forza di una molla di costante elastica k che congiunge il punto A della lamina all'origine O.

Usando come coordinate l'ascissa s del punto medio di AB su r, l'angolo ϕ che r forma con l'asse Ox e l'angolo ψ che il piano della lamina forma con il piano Oxy

i) si determini l'asse istantaneo di rotazione della lamina;

ii) si scriva la lagrangiana del sistema.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz con asse Oz verticale ascendente e si consideri un triangolo rettangolo ABC, con angolo retto in A e angolo α in B, il cui lato AB scivola sull'asse Ox con legge oraria $A(t) \equiv (s(t), 0)$, dove $s \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ è una funzione nota del tempo. Sul triangolo può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa m e raggio R. Sul disco agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa q del punto di contatto P tra disco e triangolo sul lato BC del triangolo

i) scrivere la lagrangiana L del disco relativa al sistema di riferimento Oxz e la lagrangiana $\mathcal{L}$ relativa a un sistema solidale al triangolo;

ii) trovare una funzione $F(q, t)$ tale che

$$L = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}F.$$

Terzo Esercizio

Nel piano Oxy si consideri il sistema meccanico formato da n punti materiali $P_1 \ldots P_n$ di ugual massa m. Il punto P_i è vincolato a muoversi sulla retta $x = i$, $i = 1 \ldots n$. Inoltre ogni P_i è collegato ai punti P_{i-1} e P_{i+1} da due molle di costante elastica k (con $P_0 \equiv (0,0), P_{n+1} \equiv (n+1, 0)$). Si usino come coordinate i valori $y_i, i = 1 \ldots n$ delle ordinate dei punti P_i.

i) Scrivere energia cinetica e potenziale del sistema;

ii) dimostrare che l'unica configurazione di equilibrio è $(y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 0)$;

iii) dimostrare che l'equilibrio trovato in ii) è stabile.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
8 Settembre 2011
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi in $\mathbb{R}^3$ un sistema di riferimento inerziale $\Sigma = Oxyz$. Un punto materiale P di massa m può muoversi su una superficie sferica liscia S di raggio R che ruota attorno all'asse Oz con velocità angolare costante $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$. Si consideri il riferimento $\Sigma' = Ox'y'z'$, solidale a S, con $Oz' \equiv Oz$. Trascurando la forza di gravità si studi il moto di P nel riferimento Σ' usando le coordinate $(\theta, \phi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times S^1$ definite da

$$x' = R\cos\theta\cos\phi\,, \quad y' = R\cos\theta\sin\phi\,, \quad z' = R\sin\theta\,.$$

In particolare:

i) si scriva l'espressione delle forze generalizzate Q_θ, Q_ϕ relative alle forze apparenti;

ii) si trovi l'energia potenziale generalizzata delle forze apparenti;[1]

iii) si scrivano le equazioni di Lagrange del moto del punto.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico formato da due dischi omogenei di raggi $R, 2R$ e masse m, M rispettivamente. I dischi sono saldati l'uno sull'altro, e hanno il baricentro in comune. Il disco piccolo può rotolare senza strisciare sull'asse Ox e due molle di costante elastica k, che si mantengono sempre orizzontali, collegano due punti diametralmente opposti A, C del bordo del disco grande alle rette $x = \pm 3R$. Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa s del baricentro B dei dischi ed assumendo che per $s = 0$ le ascisse dei punti A, C siano nulle

i) scrivere la lagrangiana del sistema;

ii) dimostrare che esiste un unico equilibrio in $(0, R\pi/2)$;

iii) studiare la stabilità dell'equilibrio trovato al punto ii).

X Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} - \frac{1}{|\mathbf{q}|} - \frac{1}{\sqrt{(q_1 - \cos t)^2 + (q_2 - \sin t)^2}}$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2), \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

[1] si ricordi che se il punto P si muove liberamente in $\mathbb{R}^3$ l'energia potenziale della forza di Coriolis è $m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}$, con $\mathbf{q} = (x', y', z')$, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.

i) Completare la relazione

$$\mathbf{Q} = R_t^{-1}\mathbf{q}, \qquad R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$$

e trovare una funzione generatrice $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$.

ii) Trovare una funzione di Hamilton che definisce il sistema hamiltoniano nelle variabili $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$.

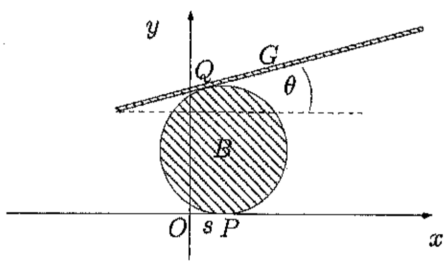
Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica

22 Novembre 2011

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da un disco omogeneo di massa M e raggio R che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox. Sul disco può a sua volta rotolare senza strisciare un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si usino come coordinate l'ascissa s del baricentro B del disco



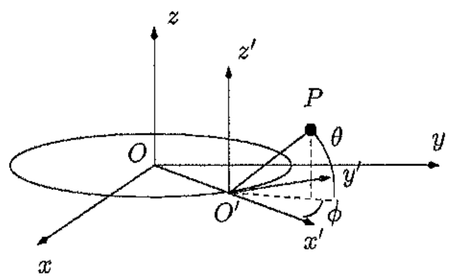
e l'angolo θ tra l'asta e la direzione orizzontale e si assuma che per $s = 0, \theta = 0$ il punto di contatto Q tra asta e disco coincida col baricentro G dell'asta.

(i) Determinare il centro istantaneo di rotazione dell'asta;

(ii) scrivere la seconda equazione cardinale per la sola asta rispetto al polo Q.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri un riferimento $\Sigma' = O'x'y'z'$ con O' che si muove di moto circolare uniforme nel piano Oxy con legge oraria $x_{O'} = R\cos(\omega t)$, $y_{O'} = R\sin(\omega t)$, $z_{O'} = 0$, $\omega \neq 0$ costante. L'asse $O'z'$ è sempre parallelo a Oz e l'asse $O'x'$ è orientato come $O' - O$ (vedi figura). Nel riferimento Σ' si consideri un pendolo sferico formato da un punto materiale P di massa m sospeso ad O' tramite un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. Sul pendolo agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che



$P - O'$ forma col piano $O'x'y'$ e l'angolo ϕ che la proiezione di $P - O'$ su $O'x'y'$ forma con l'asse $O'x'$.

(i) Scrivere l'energia potenziale generalizzata delle forze apparenti che agiscono su P nel riferimento Σ';

(ii) scrivere la lagrangiana del sistema.

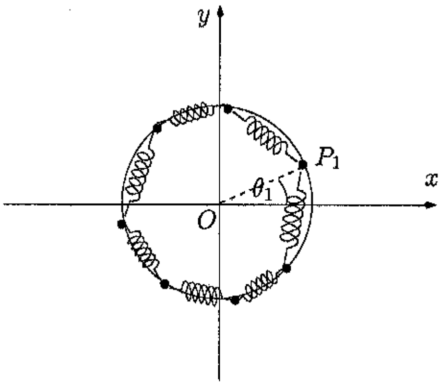
Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica

10 Gennaio 2012

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da N punti materiali $P_1 \ldots P_N$, di ugual massa m. I punti P_j possono scorrere su una circonferenza di raggio R centrata in O. Inoltre ogni punto $P_j, j = 1 \ldots N$, è collegato sia a P_{j-1} che a P_{j+1} da molle uguali di costante elastica k (abbiamo assunto $P_0 = P_N$, $P_{N+1} = P_1$). Supponiamo che la guida sia liscia e che i punti materiali possano attraversarsi a vicenda. Si usino come coordinate lagrangiane gli angoli $\theta_j, j = 1 \ldots N$ che i segmenti OP_j formano con l'asse Ox.



(i) Scrivere la lagrangiana L del sistema.

(ii) Determinare un'azione $\phi_\alpha(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$, del gruppo $\mathbb{R}$ sul toro $\mathbb{T}^N$ tale che L sia invariante per l'azione indotta su $T\mathbb{T}^N$, scrivere il generatore infinitesimo $\xi(\boldsymbol{\theta})$ dell'azione $\phi_\alpha(\boldsymbol{\theta})$ e trovare il corrispondente integrale primo del sistema lagrangiano associato ad L.

(iii) Trovare una trasformazione di coordinate $(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \boldsymbol{\theta} \overset{\Psi}{\mapsto} \boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_N)$ per cui la lagrangiana L, scritta nelle nuove coordinate, abbia una variabile ciclica.[1]

(iv) Scrivere la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh.

(v) Scrivere le equazioni degli equilibri nello spazio delle fasi ridotto.

(vi) Verificare che, se $N > 4$, le configurazioni con $\theta_{j+1} - \theta_j = \frac{2\pi}{N}, j = 1 \ldots N$ corrispondono ad un equilibrio stabile nello spazio delle fasi ridotto.

[1] Suggerimento: (1) scrivere il flusso integrale $\Phi_t(\boldsymbol{\theta})$ di $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \xi(\boldsymbol{\theta})$; (2) considerare la trasformazione $\Psi(\boldsymbol{\theta}) = \Phi_{\theta_1}(0, -\theta_2, \ldots, -\theta_N)$ e scrivere il campo vettoriale ξ nelle variabili $\boldsymbol{\Theta} = \Psi(\boldsymbol{\theta})$; (3) osservare che la variabile Θ_1 è ciclica nella lagrangiana espressa in funzione di $\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}$.

X ok **Secondo Esercizio**

Si determini la soluzione del sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\left[(1+q_h^2)^2 p_h^2 + (\arctan q_h)^2\right] , \qquad p,q \in \mathbb{R}^n$$

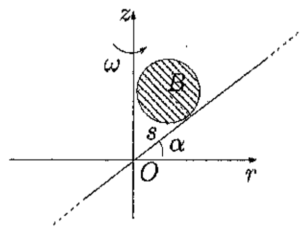
con condizioni iniziali

$$q_h(0) = 1, \quad p_h(0) = 0, \qquad h = 1 \dots n .$$

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Gennaio 2012
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura, mobile nel piano Orz, dove Or è un asse giacente nel piano Oxy. Il sistema è formato da un disco omogeneo di massa m e raggio R che può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea passante per O, che forma un angolo costante $\alpha \in (0, \pi/2)$ con l'asse Or. Il piano Orz viene fatto ruotare attorno all'asse Oz con velocità angolare costante $\vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.



Usando come coordinata l'ascissa s del baricentro B del disco sulla guida

(i) calcolare l'energia potenziale della forza centrifuga agente sul disco nel riferimento rotante;

(ii) scrivere la lagrangiana e l'equazione di Lagrange;

(iii) trovare le configurazioni di equilibrio relative, nel riferimento rotante, e discuterne la stabilità.

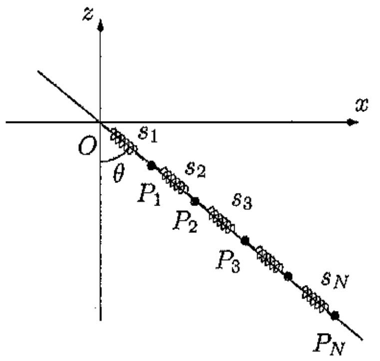
Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura, mobile nel piano Oxz, composto da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di ugual massa m. I punti P_j possono scorrere su una guida rettilinea incernierata nell'origine O. Inoltre delle molle di ugual costante elastica k collegano O a P_1, e P_j a P_{j+1}, $j = 1 \ldots N-1$. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Supponiamo che la guida sia liscia e che i punti materiali possano attraversarsi a vicenda. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che la guida forma con la direzione verticale, l'ascissa s_1 di P_1 sulla guida e le ascisse relative $s_j, j = 2 \ldots N$ dei P_j calcolate rispetto ai P_{j-1} sulla guida.

(i) Scrivere la lagrangiana del sistema.

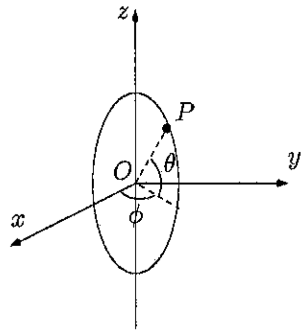
(ii) Calcolare tutte le configurazioni di equilibrio.

(iii) Determinare la stabilità degli equilibri.



Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un anello omogeneo di massa M e raggio R, con centro fissato in O e libero di ruotare attorno all'asse Oz. Sull'anello può scivolare un punto materiale P di massa m. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo ϕ tra l'anello e il piano Oxz, e l'angolo θ tra il segmento OP e la sua proiezione sul piano Oxy (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.



(i) Scrivere la lagrangiana e la hamiltoniana del sistema.

(ii) Ridurre il numero di gradi di libertà del sistema usando la variabile ciclica e descrivere la dinamica nello spazio ridotto assumendo che i valori iniziali $\theta_0, \dot{\phi}_0$ di $\theta, \dot{\phi}$ soddisfino la condizione

$$\left(1 + 2\frac{m}{M}\cos^2\theta_0\right)|\dot{\phi}_0| < \sqrt{\frac{g}{R}}\,. \tag{1}$$

(iii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti del sistema hamiltoniano che siano in involuzione. Determinare inoltre i valori singolari delle variabili canoniche $(p_\phi, p_\theta, \phi, \theta)$ per cui tali integrali non sono indipendenti assumendo che valga la condizione (1).

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
27 Novembre 2012
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri una sfera omogenea, di massa m e raggio r, vincolata a rotolare senza strisciare su un piano Π orizzontale. Chiamiamo B il baricentro della sfera e P il punto di contatto tra questa e il piano. Sulla sfera agisce la forza di gravità, di accelerazione g.

i) Usando le equazioni cardinali della dinamica determinare il moto del punto B e le componenti della reazione vincolare Φ in P in funzione delle condizioni iniziali $\mathbf{x}_B(0)$, $\dot{\mathbf{x}}_B(0)$, che rappresentano posizione e velocità di B al tempo 0;

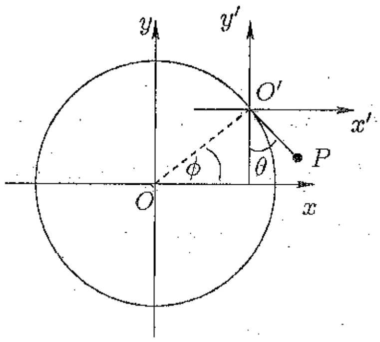
ii) si risponda alla domanda del punto precedente assumendo che la normale al piano di contatto Π formi un angolo $\alpha \in (0, \pi/2)$ con la direzione verticale, e supponendo che ci sia viscosità, modellata come una forza $\mathbf{F} = -k\dot{\mathbf{x}}_B$ applicata al baricentro B della sfera;

iii) nel caso del punto ii), calcolare il limite della velocità del baricentro per $t \to +\infty$.

Secondo Esercizio

Non c'entra

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxy$, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri una guida circolare di raggio R e centro O. Sulla guida si muove un punto O' con legge oraria $t \mapsto \phi(t)$ assegnata, in cui ϕ rappresenta l'angolo tra il vettore $O' - O$ e l'asse Ox. Al punto O' è sospeso un estremo di un'asta di massa trascurabile e lunghezza ℓ; all'altro estremo dell'asta è fissato un punto materiale P di massa m. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si consideri anche un'altro riferimento $\Sigma' = O'x'y'$ con la stessa orientazione di Σ.



Usando come coordinata l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale

i) scrivere le lagrangiane $L, \mathcal{L}$ del sistema nei due riferimenti Σ e Σ';

ii) dimostrare che L e $\mathcal{L}$ sono equivalenti.

$$\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\dot\phi\sin\phi \\ \dot\phi\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp\dot\phi\cos\phi \\ -\dot\phi\sin\phi \\ \dot\phi \end{pmatrix}$$

$$\dot\phi\cos^2\phi + \dot\phi\cos\phi + \dot\phi\sin^2\phi$$

$$\vec{\omega} = \frac{3}{2}\dot\phi\,\hat{e}_3 + \dot\phi(\cos\phi + \sin\phi)\hat{e}_3 - \dot\phi\cos\phi\,\hat{e}_1 - \dot\phi\sin\phi\,\hat{e}_2 \,]$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\dot\phi\sin\phi \\ \dot\phi\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot\phi + \dot\phi$$